7.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

7.2.1 Rappel de la définition de fonction en escalier

Cette définition a déjà été donnée en 3.2.18

Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$.

On appelle fonction en escalier ou fonction étagée toute fonction $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une subdivision $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_n\}$ de l'intervalle $[a;b]$ telle que f soit constante sur les intervalles $[s_i; s_{i+1}[$ où nous avons, pour tout $x \in [s_i; s_{i+1}[$, $f(x) = C_i$

Remarque 6 :

Il est clair que la subdivision S n'est pas unique, en particulier pour toute subdivision T plus fine que S, f est constante sur chacun des intervalles ouverts ayant pour extrémités deux points consécutifs de T. Il y a donc une infinité de subdivisions S telles que f, fonction en escalier soit constante sur chacun des intervalles ouverts de S *(c'est à dire les intervalles ayant pour extrémités deux points consécutifs de S)*. Nous appellerons subdivision associée à f, fonction en escalier, toute subdivision S telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts de S. La moins fine des subdivisions associées à f, fonction en escalier, est constituée des points a et b et des points de discontinuité de f dans $]a, b[$.

7.2.2 Proposition

Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$. Toute fonction en escalier f sur $[a;b]$ de subdivision adaptée subdivision $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_n\}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$ et

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i)\, C_i$$

Démonstration

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier sur $[a;b]$ et $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_n\}$ une subdivision adaptée à f, c'est à dire que pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant n-1$ et tout $x \in [s_i; s_{i+1}[$, $f(x) = c_i$. Alors :

- ▷ $\sigma(f, S) = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \inf_{x \in [s_{k-1}; s_k[} f(x) = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1})\, c_k$
- ▷ $\Sigma(f, S) = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \sup_{x \in [s_{k-1}; s_k[} f(x) = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1})\, c_k$
- ▷ Ainsi, $\sigma(f, S) = \Sigma(f, S)$, c'est à dire $\Sigma(f, S) - \sigma(f, S) = 0$

La fonction f est donc intégrable et $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i)\, C_i$

7.2.3 Proposition

Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors, toute fonction monotone sur $[a;b]$ est intégrable sur $[a;b]$

Démonstration

1. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction monotone sur $[a;b]$; ceci veut dire qu'elle est ou croissante, ou décroissante. Supposons f croissante.
   Alors, pour tout $x \in [a;b]$, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$

2. Soit $\varepsilon > 0$ et $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_n\}$ une subdivision de $[a;b]$ de pas $\rho(S) < \varepsilon$. Alors :

$$\begin{aligned}\Sigma(f,S) - \sigma(f,S) &= \sum_{i=0}^{n-1}(s_{i+1}-s_i)\,\omega(f,[s_i:s_{i+1}[)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(s_{i+1}-s_i)\,(f(s_{i+1})-f(s_i))\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon\,(f(s_{i+1})-f(s_i)) = \varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}(f(s_{i+1})-f(s_i)) = \varepsilon\,(f(b)-f(a))\end{aligned}$$

D'après la proposition 7.1.9, la fonction f est intégrable

7.2.4 Définition de fonction caractéristique

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On appelle fonction caractéristique de A, la fonction 1_A définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1_A : \mathbb{R} & \longrightarrow & \{0;1\} \\ x & \longmapsto & 1_A(x) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Remarque 7 :

1. La fonction caractéristique de A est aussi appelée **fonction indicatrice** de A
2. Plutôt que 1_A, la fonction indicatrice est aussi notée χ_A
3. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier sur $[a;b]$ telle que $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_n\}$ soit une subdivision de l'intervalle $[a;b]$ adaptée à f, c'est à dire telle que f soit constante sur les intervalles $[s_i; s_{i+1}[$: nous avons, pour tout $x \in [s_i; s_{i+1}[$, $f(x) = C_i$.
   Alors nous pouvons écrire f :
$$f = \sum_{i=0}^{n-1} c_i 1_{[s_i;s_{i+1}[} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \chi_{[s_i;s_{i+1}[}$$
4. Cette notion de fonction indicatrice ou de fonction caractéristique a déjà été étudiée dans la chapitre « Logique » de L_0

Exercice 1 :

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Démontrer que :
1. $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}$
2. $1_{A\cap B} = 1_A \times 1_B$
3. $1_{A^c} = 1 - 1_A$ où A^c désigne le complémentaire ensembliste de A

Exercice très facile !

