7.6 Exercices complémentaires

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};+1\right]$ par

$$f(x) = \frac{2}{3+\left[\frac{1}{x}\right]} \text{ où } [\bullet] \text{ désigne la partie entière}$$

Faire une représentation graphique de f et calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(x)\ dx$

Exercice 9 :

Les 2 questions de cet exercice sont indépendantes, mais liées par le même thème

1. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < c$ et soit $f : [a;c] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann. Montrer que :

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \max\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x; \frac{1}{c-b}\int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x\right\}$$

2. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions numériques réelles intégrables au sens de Riemann. Montrer que :
   (a) $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Inf}(f,g)(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{Inf}\left(\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t; \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t\right)$
   (b) $\displaystyle\int_a^b \sup(f,g)(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \sup\left(\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t; \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t\right)$

Exercice 10 :

1. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, **continue et positive**, c'est à dire telle que $(\forall x \in [a;b])\,(f(x) \geqslant 0)$. On suppose de plus que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0$.
   Démontrez que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[a;b]$
2. Soient $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, **continue**. On pose $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ et on suppose que

$$\int_a^b f(t)\ dt = M(b-a)$$

   Démontrer que f est une fonction constante.

Exercice 11 :

Une histoire de points fixes

1. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ telle qu'il existe $x_1 \in [a;b]$ telle que $f(x_1) > 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0$. Démontrer qu'il existe $x_2 \in [a;b]$ telle que $f(x_2) < 0$
2. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ Montrer que f a un point fixe.

Exercice 12 :

Cet exercice est en lien avec l'exercice précédent et l'inégalité de Cauchy-Schwarz
Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions intégrables au sens de Riemann sur l'intervalle $[a;b]$
On suppose que ces deux fonctions vérifient la relation :

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\;\mathrm{d}x\right]^2 = \int_a^b (f(x))^2\;\mathrm{d}x \times \int_a^b (g(x))^2\;\mathrm{d}x$$

Et que $\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\;\mathrm{d}x \times \int_a^b (g(x))^2\;\mathrm{d}x \neq 0$

1. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^b (f(x) - kg(x))^2\;\mathrm{d}x = 0$
2. Que conclure si les 2 fonctions f et g sont continues sur l'intervalle $[a;b]$?

Exercice 13 :

Le Lemme de Riemann-Lebesgue
Cet exercice est sur un thème commun. On commence par une question facile -résolue dans le cours de L_0*-, pour terminer par des questions plus complexes.*

1. Soient $a \in \mathbb{R}$, et $b \in \mathbb{R}$ tels que que $a < b$. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a;b]$. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin ntdt = 0$
2. Soit f une fonction en escalier sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. Démontrez que :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\;dx = 0$$
3. Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. Démontrez que :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\;dx = 0$$
4. *Que se passe-t-il si on modifie un tout petit peu l'énoncé, en y ajoutant, par exemple une valeur absolue ? C'est l'objet de cette question*
Soit donc f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a\ ;\ b]$. montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\;dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\;dx$$

Exercice 14 :

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue telle que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\;dt\right| = \int_a^b |f(t)|\;dt$.
Montrer que f a un signe constant sur l'intervalle $[a;b]$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 15 :

Formules de la moyenne

1. <u>Première formule de la moyenne</u>
Soient a et b 2 nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
On appelle : $m = \displaystyle\inf_{x\in[a;b]} f(x)$ et $M = \displaystyle\sup_{x\in[a;b]} f(x)$
   (a) Démontrer qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = \displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\;dt$

(b) En donner une interprétation géométrique

2. Seconde formule de la moyenne
Nous nous mettons dans les hypothèses de la question précédente, c'est à dire :
— a et b sont 2 nombres réels tels que $a < b$;
— $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue
— On appelle $m = \inf\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$
On suppose de plus que $g : [a; b] \to \mathbb{R}$ est une fonction positive et intégrable.
(a) Montrer que $F : [a; b] \to \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = f(x) \displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ est continue, et trouver ses extrema en fonction de m et M
(b) Montrer que nous avons $m \displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \leq M \int_a^b g(t)\,dt$
(c) En déduire qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = f(c) \int_a^b g(t)\,dt$
(d) Que pouvez vous dire lorsque g est la fonction constante toujours égale à 1 ?

