7.4 Fonctions définies par des intégrales

7.4.1 Théorème

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann.

Pour tout $x \in [a; b]$, nous définissons $F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$.

Alors F est continue sur $[a; b]$

<u>Démonstration</u>

1. F est bien définie puisque f, intégrable sur $[a; b]$, est intégrable sur tout intervalle $[a; x] \subset [a; b]$
2. Soient $x \in [a; b]$ et $y \in [a; b]$, alors :

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t - \int_a^y f(t)\, \mathrm{d}t\right| = \left|\int_y^x f(t)\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_\infty |x - y|$$

   F est donc lipschitzienne, donc uniformément continue, et donc continue.

Remarque 19 :

Dans la démonstration, nous avons utilisé l'inégalité $\left|\int_y^x f(t)\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_\infty |x - y|$. la justification en est simple.

1. Si $x < y$, nous avons $\left|\int_x^y f(t)\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^y |f(t)|\, \mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty (y - x)$
2. Si $x > y$, nous avons $\left|\int_x^y f(t)\, \mathrm{d}t\right| \leqslant -\int_x^y |f(t)|\, \mathrm{d}t \leqslant -\|f\|_\infty (y - x) = \|f\|_\infty (x - y)$

Et donc, à chaque fois $\left|\int_y^x f(t)\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_\infty |x - y|$

7.4.2 Théorème

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann.

Pour tout $x \in [a; b]$, nous définissons $F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$.

Si f admet une limite l en $c \in [a; b]$, alors F est dérivable en c et $F'(c) = l$

<u>Démonstration</u>

Pour montrer que F est dérivable en c et de dérivée $F'(c) = l$, il faut montrer que $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{F(x) - F(c)}{x - c} = l$

→ Tout d'abord, $\dfrac{F(x) - F(c)}{x - c} = \dfrac{1}{x - c}\left(\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\, \mathrm{d}t\right) = \dfrac{1}{x - c}\left(\int_c^x f(t)\, \mathrm{d}t\right)$

→ Ensuite, $l = \dfrac{1}{x - c}\int_c^x l\, \mathrm{d}t$

→ Et donc :

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x) - F(c)}{x - c} - l\right| &= \left|\frac{1}{x - c}\left(\int_c^x f(t)\, \mathrm{d}t\right) - \frac{1}{x - c}\int_c^x l\, \mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\frac{1}{x - c}\int_c^x (f(t) - l)\, \mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|x - c|}\int_c^x |f(t) - l|\, \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Nous avons fait le choix de $x \geqslant c$; le cas $x \leqslant c$ est totalement identique.

→ Soit $\varepsilon > 0$
Comme $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$, si $|x-c| \leqslant \eta_\varepsilon$, alors $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.
Si $t \in [x;c]$, alors $|t-c| \leqslant |x-c| \leqslant \eta_\varepsilon$ et donc $|f(t) - l| \leqslant \varepsilon$.
→ Ainsi, si $|x-c| \leqslant \eta_\varepsilon$, alors $\dfrac{1}{|x-c|} \displaystyle\int_c^x |f(t) - l| \,\mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{|x-c|} \times (x-c) \times \varepsilon = \varepsilon$

Et donc, $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{F(x) - F(c)}{x-c} = l$. F est donc dérivable en c et $F'(c) = l$

7.4.3 Corollaire

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$. Alors,

1. **La fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ de dérivée $F'(x) = f(x)$**
2. **Toute fonction continue sur $[a;b]$ admet une primitive sur l'intervalle $[a;b]$**

Démonstration

La démonstration est simple, puisque pour tout $x_0 \in [a;b]$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Il suffit alors d'utiliser le théorème précédent.
Et donc, si $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, comme nous avons $F'(x) = f(x)$, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ apparaît donc comme une primitive de f

Remarque 20 :

1. L'exposé sur les fonctions primitives a été faite en L_0 ; nous ne la ferons pas ici.
2. Il existe des fonctions non-intégrable au sens de Riemann mais qui admettent des primitives

   Par exemple, considérons la fonction $f : [0;+1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f : [0;+1] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad x & \longmapsto \quad f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

   Cette fonction f admet pour primitive sur $[0;+1]$ la fonction F définie par :

$$F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } F(0) = 0$$

   Mais, <u>f **n'est pas intégrable au sens de Riemann sur** $[0;+1]$</u> puisque non bornée.