7.2.5 Ensemble mesurable au sens de Riemann

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est mesurable au sens de Riemann si sa fonction caractérisique 1_A est intégrable au sens de Riemann

7.2.6 Proposition

1. **Soit $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ un sous ensemble fini d'un intervalle $[a;b] \subset \mathbb{R}$; alors A est Riemann-mesurable**
2. **Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$; alors $A = \mathbb{Q} \cap [a;b]$ qui est l'ensemble des rationnels contenus dans l'intervalle $[a;b]$ n'est pas Riemann-mesurable**

Démonstration

1. **Soit $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ un sous ensemble fini de $[a;b]$**
   Pour toute subdivision $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_p\}$ de $[a;b]$, il y a au plus n intervalles $[s_i; s_{i+1}[$ contenant les a_i, et pour ces intervalles, nous pouvons écrire $\omega(1_A, [s_i : s_{i+1}[) = 1$, et sur les intervalles ne contenant pas les a_i, nous avons $\omega(1_A, [s_i : s_{i+1}[) = 0$; donc :

$$\begin{aligned}\Sigma(1_A, S) - \sigma(1_A, S) &= \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i)\,\omega(f, [s_i : s_{i+1}[) \\ &= \sum_{i \text{ tels que } a_i \in [s_i; s_{i+1}[} (s_{i+1} - s_i) \\ &\leqslant n\rho(S)\end{aligned}$$

   Soit $\varepsilon > 0$. En choisissant une subdivision S telle que $\rho(S) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{n}$, nous avons

$$\Sigma(1_A, S) - \sigma(1_A, S) \leqslant \varepsilon$$

   Donc, si A est fini, 1_A est Riemann-intégrable.

   Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$, nous avons $\displaystyle\int_a^b 1_A(x)\,\mathrm{d}x = 0$

2. **Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et considérons $A = \mathbb{Q} \cap [a;b]$**
   Soit $S = \{s_0, s_1, , s_2, \cdots, s_n\}$ une subdivision de l'intervalle $[a;b]$. Quelque soit le pas $\rho(S)$ de la subdivision, pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant n-1$, il existe au moins un rationnel $r_i \in [s_i : s_{i+1}[$ et un irrationnel $x_i \in [s_i : s_{i+1}[$, de telle sorte que, pour toute subdivision $S = \{s_0, s_1, , s_2, \cdots, s_n\}$ de l'intervalle $[a;b]$, et pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $\omega(f, [s_i : s_{i+1}[) = 1$. Donc, pour toute subdivision de $[a;b]$:

$$\Sigma(1_A, S) - \sigma(1_A, S) = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i)\,\omega(f, [s_i : s_{i+1}[) = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i) = b - a$$

   Donc, quelle soit la subdivision, nous ne pourrons pas rendre $\Sigma(1_A, S) - \sigma(1_A, S)$ aussi petite que nous le souhaitons
   Ainsi, si $A = \mathbb{Q} \cap [a;b]$, alors 1_A n'est pas intégrable, et donc A n'est pas Riemann-mesurable.

Remarque 8 :

Dans le cas où $A = \mathbb{Q} \cap [a;b]$, 1_A est souvent notée $1_{\mathbb{Q}}$

7.2.7 Théorème

1. **$\mathcal{I}([a;b])$ est l'ensemble des fonctions intégrables sur l'intervalle $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.**
   Alors :
   $\mathcal{I}([a;b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a;b]}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$

2. **L'application $I : \mathcal{I}([a;b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à tout $f \in \mathcal{I}([a;b])$ associe $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire**

3. **Soient $f \in \mathcal{I}([a;b])$ et $g \in \mathcal{I}([a;b])$ 2 fonctions telles que, pour tout $t \in [a;b]$, nous ayions $f(t) \leqslant g(t)$, alors $I(f) \leqslant I(g)$ c'est à dire $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$**

4. **Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable. Par convention, nous posons $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$**

Démonstration

1. Pour montrer que $\mathcal{I}([a;b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a;b]}$, il faut montrer que si $f \in \mathcal{I}([a;b])$ et $g \in \mathcal{I}([a;b])$ alors $f+g \in \mathcal{I}([a;b])$ et que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in \mathcal{I}([a;b])$

