7.7 Quelques exercices corrigés

Exercice 2 :

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable et à valeurs positives. Démontrer que la fonction $\sqrt{f}$ est intégrable sur l'intervalle $[a;b]$

Rien de bien sorcier : il suffit de réutiliser la démonstration de 7.3.7
Nous appelons donc E_f l'ensemble des discontinuités de la fonction f et $E_{\sqrt{f}}$ est l'ensemble des discontinuités de la fonction $\sqrt{f}$
Nous savons que la fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et comme f est à valeurs positives, la fonction $\sqrt{f}$ est bien définie sur l'intervalle $[a;b]$
Par composition, la fonction $\sqrt{f}$ est continue partout où f est continue et donc $E_f = E_{\sqrt{f}}$.
f étant intégrable, E_f est négligeable et donc $E_{\sqrt{f}}$ aussi.
Ainsi, $\sqrt{f}$ est intégrable au sens de Riemann

Exercice 3 :

Soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions intégrables au sens de Riemann. Démontrer que les fonctions $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont intégrables au sens de Riemann sur $[a;b]$

Très simple : il suffit de remarquer que $\min(f,g) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$ et $\max(f,g) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ et de conclure en utilisant le fait que les fonctions intégrables forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Exercice 4 :

1. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*
   Soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions intégrables au sens de Riemann. Démontrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\;\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\;\mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b (g(t))^2\;\mathrm{d}t}$$

La démonstration n'est pas nouvelle!!
Soit t un réel quelconque. Par le corollaire 7.3.7, puisque f et g sont intégrables au sens de Riemann, les fonctions f^2, g^2, fg et $(tf+g)^2$ sont aussi intégrables au sens de Riemann.

De manière classique, posons $P(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))^2\;\mathrm{d}t$

Il est clair que $P(\lambda)$ est positif ou nul pour tout λ réel. Or en développant le carré $(\lambda f(t) + g(t))^2$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale, nous obtenons :

$$P(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b (f(t))^2\;\mathrm{d}t + 2\lambda \int_a^b f(t)\,g(t)\;\mathrm{d}t + \int_a^b (g(t))^2\;\mathrm{d}t$$

On reconnaît, là, un trinôme du second degré du type $A\lambda^2 + B\lambda + C$ dont les coefficients A, B et C sont des intégrales. Ce trinôme ne peut avoir de signe constant, celui de $A = \displaystyle\int_a^b (f(t))^2\;\mathrm{d}t$, que si son discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$ est négatif ou nul
Remplaçant A, B et C par leurs expressions sous forme d'intégrales, on en déduit :

$$\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\;\mathrm{d}t\right)^2 - \int_a^b (f(t))^2\;\mathrm{d}t \int_a^b (g(t))^2\;\mathrm{d}t \leqslant 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\;\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\;\mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b (g(t))^2\;\mathrm{d}t}$$

Q.E.D.

mathinfovannes.free.fr

2. *Applications de l'inégalité de Schwarz*

   (a) *Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$\left(\int_0^1 x^k f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{2k+1}\int_0^1 f(x)^2\,dx$$

Nous avons $g(x) = x^k$, et donc, en appliquant l'inégalité de Schwarz, nous avons :

$$\left(\int_0^1 x^k f(x)\,dx\right)^2 \overset{\text{Schwarz}}{\leqslant} \int_0^1 \left(x^k\right)^2 dx \times \int_0^1 (f(x))^2\,dx = \int_0^1 x^{2k} dx \times \int_0^1 (f(x))^2\,dx = \frac{1}{2k+1}\int_0^1 f(x)^2\,dx$$

   (b) *On suppose, cette fois ci que $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$, intégrable. Montrer que*

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 f(x)^2\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx$$

Pas de grande nouveauté : on choisit, ici $g(x) = 1$, et donc, en appliquant l'inégalité de Schwarz, nous avons :

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \overset{\text{Schwarz}}{\leqslant} \int_0^1 1^2 dx \times \int_0^1 (f(x))^2\,dx = \int_0^1 (f(x))^2\,dx$$

Or, comme f est à valeurs dans $[0;1]$, nous avons $(f(x))^2 \leqslant f(x)$. En utilisant la positivité de l'intégrale, nous avons : $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx$.

En synthèse, nous avons bien $\displaystyle\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx$

   (c) *Soit f une fonction continue sur $[0;1]$, à valeurs réelles strictement positives. Montrer que :*

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \geqslant 1$$

▷ De manière simple, nous avons :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 \mathrm{d}x \text{ et } \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

▷ D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\left(\int_0^1 f(x) \times \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 \mathrm{d}x \times \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

▷ Comme $\displaystyle\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \times \frac{1}{f(x)}\right)^2 = 1$ et

$$\int_0^1 \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 \mathrm{d}x \times \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\right)^2 \mathrm{d}x = \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)$$

Nous avons bien :

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \geqslant 1$$

mathinfovannes.free.fr ©

Ce que nous voulions

(d) *Soient $f:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 2 fonctions intégrables sur $[a;b]$ telles que il existe $\lambda>0$ tel que pour tout $x\in[a;b]$, $f(x)\,g(x)\geqslant\lambda$. Démontrer que*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\times\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\lambda(b-a)^2$$

▷ Tout d'abord, f et g ne s'annulent jamais sur $[a;b]$ puisque si il existe $x_0\in[a;b]$ tel que $f(x_0)=0$, alors $f(x)\,g(x)=0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
D'autre part, comme nous avons $f(x)\,g(x)\geqslant\lambda>0$, f et g sont de même signe sur $[a;b]$

▷ Supposons que pour tout $x\in[a;b]$, nous ayions $f(x)>0$ et $g(x)>0$
Posons $\varphi(x)=\sqrt{f(x)}$ et $\psi(x)=\sqrt{g(x)}$ et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à φ et ψ :

$$\left(\int_a^b\varphi(t)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_a^b(\varphi(t))^2\,\mathrm{d}t\times\int_a^b(\psi(t))^2\,\mathrm{d}t$$

C'est à dire :

$$\left(\int_a^b\sqrt{f(x)\,g(x)}\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\times\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, $\sqrt{f(x)\,g(x)}\geqslant\sqrt{\lambda}$, et donc :

$$\left(\int_a^b\sqrt{f(x)\,g(x)}\,\mathrm{d}t\right)^2\geqslant\left(\int_a^b\sqrt{\lambda}\,\mathrm{d}t\right)^2=\left(\sqrt{\lambda}\,(b-a)\right)^2=\lambda(b-a)^2$$

Nous avons donc : $\lambda(b-a)^2\leqslant\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\times\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

▷ La démonstration pour le cas où pour tout $x\in[a;b]$, nous avons $f(x)<0$ et $g(x)<0$ est tout à fait semblable

Ce que nous voulions

Exercice 5 :

Je dirais volontiers que cet exercice est un peu tarabiscoté ; il y a tellement plus simple pour résoudre la question ! ! Cependant, je l'ai laissé dans son jus, tel que je l'ai trouvé, puisqu'il met en pratique les sommes de Riemann.... Donc.....