   En effet, si nous considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$, elle est telle que $f(x_n) = -2\sqrt{2n\pi}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = -\infty$ et f n'est pas bornée et n'est donc pas Riemann-intégrable.
3. Une fonction intégrable au sens de Riemann n'admet pas nécessairement de primitive. Par exemple, une fonction en escalier, non continue, n'est la dérivée d'aucune fonction
4. L'intégration au sens de Riemann n'est donc pas l'opération inverse de la dérivation.

7.4.4 Définition

Une fonction $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite <u>continue par morceaux</u> s'il existe une subdivision S de $[a;b]$, $S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\}$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]s_{i-1};s_i[$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, se prolonge en une fonction $f_i : [s_{i-1};s_i] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Remarque 21 :

1. L'ensemble des points où une fonction f continue par morceaux n'est pas continue est un ensemble fini donc négligeable. La fonction f est donc intégrable sur $[a;b]$, c'est à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.
2. De même, la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie pour tout $x \in [a;b]$. La fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$, excepté éventuellement aux points de $S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\}$; nous avons aussi $F'(x) = f(x)$

7.4.5 Théorème

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a;b]$. On suppose de plus que f admette, sur $[a;b]$ une primitive F. Alors

1. **Nous avons** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$
2. **En particulier, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons** $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$

<u>Démonstration</u>

1. **Montrons que** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$
   - ▷ Soit $S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\}$ une subdivision du segment $[a;b]$. Alors :
   $$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(s_i) - F(s_{i-1}))$$
   - ▷ Comme F est dérivable sur $[a;b]$ et de dérivée $F' = f$, on peut lui applique le théorème des accroissements finis :

     Pour tout $x \in [a;b]$ et tout $y \in [a;b]$, il existe $t \in]x;y[$ tel que
   $$F(x) - F(y) = (x-y)\,F'(t) \Longleftrightarrow F(x) - F(y) = (x-y)\,f(t)$$
   - ▷ Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe $\xi_i \in]s_{i-1};s_i[$ tel que
   $$F(s_i) - F(s_{i-1}) = (s_i - s_{i-1})\,f(\xi_i)$$
     Et nous avons donc :
   $$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(s_i) - F(s_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1})\,f(\xi_i)$$
   - ▷ Comme $\sigma(f,S) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) \inf_{t\in[s_{i-1};s_i[} f(t)$ et $\Sigma(f,S) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) \sup_{t\in[s_{i-1};s_i[} f(t)$, nous avons :
   $$\sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) \inf_{t\in[s_{i-1};s_i[} f(t) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1})\,f(\xi_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) \sup_{t\in[s_{i-1};s_i[} f(t)$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$\sigma(f,S) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant \Sigma(f,S)$$
     Cette inégalité étant vraie pour toute subdivision $S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\}$ de l'intervalle $[a;b]$

▷ f étant intégrable sur $[a;b]$, nous avons :

$$\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f,S) = \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f,S) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

De l'inégalité $\sigma(f,S) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant \Sigma(f,S)$, vraie pour toute subdivision, nous déduisons alors que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

2. Pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $[a;x] \subset [a;b]$ et, f étant intégrable sur $[a;b]$ l'est aussi sur $[a;x]$ et si F est une primitive sur $[a;b]$, l'est aussi sur $[a;x]$, et donc, d'après le point ci-dessus, $\displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = F(x) - F(a)$

Remarque 22 :

L'intérêt de cette démonstration est de la faire pour des fonnctions intégrables au sens de riemann, ce qui englobe des fonctions qui ne sont pas forcément continues *(mais qui admettent des primitives)*.