Exercice 16 :

Voici une rafale de questions qui portent toutes sur le même thème, mais qui conservent un degré certain d'indépendance

1. Soient a et b 2 nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. Soit $u : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive, c'est à dire telle que pour tout $x \in [a; b]$, $u(x) > 0$
Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n\, u(x)\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{x \in [a;b]} |f(x)|$
2. Dans cette question, on suppose que, pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \neq 0$ *(c'est à dire que, comme f est continue, ou bien $f(x) > 0$, ou bien $f(x) < 0$)*. Donner alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^{-n}\, u(x)\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{-1}{n}}$

7.6.1 Sommes de Riemann

Exercice 17 :

1. En utilisant les sommes de Riemann, calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 18 :

Donner $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)}$

Exercice 19 :

Mise à part la question 4, ce n'est pas, à proprement parler, un exercice sur les sommes de Riemann. C'est, par contre, l'étude de la série harmonique, un exemple important de série numérique divergente

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$
Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$

2. On appelle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Démontrer que $\ln(n+1) \leqslant S_n$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$
3. Démontrer qu'en $+\infty$, $S_n \underset{+\infty}{\simeq} \ln n$
4. Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Donner la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\alpha + k\beta}$. Faire le lien avec les questions précédentes

Exercice 20 :

Démontrer que $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{+\infty}{\approx} 2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n}$

Exercice 21 :

Sans utiliser de primitive, calculer, pour $a < b$, l'intégrale $\int_a^b e^x \, \mathrm{d}x$

Exercice 22 :

Soient $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann sur $[0;1]$ et $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et à dérivée bornée.
Il faut montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, g(x) \, \mathrm{d}x$$

Exercice 23 :

Soient $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0;1]$ et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Il faut montrer que :

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi \circ f(x) \, \mathrm{d}x$$

C'est **l'inégalité de Jensen**

Exercice 24 :

Soient $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$ et telle que cette dérivée soit bornée sur $]0;1[$. On appelle $M = \sup_{x \in]0;1[} |f'(x)|$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\left| \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{2n}$$

Exercice 25 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère la subdivision de l'intervalle $[a;b]$ à pas constant $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour $k = 0, \ldots, n$. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$. Donner :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(n \left(\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \right) \right)$$

7.6.2 Calculs de primitives

Exercice 26 :

Calculer $\int_0^{\pi} e^{(1+i)t} \, dt$. En déduire $\int_0^{\pi} e^t \cos t dt$

Exercice 27 :

Le symbole $\int f(t)\,dt$ désigne l'ensemble des primitives. Donner :

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{ch}x}$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x}dx$
3. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}dx$

7.6.3 Intégrales fonctions de la borne inférieure ou supérieure

Exercice 28 :

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[-1;+1]$. Démontrer que la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_0^{\sin x} f(t)\,dt$$

est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 29 :

On considère la fonction partie entière notée $[x]$. Pour $x > 0$, on considère $F(x) = \displaystyle\int_0^x [t]\,dt$

1. Calculez F et démontrez qu'elle est continue.
2. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Que manque-t-il pour qu'elle soit dérivable ? ?

Exercice 30 :

Soit k un réel strictement positif. On considère la fonction F définie pour $x > 0$ par :

$$F(x) = \int_0^1 s^k \sin sx\; ds$$

1. Etablir l'égalité $F(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}} \displaystyle\int_0^x u^k \sin u\; du$
2. En déduire que F est dérivable pour $x > 0$ et vérifie la relation $xF'(x) + (k+1)F(x) = \sin x$

Exercice 31 :

On considère une fonction f, continue sur l'intervalle $[0,1]$.
On définit F sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \min(x,t)\, f(t)\,dt$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer F''
2. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\,dt \right) du$

Exercice 32 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ +1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

On pose $F(x) = \displaystyle\int_{1-x}^{1+x} f(t)\;\; dt$

1. Vérifier que F est impaire et que l'on peut donc restreindre l'étude à $[0\ ;\ +\infty[$. Tracer la représentation graphique de F
2. En quels points F est-elle dérivable ? ?
3. On pose $G(x) = \int_{1-x}^{1+x} F(t)\ dt$. G est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? En tracer la représentation graphique

Exercice 33 :

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et F la fonction définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\ dt \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } F(0) = f(0)$$

1. Montrer que F est continue en 0
2. En prenant pour f, la fonction valeur absolue, montrer que F n'est pas forcément dérivable.