1. *Soit $x>0$. Démontrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}e^{\frac{px}{n}}=\frac{e^x-1}{x}$

▷ Premièrement, nous pouvons écrire $e^{\frac{px}{n}}=\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^p$, de telle sorte que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}e^{\frac{px}{n}}=\sum_{p=0}^{n-1}\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^p$ et cette somme apparaît donc comme la somme des termes d'une suite géométrique. Donc :

$$\sum_{p=0}^{n-1}e^{\frac{px}{n}}=\sum_{p=0}^{n-1}\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^p=\frac{1-\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{x}{n}}}=\frac{1-e^x}{1-e^{\frac{x}{n}}}$$

▷ De telle sorte que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}e^{\frac{px}{n}}=\frac{1}{n}\times\frac{1-e^x}{1-e^{\frac{x}{n}}}$.
Or, $\displaystyle\frac{1}{n}\times\frac{1}{1-e^{\frac{x}{n}}}=\frac{1}{x}\times\frac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}}$ et, pour terminer :

$$\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}e^{\frac{px}{n}}=\frac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}}\times\frac{1-e^x}{x}$$

▷ Pour connaître la limite lorsque n tend vers $+\infty$, nous allons utiliser la limite remarquable :

$$\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{e^u-1}=1$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{n}=0$, nous avons donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}}=-1$

Et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}e^{\frac{px}{n}}=-1\times\frac{1-e^x}{x}=\frac{e^x-1}{x}$

Ce que nous voulions

2. *Utiliser ce résultat pour établir que pour tout nombre $x>0$ $\displaystyle\int_0^x e^t\,\mathrm{d}t=e^x-1$*

▷ Pour résoudre cette question, nous subdivisons l'intervalle $[0;x]$ en n intervalles de longueur égale à $\dfrac{x}{n}$.

Nous obtenons ainsi une subdivision $S=\{0=s_0<s_1<s_2<\cdots<s_n=x\}$ où $s_k=\dfrac{kx}{n}$ pour $k=0,\cdots,n$

▷ Si f est une fonction intégrable sur l'intervalle $[0;x]$, nous avons la somme de Riemann $S_n(f)=\displaystyle\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(s_k)$ qui est telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n(f)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

▷ Pour $f(t)=e^t$ qui est intégrable sur tout intervalle $[0;x]$ où $x>0$, nous avons :

$$S_n(f)=\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{kx}{n}}\quad\text{et}\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{kx}{n}}=\int_0^x e^t\,\mathrm{d}t$$

▷ Nous avons montré, dans la question 1 que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}e^{\frac{px}{n}}=\frac{e^x-1}{x}$, et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{kx}{n}}=x\times\frac{e^x-1}{x}=e^x-1$$

En conclusion $\displaystyle\int_0^x e^t\,\mathrm{d}t=e^x-1$

Exercice 6 :

Soit $\alpha>0$

1. *Pour quelles valeurs de α, l'intégrale $I_\alpha=\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)\mathrm{d}x$ est-elle définie ?*

Il est clair que $\ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)$ est défini si, pour tout $x\in[0;2\pi]$, nous avons $1-2\alpha\cos x+\alpha^2>0$

▷ Appelons $P(\alpha)=1-2\alpha\cos x+\alpha^2$. Considérant P comme un polynôme en α du second degré, le discriminant nous apportera beaucoup d'informations :

$$\Delta=\cos^2 x-1=-\sin^2 x$$

Comme $\Delta\leqslant 0$, alors, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, $P(\alpha)\geqslant 0$
Si $\Delta=0$, alors il existe une valeur de α telle que $P(\alpha)=0$. donc :

$$\Delta=0\iff\sin x=0\iff x=k\pi\text{ avec }k\in\mathbb{Z}$$

Et alors, $P(\alpha)$ devient :

$$P(\alpha)=1-2\alpha\cos k\pi+\alpha^2=1-2\alpha(-1)^k+\alpha^2=\left(\alpha-(-1)^k\right)^2$$

Ainsi $P(\alpha)$ s'annule si $\alpha=-1$ ou si $\alpha=1$, lorsque x, considéré comme paramètre, vout $x=k\pi$

- ▷ Comme nous avons choisi $\alpha > 0$, nous excluons donc la valeur $\alpha = 1$. Ainsi,l'intégrale I_α est définie si $\alpha > 0$ et $\alpha \neq +1$
- ▷ Si $\alpha = 1$, alors $f(x) = \ln\left(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2\right)$ devient $f(x) = \ln\left(2\left(1 - \cos x\right)\right)$, laquelle n'est pas définie en $x = 0$

2. *Donner la valeur de cette intégrale I_α lorsqu'elle est définie.*

Ainsi, nous choisissons $\alpha > 0$ et $\alpha \neq +1$.

Pour calculer cette intégrale, nous allons utiliser les sommes de Riemann.

- ▷ Nous divisons donc l'intervalle $[0; 2\pi]$ en n subdivisions à pas constants, c'est à dire une subdivision $S = \{0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 2\pi\}$ où $s_k = \dfrac{2k\pi}{n}$ où $k = 0, \cdots, n$.

  La somme de Riemann associée est donc $S_n(f) = \dfrac{2\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(s_k) = \dfrac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1 - 2\alpha\cos\frac{2k\pi}{n} + \alpha^2\right)$.

  D'après le théorème 7.3.12, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1 - 2\alpha\cos\frac{2k\pi}{n} + \alpha^2\right) = \int_0^{2\pi}\ln\left(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2\right)\,dx$$

- ▷ Première remarque, nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1 - 2\alpha\cos\frac{2k\pi}{n} + \alpha^2\right) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - 2\alpha\cos\frac{2k\pi}{n} + \alpha^2\right)\right)$.
- ▷ Considérons le polynôme $1 - 2\alpha\cos\dfrac{2k\pi}{n} + \alpha^2$

  Ce polynôme admet 2 racines complexes et conjuguées $\alpha_1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et $\alpha_2 = e^{\frac{-2ik\pi}{n}}$, de telle sorte que $1 - 2\alpha\cos\dfrac{2k\pi}{n} + \alpha^2 = \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(1 - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right)$.

  Donc :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - 2\alpha\cos\frac{2k\pi}{n} + \alpha^2\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(1 - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right)$$

- ▷ $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine n-ième de 1, et la famille $\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}; 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$ est la famille de toutes les racines n-ièmes de 1 et donc

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = (\alpha^n - 1)$$

  De même, $e^{\frac{-2ik\pi}{n}}$ est une racine n-ième de 1, et la famille $\left\{e^{\frac{-2ik\pi}{n}}; 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$ est la famille de toutes les racines n-ièmes de 1 et donc

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right) = (\alpha^n - 1)$$

  De telle sorte que :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(1 - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right) = (\alpha^n - 1)^2 = |\alpha^n - 1|^2$$

- ▷ Nous avons maintenant $S_n(f) = \dfrac{2\pi}{n}\ln|\alpha^n - 1|^2 = \dfrac{4\pi}{n}\ln|\alpha^n - 1|$

