6.9 Correction des exercices

Exercice 4 :

Calculez les développements limités suivants :

1. $\sin x + \cosh x$ *à l'ordre 3, au voisinage de 0*

   Pas très difficile : nous avons $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ et $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$ et donc :

$$\boxed{\sin x + \cosh x = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)}$$

2. $\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}$ *à l'ordre 3, au voisinage de 0*

   Moins facile, surtout pour le calcul du développement limité de $\sqrt[3]{1+x}$
   - Le développement limité de $\sqrt{1+x}$ est donné par :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x)$$

   - On commence par le développement limité de $(1+x)^m$. A l'ordre 3, nous avons :

$$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$$

   Donc, pour $m = \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)\\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\times\frac{x^2}{2} + \frac{10}{27}\times\frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)\\ &= 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} + x^3\varepsilon(x)\end{aligned}$$

   D'où $\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} + x^3\varepsilon(x)$, d'où :

$$\boxed{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} = 2 + \frac{5x}{6} - \frac{17x^2}{72} + \frac{161x^3}{1296} + x^3\varepsilon(x)}$$

   OUF ! !

3. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ *à l'ordre 3, au voisinage de 0*

   On ne se gène pas trop ! ! On utilise les formules d'addition, puis, on prend les développements limités de $\cos x$ et $\sin x$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4} = \sin x\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$$

   - $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$
   - $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$
   - D'où $\sin x + \cos x = 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$

   D'où :

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}x^2}{4} - \frac{\sqrt{2}x^3}{12} + x^3\varepsilon(x)}$$

mathinfovannes.free.fr©

4. $(1+x)^2 + \sinh x$ *à l'ordre 3, au voisinage de 0*

   Pas grandes difficultés

   - $(1+x)^2$ est un polynôme et est donc son propre développement limité . Donc,

   $$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 + x^3\varepsilon(x)$$

   - Nous avons déjà travaillé dans le cours, le développement limité de $\sinh x$:

   $$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

   Donc, bravement, le développement limité de $(1+x)^2 + \sinh x$ à l'ordre 3, au voisinage de 0 est :

   $$\boxed{(1+x)^2 + \sinh x = 1 + 3x + x^2 + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)}$$

Exercice 5 :

Il y a beaucoup de questions d'application directe ; souvent, je ne propose que la réponse

Calculez les développements limités suivants :

1. $f(x)\,g(x)$, *à l'ordre maximum possible, au voisinage de 0, sachant que :*
   — $f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 - x^6 + x^7\varepsilon_1(x)$
   — $g(x) = -3x + 5x^2 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$
   où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$

   Aucune difficulté : l'ordre maximum est 4 et la partie principale du développement limité de $f(x)\,g(x)$ est donné par le produit des parties principales de f et g

2. $x^2\cos x$ *à l'ordre 4, au voisinage de 0*

   Au voisinage de 0, $x^2\cos x = x^2 + \dfrac{x^4}{2} + x^4\varepsilon(x)$

3. $\sin x \sinh x$ *à l'ordre 4, au voisinage de 0*

   - Le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de $\sin x$ est :

   $$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$$

   - Le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de $\sinh x$ est :

   $$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$$

   - La partie principale du développement limité de $\sin x \sinh x$ est donnée par le produit des parties principales de $\sin x$ et $\sinh x$ où on ne retient que les puissances inférieures à 4 Elle est donc donnée par x^2

   Donc, le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de $\sin x \sinh x$ est :

   $$\sin x \sinh x = x^2 + x^4\varepsilon(x)$$

Exercice 6 :

Calculez les développements limités suivants :

1. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *à l'ordre maximum possible, au voisinage de 0, sachant que :*

▷ $f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$ ▷ $g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

L'ordre jusqu'auquel nous pouvons aller est bien entendu 4.
Il suffit donc de faire la division, suivant les puissances croissantes, des parties prinicipales $2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4$ et $1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4$ en ne retenant que les termes d'ordre inférieur à 4. Ainsi, au voisinage de 0 :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 2 + 7x + 10x^2 + x^3 - 41x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

2. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *à l'ordre maximum possible, au voisinage de 0, sachant que :*

