Chapitre 7

L'intégrale de Riemann

Nous avons travaillé, dans le cours de L_0, le calcul intégral. En fait, nous nous intéressions, uniquement, aux fonctions continues. L'objet de ce chapitre est d'étendre l'intégrale à une plus grande classe de fonctions que celle des seules fonctions continues. C'est un chapitre important, rigoureux, où l'intégrale de Riemann est complètement construite

7.1 Subdivisions d'un intervalle $[a;b]$

7.1.1 Définition

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On appelle subdivision du segment $[a;b]$ toute partie finie $S \subset [a;b]$ telle que $a \in S$ et $b \in S$

Remarque 1 :

1. Ce n'est pas la définition habituelle de subdivision, mais elle est très pratique. De façon générale, nous rangeons les éléments de S en une suite finie strictement croissante :
$$S: \quad a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$
2. Cette définition n'est donc en rien contradictoire avec celle donnée en 3.2.18
3. Le pas de la subdivision est donné par : $\rho(S) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |a_{i+1} - a_i|$

Exemple 1 :

1. Pour l'intervalle $[0;1]$, nous avons les subdivisions :
$$S_1 = \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\} \quad S_2 = \left\{0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1\right\} \quad S_3 = \left\{0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right\} \quad S_4 = \left\{0; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; 1\right\}$$
Nous avons $\rho(S_1) = \dfrac{1}{2}$, $\rho(S_2) = \dfrac{1}{4}$, $\rho(S_3) = \dfrac{1}{3}$ et $\rho(S_4) = \dfrac{2}{5}$
2. La subdivision uniforme du segment $[a;b]$ est celle de points $s_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ où $0 \leqslant k \leqslant n$. Elle est de pas $\dfrac{b-a}{n}$
3. Dans les subdivisions de l'intervalle $[0;1]$, S_1, S_2 et S_3 sont uniformes. S_4 ne l'est pas

7.1.2 Subdivision plus fine

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Une subdivision T du segment $[a;b]$ est plus fine qu'une subdivision S, si $S \subset T$

Exemple 2 :

Dans l'exemple précédent, S_2 est plus fine que S_1

Remarque 2 :

Pour être plus précis, une autre subdivision $T = \{t_0, t_1, \cdots, t_{m-1}, t_m\}$ est plus fine que la subdivision S si l'ensemble $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}, s_n\}$ est contenu dans l'ensemble $T = \{t_0, t_1, \cdots, t_{m-1}, t_m\}$ c'est à dire si chaque s_i est un t_j *(pour un indice j pouvant être $i \neq j$).*
Ceci revient à dire que tout intervalle $[t_j; t_{j+1}]$ est inclus dans un intervalle $[s_i; s_{i+1}]]$, c'est à dire que l'on a découpé l'intervalle $[a;b]$ en morceaux plus petits : c'est pour cette raison que l'on dit que T est plus fine que S. Illustrons ceci par un exemple :

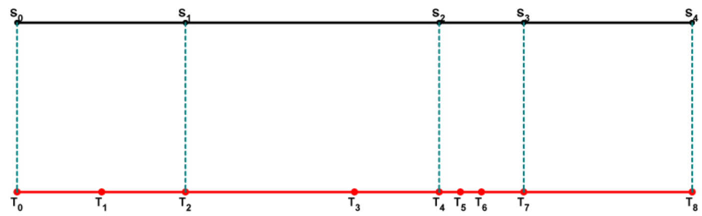

FIGURE 7.1 – Visualisation d'une subdivision T plus fine que la subdivision S

7.1.3 Définition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction numérique <u>bornée</u>.
Soit $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$ une subdivision de $[a;b]$. Alors, nous posons :

$\triangleright$ $\sigma(f,S) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \inf_{x \in [s_{k-1}; s_k[} f(x)$ $\qquad$ $\triangleright$ $\Sigma(f,S) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \sup_{x \in [s_{k-1}; s_k[} f(x)$

Remarque 3 :

1. Pour chaque k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, les expressions $\displaystyle\inf_{x \in [s_{k-1}; s_k[} f(x)$ et $\displaystyle\sup_{x \in [s_{k-1}; s_k[} f(x)$ existent puisque f est bornée sur $[a;b]$ et que $[s_{k-1}; s_k[\subset [a;b]$
2. D'autre part, $\sigma(f,S) \leqslant \Sigma(f,S)$
3. Les $\sigma(f,S)$ et $\Sigma(f,S)$ sont appelées <u>sommes de Darboux</u>