  $\longrightarrow$ <u>Supposons $0 < \alpha < 1$</u>

  Alors, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\alpha^n = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln|\alpha^n - 1| = 0$; comme nous avons aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{4\pi}{n} = 0$, nous en concluons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n(f) = 0$, c'est à dire :

$$I_\alpha = \int_0^{2\pi}\ln\left(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2\right)\,dx = 0$$

mathinfovannes.free.fr©

$\longrightarrow$ Supposons $\alpha > 1$

Alors $\ln|\alpha^n - 1| = \ln\left(\alpha^n \left|1 - \frac{1}{\alpha^n}\right|\right) = n\ln\alpha + \ln\left|1 - \frac{1}{\alpha^n}\right|$ et donc :

$$S_n(f) = \frac{4\pi}{n}\left(n\ln\alpha + \ln\left|1 - \frac{1}{\alpha^n}\right|\right) = 4\pi\ln\alpha + \frac{4\pi}{n}\ln\left|1 - \frac{1}{\alpha^n}\right|$$

En suivant le raisonnement de tout à l'heure, *(puisque si* $\alpha > 1$*, alors* $\frac{1}{\alpha} < 1$*)*, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4\pi}{n}\ln\left|1 - \frac{1}{\alpha^n}\right| = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = 4\pi\ln\alpha$, c'est à dire :

$$I_\alpha = \int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2\right) \mathrm{d}x = 4\pi\ln\alpha$$

Exercice 7 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, nous considérons la fonction $I_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$ Trouver une relation de récurrence permettant le calcul de $I_n(x)$.

1. Nous faisons donc une intégration par parties
   - $\triangleright$ Nous avons donc :
   $$\begin{bmatrix} u' = 1 & u = t \\ v = \dfrac{1}{(1+t^3)^n} & v' = \dfrac{-3nt^2}{(1+t^3)^{n+1}} \end{bmatrix}$$
   Nous avons alors :
   $$I_n(x) = \left[\frac{t}{(1+t^3)^n}\right]_0^x + 3n\int_0^x \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{(1+x^3)^n} + 3n\int_0^x \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$
   - $\triangleright$ Penchons nous maintenant sur $\int_0^x \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$

   Nous pouvons écrire :
   $$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{t^3+1-1}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{t^3+1}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{1}{(1+t^3)^n}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = I_n(x) - I_{n+1}(x)\end{aligned}$$
   - $\triangleright$ Nous en déduisons donc que $I_n(x) = \frac{x}{(1+x^3)^n} + 3n\left(I_n(x) - I_{n+1}(x)\right)$

   C'est à dire : $3nI_{n+1}(x) = (3n-1)I_n(x) + \frac{x}{(1+x^3)^n}$
2. **Pour connaître les intégrales successives, calculons $I_1(x)$**

   Nous avons $I_1(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$
   - $\triangleright$ Nous commençons par décomposer en éléments simples $\frac{1}{1+t^3}$. Clairement, après calculs classiques, nous avons :
   $$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{t^2-t+1}\right)$$
   - $\triangleright$ Nous avons $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(1+x)$

▷ D'autre part, $t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$. D'où :

$$\int_0^x \frac{2-t}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{2-t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t$$

Faisons le changement de variables $u=t-\frac{1}{2}$ et alors $\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$. Alors,

$$\int_0^x \frac{2-t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{2}-u}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u=\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u-\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u$$

▷ Intéressons nous à l'intégrale $\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u$, parce que c'est la plus simple !! Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{2u}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)\\
&= \ln\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)
\end{aligned}$$

▷ Considérons, maintenant, l'intégrale $\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u &= \frac{3}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{3}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}u^2+1\right)}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}\,\mathrm{d}u\\
&= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Faisons le changement de variables $v=\frac{2u}{\sqrt{3}}$ et donc $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{2}{\sqrt{3}} \Longleftrightarrow \mathrm{d}u=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}v$ et donc :

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u &= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}\,\mathrm{d}u\\
&= 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)} \frac{1}{(v^2+1)}\,\mathrm{d}v\\
&= \sqrt{3}\left[\arctan v\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)}\\
&= \sqrt{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right)-\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\\
&= \sqrt{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right)+\frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

En remontant, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= \frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right)+\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right)+\frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

mathinfovannes.free.fr ©

7.7.1 Correction des exercices complémentaires

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};+1\right]$ par

$$f(x)=\frac{2}{3+\left[\frac{1}{x}\right]} \text{ où } [\bullet] \text{ désigne la partie entière}$$

Faire une représentation graphique de f et calculer $\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(x)\ dx$

Petit rappel simple à faire : pour $x\in\mathbb{R}$, nous avons toujours $[x]\leqslant x<[x]+1$

Donc, pour $x\in\left]\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{3}\right]$, nous avons $3\leqslant\frac{1}{x}<4$, et donc $\left[\frac{1}{x}\right]=3$ d'où $f(x)=\frac{2}{3+3}=\frac{1}{3}$

Par des calculs semblables :

- Si $x\in\left]\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{2}\right]$, $f(x)=\frac{2}{3+2}=\frac{2}{5}$
- Si $x\in\left]\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$, $f(x)=\frac{2}{3+1}=\frac{1}{2}$
- $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{7}$

D'où le graphe (figure 7.2)

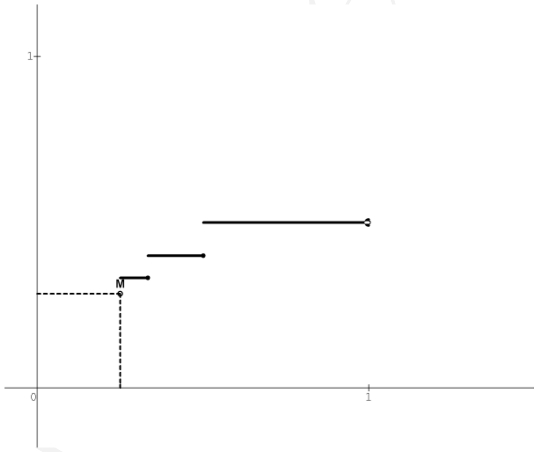

FIGURE 7.2 – Le graphe de f

Et maintenant, il ne reste plus qu'à donner l'intégrale :

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(x)\ dx=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{31}{90}$$

Exercice 9 :

1. *Soient $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$ tels que $a<b<c$ et soit $f:[a;c]\longrightarrow\mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann. Montrer que :*

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\max\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x;\frac{1}{c-b}\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

Nous appelons $M=\max\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x;\frac{1}{c-b}\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\right\}$. Alors :

▷ Nous avons, de manière évidente :

$$M \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow M(b-a) \geqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

et

$$M \geqslant \frac{1}{c-b}\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow M(c-b) \geqslant \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

▷ En additionnant, nous obtenons :

$$M(b-a) + M(c-b) \geqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow M(c-a) \geqslant \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

C'est à dire $M \geqslant \frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, autrement dit :

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \max\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x; \frac{1}{c-b}\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

Q.E.D.

2. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions numériques réelles intégrables au sens de Riemann.*

(a) *Montrer que* $\int_a^b \mathrm{Inf}(f,g)(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{Inf}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t; \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$

Nous avons déjà montré dans le cours que si f et g étaient 2 fonctions numériques réelles intégrables au sens de Riemann alors $\mathrm{Inf}(f,g)$ était une fonction Riemann-Intégrable.

