7.3 Caractérisation des fonctions intégrables au sens de Riemann

7.3.1 Définition d'ensemble négligeable

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que A est négligeable si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite d'intervalles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles $I_n =]a_n; b_n[$ tels que :

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n - a_n) \leqslant \varepsilon$$

Exemple 4 :

Soit $x \in \mathbb{R}$; alors l'ensemble $A = \{x\}$ est négligeable.

En effet, soit $\varepsilon > 0$;

Alors $\{x\} \subset \left]x - \frac{\varepsilon}{3}; x + \frac{\varepsilon}{3}\right[$, et nous avons $\left(x + \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(x - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$

L'ensemble $A = \{x\}$ est donc négligeable.

7.3.2 Proposition

Toute réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable

Démonstration

Soit $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'ensembles négligeables.
Soit $\varepsilon > 0$
Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(I_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles $I_n^k =]a_n^k; b_n^k[$ tels que $N_k \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n^k$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n^k - a_n^k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Alors $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n^k\right)$ et nous avons $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_n^k\right)$ qui est une famille dénombrable d'intervalles telle que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n^k - a_n^k)\right) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = 2\varepsilon$
Ainsi $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ est négligeable

Exemple 5 :

Ainsi, tout sous ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est négligeables : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, l'ensemble des termes d'une suite.

Remarque 14 :

De la négligeabilité de $\{x\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, dans la définition 7.3.1, les intervalles ouverts $I_n =]a_n; b_n[$ peuvent être remplacés par des intervalles fermés $I_n^f = [a_n; b_n]$

7.3.3 Définition

Soient $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique et $x_0 \in A$.
On appelle oscillation de f en x_0 le nombre

$$\omega(f, x_0) = \inf_{v\in\mathcal{V}(x_0)} \omega(f, V) = \inf_{v\in\mathcal{V}(x_0)} \left(\sup_{x\in V} f(x) - \inf_{x\in V} f(x)\right)$$

Où $\mathcal{V}(x_0)$ désigne l'ensemble des voisinages de x_0

7.3.4 Proposition

Soient $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique et $x_0 \in A$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si $\omega(f, x_0) = 0$

Démonstration

1. **Supposons f continue en x_0**
   Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que $|x - x_0| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$
   C'est à dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que si $x \in V$, alors $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.
   Nous pouvons en déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que si $x \in V$, alors $\left(\sup\limits_{x \in V} f(x) - \inf\limits_{x \in V} f(x)\right) \leqslant \varepsilon$.
   Nous pouvons donc en déduire que $\inf\limits_{v \in \mathcal{V}(x_0)} \left(\sup\limits_{x \in V} f(x) - \inf\limits_{x \in V} f(x)\right) \leqslant \varepsilon$, et comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons $\inf\limits_{v \in \mathcal{V}(x_0)} \left(\sup\limits_{x \in V} f(x) - \inf\limits_{x \in V} f(x)\right) = 0$
   C'est à dire $\omega(f, x_0) = 0$
2. **Supposons maintenant que $\omega(f, x_0) = 0$**
   Ceci signifie donc que $\inf\limits_{v \in \mathcal{V}(x_0)} \left(\sup\limits_{x \in V} f(x) - \inf\limits_{x \in V} f(x)\right) = 0$ et que, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $0 \leqslant \left(\sup\limits_{x \in V} f(x) - \inf\limits_{x \in V} f(x)\right) \leqslant \varepsilon$
   Comme nous avons, pour tout $x \in V$:
   $$\left\{\begin{array}{l} \inf\limits_{x \in V} f(x) \leqslant f(x) \leqslant \sup\limits_{x \in V} f(x) \\ \inf\limits_{x \in V} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \sup\limits_{x \in V} f(x) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \inf\limits_{x \in V} f(x) \leqslant f(x) \leqslant \sup\limits_{x \in V} f(x) \\ -\sup\limits_{x \in V} f(x) \leqslant -f(x_0) \leqslant -\inf\limits_{x \in V} f(x) \end{array}\right.$$
   Nous avons alors $\inf\limits_{x \in V} f(x) - \sup\limits_{x \in V} f(x) \leqslant f(x) - f(x_0) \leqslant \sup\limits_{x \in V} f(x) - \inf\limits_{x \in V} f(x)$, c'est à dire $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \sup\limits_{x \in V} f(x) - \inf\limits_{x \in V} f(x) \leqslant \varepsilon$
   Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que si $x \in V$ alors $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$
   f est donc continue en x_0