   (a) **Soient $f \in \mathcal{I}([a;b])$ et $g \in \mathcal{I}([a;b])$; montrons que $f+g \in \mathcal{I}([a;b])$**

   ▷ Tout d'abord, il y a un résultat que nous allons utiliser tout au long de cette démonstration et que nous allons rappeler.
   Soit $A \subset [a;b]$, alors, pour tout $x \in A$, nous avons : $\inf\limits_{x\in A} f(x) \leqslant f(x)$ et $\inf\limits_{x\in A} g(x) \leqslant g(x)$ et donc $\inf\limits_{x\in A} f(x) + \inf\limits_{x\in A} g(x) \leqslant f(x)+g(x)$
   D'où, nous avons $\inf\limits_{x\in A} f(x) + \inf\limits_{x\in A} g(x) \leqslant \inf\limits_{x\in A} (f(x)+g(x))$

   ▷ De même, pour tout $x \in A$, nous avons : $\sup\limits_{x\in A} f(x) \geqslant f(x)$ et $\sup\limits_{x\in A} g(x) \geqslant g(x)$ et donc $\sup\limits_{x\in A} f(x) + \sup\limits_{x\in A} g(x) \geqslant f(x)+g(x)$
   D'où, nous avons, en particulier $\sup\limits_{x\in A} f(x) + \sup\limits_{x\in A} g(x) \geqslant \sup\limits_{x\in A} (f(x)+g(x))$
   En synthèse, nous avons :

$$\inf_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x) \leqslant \inf_{x\in A} (f(x)+g(x)) \leqslant \sup_{x\in A} (f(x)+g(x)) \leqslant \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x)$$

   ▷ Soit $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_n\}$ une subdivision de l'intervalle $[a;b]$ adapté à f et g. Alors :

$$\begin{aligned}\sigma(f,S)+\sigma(g,S) &= \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1}-s_i)\left(\inf_{x\in[s_i;s_{i+1}[} f(x) + \inf_{x\in[s_i;s_{i+1}[} g(x)\right) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1}-s_i)\left(\inf_{x\in[s_i;s_{i+1}[} (f(x)+g(x))\right) = \sigma(f+g,S)\end{aligned}$$

   En synthèse, nous avons donc $\sigma(f,S)+\sigma(g,S) \leqslant \sigma(f+g,S)$

   ▷ De la même manière, et en utilisant les mêmes arguments, nous avons

$$\Sigma(f+g,S) \leqslant \Sigma(f,S)+\Sigma(g,S)$$

   D'où les inégalités multiples que nous avons en synthèse :

$$\sigma(f,S)+\sigma(g,S) \leqslant \sigma(f+g,S) \leqslant \Sigma(f+g,S) \leqslant \Sigma(f,S)+\Sigma(g,S)$$

   ▷ Pour montrer que $f+g$ est intégrable sur $[a;b]$, il faut montrer que

$$\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f+g,S) = \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f+g,S)$$

   où $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a;b]$
   f et g étant intégrable, nous avons par la définition de fonction intégrable 7.1.6 :

$$\sup_{S\in\mathcal{S}} (\sigma(f,S)) = \inf_{S\in\mathcal{S}} (\Sigma(f,S)) \text{ et } \sup_{S\in\mathcal{S}} (\sigma(g,S)) = \inf_{S\in\mathcal{S}} (\Sigma(g,S))$$

   Appelons $\lambda = \sup\limits_{S\in\mathcal{S}} (\sigma(f,S)) = \inf\limits_{S\in\mathcal{S}} (\Sigma(f,S))$ et $\mu = \sup\limits_{S\in\mathcal{S}} (\sigma(g,S)) = \inf\limits_{S\in\mathcal{S}} (\Sigma(g,S))$
   En utilisant les inégalité précédentes, nous avons :

$$\sup_{S\in\mathcal{S}} (\sigma(f,S)) + \sup_{S\in\mathcal{S}} (\sigma(g,S)) \leqslant \sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f+g,S) \leqslant \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f+g,S) \leqslant \inf_{S\in\mathcal{S}} (\Sigma(f,S)) + \inf_{S\in\mathcal{S}} (\Sigma(g,S))$$

   C'est à dire :

$$\lambda+\mu \leqslant \sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f+g,S) \leqslant \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f+g,S) \leqslant \lambda+\mu$$