7.4.6 Intégration par parties

Soient f et g 2 fonctions intégrables au sens de Riemann sur l'intervalle $[a;b]$.
On suppose que f et g admettent, sur $[a;b]$, des primitives respectives F et G. Alors :

1. **Les fonctions gF et fG sont intégrables au sens de Riemann sur $[a;b]$**
2. **Nous avons, de plus, $\displaystyle\int_a^b F(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b f(t)\,G(t)\ \mathrm{d}t$**

Démonstration

1. Si F est une primitive de f, alors F est dérivable et donc continue sur $[a;b]$ et donc Riemann-intégrable sur $[a;b]$. Le produit de 2 fonctions intégrables étant intégrable, nous avons gF qui est intégrable au sens de Riemann.
   De la même manière, la fonction fG est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a;b]$
2. F et G étant dérivables, nous avons $(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg$. Ainsi :
   → $\displaystyle\int_a^b (FG)'(t)\ \mathrm{d}t = [F(t)\,G(t)]_a^b = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a)$
   → Mais, nous avons aussi :
   $$\int_a^b (FG)'(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b (fG)(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b (gF)(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,G(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,F(t)\ \mathrm{d}t$$
   → C'est à dire que nous avons :
   $$F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) = \int_a^b f(t)\,G(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,F(t)\ \mathrm{d}t$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$\int_a^b F(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b f(t)\,G(t)\ \mathrm{d}t$$
   Ce que nous voulions

Remarque 23 :

1. Si f et g sont continues sur l'intervalle $[a;b]$, elles sont alors Riemann-intégrables sur $[a;b]$ et admettent une primitive sur $[a;b]$. La formule d'intégration par parties peut dont leurs être appliquée.

2. Les résultats de L_0 sont toujours applicables :

   Soient u et v 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a;b]$; alors :

$$\int_a^b u(t)\, v'(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)\, v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t$$

3. Comme toujours, la formule d'intégration par parties est utile lors que les primitives à chercher sont peu comodes !!

Exemple 7 :

Pour $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, calculer $\displaystyle\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t$

Evidemment, nous ne connaissons pas la primitive de $\arctan t$; une intégration par parties s'impose ici :

$$\begin{bmatrix} u(t) = \arctan t & u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \\ v'(t) = 1 & v(t) = t \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t = & \ [t\arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ = & \ x\arctan x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ = & \ x\arctan x - \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^x \\ = & \ x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} \end{aligned}$$

Exercice 7 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, nous considérons la fonction $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$ Trouver une relation de récurrence permettant le calcul de $I_n(x)$.

7.4.7 Intégration par parties généralisée

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, u et v 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[a;b]$; alors :

$$\int_a^b u(t)\, v^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, u^{(k)}(t)\, v^{(n-1-k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)}(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t$$

<u>Démonstration</u>

Nous allons faire cette démonstration par récurrence sur n

1. **Vérifions pour $n = 1$**

   Elle est évidemment vraie pour $n = 1$, puisque c'est la formule d'intégration par parties classique
2. **Supposons la propriété vraie à l'ordre n**
3. **Démontrons que cette propriété est vraie à l'ordre $n+1$**

   Soient donc u et v 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a;b]$, et nous allons calculer $\displaystyle\int_a^b u(t)\, v^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$

→ Pour commencer, nous allons considérer que $v^{(n+1)}(t) = \left(v^{(n)}\right)'(t)$, de telle sorte que l'intégrale de départ $\displaystyle\int_a^b u(t)\, v^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$ devient :

$$\int_a^b u(t)\, v^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b u(t) \left(v^{(n)}\right)'(t)\ \mathrm{d}t$$