7.3.5 Proposition

Soient $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique et $h \geqslant 0$. Nous appelons E_h l'ensemble suivant :

$$E_h = \{x \in A \text{ tel que } \omega(x, f) \geqslant h\}$$

Alors E_h est un sous-ensemble fermé de A

Démonstration

Nous appelons $\overline{E_h}$ l'adhérence de E_h ; comme $\overline{E_h}$ est un fermé, nous allons démontrer que $\overline{E_h} = E_h$

1. **Tout d'abord, nous avons $\overline{E_h} \subset E_h$**
2. **Démontrons maintenant que $E_h \subset \overline{E_h}$**
   Soit $x \in \overline{E_h}$, un point adhérent à E_h ; montrons que nous avons aussi $x \in E_h$
   Comme $x \in \overline{E_h}$, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, nous avons $V \cap E_h \neq \emptyset$ et il existe donc $y \in E_h$ tel que $y \in V$.
   Comme $y \in E_h$, alors $\omega(y, f) \geqslant h$ et donc $\omega(f, V) \geqslant h$. Comme, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, nous avons $\omega(f, V) \geqslant h$, nous avons, en particulier $\inf\limits_{v \in \mathcal{V}(x)} \left(\sup\limits_{x \in V} f(x) - \inf\limits_{x \in V} f(x)\right) \geqslant h$, c'est à dire $\omega(x, f) \geqslant h$.
   Donc $x \in E_h$ et, pour conclure, $E_h \subset \overline{E_h}$

En conclusion $E_h = \overline{E_h}$ et E_h est un ensemble fermé.

7.3.6 Proposition

Soient $[a;b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique bornée
f est intégrable sur $[a;b]$ si et seulement si l'ensemble des points de discontinuité de f est négligeable

Démonstration

Appelons E l'ensemble des points où la fonctions f est discontinue.

1. **Supposons f intégrable sur $[a;b]$**

   On appelle toujours $E_h = \{x \in [a;b] \text{ tel que } \omega(x,f) \geqslant h\}$. En rappelant que f est continue en $x_0 \in [a;b]$ si et seulement si $\omega(x_0,f) = 0$, nous avons $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_{\frac{1}{n}}$

   Si nous montrons que, pour tout $h > 0$, E_h est un ensemble négligeable, alors, d'après 7.3.2, E, réunion dénombrable d'ensembles négligeables, est un ensemble négligeable

   Soit $\varepsilon > 0$ et $h > 0$

   f étant intégrable, il existe une subdivision S de $[a;b]$, c'est à dire $S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_p = b\}$ telle que :

   $$\Sigma(f,S) - \sigma(f,S) \leqslant h \times \varepsilon \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} (s_i - s_{i-1})\,\omega(f,[s_{i-1};s_i[) \leqslant h \times \varepsilon$$

   Regardons, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, un intervalle particulier $[s_{i-1};s_i[$ et supposons que $E_h \cap [s_{i-1};s_i[\neq \emptyset$, c'est à dire qu'il existe $x_0 \in E_h \cap [s_{i-1};s_i[$.