   C'est à dire que nous avons $\sup\limits_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f+g,S) = \inf\limits_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f+g,S) = \lambda+\mu$

   ▷ Nous venons de démontrer 2 choses :

- ◇ La première, c'est que si $f \in \mathcal{I}([a;b])$ et $g \in \mathcal{I}([a;b])$ alors $f+g \in \mathcal{I}([a;b])$
- ◇ La seconde, c'est que $I(f+g) = I(f) + I(g)$, c'est à dire

$$\int_a^b (f+g)(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t) + g(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$$

(b) **Soient $f \in \mathcal{I}([a;b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; montrons que $\lambda f \in \mathcal{I}([a;b])$**

Soient $f \in \mathcal{I}([a;b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; nous devons donc montrer que $\sup\limits_{S\in\mathcal{S}} \sigma(\lambda f, S) \leqslant \inf\limits_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(\lambda f, S)$

→ Pour tout $A \subset [a;b]$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \geqslant 0$ nous avons :

$$\inf_{x\in A} \lambda f(x) = \lambda \inf_{x\in A} f(x) \text{ et } \sup_{x\in A} \lambda f(x) = \lambda \sup_{x\in A} f(x)$$

Et donc, pour toute subdivision S de l'intervalle $[a;b]$, nous avons :

$$\sigma(\lambda f, S) = \lambda\sigma(f,S) \text{ et } \Sigma(\lambda f, S) = \lambda\Sigma(f,S)$$

Et donc :

$$\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(\lambda f, S) = \lambda \sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f,S) \text{ et } \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(\lambda f, S) = \lambda \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f,S)$$

Comme f est intégrable, nous avons $\sup\limits_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f,S) = \inf\limits_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f,S) = \mu$

Nous avons donc : $\sup\limits_{S\in\mathcal{S}} \sigma(\lambda f, S) = \lambda\mu = \inf\limits_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(\lambda f, S)$

Ce qui montre que si $f \in \mathcal{I}([a;b])$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \geqslant 0$, $\lambda f \in \mathcal{I}([a;b])$ et nous avons, de plus, montré que $I(\lambda f) = \lambda I(f)$, c'est à dire

$$\int_a^b (\lambda f)(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \lambda f(t)\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

→ Montrons que si $f \in \mathcal{I}([a;b])$ alors $-f \in \mathcal{I}([a;b])$

Pour toute partie $A \subset [a;b]$, nous avons :

$$-\inf_{x\in A} f(x) = \sup_{x\in A} -f(x) \text{ et } \inf_{x\in A} -f(x) = -\sup_{x\in A} f(x)$$

Ce qui nous conduit à écrire

$$\sigma(f,S) = -\Sigma(f,S) \text{ et } \Sigma(-f,S) = -\sigma(f,S)$$

Et donc

$$\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(-f,S) = -\sup_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f,S) \text{ et } \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(-f,S) = -\inf_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f,S)$$

Si f est intégrable, nous avons $\sup\limits_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f,S) = \inf\limits_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f,S) = \mu$ et donc :

$$\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(-f,S) = -\sup_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f,S) = -\mu \text{ et } \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(-f,S) = -\mu$$

Nous avons donc $\sup\limits_{S\in\mathcal{S}} \sigma(-f,S) = \inf\limits_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(-f,S) = -\mu$.

Donc, $-f \in \mathcal{I}([a;b])$ et $I(-f) = -I(f)$, c'est à dire

$$\int_a^b (-f)(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b -f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

→ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \leqslant 0$. On pose $\lambda = -\lambda'$. Alors :

$$I(\lambda f) = I(-\lambda' f) = \lambda' I(-f) = -\lambda' I(f) = \lambda I(f)$$

Donc si $f \in \mathcal{I}([a;b])$ alors $\lambda f \in \mathcal{I}([a;b])$ lorsque $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \leqslant 0$

En conclusion, nous avons démontré 2 résultats :
◇ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si $f \in \mathcal{I}([a;b])$ alors $\lambda f \in \mathcal{I}([a;b])$.
◇ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $I(\lambda f) = \lambda I(f)$, c'est à dire, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (\lambda f)(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \lambda f(t)\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

Nous venons donc de montrer que $\mathcal{I}([a;b])$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