à laquelle nous allons appliquer l'intégration par parties classique

→ Nous posons donc :

$$\left[\begin{array}{ll} U(t) = u(t) & U'(t) = u'(t) \\ V'(t) = \left(v^{(n)}\right)'(t) & V(t) = v^{(n)}(t) \end{array}\right]$$

De telle sorte que :

$$\int_a^b u(t)\, v^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = [U(t)\, V(t)]_a^b - \int_a^b U'(t)\, V(t)\ \mathrm{d}t = \left[u(t)\, v^{(n)}(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\, v^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t$$

→ Nous allons, maintenant, nous intéresser à l'intégrale $\displaystyle\int_a^b u'(t)\, v^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t$

Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a;b]$, la fonction u' est alors de classe $\mathcal{C}^n$ et v est aussi de classe $\mathcal{C}^n$, on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence et nous avons :

$$\begin{aligned} \int_a^b u'(t)\, v^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t = & \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, u'^{(k)}(t)\, v^{(n-1-k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n+1)}(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t \\ = & \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, u^{(k+1)}(t)\, v^{(n-1-k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n+1)}(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

→ En ré-injectant ce que nous venons de trouver, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_a^b u(t)\, v^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = & \left[u(t)\, v^{(n)}(t)\right]_a^b - \left(\left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, u^{(k+1)}(t)\, v^{(n-1-k)}(t)\right]_a^b + \right. \\ & \left. (-1)^n \int_a^b u^{(n+1)}(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b u(t)\, v^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = & \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1}\, u^{(k+1)}(t)\, v^{(n-1-k)}(t) + u(t)\, v^{(n)}(t)\right]_a^b + \\ & (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)}(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t \\ = & \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\, u^{(k)}(t)\, v^{(n-k)}(t) + u(t)\, v^{(n)}(t)\right]_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)}(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t \\ = & \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, u^{(k)}(t)\, v^{(n-k)}(t)\right]_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)}(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

→ Nous avons donc :

$$\int_a^b u(t)\, v^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, u^{(k)}(t)\, v^{(n-k)}(t)\right]_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)}(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t$$

Ce que nous voulions

7.4.8 Proposition : translation et changement d'échelle

1. **Translation**
   Soit $c \in \mathbb{R}$ et $f : [a+c; b+c] \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a+c; b+c]$. Alors :
$$\int_a^b f(x+c)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,\mathrm{d}y$$
2. **Changement d'échelle**
   Soit $c \in \mathbb{R}^*$ et $f : [ac; bc] \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[ac; bc]$ [1]. Alors :
$$\int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Démonstration

1. **On démontre que** $\displaystyle\int_a^b f(x+c)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,\mathrm{d}y$
   Soit g la fonction suivante définie sur $[a; b]$ par :
$$\begin{cases} g : [a;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & g(x) = f(x+c) \end{cases}$$
   - ▷ A chaque subdivision S de $[a;b]$ $S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\}$ correspond une subdivision S' de $[a+c; b+c]$ $S' = \{a+c = s'_0 < s'_1 = s_1 + c < \cdots < s'_n = b+c\}$
   - ▷ f étant intégrable sur $[a+c; b+c]$, y est bornée ; de par sa définition, g est aussi bornée. De plus, nous avons :
$$\inf_{x\in[s_{i-1};s_i[} g(x) = \inf_{x\in[s_{i-1}+c;s_i+c[} f(x) \text{ et } \sup_{x\in[s_{i-1};s_i[} g(x) = \sup_{x\in[s_{i-1}+c;s_i+c[} f(x)$$
     De telle sorte que $\sigma(g,S) = \sigma(f,S')$ et $\Sigma(g,S) = \Sigma(f,S')$
   - ▷ On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{S}'$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a+c; b+c]$. La correspondance :
$$\begin{array}{rcl} \tau_c : \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S}' \\ S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\} & \longmapsto & \tau_c(S) = S' = \{a+c = s'_0 < s'_1 = s_1 + c < \cdots < s'_n = b+c\} \end{array}$$
     est une bijection. Et donc :
$$\inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(g,S) = \inf_{S'\in\mathcal{S}'} \Sigma(f,S') \text{ et } \sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(g,S) = \sup_{S'\in\mathcal{S}'} \sigma(f,S')$$
   - ▷ La fonction f étant intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a+c; b+c]$, nous avons $\displaystyle\inf_{S'\in\mathcal{S}'} \Sigma(f,S') = \sup_{S'\in\mathcal{S}'} \sigma(f,S') = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,\mathrm{d}y$
     Nous avons donc $\displaystyle\inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(g,S) = \sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(g,S)$, ce qui montre que g est intégrable sur $[a;b]$, que $\displaystyle\inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(g,S) = \sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(g,S) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, et qu'en sus :
$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,\mathrm{d}y \Longleftrightarrow \int_a^b f(x+c)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,\mathrm{d}y$$