D'autre part, nous avons $\mathrm{Inf}(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$ et donc :

$$\int_a^b \mathrm{Inf}(f,g)(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t\right)$$

Nous avons

$$\left|\int_a^b f(t)-g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t \Longleftrightarrow -\left|\int_a^b f(t)-g(t)\,\mathrm{d}t\right| \geqslant -\int_a^b |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t$$

C'est à dire :

$$\int_a^b \mathrm{Inf}(f,g)(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \left|\int_a^b f(t)-g(t)\,\mathrm{d}t\right|\right)$$

Or, $\left|\int_a^b f(t)-g(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right|$, et donc :

$$\int_a^b \mathrm{Inf}(f,g)(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right|\right)$$

Or, $\mathrm{Inf}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t; \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right|\right)$

Nous avons donc bien $\int_a^b \mathrm{Inf}(f,g)(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{Inf}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t; \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$

(b) *Montrer que* $\int_a^b \sup(f,g)(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \sup\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t; \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$

La démonstration de cette inégalité est absolument semblable ; il suffit de partir de l'égalité $\sup(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et de dérouler ensuite la démonstration.

mathinfovannes.free.fr ©

Cette question donne une démonstration d'une inégalité qui porrait être intéressante :

$$\boxed{\int_a^b \mathrm{Inf}\,(f,g)\,(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{Inf}\left(\int_a^b f\,(t)\ \mathrm{d}t; \int_a^b g\,(t)\ \mathrm{d}t\right) \leqslant \sup\left(\int_a^b f\,(t)\ \mathrm{d}t; \int_a^b g\,(t)\ \mathrm{d}t\right) \leqslant \int_a^b \sup\,(f,g)\,(t)\ \mathrm{d}t}$$

Exercice 10 :

1. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et positive, c'est à dire telle que $(\forall x \in [a;b])\,(f\,(x) \geqslant 0)$. On suppose de plus que $\int_a^b f\,(t)\ \mathrm{d}t = 0$. Démontrez que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[a;b]$*

   Supposons que f soit non nulle sur l'intervalle $[a;b]$, c'est à dire qu'il existe $x_0 \in [a;b]$ tel que $f\,(x_0) \neq 0$

   De la continuité de f, pour $\varepsilon = \dfrac{|f\,(x_0)|}{2} > 0$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$, si $|x - x_0| < \eta_\varepsilon$, alors $|f\,(x) - f\,(x_0)| \leqslant \dfrac{|f\,(x_0)|}{2}$

   Remarquons que l'inégalité triangulaire nous permet d'écrire :

   $$||f\,(x)| - |f\,(x_0)|| \leqslant |f\,(x) - f\,(x_0)| \leqslant \frac{|f\,(x_0)|}{2} \Longrightarrow -\frac{|f\,(x_0)|}{2} \leqslant |f\,(x)| - |f\,(x_0)| \leqslant \frac{|f\,(x_0)|}{2}$$

   Ainsi si $x \in [a;b]$, si $|x - x_0| < \eta_\varepsilon$, alors $|f\,(x)| \geqslant \dfrac{|f\,(x_0)|}{2}$.

   Appelons $\alpha = \max\{a; x_0 - \eta_\varepsilon\}$ et $\beta = \min\{b; x_0 + \eta_\varepsilon\}$; ainsi, si $x \in [a;b]$ est tel que $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ alors $|f\,(x)| \geqslant \dfrac{|f\,(x_0)|}{2}$. Nous avons alors :

   $$\int_a^b f\,(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_\alpha^\beta f\,(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{|f\,(x_0)|}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{|f\,(x_0)|}{2}\,(\beta - \alpha) > 0$$

   Ce qui est donc en contradiction avec le fait que $\int_a^b f\,(t)\ \mathrm{d}t = 0$

   Ainsi, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f\,(x) = 0$ et la fonction f est donc nulle sur l'intervalle $[a;b]$.

   Ce que nous voulions.

2. *Soient $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. On pose $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f\,(x)$ et on suppose que*

   $$\int_a^b f\,(t)\ dt = M\,(b - a)$$

   Démontrer que f est une fonction constante.

   - ⋆ Premièrement, il faut faire remarque que, f étant continue sur $[a;b]$, l'existence de M est bien réelle.
   - ⋆ D'autre part, la fonction $g = M - f$ est une fonction continue et positive sur $[a;b]$
   - ⋆ De plus $M\,(b - a) = \int_a^b M\ dt$, et nous avons donc :

   $$M\,(b-a) - \int_a^b f\,(t)\ dt = \int_a^b M\ dt - \int_a^b f\,(t)\ dt = \int_a^b M - f\,(t)\ dt = \int_a^b g\,(t)\ dt = 0$$

   Comme g est positive sur $[a;b]$ et que $\int_a^b g\,(t)\ dt = 0$ on en déduit que g est nulle sur $[a;b]$, et donc, que pour tout $x \in [a;b]$, $M - f\,(x) = 0 \Longleftrightarrow M = f\,(x)$. f est donc constante sur l'intervalle $[a;b]$

Exercice 11 :

1. *Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ telle qu'il existe $x_1 \in [a;b]$ telle que $f(x_1) > 0$ et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Démontrer qu'il existe $x_2 \in [a;b]$ telle que $f(x_2) < 0$*

   Supposons que, pour tout $x \in [a;b]$, nous ayions $f(x) \geqslant 0$; alors, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ ce qui est compatible avec $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
   On sait qu'il existe $x_1 \in [a;b]$ telle que $f(x_1) > 0$; comme f est continue, il existe un intervalle $[\alpha;\beta]$, contenant x_1 tel que, pour tout $x \in [\alpha;\beta]$, nous ayions $f(x) > 0$. Soit $m = \inf\limits_{x\in[\alpha;\beta]} f(x)$; alors $m > 0$ et nous avons $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x > m(\beta-\alpha) > 0$, et alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > m(\beta-\alpha) > 0$$

   Cette inégalité esr contradictoire avec l'hypothèse $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
   Il existe donc $x_2 \in [a;b]$ telle que $f(x_2) < 0$
   De la continuité de f sur l'intervalle $[a;b]$, par le théorème de la valeur intermédiaire, on peut déduire qu'il existe $x_0 \in]x_1;x_2[$ tel que $f(x_0) = 0$

2. *Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ vérifiant $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Montrer que f a un point fixe.*

   Considérons la fonction $g(x) = f(x) - x$
   (a) g est continue sur $[0;1]$ comme somme de fonctions continues sur $[0;1]$
   (b) Nous avons $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) - x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 0$
   (c) Supposons que f n'admette pas de point fixe, c'est à dire qu'il n'existe pas de point $x_0 \in [0;1]$ tel que $f(x_0) = x_0$ ou, ce qui est équivalent, qu'il n'existe pas de point $x_0 \in [0;1]$ tel que $g(x_0) = 0$
   g étant continue sur $[0;1]$, alors g ne change pas de signe sur $[0;1]$; Ainsi, supposons que, pour tout $x \in [0;1]$, $g(x) > 0$. Alors, comme l'intégrale respecte la relation d'ordre, $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x > 0$, ce qui est en contradiction avec le fait que $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
   Ainsi, l'hypothèse que nous avons faite que f n'admette pas de point fixe est fausse, et donc il existe $x_0 \in [0;1]$ tel que $f(x_0) = x_0$

Exercice 12 :