2. Nous avons aussi démontré, dans le point précédent que, pour toute fonction $f \in \mathcal{I}([a;b])$, $g \in \mathcal{I}([a;b])$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ que :
   ⋆ $I(f+g) = I(f) + I(g)$
   ⋆ $I(\lambda f) = \lambda I(f)$

   L'application $I : \mathcal{I}([a;b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ est donc une forme linéaire.
   Il est clair que nous pouvons écrire, pour toute fonction $f \in \mathcal{I}([a;b])$, $g \in \mathcal{I}([a;b])$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$ que :

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu f(t)\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \mu \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

3. **Soient $f \in \mathcal{I}([a;b])$ et $g \in \mathcal{I}([a;b])$ 2 fonctions telles que, pour tout $t \in [a;b]$, nous ayions $f(t) \leqslant g(t)$**
   Soit $A \subset [a;b]$. Alors, de l'inégalité $f(t) \leqslant g(t)$, nous tirons :

$$\inf_{x\in A} f(x) \leqslant \inf_{x\in A} g(x) \text{ et } \sup_{x\in A} f(x) \leqslant \sup_{x\in A} g(x)$$

   Et donc, pour toute subdivision S de l'intervalle $[a;b]$, nous avons :

$$\sigma(f,S) \leqslant \sigma(g,S) \text{ et } \Sigma(f,S) \leqslant \Sigma(g,S)$$

   Et en passant au sup ou à l'inf, nous avons :

$$\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f,S) \leqslant \sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(g,S) \text{ et } \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f,S) \leqslant \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(g,S)$$

   Des égalités $\sup\limits_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f,S) = \inf\limits_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f,S)$ et $\sup\limits_{S\in\mathcal{S}} \sigma(g,S) = \inf\limits_{S\in\mathcal{S}} \sigma(g,S)$, nous déduisons $I(f) \leqslant I(g)$, c'est à dire $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$

Remarque 9 :

1. La propriété $f(t) \leqslant g(t) \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ est dite propriété de **positivité de l'intégrale**.
2. La convention $\displaystyle\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ ne vient pas « ex cathédra »
   Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable.
   Cette propriété peut se justifier en reprenant toute l'étude précédente avec des subdivisions S de $[a;b]$ par des suites finies décroissantes $S = \{b = s_0 > s_1 > \cdots > s_{n-1} > s_n = a\}$.
   En conservant les mêmes définitions de $\sigma(f,S)$ et $\Sigma(f,S)$, le seul changement par rapport aux subdivisions croissantes de $[a;b]$ est que les expressions $(s_k - s_{k-1})$ sont négatives ce qui implique une inversion des inégalités entre $\sigma(f,S)$ et $\Sigma(f,S)$; on a maintenant $\Sigma(f,S) \leqslant \sigma(f,S)$
   Associons à chaque subdivision décroissante S de $[a;b]$, la subdivision ***retournée*** $S' = \{s'_0 < s'_1 < \cdots < s'n\}$ définie par $s'_0 = s_n = a, \ldots, s'_n = s_0 = b$
   Alors S' est une subdivision croissante de $[a;b]$ et $\sigma(f,S) = -\Sigma(f,S')$ et $\Sigma(f,S) = -\sigma(f,S')$.
   Nous en déduisons immédiatement que, en posant $\mathcal{S}_d$ l'ensemble des subdivisions décroissantes et $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions croissantes :

▷ $\sup\limits_{S\in\mathcal{S}_d} \sigma(f,S) = -\inf\limits_{S'\in\mathcal{S}} \Sigma(f,S) = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

▷ $\inf\limits_{S\in\mathcal{S}_d} \Sigma(f,S) = -\sup\limits_{S'\in\mathcal{S}} \sigma(f,S) = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Et donc $\sup\limits_{S\in\mathcal{S}_d} \sigma(f,S) = \inf\limits_{S\in\mathcal{S}_d} \Sigma(f,S) = \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Tout ceci légitime donc la propriété $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

7.2.8 Proposition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur $[a;b]$, c'est à dire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n\in\mathcal{I}([a;b])$
On suppose que cette suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f. Alors :

1. **La fonction f est intégrable sur $[a;b]$ (i.e. $f\in\mathcal{I}([a;b])$)**
2. **Et nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$**