   Nous avons :

   ▷ D'une part : $E_h \subset \bigcup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ \text{tel que} \\ E_h \cap [s_{i-1};s_i[\neq \emptyset}} (E_h \cap [s_{i-1};s_i[)$

   ▷ D'autre part $\omega(x_0,f) = \inf_{v \in \mathcal{V}(x_0)} (\omega(f,V)) \geqslant h$, et donc, en particulier $\omega(f,[s_{i-1};s_i[) \geqslant h$

   Nous avons :

   $$\sum_{i=1}^{p} (s_i - s_{i-1})\,\omega(f,[s_{i-1};s_i[) =$$
   $$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ \text{tel que} \\ E_h \cap [s_{i-1};s_i[\neq \emptyset}} (s_i - s_{i-1})\,\omega(f,[s_{i-1};s_i[) + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ \text{tel que} \\ E_h \cap [s_{i-1};s_i[= \emptyset}} (s_i - s_{i-1})\,\omega(f,[s_{i-1};s_i[)$$

   Et nous avons donc $\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ \text{tel que} \\ E_h \cap [s_{i-1};s_i[\neq \emptyset}} (s_i - s_{i-1})\,\omega(f,[s_{i-1};s_i[) \leqslant \varepsilon h$

   De $\omega(f,[s_{i-1};s_i[) \geqslant h$, nous tirons :

   $$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ \text{tel que} \\ E_h \cap [s_{i-1};s_i[\neq \emptyset}} (s_i - s_{i-1})\,\omega(f,[s_{i-1};s_i[) \geqslant \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ \text{tel que} \\ E_h \cap [s_{i-1};s_i[\neq \emptyset}} (s_i - s_{i-1})\,h$$

   Nous avons donc :

   $$h \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ \text{tel que} \\ E_h \cap [s_{i-1};s_i[\neq \emptyset}} (s_i - s_{i-1}) \leqslant \varepsilon h \Longleftrightarrow \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ \text{tel que} \\ E_h \cap [s_{i-1};s_i[\neq \emptyset}} (s_i - s_{i-1}) \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, E_h est inclus dans une somme finie d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à ε.
Ainsi E_h est négligeable, et E ensemble des points où la fonctions f est discontinue, réunion dénombrable d'ensembles négligeables, est un ensemble négligeable