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions intégrables au sens de Riemann sur l'intervalle $[a;b]$ On suppose que ces deux fonctions vérifient la relation :

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 = \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x \times \int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x$$

Et que $\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x \times \int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x \neq 0$

1. *Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b (f(x) - kg(x))^2\,\mathrm{d}x = 0$*

mathinfovannes.free.fr ©

→ Considérons l'expression $P(k) = \int_a^b (f(x) - kg(x))^2 \, \mathrm{d}x$. En développant l'intérieur de l'intégrale, nous avons :

$$\begin{aligned} P(k) = \int_a^b (f(x) - kg(x))^2 \, \mathrm{d}x &= \int_a^b (f(x))^2 + k^2 (g(x))^2 - 2kf(x) g(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x + k^2 \int_a^b (g(x))^2 \, \mathrm{d}x - 2k \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x \\ &= k^2 \int_a^b (g(x))^2 \, \mathrm{d}x - 2k \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

→ P apparaît ainsi comme un polynôme du second degré en k dont nous cherchons des racines ; le discriminant Δ est donné par :

$$\Delta = \left(\int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_a^b (g(x))^2 \, \mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x\right) = 0$$

puisque nous avons, par hypothèses $\left[\int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x\right]^2 = \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x \times \int_a^b (g(x))^2 \, \mathrm{d}x$

P admet donc une racine double $k_0 = \dfrac{\int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x}{\int_a^b (g(x))^2 \, \mathrm{d}x}$

→ Ce nombre k_0 que nous venons de trouver vérifie donc $\int_a^b (f(x) - k_0 g(x))^2 \, \mathrm{d}x = 0$

2. *Que conclure si les 2 fonctions f et g sont continues sur l'intervalle $[a;b]$?*

   Si f et g sont continues sur $[a;b]$, alors, d'après l'exercice précédent, $f(x) - k_0 g(x) = 0$, c'est à dire :

$$f(x) = k_0 g(x) \Longleftrightarrow f(x) = g(x) \times \frac{\int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x}{\int_a^b (g(x))^2 \, \mathrm{d}x}$$

Exercice 13 :

1. *Soit f une fonction en escalier sur l'intervalle $[a;b]$. Démontrez que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0$$

   (a) <u>Nous allons d'abord démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sin nx \, dx = 0$</u>

   Cette question n'est pas très difficile : c'est un simple calcul de primitive.

$$\int_a^b \sin nx \, dx = \left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_a^b = \frac{\cos na - \cos nb}{n}$$

   Or, $\left|\dfrac{\cos na - \cos nb}{n}\right| \leqslant \dfrac{2}{n}$ Comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, nous en déduisons que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\cos na - \cos nb}{n} = 0$, autrement dit, que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sin nx \, dx = 0$

   (b) <u>Soit f une fonction en escalier sur $[a;b]$</u>

Soit $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ une subdivision de $[a\ ;\ b]$ adaptée à f. Pour simplifier, nous écrivons, pour $x \in]a_k\ a_{k+1}[$, $f(x) = \lambda_k$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \sin nx\ dx &= \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) \sin nx\ dx \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} \sin nx\ dx\end{aligned}$$

En adaptant ce qui a été trouvé ci-dessus, nous pouvons écrire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \sin nx\ dx = 0$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x) \sin nx\ dx &= \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc, si f est une fonction en escalier sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(x) \sin nx\ dx = 0$

2. *Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. Démontrez que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x) \sin nx\ dx = 0$$

Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$

(a) L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a\ ;\ b]$ est dense dans l'espace des fonctions continues par morceaux sur $[a\ ;\ b]$, c'est à dire qu'il existe φ, fonction en escalier sur $[a\ ;\ b]$ telle que $\forall x \in [a\ ;\ b]$ nous ayons $|f(x) - \varphi(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$

(b) Nous avons $f(x) \sin nx = f(x) \sin nx - \varphi(x) \sin nx + \varphi(x) \sin nx$, et donc :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x) \sin nx\ dx\right| &= \left|\int_a^b f(x) \sin nx - \varphi(x) \sin nx\ dx + \int_a^b \varphi(x) \sin nx\ dx\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^b f(x) \sin nx - \varphi(x) \sin nx\ dx\right| + \left|\int_a^b \varphi(x) \sin nx\ dx\right|\end{aligned}$$

(c) Nous regardons le premier membre $\left|\int_a^b f(x) \sin nx - \varphi(x) \sin nx\ dx\right|$

Nous avons :

$$\left|\int_a^b f(x) \sin nx - \varphi(x) \sin nx\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,|\sin nx|\ dx \leqslant \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\ dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \times (b-a)$$

(d) Nous regardons le second membre $\left|\int_a^b \varphi(x) \sin nx\ dx\right|$

Nous savons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\int_a^b \varphi(x) \sin nx\ dx\right| = 0$, il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N_\varepsilon$, alors $\left|\int_a^b \varphi(x) \sin nx\ dx\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

(e) Donc, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N_\varepsilon$, alors :

$$\left|\int_a^b f(x) \sin nx\ dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On vient donc de montrer que si f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\ dx = 0$

3. *Soit donc f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a\ ;\ b]$. montrer que :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\left|\sin nx\right|\ dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx$$

Le résultat de cet exercice ne manque pas d'intriguer. L'ajout d'une simple valeur absolue modifie la limite!!
La résolution de cette question est très classique :
- ▷ On démontre d'abord le résultat pour les fonctions étagées *(ou en escalier)*
- ▷ Puis, on conclue par densité

(a) On montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b \left|\sin nx\right|\ dx = \frac{2}{\pi}\times(b-a)$

Il est intéressant de remarquer que $\int_a^b \left|\sin nx\right|\ dx = \int_0^b \left|\sin nx\right|\ dx - \int_0^a \left|\sin nx\right|\ dx$ et que les deux dernières intégrales sont semblables.

Nous allons donc étudier $\int_0^b \left|\sin nx\right|\ dx$ et nous en déduirons le résultat. Nous allons montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^b \left|\sin nx\right|\ dx = \frac{2}{\pi}\times b$

i. Par le changement de variable $u = nx$, pour lequel nous avons $dx = \frac{du}{n}$, nous obtenons :

$$\int_0^b \left|\sin nx\right|\ dx = \frac{1}{n}\int_0^{nb}\left|\sin u\right|\ du$$

ii. Il faut remarquer que la fonction $\left|\sin u\right|$ est périodique et de période π, et que, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\int_t^{t+\pi}\left|\sin u\right|\ du = \int_0^{\pi}\left|\sin u\right|\ du = \int_0^{\pi}\sin u\ du = [\cos u]_0^{\pi} = 2$$

iii. Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\pi \leqslant nb < (k+1)\pi$, c'est à dire que $k = \left[\frac{nb}{\pi}\right]$ où le symbole $[\bullet]$ désigne la partie entière. Alors :

$$\int_0^{nb}\left|\sin u\right|\ du = \int_0^{k\pi}\left|\sin u\right|\ du + \int_{k\pi}^{nb}\left|\sin u\right|\ du$$

iv. Regardons $\int_0^{k\pi}\left|\sin u\right|\ du$

$$\begin{aligned}\int_0^{k\pi}\left|\sin u\right|\ du &= \sum_{j=0}^{k-1}\int_{j\pi}^{(j+1)\pi}\left|\sin u\right|\ du\\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\int_0^{\pi}\left|\sin u\right|\ du = 2k\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{n}\int_0^{k\pi}\left|\sin u\right|\ du = \frac{2k}{n}$

v. Il faut maintenant rechercher $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k}{n}$