Démonstration

1. **Démontrons que la fonction f est intégrable**

   Ce n'est pas la partie la plus facile du théorème à démontrer ; mais sans avoir démontré cette question, on ne peut pas aller plus loin

   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_\varepsilon$ alors, pour tout $t\in[a;b]$, $|f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$.
   Ainsi, pour ce $n \geqslant N_\varepsilon$, nous avons, $t\in[a;b]$ $-\varepsilon \leqslant f(t) - f_n(t) \leqslant \varepsilon$ ou encore :

$$f_n(t) - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant f_n(t) + \varepsilon$$

   Ainsi, pour tout $A \subset [a;b]$, nous avons :

$$\sup_{x\in A}(f_n(t)-\varepsilon) = \sup_{x\in A} f_n(t) - \varepsilon \leqslant \sup_{x\in A} f(t) \leqslant \sup_{x\in A}(f_n(t)+\varepsilon) = \sup_{x\in A} f_n(t) + \varepsilon$$

   De même :

$$\inf_{x\in A} f_n(t) - \varepsilon \leqslant \inf_{x\in A} f(t) \leqslant \inf_{x\in A} f_n(t) + \varepsilon$$

   Et en multipliant par -1 :

$$-\inf_{x\in A} f_n(t) - \varepsilon \leqslant -\inf_{x\in A} f(t) \leqslant -\inf_{x\in A} f_n(t) + \varepsilon$$

   Et en additionnant, nous obtenons :

$$\sup_{x\in A} f_n(t) - \inf_{x\in A} f_n(t) - 2\varepsilon \leqslant \sup_{x\in A} f(t) - \inf_{x\in A} f(t) \leqslant \sup_{x\in A} f_n(t) - \inf_{x\in A} f_n(t) + 2\varepsilon$$

   C'est à dire :

$$0 \leqslant \omega(f,A) \leqslant \omega(f_n,A) + 2\varepsilon$$

   Ainsi, pour toute subdivision S de l'intervalle $[a;b]$, nous avons :

$$\Sigma(f,S) - \sigma(f,S) \leqslant \Sigma(f_n,S) - \sigma(f_n,S) + 2\varepsilon(b-a)$$

   Toujours pour $n \geqslant N_\varepsilon$, chacune des f_n étant intégrable sur $[a;b]$, il existe une subdivision S de l'intervalle $[a;b]$ telle que $\Sigma(f_n,S) - \sigma(f_n,S) \leqslant \varepsilon$
   Et donc, il existe une subdivision S de l'intervalle $[a;b]$ telle que :

$$\Sigma(f,S) - \sigma(f,S) \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon(b-a) = \varepsilon(1 + 2(b-a))$$

   Ce qui montre que f est intégrable

2. **Démontrons maintenant que** $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

   f étant intégrable, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe. Alors, en utilisant les résultats de 7.2.7 sur la linéarité et la positivité de l'intégrale, nous avons :

   $$\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b f_n(t) - f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t$$

   Soit $\varepsilon > 0$
   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite qui converge uniformément vers f, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors, pour tout $t \in [a;b]$ $|f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$
   Alors, pour $n \geqslant N_\varepsilon$, nous avons $\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon(b-a)$
   Ce qui montre bien que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque 10 :

1. Nous avons là, un exemple de permutation entre intégrale et limites ; s'il y a convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, nous avons :

   $$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Il est très difficile de s'affranchir de la convergence uniforme pour permuter limite et intégrale. Le résultat suivant tente de le faire, mais c'est bien dans un cas particulier.

7.2.9 Proposition

Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle $[a;b]$. On suppose que :

1. **Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est décroissante sur $[a;b]$, c'est à dire :**

   $$(\forall x \in [a;b])\,[(\forall y \in [a;b])\,((x \leqslant y) \Longrightarrow (f_n(x) \geqslant f_n(y)))$$

2. **La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f**

Alors :

1. **f est intégrable sur $[a;b]$**
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration

1. **Montrons que f est intégrable sur $[a;b]$**
   Nous allons montrer que f est aussi décroissante sur l'intervalle $[a;b]$; étant monotone, d'après 7.2.3, f est donc intégrable.
   - ▷ Soient $x \in [a;b]$ et $y \in [a;b]$ tels que $x \leqslant y$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f_n(x) \geqslant f_n(y)$ et donc, en passant à la limite, la limite respectant la relation d'ordre : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y)$, c'est à dire $f(x) \geqslant f(y)$
     f est donc décroissante
   - ▷ Donc, f décroissante sur $[a;b]$ y est donc monotone, donc intégrable.