   Ce que nous voulions

1. Bien entendu, si $c > 0$, nous avons bien l'intervalle $[ac; bc]$ et si $c < 0$, c'est l'intervalle $[bc; ac]$

2. **On démontre que** $\displaystyle\int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(y)\,\mathrm{d}y$

→ On suppose $c > 0$

Soit g la fonction suivante définie sur $[a;b]$ par :

$$\begin{cases} g : [a;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & g(x) = f(xc) \end{cases}$$

▷ A chaque subdivision S de $[a;b]$ $S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\}$ correspond une subdivision S' de $[ac;bc]$ $S' = \{ac = s'_0 < s'_1 = s_1c < \cdots < s'_n = bc\}$

▷ f étant intégrable sur $[ac;bc]$, y est bornée ; de par sa définition, g est aussi bornée. De plus, nous avons :

$$\inf_{x\in[s_{i-1};s_i[} g(x) = \inf_{x\in[s_{i-1};s_i[} f(cx) = \inf_{u\in[cs_{i-1};cs_i[} f(u) \tag{7.1}$$

Rappelons que $\sigma(g,S) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1})\inf_{x\in[s_{i-1};s_i[} g(x)$ et que

$$\sigma(f,S') = \sum_{i=1}^{n}(cs_i - cs_{i-1})\inf_{u\in[cs_{i-1};cs_i[} f(u) = c\sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1})\inf_{u\in[cs_{i-1};cs_i[} f(u)$$

De l'égalité 7.1, nous tirons que $\sigma(f,S') = c\sigma(g,S)$

De la même manière, nous démontrerions que $\Sigma(f,S') = c\Sigma(g,S)$

▷ On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{S}'$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[ac;bc]$. La correspondance :

$$\begin{array}{rcl} H_c : \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S}' \\ S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\} & \longmapsto & H_c(S) = S' = \{ac = s'_0 < s'_1 = s_1c < \cdots < s'_n = bc\} \end{array}$$

est une bijection. Et donc :

$$c\inf_{S\in\mathcal{S}}\Sigma(g,S) = \inf_{S'\in\mathcal{S}'}\Sigma(f,S') \text{ et } c\sup_{S\in\mathcal{S}}\sigma(g,S) = \sup_{S'\in\mathcal{S}'}\sigma(f,S')$$

▷ La fonction f étant intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[ac;bc]$, nous avons $\displaystyle\inf_{S'\in\mathcal{S}'}\Sigma(f,S') = \sup_{S'\in\mathcal{S}'}\sigma(f,S') = \int_{ac}^{bc} f(y)\,\mathrm{d}y$

Nous avons donc $\displaystyle\inf_{S\in\mathcal{S}}\Sigma(g,S) = \sup_{S\in\mathcal{S}}\sigma(g,S)$, ce qui montre que g est intégrable sur $[a;b]$, que $\displaystyle\inf_{S\in\mathcal{S}}\Sigma(g,S) = \sup_{S\in\mathcal{S}}\sigma(g,S) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, et qu'en sus :

$$c\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{ac}^{bc} f(y)\,\mathrm{d}y \Longleftrightarrow c\int_a^b f(xc)\,\mathrm{d}x = \int_{ac}^{bc} f(y)\,\mathrm{d}y \Longleftrightarrow \int_a^b f(xc)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(y)\,\mathrm{d}y$$

→ On suppose $c < 0$

Nous avons alors $bc < ac$.