Nous avons $\left[\dfrac{nb}{\pi}\right] \leqslant \dfrac{nb}{\pi} < \left[\dfrac{nb}{\pi}\right] + 1$, c'est à dire

$$\frac{nb}{\pi} - 1 < \left[\frac{nb}{\pi}\right] \leqslant \frac{nb}{\pi} \Longleftrightarrow \frac{b}{\pi} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n}\left[\frac{nb}{\pi}\right] \leqslant \frac{b}{\pi}$$

C'est à dire

$$\frac{b}{\pi} - \frac{1}{n} < \frac{k}{n} \leqslant \frac{b}{\pi}$$

Et nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k}{n} = \dfrac{b}{\pi}$

Et on conclue donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{k\pi} |\sin u| \ du = \dfrac{2b}{\pi}$

vi. Regardons, maintenant $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{k\pi}^{nb} |\sin u| \ du$

Nous avons :

$$\left|\frac{1}{n}\int_{k\pi}^{nb} |\sin u| \ du\right| = \frac{1}{n}\int_{k\pi}^{nb} |\sin u| \ du \leqslant \frac{nb - k\pi}{n}$$

De l'inégalité $k\pi \leqslant nb < (k+1)\,\pi$ on déduit $0 \leqslant nb - k\pi < \pi$, et donc nous déduisons que

$$\left|\frac{1}{n}\int_{k\pi}^{nb} |\sin u| \ du\right| \leqslant \frac{nb - k\pi}{n} \leqslant \frac{\pi}{n}$$

Et nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{k\pi}^{nb} |\sin u| \ du = 0$

vii. En conclusion, nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b |\sin nx| \ dx = \dfrac{2}{\pi} \times b$

De l'égalité $\displaystyle\int_a^b |\sin nx| \ dx = \int_0^b |\sin nx| \ dx - \int_0^a |\sin nx| \ dx$, nous déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b |\sin nx| \ dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^b |\sin nx| \ dx - \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^a |\sin nx| \ dx$, c'est à dire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |\sin nx| \ dx = \frac{2}{\pi} \times b - \frac{2}{\pi} \times a = \frac{2}{\pi} \times (b - a)$$

Ce que nous voulions.

(b) Soit f une fonction en escalier sur $[a \ ; \ b]$

Soit $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ une subdivision de $[a \ ; \ b]$ adaptée à f. Pour simplifier, nous écrivons, pour $x \in \left]a_k \ a_{k+1}\right[$, $f(x) = \lambda_k$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,|\sin nx| \ dx &= \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,|\sin nx| \ dx \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\sin nx| \ dx \end{aligned}$$

En adaptant ce qui a été trouvé ci-dessus, nous pouvons écrire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\sin nx| \ dx = \frac{2\,(a_{k+1} - a_k)}{\pi}$$

De telle sorte que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx &= \sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k \times \frac{2\,(a_{k+1}-a_k)}{\pi}\\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k\,(a_{k+1}-a_k)\\ &= \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx\end{aligned}$$

(c) Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\ ;\ b]$

Nous allons conclure la question en montrant que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx$

Soit $\varepsilon > 0$

Nous allons essayer de majorer $\left|\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx\right|$

i. L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a\ ;\ b]$ est dense dans l'espace des fonctions continues par morceaux sur $[a\ ;\ b]$, c'est à dire qu'il existe φ, fonction en escalier sur $[a\ ;\ b]$ telle que $\forall x\in[a\ ;\ b]$ nous ayons $|f(x)-\varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3\,(b-a)}$

ii. Nous allons évaluer $\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx$ en introduisant des quantités qui pourront nous aider :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx = & \int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx - \int_a^b \varphi(x)\,|\sin nx|\ dx\\ & + \int_a^b \varphi(x)\,|\sin nx|\ dx - \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(x)\ dx\\ & + \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(x)\ dx - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx\end{aligned}$$

Et en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant & \left|\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx - \int_a^b \varphi(x)\,|\sin nx|\ dx\right|\\ & + \left|\int_a^b \varphi(x)\,|\sin nx|\ dx - \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(x)\ dx\right|\\ & + \left|\frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(x)\ dx - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx\right|\end{aligned}$$

iii. Etudions le premier terme $\left|\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx - \int_a^b \varphi(x)\,|\sin nx|\ dx\right|$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx - \int_a^b \varphi(x)\,|\sin nx|\ dx\right| &= \left|\int_a^b (f(x)-\varphi(x))\,|\sin nx|\ dx\right|\\ &\leqslant \int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,|\sin nx|\ dx\\ &\leqslant \int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\ dx\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3\,(b-a)}\,(b-a) \text{ (lié à la densité des fonctions étagées)}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

Cette majoration est une majoration uniforme sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$

iv. Etudions le second terme $\left| \int_a^b \varphi(x) |\sin nx| \ dx - \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi(x) \ dx \right|$

Nous avons montré que $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi(x) |\sin nx| \ dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi(x) \ dx$.

Il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N_\varepsilon$, alors $\left| \int_a^b \varphi(x) |\sin nx| \ dx - \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi(x) \ dx \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

v. Pour le troisième terme $\left| \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi(x) \ dx - \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) \ dx \right|$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{2}{\pi} \int_a^b \varphi(x) \ dx - \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) \ dx \right| &= \left| \frac{2}{\pi} \int_a^b (\varphi(x) - f(x)) \ dx \right| \\
&\leqslant \frac{2}{\pi} \int_a^b |\varphi(x) - f(x)| \ dx \\
&\leqslant \frac{2}{\pi} \times \frac{\varepsilon}{3(b-a)} (b-a) \text{ (toujours lié à la densité des fonctions étagées} \\
&\leqslant \frac{2}{\pi} \times \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

A nouveau, cette majoration est une majoration uniforme sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$

Ainsi, pour un $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N_\varepsilon$, alors

$$\left| \int_a^b f(x) |\sin nx| \ dx - \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) \ dx \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Nous venons donc de montrer que si f une fonction continue par morceaux sur $[a\ ;\ b]$, alors $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) |\sin nx| \ dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) \ dx$

Exercice 14 :

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue telle que $\left| \int_a^b f(t) \ dt \right| = \int_a^b |f(t)| \ dt$. Montrer que f a un signe constant sur l'intervalle $[a;b]$. La réciproque est-elle vraie ?

1. Pour commencer, supposons $f(t) \geqslant 0$

   Alors $\left| \int_a^b f(t) \ dt \right| = \int_a^b f(t) \ dt$, et l'égalité $\left| \int_a^b f(t) \ dt \right| = \int_a^b |f(t)| \ dt$ devient

   $$\int_a^b |f(t)| \ dt = \int_a^b f(t) \ dt \Longleftrightarrow \int_a^b |f(t)| - f(t) \ dt = 0$$

   Comme nous avons $f \leqslant |f|$, c'est à dire $|f(t)| - f(t) \geqslant 0$, de l'égalité $\int_a^b |f(t)| - f(t) \ dt = 0$, nous tirons que $|f(t)| - f(t) = 0$, c'est à dire que f est positive sur l'intervalle $[a;b]$
2. Si nous supposons, maintenant que $f(t) \leqslant 0$, la démonstration est tout à fait semblable.
3. Et évidemment, la réciproque est vraie!!!