2. **Montrons que** $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

▷ Pour toute subdivision $S = \{s_0, s_1, s_2, \cdots, s_p\}$ de $[a; b]$, nous avons

$$\Sigma(f, S) = \sum_{i=0}^{p-1} (s_{i+1} - s_i) \sup_{x \in [s_i; s_{i+1}[} f(x)$$

f étant décroissante, nous avons :

$$\Sigma(f, S) = \sum_{i=0}^{p-1} (s_{i+1} - s_i) \sup_{x \in [s_i; s_{i+1}[} f(x) = \sum_{i=0}^{p-1} (s_{i+1} - s_i) f(s_i)$$

et, par le même raisonnement $\sigma(f, S) = \sum_{i=0}^{p-1} (s_{i+1} - s_i) f(s_{i+1})$

▷ Nous avons les même calculs pour les fonctions f_n : $\Sigma(f_n, S) = \sum_{i=0}^{p-1} (s_{i+1} - s_i) f_n(s_i)$ et $\sigma(f_n, S) = \sum_{i=0}^{p-1} (s_{i+1} - s_i) f_n(s_{i+1})$

▷ f étant intégrable sur $[a; b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision $S = \{s_0, s_1, s_2, \cdots, s_p\}$ telle que :

$$\Sigma(f, S) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \sigma(f, S) + \varepsilon$$

▷ Comme la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f, pour chaque i tel que $0 \leqslant i \leqslant p$, il existe $N_\varepsilon^i \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon^i$ alors $|f(s_i) - f_n(s_i)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

En posant $N_\varepsilon = \max\left\{N_\varepsilon^i \text{ où } 0 \leqslant i \leqslant p\right\}$, alors pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant p$, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|f(s_i) - f_n(s_i)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

▷ Nous avons $\Sigma(f, S) - \Sigma(f_n, S) = \sum_{i=0}^{p-1} (s_{i+1} - s_i)(f(s_i) - f_n(s_i))$, et en passant à la valeur absolue, nous avons, pour $n \geqslant N_\varepsilon$:

$$|\Sigma(f, S) - \Sigma(f_n, S)| \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} (s_{i+1} - s_i) |f(s_i) - f_n(s_i)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{p-1} (s_{i+1} - s_i) = \varepsilon$$

C'est à dire que nous avons $-\varepsilon \leqslant \Sigma(f, S) - \Sigma(f_n, S) \leqslant \varepsilon$ et donc $\Sigma(f, S) \geqslant \Sigma(f_n, S) - \varepsilon$

▷ Par le même raisonnement, nous avons $|\Sigma(f, S) - \Sigma(f_n, S)| \leqslant \varepsilon$ et donc $-\varepsilon \leqslant \sigma(f, S) - \sigma(f_n, S) \leqslant \varepsilon$ d'où $\sigma(f, S) \leqslant \sigma(f_n, S) + \varepsilon$

▷ Utilisons maintenant l'inégalité $\Sigma(f, S) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \sigma(f, S) + \varepsilon$

Des inégalités $\Sigma(f_n, S) - \varepsilon \leqslant \Sigma(f, S)$ et $\sigma(f, S) \leqslant \sigma(f_n, S) + \varepsilon$, nous déduisons que :

$$\Sigma(f_n, S) - 2\varepsilon \leqslant \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \sigma(f_n, S) + 2\varepsilon$$

Des inégalités $\sigma(f_n, S) \leqslant \int_a^b f_n(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \Sigma(f_n, S)$, nous déduisons :

$$\int_a^b f_n(t)\, \mathrm{d}t - 2\varepsilon \leqslant \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f_n(t)\, \mathrm{d}t + 2\varepsilon \Longleftrightarrow \left|\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t - \int_a^b f_n(t)\, \mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $\left|\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t - \int_a^b f_n(t)\, \mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon$, ce qui exprime que $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$

Remarque 11 :

Nous avons, à nouveau $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et une permutation des signes intégrale et limite