2. **Supposons que E l'ensemble des points où la fonctions f est discontinue soit négligeable**
Soit $\varepsilon > 0$
   (a) Nous appelons $E_\varepsilon = \{x \in [a;b] \text{ tels que } \omega(x,f) \geqslant \varepsilon\}$
   Comme $\omega(x_0,f) = 0$ si et seulement si f est continue en x_0, nous avons $E_\varepsilon \subset E$, et comme E est négligeable, E_ε est aussi négligeable.
   Il existe donc une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles $I_n =]a_n;b_n[$ tels que
   $$E_\varepsilon \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ et } \sum_{n_i n\mathbb{N}} (b_n - a_n) \leqslant \varepsilon$$
   (b) E_ε est un fermé de $[a;b]$ et est donc un compact de $[a;b]$. D'après la propriété de Borel-Lebesgue, on peut extraire de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite finie $(I_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ telle que $E_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{k=1}^{p} I_k$, et comme $\bigcup\limits_{k=1}^{p} I_k \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$, nous avons $\sum\limits_{k=1}^{p}(b_k - a_k) \leqslant \varepsilon$
   (c) Quittes à ré-organiser les $(I_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$, nous les supposons disjoints et ordonnés de telle sorte que pour $1 \leqslant k \leqslant p$, nous ayons $b_k < a_{k+1}$
   (d) La réunion $\bigcup\limits_{k=1}^{p} I_k$ est un ouvert de $[a;b]$ et donc $K = [a;b] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p} I_k$ est un fermé de $[a;b]$, donc compact dans $[a;b]$
   (e) K ne contenant aucun point de discontinuité de f, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{K}$, f continue en x et $\omega(x,f) = 0$ et donc, que pour tout $x \in K$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$ inclus dans $[a;b]$ tel que $\omega(f,V) \leqslant \varepsilon$
   (f) Regardons un segment $[b_k, a_{k+1}]$. Tout d'abord, $[b_k, a_{k+1}] \subset K$. Nous pouvons trouver une subdivision S de $[b_k, a_{k+1}]$ $S = \{b_k = s_0 < s_1 < \cdots < s_j = a_{k+1}\}$ telle que $\omega(f, [s_{j-1}; s_j[) \leqslant \varepsilon$
   (g) Soit T une subdivision de l'intervalle $[a;b]$, c'est à dire $T = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_s = b\}$ où les $(t_j)_{1\leqslant j\leqslant s-1}$ sont les points a_i, b_j ou s_j des subdivisions construites précédemment. Considérons alors $\sum\limits_{r=1}^{s}(t_r - t_{r-1})\,\omega(f, [t_{r-1}; t_r[)$
   Nous avons alors à regarder 2 choses :
   ▷ Si l'intervalle $[t_{r-1}; t_r[\subset K$, alors $\omega(f, [t_{r-1}; t_r[) \leqslant \varepsilon$ et donc :
   $$\sum_{\substack{r \text{ tels que} \\ [t_{r-1};t_r[\subset K}} (t_r - t_{r-1})\,\omega(f, [t_{r-1}; t_r[) \leqslant \varepsilon \sum_{\substack{r \text{ tels que} \\ [t_{r-1};t_r[\subset K}} (t_r - t_{r-1}) \leqslant \varepsilon(b-a)$$
   ▷ Ou bien si l'intervalle $[t_{r-1}; t_r[\subset \bigcup\limits_{k=1}^{p} I_k = [a;b] \setminus K$, alors $\omega(f, [t_{r-1}; t_r[) \leqslant M$ puisque f est bornée et donc :
   $$\sum_{\substack{r \text{ tels que} \\ [t_{r-1};t_r[\subset \bigcup\limits_{k=1}^{p} I_k}} (t_r - t_{r-1})\,\omega(f, [t_{r-1}; t_r[) \leqslant M \sum_{\substack{r \text{ tels que} \\ [t_{r-1};t_r[\subset \bigcup\limits_{k=1}^{p} I_k}} (t_r - t_{r-1}) \leqslant M\varepsilon$$
   Et donc, nous avons trouvé une subdivision T telle que :
   $$\sum_{r=1}^{s}(t_r - t_{r-1})\,\omega(f, [t_{r-1}; t_r[) = \Sigma(f,T) - \sigma(f,T) \leqslant \varepsilon(M + (b-a))$$

Ce qui montre que f est bien intégrable.

Et la proposition est démontrée.

Remarque 15 :

1. Voilà une démonstration très délicate ; il faut prendre du temps pour la comprendre, voire la réécrire.
2. C'est un résultat important qui généralise l'intégrale vue en L_0 qui se limitait aux fonctions continues.

7.3.7 Corollaire

1. **Le produit de 2 fonctions f et g intégrables au sens de Riemann est intégrable au sens de Riemann**
2. **Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann, alors $|f|$ est aussi intégrable au sens de Riemann, et**
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

1. **Montrons que le produit de 2 fonctions intégrables est intégrable**
Soient f et g 2 fonctions intégrables au sens de Riemann sur l'intervalle $[a; b]$.
E_f est l'ensemble des discontinuités de la fonction f, E_g est l'ensemble des discontinuités de la fonction g et E_{fg} est l'ensemble des discontinuités de la fonction fg.
f et g étant intégrables, les ensembles E_f et E_g sont négligeables.
Nous avons $E_{fg} \subset E_f \cup E_g$; $E_f \cup E_g$ étant réunion d'ensembles négligeables est négligeable. Il en est donc de même de E_{fg}.
Donc, la fonction fg est intégrable.
2. **Supposons $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann**
   (a) **Montrons que $|f|$ est intégrable au sens de Riemann**
   Nous appelons E_f l'ensemble des discontinuités de la fonction f et $E_{|f|}$ est l'ensemble des discontinuités de la fonction $|f|$
   Nous savons que la fonction $|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, et donc, par composition, $|f|$ est continue partout où f est continue et donc $E_f = E_{|f|}$.
   f étant intégrable, E_f est négligeable et donc $E_{|f|}$ aussi.
   Ainsi, $|f|$ est intégrable au sens de Riemann
   (b) **Montrons que** $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$
   Pour tout $t \in [a; b]$, nous avons $-|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$ et donc, en utilisant la positivité de l'intégrale *(cf 7.2.7)*, nous avons :
$$-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2 :