Exercice 15 :

Seconde formule de la moyenne

Nous nous mettons dans les hypothèses suivantes :

$\Rightarrow$ *a et b sont 2 nombres réels tels que $a < b$;*

$\Rightarrow$ *$f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue*

$\Rightarrow$ On appelle $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$
On suppose de plus que $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ est une fonction positive et intégrable.

1. *Montrer que $F : [a;b] \to \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = f(x)\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ est continue, et trouver ses extrema en fonction de m et M*

   Puisque g est positive et intégrable sur $[a;b]$, nous avons $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \geqslant 0$; c'est donc un nombre positif ; appelons le k. Donc, $F(x) = kf(x)$, et, comme f est continue, F l'est aussi.
   Bien entendu, du fait que g est positive, nous avons $m\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \leqslant F(x) \leqslant M\int_a^b g(t)\,dt$

2. *Montrer que nous avons $m\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \leqslant M\int_a^b g(t)\,dt$*

   Nous avons, bien entendu, $m \leqslant f(t) \leqslant M$; en multipliant par $g(t) \geqslant 0$, nous obtenons :
   $$mg(t) \leqslant f(t)\,g(t) \leqslant Mg(t)$$
   En passant à l'intégration, nous obtenons le résultat.

3. *En déduire qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$*

   Nous venons de montrer que le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ était compris entre les extrema de F. F étant une fonction continue, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, F atteint ses bornes et toutes valeurs comprises entre ses bornes. Il existe donc $c \in [a;b]$ tel que $F(c) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$, c'est à dire tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$

4. *Que pouvez vous dire lorsque g est la fonction constante toujours égale à 1 ?*

   Si g est la fonction constante toujours égale à 1, alors g est positive et intégrable et il existe donc $c \in [a;b]$ tel que
   $$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)\int_a^b dt = (b-a)\,f(c)$$
   C'est la première formule de la moyenne

Exercice 16 :

1. *Soient a et b 2 nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. Soit $u : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive, c'est à dire telle que pour tout $x \in [a;b]$, $u(x) > 0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^n\,u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f(x)|$*

   (a) f est continue sur l'intervalle $[a;b]$, et donc, par composée des applications, $|f|$ est aussi continue sur l'intervalle $[a;b]$ et donc $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f(x)|$ est bien défini et est même atteint.
   Il existe donc $x_0 \in [a;b]$ tel que $|f(x_0)| = M$

   (b) Si $M = 0$, alors, bien évidemment, pour tout $x \in [a;b]$ nous avons $f(x) = 0$ et donc $\left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^n\,u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = 0$ et l'inégalité est vérifiée

(c) Supposons $M > 0$.
Soit $0 < \varepsilon < M$
Comme il existe $x_0 \in [a;b]$ tel que $|f(x_0)| = M$, il existe donc un intervalle $[\alpha;\beta]$, contenant x_0, tel que, pour tout $x \in [\alpha;\beta]$, nous ayions $M - \varepsilon \leqslant |f(x)| \leqslant M$
Nous en déduisons donc :
$\rightarrow$ Pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $|f(x)|^n \leqslant M^n$ et donc $|f(x)|^n u(x) \leqslant M^n u(x)$
$\rightarrow$ Pour tout $x \in [\alpha;\beta]$, nous avons $(M-\varepsilon)^n \leqslant |f(x)|^n$ et donc $(M-\varepsilon)^n u(x) \leqslant |f(x)|^n u(x)$

(d) Comme la fonction $|f(x)|^n u(x)$ est positive sur l'intervalle $[a;b]$ et que $[\alpha;\beta] \subset [a;b]$, nous avons :

$$0 \leqslant \int_\alpha^\beta |f(x)|^n u(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|^n u(x)\, \mathrm{d}x$$

Et donc

$$(M-\varepsilon)^n \int_\alpha^\beta u(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|^n u(x)\, \mathrm{d}x \leqslant M^n \int_a^b u(x)\, \mathrm{d}x$$

(e) La fonction $r(x) = x^{\frac{1}{n}}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, et donc :

$$(M-\varepsilon)\left(\int_\alpha^\beta u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M\left(\int_a^b u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

(f) L'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta u(x)\, \mathrm{d}x$ est un nombre $K > 0$; et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K^{\frac{1}{n}} = 1$, c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_\alpha^\beta u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

De même, et pour les mêmes raisons, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = 1$

$\Rightarrow$ Il existe donc un entier $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \geqslant N_1$, nous ayions :

$$1 - \varepsilon \leqslant \left(\int_\alpha^\beta u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant 1 + \varepsilon$$

C'est à dire que si $n \geqslant N_1$, alors :

$$(M-\varepsilon)(1-\varepsilon) \leqslant (M-\varepsilon)\left(\int_\alpha^\beta u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

C'est à dire, tous calculs faits :

$$M - \varepsilon(M + 1 - \varepsilon) \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

$\Rightarrow$ De même, il existe un entier $N_2 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \geqslant N_2$, nous ayions :

$$1 - \varepsilon \leqslant \left(\int_a^b u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant 1 + \varepsilon$$

C'est à dire que si $n \geqslant N_2$, alors :

$$\left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M\left(\int_a^b u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M(1+\varepsilon)$$

mathinfovannes.free.fr ©

C'est à dire, tous calculs faits :

$$\left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M + M\varepsilon$$

(g) Ainsi, si $N \geqslant \max\{N_1, N_2\}$, pour tout entier $n \geqslant N$, nous avons :

$$M - \varepsilon(M + 1 - \varepsilon) \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M + M\varepsilon$$
$$\iff$$
$$-\varepsilon(M + 1 - \varepsilon) \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} - M \leqslant M\varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = M$,

c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f(x)|$

Quelques commentaires

- ▷ L'énoncé ci-dessus est un énoncé très général englobant plusieurs autres résultats. Nous pourrions encore trouver plus général :
  Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. Soit $u : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive, c'est à dire telle que pour tout $x \in [a;b]$, $u(x) > 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$. Alors :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^\lambda u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\lambda}} = \sup_{x\in[a;b]} |f(x)|$$

  La généralisation résidant dans le fait que λ est réel, mais la démonstration est semblable
- ▷ Il est possible de faire jouer plusieurs rôles à la fonction u :
  - ⋆ Si u est la fonction constante $u(x) = 1$, nous obtenons le résultat ultra-classique :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{x\in[a;b]} |f(x)|$$

  - ⋆ Si u est la fonction constante $u(x) = \dfrac{1}{b-a}$, nous obtenons le résultat :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{x\in[a;b]} |f(x)|$$

    En fait, nous nous intéressons, ici, à la valeurs moyenne de la fonction $F(x) = |f(x)|^n$ sur l'intervalle $[a;b]$
- ▷ la fonction u est, en fait, une fonction de poids.