▷ $f(x) = x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$ ▷ $g(x) = -3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

Au voisinage de 0, nous avons :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x)}{-3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)} = \frac{1 - x + 2x^2 - 2x^3 + x^3\varepsilon_1(x)}{-3 + 5x - 2x^2 + 3x^3 + x^3\varepsilon_2(x)}$$

L'ordre jusqu'auquel nous pouvons aller est bien entendu 3.
Il suffit donc de faire la division, suivant les puissances croissantes, de $1 - x + 2x^2 - 2x^3$ et $-3 + 5x - 2x^2 + 3x^3$ en ne retenant que les termes d'ordre inférieur à 3. Ainsi, au voisinage de 0 :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{9}x - \frac{34}{27}x^2 + \frac{155}{27}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

3. $\dfrac{\ln(1+x)}{\cos x}$ *à l'ordre 3, au voisinage de 0*

- A l'ordre 3, le développement limité de $\ln(1+x)$ est :$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$
- De même, à l'ordre 3, le développement limité de $\cos x$ est : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$

Il suffit donc de faire la division, suivant les puissances croissantes, de $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ et $-1 - \dfrac{x^2}{2}$ en ne retenant que les termes d'ordre inférieur à 3. Ainsi, au voisinage de 0 :

$$\frac{\ln(1+x)}{\cos x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

4. $\dfrac{1-\cos x}{(\sinh x)^2}$ *à l'ordre 2, au voisinage de 0*

- Le développement limité de $\cos x$, au voisinage de 0 et à l'ordre 4 est donné par : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$ et donc celui, à l'ordre 4 de $1 - \cos x$ est donné par : $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$
- A l'ordre 4, le développement limité de $\sinh x$ est : $\sinh x = x + \dfrac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$ et donc celui, à l'ordre 4 de $(\sinh x)^2$ est $(\sinh x)^2 = x^2 + \dfrac{x^4}{3} + x^4\varepsilon(x)$

Donc $\dfrac{1-\cos x}{(\sinh x)^2} = \dfrac{\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)}{x^2 + \dfrac{x^4}{3} + x^4\varepsilon(x)} = \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{24} + x^2\varepsilon(x)}{1 + \dfrac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)}$

mathinfovannes.free.fr ©

D'où, pour trouver le développement limité $\dfrac{1-\cos x}{(\sinh x)^2}$ à l'ordre 2, au voisinage de 0, il suffit donc de faire la division, suivant les puissances croissantes, de $\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{24}$ et $1+\dfrac{x^2}{3}$ en ne retenant que les termes d'ordre inférieur à 2. Ainsi, au voisinage de 0 :

$$\frac{1-\cos x}{(\sinh x)^2}=\frac{1}{2}-\frac{5x^2}{24}+x^2\varepsilon(x)$$

5. $\dfrac{1}{\cos x}$ *à l'ordre 4, au voisinage de 0*

   Facile !! le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{\cos x}$ est donné par :

$$\frac{1}{\cos x}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+x^4\varepsilon(x)$$

6. $\dfrac{x}{e^x-1}$ *à l'ordre 4, au voisinage de 0*

   Voici un énoncé devenu classique !!
   Il est facile de voir que le développement limité de e^x-1 à l'ordre 5 est donné par : $e^x-1=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)$ et donc :

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)}=\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+x^4\varepsilon(x)}$$

   Et donc le développement limité de $\dfrac{x}{e^x-1}$ à l'ordre 4, au voisinage de 0 est :

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+\frac{19x^4}{720}+x^4\varepsilon(x)$$

7. $\dfrac{x}{\sin x}$ *à l'ordre 4, au voisinage de 0*

   Question très ressemblante à la précédente !
   A l'ordre 5, auvoisinage de 0, $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)$ et donc :

$$\frac{x}{\sin x}=\frac{x}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+x^4\varepsilon(x)}$$

   Et donc le développement limité de $\dfrac{x}{\sin x}$ à l'ordre 4, au voisinage de 0 est :

$$\frac{x}{\sin x}=1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+x^4\varepsilon(x)$$

mathinfovannes.free.fr©