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable et à valeurs positives. Démontrer que la fonction $\sqrt{f}$ est intégrable sur l'intervalle $[a; b]$

Remarque 16 :

1. D'après ce corollaire, si f est intégrable sur l'intervalle $[a;b]$, alors $f^2 = f \times f$ est aussi intégrable sur $[a;b]$, c'est à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (f(t))^2 \, \mathrm{d}t$ existe
2. La propriété $\displaystyle\left|\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t$ est bien une conséquence de la propriété de positivité de l'intégrale.
3. Si $f \in \mathcal{I}([a;b])$, alors f est une fonction bornée sur $[a;b]$. Si $\mathcal{B}([a;b])$ est l'espace des fonctions bornées sur l'intervalle $[a;b]$, nous avons $\mathcal{I}([a;b]) \subset \mathcal{B}([a;b])$.
   Ainsi, pour $f \in \mathcal{I}([a;b])$, le nombre $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a;b]} |f(x)|$ est bien défini. On démontre que $\|f\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}([a;b])$, appelée **norme de la convergence uniforme**

   Nous avons $\displaystyle\left|\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a) \|f\|_\infty$

   En effet, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $0 \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ et donc, en passant à l'intégrale, et en utilisant cette positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \|f\|_\infty \, \mathrm{d}x = (b-a)\|f\|_\infty$.

   Comme $\displaystyle\left|\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t$, nous avons bien l'inégalité $\displaystyle\left|\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a) \|f\|_\infty$
4. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann ; il nous est possible de modifier f en un nombre fini de points. Elle reste intégrable et sonintégrale ne change pas.

Exercice 3 :

Soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions intégrables au sens de Riemann.

1. Démontrer que les fonctions $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont intégrables au sens de Riemann sur $[a;b]$
2. On appelle $\mathcal{O}$ la fonction nulle, $f^+ = \max(f, \mathcal{O})$ et $f^- = \max(-f, \mathcal{O}) = -\min(f, \mathcal{O})$.
   Démontrer que f^+ et f^- sont intégrables sur $[a;b]$ et que

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b f^+(t) \, \mathrm{d}t - \int_a^b f^-(t) \, \mathrm{d}t$$

Exercice 4 :

1. **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
   On généralise ici l'inégalité établie pour les fonctions continues
   Soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions intégrables au sens de Riemann. Démontrer que :

$$\left|\int_a^b f(t) g(t) \, \mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 \, \mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b (g(t))^2 \, \mathrm{d}t}$$

2. **Applications de l'inégalité de Schwarz**
   (a) Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\left(\int_0^1 x^k f(x) \, \mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{2k+1} \int_0^1 f(x)^2 \, dx$$

   (b) On suppose, cette fois ci que $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$, intégrable. Montrer que

$$\left(\int_0^1 f(x) \, dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 f(x)^2 \, dx \leqslant \int_0^1 f(x) \, dx$$

(c) Soit f une fonction continue sur $[0;1]$, à valeurs réelles strictement positives. Montrer que :

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\times\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)\geqslant 1$$

(d) Soient $f:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 2 fonctions intégrables sur $[a;b]$ telles que il existe $\lambda>0$ tel que pour tout $x\in[a;b]$, $f(x)\,g(x)\geqslant\lambda$. Démontrer que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\times\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\lambda(b-a)^2$$

7.3.8 Définition

Soient $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$,$c\in\mathbb{R}$ et $d\in\mathbb{R}$ tels que $a\leqslant c\leqslant d\leqslant b$.
Soit $f:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction numérique. On dit que f est Riemann-intégrable sur l'intervalle $[c;d]$ si la restriction de f à l'intervalle $[c;d]$ est Riemann-intégrable. On note alors $\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$ l'intégrale de cette restriction.