7.2.10 Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$

Démonstration

Ce théorème est la conséquence et la synthèse de 3.8.10 et 7.2.8

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$; alors, d'après 3.8.10, f est limite uniforme d'une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers
2. Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, e_n est Riemann-intégrable sur $[a;b]$; f étant limite uniforme des $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'après 7.2.8, f est donc Riemann-intégrable

Remarque 12 :

Nous avons donc $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} e_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b e_n(t)\,\mathrm{d}t$

7.2.11 Définition de fonction réglée

On dit qu'une fonction $f:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est réglée sur $[a;b]$ s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément sur $[a;b]$ vers f

Exemple 3 :

Un premier exemple de fonctions réglées sont les fonctions continues

7.2.12 Théorème

Soit f une fonction réglée sur un intervalle $[a;b]$. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$

Démonstration

Comme le théorème précédent, ce théorème est la conséquence et la synthèse de 3.8.10 et 7.2.8

Remarque 13 :

Il existe des fonctions Riemann-intégrables et non réglées

Soit $E=\left\{\dfrac{1}{2^n} \text{ où } n\in\mathbb{N}^*\right\}$ et nous considérons $f=1_E$, la fonction indicatrice de E.

1. La fonction f est bornée et Riemann intégrable sur $[0;1]$
   - ▹ Que f soit bornée est évident
   - ▹ Soit S la subdivision de $[0;1]$ suivante :

$$S=\Big\{s_0=0;s_1^1=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}};s_1^2=\frac{1}{2^n};s_1^3=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{2n}};\cdots$$
$$\cdots s_k^1=\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{2n}};s_k^2=\frac{1}{2^k};s_k^3=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{2n}};\cdots$$
$$\cdots s_n^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{2n}};s_n^2=\frac{1}{2};s_n^3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2n}};s_{3n+2}=1\Big\}$$

Pour l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}}\right[$ nous avons $\inf\limits_{x\in\left[0;\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}}\right[} f(x)=0$ et $\sup\limits_{x\in\left[0;\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}}\right[} f(x)=1$ puisqu'il y a une infinité d'éléments de E dans $\left[0;\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}}\right[$

En ce qui concerne l'intervalle $\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2n}};1\right[$, nous avons $\inf\limits_{x\in\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2n}};1\right[} f(x)=\sup\limits_{x\in\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2n}};1\right[} f(x)=0$ puisqu'il n'y a aucun élément de E dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2n}};1\right[$

Pour les autres intervalles, nous avons $\inf\limits_{x\in[t_k;t_{k+1}[} f(x)=0$ et $\sup\limits_{x\in[t_k;t_{k+1}[} f(x)=1$, de telle sorte que :

$$\sigma(f,S)=0 \text{ et } \Sigma(f,S)=\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}}\right)+2n\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)=\frac{1}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{2n}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{2n}}=0$, nous avons $\inf\limits_{S\in\mathcal{S}}\Sigma(f,S)=0$. Comme $\sup\limits_{S\in\mathcal{S}}\sigma(f,S)=0$, nous avons :

$$\sup_{S\in\mathcal{S}}\sigma(f,S)=\inf_{S\in\mathcal{S}}\Sigma(f,S)$$

Et donc f est intégrable et telle que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$

2. <u>La fonction f n'est pas réglée sur $[0;1]$</u>
   Soit $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f.
   Soit $S=\left\{0=s_0^m,s_1^m,\cdots,s_p^m=1\right\}$, une subdivision adaptée à φ_m, c'est à dire que, pour tout $x\in\left[s_i^m;s_i^{m+1}\right[$, $\varphi_m(x)=\lambda_i^m$
   Soit $\varepsilon>0$
   Il existe $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que si $m\geqslant N_\varepsilon$, alors, pour tout $x\in[0;1]$, nous avons $|\varphi_m(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$
   Soit donc $m\geqslant N_\varepsilon$ et observons l'intervalle $[0;s_1^m[$.
   Il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^n}\in[0;s_1^m[$; ainsi, sur l'intervalle $[0;s_1^m[$, nous devons avoir, à la fois $|\lambda_0^m|\leqslant\varepsilon$ et $|\lambda_0^m-1|\leqslant\varepsilon$, ce qui est impossible pour tout $\varepsilon>0$; il suffit de prendre, par exemple $\varepsilon=\frac{1}{3}$
   En conclusion, il ne peut y avoir de suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f ; ainsi, f n'est pas une fonction réglée.