7.1.4 Proposition

Soient S et T 2 subdivisions d'un segment $[a;b]$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction numérique <u>bornée</u>
Si T est plus fine que S, alors :

$$\sigma(f,S) \leqslant \sigma(f,T) \text{ et } \Sigma(f,T) \leqslant \Sigma(f,S)$$

Démonstration

Soient donc $T = \{t_0, t_1, \cdots, t_{m-1}, t_m\}$ une subdivision de $[a;b]$, plus fine que la subdivision $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}, s_n\}$
Pour i tel que $0 \leqslant i \leqslant n-1$, existe alors j_0 tel que $0 \leqslant j_0 \leqslant m-1$ tel que :

$$[t_{j_0}; t_{j_0+1}[\cup [t_{j_0+1}; t_{j_0+2}[\cup \cdots \cup [t_{j_0+l}; t_{j_0+l+1}[= [s_i; s_{i+1}[$$

Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant l$, nous avons, puisque $[t_{j_0+k}; t_{j_0+k+1}[\subset [s_i; s_{i+1}[$:

$$\inf_{x \in [s_i; s_{i+1}[} f(x) \leqslant \inf_{x \in \left[t_{j_0+k}; t_{j_0+k+1}\right[} f(x) \text{ et } \sup_{x \in \left[t_{j_0+k}; t_{j_0+k+1}\right[} f(x) \leqslant \sup_{x \in [s_i; s_{i+1}[} f(x)$$

De telle sorte que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{l} (t_{j_0+k+1} - t_{j_0+k}) \inf_{x \in \left[t_{j_0+k}; t_{j_0+k+1}\right[} f(x) \geqslant & \sum_{k=0}^{l} (t_{j_0+k+1} - t_{j_0+k}) \inf_{x \in [s_i; s_{i+1}[} f(x) \\
&= \inf_{x \in [s_i; s_{i+1}[} f(x) \sum_{k=0}^{l} (t_{j_0+k+1} - t_{j_0+k}) \\
&= (s_{i+1} - s_i) \inf_{x \in [s_i; s_{i+1}[} f(x)
\end{aligned}$$

De cette inégalité, nous tirons $\sigma(f, S) \leqslant \sigma(f, T)$.
Par les mêmes considérations, nous aurions $\Sigma(f, T) \leqslant \Sigma(f, S)$

7.1.5 Proposition

Pour toute subdivision S et T de l'intervalle $[a;b]$, nous avons $\sigma(f, S) \leqslant \Sigma(f, T)$

Démonstration

La démonstration n'est pas très difficile.
Nous avons $S \subset S \cup T$ et $T \subset S \cup T$, et donc :

$$\sigma(f, S) \leqslant \sigma(f, S \cup T) \leqslant \Sigma(f, S \cup T) \leqslant \Sigma(f, T)$$

Remarque 4 :

1. Nous en déduisons que pour toute subdivision S de $[a;b]$, l'ensemble des nombres $\sigma(f, S)$ admet une borne supérieure.
2. De même, pour toute subdivision S de $[a;b]$, l'ensemble des nombres $\Sigma(f, S)$ admet une borne inférieure.
3. Si $\mathcal{S}$ est l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a;b]$, nous avons :

$$\sup_{S \in \mathcal{S}} (\sigma(f, S)) \leqslant \inf_{S \in \mathcal{S}} (\Sigma(f, S))$$

7.1.6 Définition de fonction intégrable

Une fonction $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si :

1. **f est bornée**
2. **Si $\mathcal{S}$ est l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a;b]$, nous avons :**

$$\sup_{S \in \mathcal{S}} (\sigma(f, S)) = \inf_{S \in \mathcal{S}} (\Sigma(f, S))$$

La valeur comme de ces deux bornes est appelée intégrale définie de la fonction f sur $[a;b]$ et est notée :

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$$

Remarque 5 :

1. Pour démontrer qu'une fonction bornée $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, il suffit de trouver, pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de trouver une subdivision $S \in \mathcal{S}$ de l'intervalle $[a;b]$ tel que

$$|\sigma(f,S) - \Sigma(f,S)| = \Sigma(f,S) - \sigma(f,S) \leqslant \varepsilon$$

2. Variable d'intégration : dans l'écriture $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ la « variable d'intégration » t est « muette », on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre *(sauf ici a, b ou f)*. Cette variable joue le même rôle que l'indice i de sommation dans $\sum_{i=5}^{n} u_i$ qui est lui aussi muet. Nous avons donc :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta = \int_a^b f(y)\ \mathrm{d}y = \int_a^b f(\omega)\ \mathrm{d}\omega$$