7.3.9 Proposition

Soit $f:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction numérique ; alors :

1. **f est intégrable sur l'intervalle $[a;b]$ si et seulement si, pour tout $c\in\,]a;b[$, f est intégrable sur $[a;c]$ et sur $[c;b]$**
2. **Dans ce cas, nous avons, pour tout $c\in\,]a;b[$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$**

Démonstration

1. Démonstration du premier point
   La démonstration de ce premier point, utilise pleinement la proposition 7.3.6
   (a) Si f est intégrable sur $[a;b]$, alors f est bornée sur $[a;b]$ et l'ensemble des points de discontinuité de f sur $[a;b]$, noté $E_f^{[a;b]}$ est négligeable.
   Soit $c\in\,]a;b[$
   - Si f est bornée sur $[a;b]$, comme $[a;c]\subset[a;b]$ et $[c;b]\subset[a;b]$, f est aussi bornée sur les intervalles $[a;c]$ et $[c;b]$
   - Si $E_f^{[a;c]}$ est l'ensemble des points de discontinuité de f sur $[a;c]$, nous avons $E_f^{[a;c]}\subset E_f^{[a;b]}$, et donc $E_f^{[a;c]}$ est un ensemble négligeable.
     f est donc intégrable sur $[a;c]$
   - Par le même raisonnement, f est intégrable sur $[c;b]$

   Ainsi, f est intégrable sur $[a;c]$ et sur $[c;b]$
   (b) Réciproquement, supposons que pour tout $c\in\,]a;b[$, f est intégrable sur $[a;c]$ et sur $[c;b]$
   - Donc f est bornée sur $[a;c]$ et sur $[c;b]$, et donc f est bornée sur $[a;c]\cup[c;b]=[a;b]$
   - Les ensembles de points de discontinuité sur les 2 intervalles $E_f^{[a;c]}$ et $E_f^{[c;b]}$ sont négligeables et donc $E_f^{[a;b]}=E_f^{[a;c]}\cup E_f^{[a;c]}$ est aussi négligeable

   f est donc intégrable sur l'intervalle $[a;b]$
2. Démonstration du second point
   Soit f intégrable sur l'intervalle $[a;b]$ et soit $c\in\,]a;b[$. Alors, f est intégrable sur $[a;c]$ et $[c;b]$.
   Si S_1 est une subdivision de $[a;c]$ et S_2 une subdivision $[c;b]$, alors $S=S_1\cup S_2$ est une subdivision de $[a;b]$. Nous avons alors :

$$\sigma(f,S)=\sigma(f,S_1)+\sigma(f,S_2)\ \text{ et }\ \Sigma(f,S)=\Sigma(f,S_1)+\Sigma(f,S_2)$$

Ainsi

$$\inf_{S_1 \in \mathcal{S}_1} \sigma(f, S_1) + \inf_{S_2 \in \mathcal{S}_2} \sigma(f, S_2) \leqslant \inf_{S \in \mathcal{S}} \sigma(f, S)$$

Et

$$\sup_{S \in \mathcal{S}} \Sigma(f, S) \leqslant \sup_{S_1 \in \mathcal{S}_1} \Sigma(f, S_1) + \sup_{S_2 \in \mathcal{S}_2} \Sigma(f, S_2)$$

Comme :

- ▷ f est intégrable sur $[a;c]$, nous avons :

$$\inf_{S_1 \in \mathcal{S}_1} \sigma(f, S_1) = \sup_{S_1 \in \mathcal{S}_1} \Sigma(f, S_1) = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$$

