7.5 Fonctions à valeurs complexes

7.5.1 Définition

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Nous écrivons :

$$f = \mathrm{Re}\,(f) + i\,\mathrm{Im}\,(f)$$

Où $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont des fonctions définies sur l'intervalle $[a; b]$ et à valeurs réelles
On dit que f est Riemann-intégrable sur $[a; b]$ si et seulement si $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont des fonctions Riemann-intégrable sur $[a; b]$ et nous avons alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f)(x)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b \mathrm{Im}\,(f)(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 26 :

1. Donc, par définition :

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f)(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Im}\,(f)(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Les propriétés des fonctions à valeurs complexes Riemann-intégrables seront déduites des propriétés des fonctions Riemann-intégrables à valeurs réelles

7.5.2 Proposition

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions à valeurs complexes Riemann-intégrables sur l'intervalle $[a; b]$. Alors :

1. **Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et tout $\beta \in \mathbb{C}$,** $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
2. **Nous avons :** $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$
3. **Nous avons, pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$,** $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant (b-a)\sup_{x\in[a;b]}|f(x)|$

Démonstration

1. La démonstration du premier point est évidemment la conséquence de la linéarité de l'intégration des fonctions numériques à valeurs réelles Riemann-intégrables.
2. La proposition a déjà été démontrée pour les fonctions numériques à valeurs réelles et Riemann-intégrables. La démonstration pour les fonctions à valeurs complexes n'est pas aussi évidente. Nous allons commencer par démontrer un lemme *(qui pourrait être un exercice sur les nombres complexes)*

   Lemme

   Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$|\alpha x + \beta y| \leqslant \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,|z|$$

Démonstration

→ En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons $|\alpha x+\beta y| \leqslant |\alpha x|+|\beta y|$, c'est à dire qu'en élevant au carré :

$$|\alpha x+\beta y|^2 \leqslant (|\alpha x|+|\beta y|)^2 = \alpha^2 x^2+\beta^2 y^2+2|\alpha||x||\beta||y|$$

→ Nous utilisons, maintenant, une inégalité classique :

$$2|\alpha||x||\beta||y| = 2|\beta||x||\alpha||y| = 2|\beta x||\alpha y| \leqslant (\beta x)^2+(\alpha y)^2$$

→ Et alors :

$$|\alpha x+\beta y|^2 \leqslant \alpha^2x^2+\beta^2y^2+(\beta x)^2+(\alpha y)^2 = \left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(x^2+y^2\right) = \left(\alpha^2+\beta^2\right)|z|^2$$

C'est à dire $|\alpha x+\beta y| \leqslant \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,|z|$

Ce que nous voulions

▷ Nous avons

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 &= \left(\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\right)^2+\left(\mathrm{Im}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\right)^2\\ &= \left(\int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

▷ D'autre part, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$,comme nous avons des fonctions à valeurs réelles, nous avons :

$$\begin{aligned}\left|\alpha\int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b \alpha\,\mathrm{Re}(f)(x)+\beta\,\mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant \int_a^b \left|\alpha\,\mathrm{Re}(f)(x)+\beta\,\mathrm{Im}(f)(x)\right|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

▷ D'après le lemme :

$$\left|\alpha\,\mathrm{Re}(f)(x)+\beta\,\mathrm{Im}(f)(x)\right| \leqslant \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,|f(x)|$$

D'où en intégrant :

$$\int_a^b \left|\alpha\,\mathrm{Re}(f)(x)+\beta\,\mathrm{Im}(f)(x)\right|\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

En synthèse :

$$\left|\alpha\int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

▷ Choisissons $\alpha=\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x$ et $\beta=\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\left|\alpha\int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\left(\int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\right|\\ &= \left(\int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &= \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|^2\end{aligned}$$

Et donc :

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{\left(\int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right)^2} = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

L'inégalité de synthèse devient :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 \leqslant \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \times \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Ce que nous voulions

3. L'inégalité $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant (b-a)\sup\limits_{x\in[a;b]}|f(x)|$ est des plus classiques et est une conséquence de l'inégalité précédente

Remarque 27 :

Il y a une autre façon, tout aussi alambiquée, de démontrer que $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Soit donc $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a;b]$

1. Si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, comme $|f(x)| \geqslant 0$, nous avons $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ et donc

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

2. Supposons, maintenant que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ soit un réel strictement positif; alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

puisque $\mathrm{Re}(f)(x) \leqslant |f(x)|$

3. Supposons que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ soit un complexe non nul.

   Alors, nous pouvons écrire $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

   ▷ Nous avons $\rho = e^{-i\theta} \times \rho e^{i\theta} = e^{-i\theta}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b e^{-i\theta} f(x)\,\mathrm{d}x$

   ▷ Nous avons $\int_a^b e^{-i\theta} f(x)\,\mathrm{d}x$ qui est donc un réel strictement positif, et donc, d'après le point précédent :

$$\left|\int_a^b e^{-i\theta} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b \left|e^{-i\theta} f(x)\right|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

   ▷ D'autre part :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|e^{-i\theta}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b e^{-i\theta} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

   Comme $\left|\int_a^b e^{-i\theta} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$, nous avons $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

Et voilà le travail !!

Remarque 28 :

Tous les résultats de l'intégration au sens de Riemann pour les fonctions réelles s'appliquent aux fonctions à valeurs complexes.