A toute subdivison S de $[a;b]$ $S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\}$ correspond une subdivision S' de $[bc;ac]$

$$S' = \{bc = s'_0 = cs_n < s'_1 = s_{n-1}c < \cdots < s'_k = cs_{n-k} < s'_n = ac = cs_0\}$$

Nous avons

$$\left(s'_i - s'_{i-1}\right) = cs_{n-i} - cs_{n-i+1} = -c\left(s_{n-i+1} - s_{n-i}\right)$$

De telle sorte que $\sigma(f,S') = -c\Sigma(g,S)$.

De la même manière on démontrerait que $\Sigma(f,S') = -c\sigma(g,S)$

En utilisant les mêmes arguments d'intégrabilité qu'au point précédent, nous obtenons

$$-c\int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}x = \int_{cb}^{ca} f(u)\,\mathrm{d}u \Longleftrightarrow \int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{c}\int_{cb}^{ca} f(u)\,\mathrm{d}u \Longleftrightarrow \int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(u)\,\mathrm{d}u$$

Ce que nous voulions

Remarque 24 :

L'intérêt de ces deux énoncés est qu'ils sont valables **avec n'importe quelle fonction f Riemann-intégrable.**

Exemple 8 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur tout segment $[a;b] \subset \mathbb{R}$, périodique de période T, c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons : $f(x+T) = f(x)$

1. **Pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons $\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^{a+T} f(u)\,\mathrm{d}u$**

   Soit donc $a \in \mathbb{R}$; en utilisant la relation de Chasles, nous avons :

   $$\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u + \int_a^{a+T} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{a+T}^T f(u)\,\mathrm{d}u$$

   D'après 7.4.8, nous avons, pour tout $a \in \mathbb{R}$ $\int_0^a f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_{0+T}^{a+T} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_T^{a+T} f(u)\,\mathrm{d}u$

   De la périodicité de f, nous avons :
   $\int_0^a f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$, et donc $\int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_{a+T}^T f(u)\,\mathrm{d}u$

   En conclusion, $\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^{a+T} f(u)\,\mathrm{d}u$

2. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\int_a^{a+nT} f(u)\,\mathrm{d}u = n\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$**

   Cette démonstration se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$
   - ▷ C'est bien sûr vrai pour $n = 0$, puisque $0 \times \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^a f(u)\,\mathrm{d}u = 0$
   - ▷ Supposons que $\int_a^{a+nT} f(u)\,\mathrm{d}u = n\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$
   - ▷ Démontrons la propriété à l'ordre $n+1$.
     Alors :

   $$\begin{aligned}\int_a^{a+(n+1)T} f(u)\,\mathrm{d}u &= \int_a^{a+nT} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{a+nT}^{a+(n+1)T} f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_a^{a+nT} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{a+nT}^{a+nT+T} f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= n\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u \text{ (hypothèse de récurrence et question précédente)} \\ &= (n+1)\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\int_a^{a+nT} f(u)\,\mathrm{d}u = n\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$

3. **Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\int_a^{a+nT} f(u)\,\mathrm{d}u = n\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$**

   La question a déjà été démontrée sur $\mathbb{N}$. Nous allons le faire maintenant pour les entiers négatifs. Soit donc $n \in \mathbb{Z}^-$, c'est à dire que n est un entier négatif ; on pose $n' = -n$; alors :

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+nT} f(u)\,\mathrm{d}u &= \int_a^{a-n'T} f(u)\,\mathrm{d}u \\
&= -\int_{a-n'T}^{a} f(u)\,\mathrm{d}u \\
&= -\int_{a-n'T}^{a-n'T+n'T} f(u)\,\mathrm{d}u \\
&= -n'\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u \\
&= n\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