- ▷ f est intégrable sur $[c;b]$, nous avons :

$$\inf_{S_2 \in \mathcal{S}_2} \sigma(f, S_2) = \sup_{S_2 \in \mathcal{S}_2} \Sigma(f, S_2) = \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

- ▷ f est intégrable sur $[a;b]$, nous avons :

$$\inf_{S \in \mathcal{S}} \sigma(f, S) = \sup_{S \in \mathcal{S}} \Sigma(f, S) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

Et donc, nous avons

$$\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

C'est à dire

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

7.3.10 Corollaire : Relation de Chasles

Pour tout réels a, b, c, nous avons :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

pourvu que f soit intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[\min(a, b, c), \max(a, b, c)]$.

Démonstration

La démonstration est simple et est laissée dans sa grande partie au lecteur
Supposons $b = [\min(a, b, c)\}$ et $c = \max(a, b, c)$
Alors, d'après 7.3.9, nous avons $\displaystyle\int_b^c f(t)\ \mathrm{d}t = \int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$ En transposant, nous avons :

$$-\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_b^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t \Longleftrightarrow \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$$

Ce que nous voulions

Remarque 17 :

1. Contrairement à 7.3.9, il n'est pas nécessaire d'avoir $c \in]a;b[$
2. D'après la relation de Chasles, si f est intégrable sur l'intervalle $[a;b]$ alors, pour tout $c \in [a;b]$, nous avons $\displaystyle\int_c^c f(t)\ \mathrm{d}t = 0$

   La démonstration n'est pas difficile :
   Soient $c \in [a;b]$ et $d \in [a;b]$; alors :

$$\int_c^c f(t)\ \mathrm{d}t = \int_c^d f(t)\ \mathrm{d}t + \int_d^c f(t)\ \mathrm{d}t = \int_c^d f(t)\ \mathrm{d}t - \int_c^d f(t)\ \mathrm{d}t = 0$$

7.3.11 Définition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $S = \{a = s_0, s_1, \cdots, s_n = b\}$ une subdivision de $[a;b]$ à pas constants, c'est à dire telle que :

- $\triangleright$ $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$
- $\triangleright$ $x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$

On appelle somme de Riemann de f sur $[a;b]$, l'expression :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

Remarque 18 :

1. Le pas de la subdivision S est donc $\rho(S) = \dfrac{b-a}{n}$
2. On peut définir une autre somme de Riemann, pour lesquels nous aurions les mêmes résultats :
$$S_n^1(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$
3. Il y a aussi une autre définition des sommes de Riemann, plus générale, qui donne aussi les mêmes résultats :
$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \text{ où } \xi_k \in [x_k; x_{k+1}[$$
Cette fois-ci, ξ_k n'est pas forcémenr une borne de $[x_k; x_{k+1}[$

7.3.12 Théorème

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$ sa somme de Riemenn sur l'intervalle $[a;b]$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration

1. Tout d'abord, f étant continue, d'après 7.2.10 l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existe
2. D'après 3.8.10 toute fonction continue est limite uniforme d'une fonction en escalier. Le résultat donne même l'expression de cette suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$\begin{cases} e_n(x) = f(x_k) \text{ si } x \in [x_k; x_{k+1}[\text{ pour } k = 0, \ldots, n-1 \text{ et } x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n} \\ e_n(b) = f(b) \end{cases}$$
D'après 7.2.8, la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f, nous avons :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b e_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. En utilisant la relation de Chasles, nous avons $\displaystyle\int_a^b e_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} e_n(x)\,\mathrm{d}x$.
   Or, $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} e_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}x = f(x_k)(x_{k+1}-x_k) = f(x_k)\left(\frac{b-a}{n}\right)$
   Et donc $\displaystyle\int_a^b e_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$
   D'où, nous avons bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Exemple 6 :