Exercice 34 :

Soit $a > 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$ telle que $f(0) = 0$
L'objet de l'exercice est de démontrer que $\int_0^a |f(x) f'(x)|\ dx \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a (f'(x))^2\ dx$

1. Montrer que $g(x) = \int_0^x |f'(t)|\ dt$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$ telle que $g(0) = 0$
2. Vérifier que $f(x) = \int_0^x f'(t)\ dt$ et démontrer que $|f(x)| \leqslant g(x)$
3. En déduire que $\int_0^a |f(x) f'(x)|\ dx \leqslant \frac{1}{2}(g(a))^2$
4. En utilisant l'inégalité de Schwarz, démontrez que $(g(a))^2 \leqslant a\int_0^a (f'(x))^2\ dx$ et conclure

7.6.4 Suites et intégrales

Exercice 35 :

On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Exercice 36 :

Donner

1. $\lim\limits_{a\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\sin x)\ \mathrm{d}x$
2. $\lim\limits_{a\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\sin x}\, \mathrm{d}x$

Exercice 37 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales I_n et J_n, définies par :

$$I_n = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^{\frac{n}{2}} \ dt \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n \ du$$

1. En faisant un changement de variables approprié, démontrez que $I_n = J_{n+1}$
2. Démontrez que nous avons $0 \leqslant J_{n+1} \leqslant J_n$
3. (a) Montrer que nous avons $J_n = J_{n-2} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \cos^2 u \ du$
   (b) On appelle $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \cos^2 u \ \ du$; en intégrant par parties, montrez que $K_n = \dfrac{1}{n-1} J_n$
   (c) En déduire que $J_n = \dfrac{n-1}{n} J_{n-2}$ et que $I_n = \dfrac{n}{n+1} I_{n-2}$
4. (a) En déduire que $I_{2p} = \dfrac{\left(2^p \times p!\right)^2}{(2p+1)!}$
   (b) En déduire que $I_{2p+1} = \dfrac{(2p+2)!}{\left(2^{p+1}(p+1)!\right)^2} \dfrac{\pi}{2}$
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

7.6.5 Miscelleanous

Exercice 38 :

Sur les suites équiréparties

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite numérique telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0;1]$.
Pour tout $\alpha \in [0;1]$ et tout $\beta \in [0;1]$ tels que $\alpha \leqslant \beta$, on pose :

$$k_n(\alpha, \beta) = \text{Card}\ \{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } \alpha \leqslant u_n \leqslant \beta\}$$

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est **équirépartie** si, pour tout $\alpha \in [0;1]$ et tout $\beta \in [0;1]$ tels que $\alpha \leqslant \beta$, alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{k_n(\alpha, \beta)}{n} = \beta - \alpha$

1. **Propriétés élémentaires**
   (a) Démontrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie, alors elle n'admet pas de limite
   (b) Démontrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie, alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} k_n(\alpha, \beta) = +\infty$
   (c) Démontrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie, alors l'ensemble $S = \{u_n \text{ où } n \in \mathbb{N}^*\}$ des termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dense dans $[0;1]$
2. **Une simplification du critère**
   Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $[0;1]$. Pour tout $\alpha \in [0;1]$ et tout $\beta \in [0;1]$ tels que $\alpha < \beta$, on pose :
   $$K_n(\alpha, \beta) = \text{Card}\ \{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } \alpha < u_n < \beta\}$$
   Et
   $$K_n(\beta) = K_n(0, \beta) = \text{Card}\ \{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } 0 < u_n < \beta\} \text{ pour } 0 < \beta \leqslant 1$$
   Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si, pour tout $\beta \in]0;+1]$, nous avons $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{K_n(\beta)}{n} = \beta$

3. **Caractérisation des suites équiréparties**
Démontrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si pour toute application f intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[0;1]$, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n)}{n}\right)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

4. Soient $\alpha\in[0;1]$ et $\beta\in[0;1]$ tels que $\alpha\leqslant\beta$. Nous appelons $S_n(\alpha,\beta)$ la somme des u_i tels que $1\leqslant i\leqslant n$ et $\alpha<u_i<\beta$. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n(\alpha,\beta)}{n}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$