7.4.9 Proposition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann et admettant, sur l'intervalle $[a;b]$, une primitive F
Soit $[c;d] \subset \mathbb{R}$ un segment de $\mathbb{R}$ et $\varphi : [c;d] \longrightarrow [a;b]$ une fonction dérivable et telle que $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$
On suppose de plus que $f \circ \varphi$ et φ' sont intégrables au sens de Riemann sur $[c;d]$. Alors :

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_c^d (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Démonstration

1. Si $f \circ \varphi$ et φ' sont intégrables au sens de Riemann sur $[c;d]$, alors le produit $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ est une fonction Riemann-intégrable sur $[c;d]$
2. Comme F est une primitive de F, nous avons $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = F(b) - F(a)$
3. La fonction $F \circ \varphi$ est dérivable de dérivée $(F \circ \varphi)' = F' \circ \varphi \times \varphi' = f \circ \varphi \times \varphi'$ et donc :

$$\begin{aligned}
\int_c^d (F \circ \varphi)'(u)\,\mathrm{d}u &= [(F \circ \varphi)(u)]_c^d = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

Et donc, $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_c^d (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$

Remarque 25 :

1. Les hypothèses de la proposition sont vérifiées si f est continue sur l'intervalle $[a;b]$ et φ de classe $\mathcal{C}^1$
2. Les hypothèses de la proposition sont tout autant vérifiées si f est continue par morceaux sur l'intervalle $[a;b]$ et φ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

7.4.10 Corollaire

1. **Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann et admettant, sur l'intervalle $[a;b]$, une primitive F**
2. **Soit $[c;d] \subset \mathbb{R}$ un segment de $\mathbb{R}$ et $\varphi : [c;d] \longrightarrow [a;b]$ une fonction dérivable**

3. On suppose F intégrable au sens de Riemann sur le segment d'extrémités $\varphi(d)$ et $\varphi(c)$ (c'est à dire sur les intervalles $[\varphi(d);\varphi(c)]$ ou $[\varphi(c);\varphi(d)]$)

4. On suppose de plus que $f\circ\varphi$ et φ' sont intégrables au sens de Riemann sur $[c;d]$.

Alors

1. Le produit $(f\circ\varphi)\times\varphi'$ est une fonction Riemann-intégrable sur $[c;d]$

2. $\displaystyle\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_c^d (f\circ\varphi)(u)\times\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$

Exemple 9 :

1. **Calculer** $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}\,\mathrm{d}t$

   Voilà un exemple qui ne vole pas très haut.

   ▷ D'abord, faire un changement de variable n'est pas très utile ! ! En effet, si $u(t)=1+e^t$, l'expression $\dfrac{e^t}{e^t+1}=\dfrac{u'(t)}{1+u(t)}$ admet pour primitive la fonction $\ln u(t)$, de telle sorte que :

   $$\int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left(e^t+1\right)\right]_0^x = \ln\left(e^x+1\right)-\ln 2$$

   ▷ Mais, pour le sport, faisons un changement de variable en posant $u=e^t$. Alors :

   $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=e^t \iff \mathrm{d}u=e^t\,\mathrm{d}t$$

   D'où :

   $$\int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}\,\mathrm{d}t = \int_1^{e^x}\frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \left[\ln(1+u)\right]_1^{e^x} = \ln\left(e^x+1\right)-\ln 2$$

2. **Calculer** $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{t^6+1}\,\mathrm{d}t$

   Faisons, ici, le changement de variables $u=t^3$, alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=3t^2 \iff \dfrac{\mathrm{d}u}{3}=t^2\,\mathrm{d}t$. D'où :

   $$\int_0^x \frac{t^2}{t^6+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_0^{x^3}\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \left[\arctan u\right]_0^{x^3} = \arctan x^3$$

   Et voilà le travail