Soit $1_{\mathbb{Q}} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, c'est à dire la fonction telle que :

$$\begin{cases} 1_{\mathbb{Q}} : [0,1] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad\qquad x & \longmapsto \quad 1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Nous allons montrer que $1_{\mathbb{Q}}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann **à l'aide des sommes de Riemann**

1. **Tout d'abord, redémontrons que $1_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue sur** $[0,1]$
   En effet, il nous faut pas oublier que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et même que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$. Donc, soit $x \in [0,1]$; il y a alors 2 possibilités :
   → Si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, alors $1_{\mathbb{Q}}(x) = 0$; il existe une suite de rationels $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q_n = x$; or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1_{\mathbb{Q}}(q_n) = 1$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1_{\mathbb{Q}}(q_n) = 1 \neq 1_{\mathbb{Q}}(x) = 0$
   → De même, si $x \in \mathbb{Q}$
2. **Montrons que $1_{\mathbb{Q}}$ n'est pas Riemann-Intégrable à l'aide des sommes de Riemann**
   On note σ_n la subdivision $0 = a_0^{(n)} < a_1^{(n)} < \cdots < a_{n-1}^{(n)} < a_n^{(n)} = 1$ une subdivision de l'intervalle $[0,1]$ dont le pas tend vers 0 avec n.
   Soit un point quelconque $\xi_n(i) \in \left]a_{i-1}^{(n)}\ ;\ a_i^{(n)}\right[$ et on définit la somme de Riemann associée à σ_n et à la suite ξ_n :
   $$S(1_{\mathbb{Q}}, \sigma_n, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} 1_{\mathbb{Q}}(\xi_n(i))\left(a_i^{(n)} - a_{i-1}^{(n)}\right)$$
   Si $1_{\mathbb{Q}}$ est intégrable, alors, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S(1_{\mathbb{Q}}, \sigma_n, \xi_n) = \int_0^1 1_{\mathbb{Q}}(t)\ dt$
   On choisit la subdivision σ_n simple suivante : $\left\{0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n}; 1\right\}$, c'est à dire que $a_i^{(n)} = \dfrac{i}{n}$, c'est à dire $a_i^{(n)} - a_{i-1}^{(n)} = \dfrac{1}{n}$, et donc, $\displaystyle S(1_{\mathbb{Q}}, \sigma_n, \xi_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\mathbb{Q}}(\xi_n(i))$ où $\xi_n(i) \in \left]\frac{i-1}{n}\ ;\ \frac{i}{n}\right[$
   De la densité de $\mathbb{Q}$ dans $[0,1]$, on peut trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant i \leqslant n$ des $\xi_n(i) \in \left]\frac{i-1}{n}\ ;\ \frac{i}{n}\right[$ tels que $\xi_n(i) \in \mathbb{Q}$ et alors $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\mathbb{Q}}(\xi_n(i)) = 1$
   De la densité de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $[0,1]$, on peut trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant i \leqslant n$ des $\xi'_n(i) \in \left]\frac{i-1}{n}\ ;\ \frac{i}{n}\right[$ tels que $\xi'_n(i) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et alors $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\mathbb{Q}}(\xi'_n(i)) = 0$
   On vient donc d'extraire 2 sous-suites de la somme de Riemann qui admettent des limites différentes ; il y a donc contradiction et $1_{\mathbb{Q}}$ n'est pas Riemann-intégrable sur l'intervalle $[0,1]$

7.3.13 Quelques exercices

Exercice 5 :

1. Soit $x > 0$. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}} = \dfrac{e^x - 1}{x}$
2. Utiliser ce résultat pour établir que pour tout nombre $x > 0$ $\displaystyle\int_0^x e^t \, \mathrm{d}t = e^x - 1$

Exercice 6 :

Soit $\alpha > 0$

1. Pour quelles valeurs de α, l'intégrale $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2\right) \mathrm{d}x$ est-elle définie ?
2. Donner la valeur de cette intégrale I_α lorsqu'elle est définie.