7.1.7 Proposition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a;b]$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision S de l'intervalle $[a;b]$ telle que :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - \varepsilon \leqslant \sigma(f,S) \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \Sigma(f,S) \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \varepsilon$$

Ou, ce qui est équivalent

$$\Sigma(f,S) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sigma(f,S) + \varepsilon$$

Démonstration

C'est une démonstration assez simple et classique basée sur les définitions de sup et d'inf.
Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a;b]$
Soit donc $\varepsilon > 0$

- ▷ Comme $\sup_{S\in\mathcal{S}} (\sigma(f,S)) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$, il existe $S \in \mathcal{S}$ tel que $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - \varepsilon \leqslant \sigma(f,S) \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$
- ▷ De même, comme $\inf_{S\in\mathcal{S}} (\Sigma(f,S)) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$, il existe $S \in \mathcal{S}$ tel que $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \Sigma(f,S) \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \varepsilon$

Et donc, nous avons en synthèse :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - \varepsilon \leqslant \sigma(f,S) \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \Sigma(f,S) \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \varepsilon$$

et donc

$$\Sigma(f,S) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sigma(f,S) + \varepsilon$$

7.1.8 Définition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et $A \subset [a;b]$
On appelle oscillation de f dans A un nombre que l'on note $\omega(f,A)$ défini par :

$$\omega(f,A) = \left|\sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x)\right| = \sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x)$$

7.1.9 Proposition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée
Pour que f soit intégrable au sens de Riemann, il faut et il suffit que pour toute subdivision $S \in \mathcal{S}$ de l'intervalle $[a;b]$, lorsque le pas de la subdivision $\rho(S)$ tend vers zéro, alors la quantité

$$\Sigma(f,S) - \sigma(f,S) = \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1})\,\omega(f,[s_{i-1};s_i[)$$

tend vers 0

Démonstration

1. **Supposons que $\Sigma(f,S) - \sigma(f,S)$ tende vers 0 lorsque $\rho(S)$ tend vers 0**
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision $S \in \mathcal{S}$ de l'intervalle $[a;b]$,
   $$\rho(S) < \eta \Longrightarrow \Sigma(f,S) - \sigma(f,S) \leqslant \varepsilon$$
   Ce qui montre donc que f est intégrable
2. **Supposons que f est intégrable**
   Soit $\varepsilon > 0$
   Il existe alors une subdivision $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_n\} \in \mathcal{S}$ de l'intervalle $[a;b]$ telle que :
   $$0 \leqslant \Sigma(f,S) - \sigma(f,S) = \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1})\,\omega(f,[s_{i-1};s_i[) \leqslant \varepsilon$$
   $\rightarrow$ Nous appelons $M = \omega(f,[a;b])$, $\theta_0 = \dfrac{\varepsilon}{nM}$, $\theta_1 = \inf\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}(s_{i+1} - s_i)$ et $\theta = \min\{\theta_0, \theta_1\}$
   Nous avons $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{nM}$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \inf\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}(s_{i+1} - s_i)$
   $\rightarrow$ Soit $T = \{t_0, t_1, \cdots, t_m\} \in \mathcal{S}$ une subdivision de $[a;b]$ telle que $\rho(T) \leqslant \theta$, ce qui veut dire que pour tout j, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, $(t_{j+1} - t_j) \leqslant \theta$
   $\rightarrow$ Alors, il y a au plus n intervalles $[t_{j-1};t_j[$ qui contiennent un point $s_i \in S$, et donc :
   $$\begin{aligned}
   0 \leqslant \Sigma(f,S) - \sigma(f,S) &= \sum_{j=1}^{m} (t_j - t_{j-1})\,\omega(f,[t_{j-1};t_j[) \\
   &= \sum_{j \text{ tels que } s_i \in [t_{j-1};t_j[} (t_j - t_{j-1}))\omega(f,[t_{j-1};t_j[) \\
   &\quad + \sum_{j \text{ tels que } s_i \notin [t_{j-1};t_j[} (t_j - t_{j-1})\,\omega(f,[t_{j-1};t_j[) \\
   &\leqslant \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1})\,\omega(f,[s_{i-1};s_i[) + n\rho(T)\,\omega(f,[a,b[) \\
   &\leqslant \Sigma(f,S) - \sigma(f,S) + n\theta\omega(f,[a,b[) \\
   &\leqslant 2\varepsilon
   \end{aligned}$$
   Ce que nous voulions