2. *Dans cette question, on suppose que, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \neq 0$.*

   Donner alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^{-n} u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{-1}{n}}$

$\longrightarrow$ On pose $g(x) = \dfrac{1}{|f(x)|}$; alors, pour tout $x \in [a;b]$, $g(x) > 0$ et $|f(x)|^{-n} = (g(x))^n$

mathinfovannes.free.fr©

$\longrightarrow$ D'autre part :

$$\left(\int_a^b |f(x)|^{-n} u(x)\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{-1}{n}} = \frac{1}{\left(\int_a^b |f(x)|^{-n} u(x)\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\left(\int_a^b (g(x))^n u(x)\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$\longrightarrow$ Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^{-n} u(x)\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{-1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (g(x))^n u(x)\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sup_{x\in[a;b]} g(x)}$$

$\longrightarrow$ Or, comme $|f|$ est continue sur l'intervalle $[a;b]$, il existe des nombres m et M tels que $m \leqslant |f(x)| \leqslant M$. De plus, comme pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $|f(x)| > 0$, nous avons aussi $m > 0$. Ainsi :

$$m \leqslant |f(x)| \leqslant M \Longleftrightarrow \frac{1}{M} \leqslant \frac{1}{|f(x)|} \leqslant \frac{1}{m} \Longleftrightarrow \frac{1}{M} \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{m}$$

Et donc, $\sup_{x\in[a;b]} g(x) = \dfrac{1}{m}$

Nous en déduisons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^{-n} u(x)\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{-1}{n}} = m = \inf_{x\in[a;b]} |f(x)|$

Exercice 17 :

1. *En utilisant les sommes de Riemann, calculer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

En écrivant $x_k = \dfrac{k}{n}$ et $f(x) = \ln(1+x)$, nous sommes devant une somme de Riemann du type $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ qui admet pour limite $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$. Ici, ce sera donc $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\ dx$ qui se calcule par une intégration par parties. Nous trouvons : $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\ dx = 2\ln 2 - 1$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = 2\ln 2 - 1 = \ln\left(\frac{4}{e}\right)$

2. *En déduire* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Pour nous simplifier la vie, nous écrivons : $A_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Dès lors, nous avons :

$$\begin{aligned}
\ln A_n &= \frac{1}{n}\left\{\ln(2n!) - \ln n! - n\ln n\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left\{\sum_{k=2}^{2n}\ln k - \sum_{k=2}^{n}\ln k - n\ln n\right\} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}(\ln k - \ln n) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\ln\frac{k}{n}
\end{aligned}$$

On pose alors $k' = k - n \Longleftrightarrow k = k' + n$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\ln A_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \ln \frac{k}{n}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k'=1}^{n} \ln\left(\frac{k'+n}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k'=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k'}{n}\right)\end{aligned}$$

D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right) = \ln\left(\dfrac{4}{e}\right)$, donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{4}{e}$

Exercice 18 :

Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)}$

Premièrement, remarquons que $\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)} = \left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$, et qu'en posant $A_n = \left(\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$, nous allons, comme tout à l'heure, utiliser le logarithme de A_n.

$$\begin{aligned}\ln A_n &= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\end{aligned}$$

En écrivant $x_k = \dfrac{k}{n}$ et $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$, nous sommes devant une somme de Riemann du type $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$ qui admet pour limite $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. Ici, ce sera donc $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\,dx$ qui se calcule par une intégration par parties.

$$\begin{array}{ll} u = \ln\left(1+x^2\right) & u' = \dfrac{2x}{1+x^2}\\ v' = 1 & v = x\end{array}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\,dx &= \left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx\\ &= \ln 2 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx\end{aligned}$$

Calculons maintenant $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$

Nous avons : $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{2x^2+2-2}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 2 - \frac{2}{1+x^2}\,dx = \left[2x - 2\arctan x\right]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$

En conclusion, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln A_n = \ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$ et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)} = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$

Exercice 19 :

1. *On considère la fonction* $f : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ *définie par* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *Démontrer que, pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, *nous avons :* $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$

Nous allons utiliser la décroissance de f sur l'intervalle $[k\ ;\ k+1]$. Nous avons, pour $t \in [k\ ;\ k+1]$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

Et, en passant à l'intégration,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} \Longleftrightarrow \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

2. *On appelle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Démontrer que $\ln(n+1) \leqslant S_n$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$*

   En sommant de $k=1$ à n l'inégalité $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Longleftrightarrow & \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant S_n \\ \Longleftrightarrow & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) \leqslant S_n \\ \Longleftrightarrow & S_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) \leqslant S_n\end{aligned}$$

   Nous avons, en particulier $\ln(n+1) \leqslant S_n$, ce qui montre que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

3. *Démontrer qu'en $+\infty$, $S_n \underset{+\infty}{\simeq} \ln n$*

   On réutilise l'inégalité $S_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) \leqslant S_n$ que l'on peut écrire autrement :

$$\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}$$

   En divisant par $\ln n$, nous obtenons :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leqslant \frac{S_n}{\ln n} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln n} + \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln n\,(n+1)}$$

   Or :
   — $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$
   — $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln n\,(n+1)} = 0$

   Et, donc, par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$, ce qui montre qu'en $+\infty$, $S_n \underset{+\infty}{\simeq} \ln n$

4. *Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Donner la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\alpha + k\beta}$.*

   Nous avons : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\alpha + k\beta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha + \beta\frac{k}{n}}$.

   En écrivant $x_k = \frac{k}{n}$ et $f(x) = \frac{1}{\alpha + \beta x}$, nous sommes devant une somme de Riemann du type $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ qui admet pour limite $\int_0^1 f(x)\ dx$. Ici, ce sera donc $\int_0^1 \frac{1}{\alpha + \beta x}\, dx$ qui s'intègre très facilement.

   Nous avons $\int_0^1 \frac{1}{\alpha + \beta x}\, dx = \frac{1}{\beta} \int_0^1 \frac{\beta}{\alpha + \beta x}\, dx = \frac{1}{\beta} [\ln(\alpha + \beta x)]_0^1 = \frac{1}{\beta} (\ln(\alpha + \beta) - \ln(\alpha)) = \frac{1}{\beta} \ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$

Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\alpha+k\beta}=\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)$

Faire le lien avec les questions précédentes

Le lien avec les questions précédente n'est pas très évident. Par contre, on peut dire que si on regroupe n termes qui forment une progression du type $\alpha n+k\beta$, la somme de l'inverse de ces n termes a une limite finie alors que la somme des inverses tend vers $+\infty$

Exercice 20 :

Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}\underset{+\infty}{\approx}2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n}$

Voilà un exercice qui ne pose pas tant de difficultés !!

▷ Tout d'abord, nous avons :

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$$

Et, nous avons là, quelque chose qui ressemble à une somme de Riemann.
Ben, en fait, pas vraiment !! Nous avons, en fait

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\frac{\sqrt{n}}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\right)$$

▷ Nous allons donc étudier $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$

Par les théorèmes des sommes de Riemann, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Or, $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u=\left[2\sqrt{u}\right]_1^2=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

▷ Nous avons donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=2\left(\sqrt{2}-1\right)$, et de l'étude précédente, nous tirons

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}\underset{+\infty}{\approx}2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n}$$

Ce que nous voulions.

Exercice 21 :

Sans utiliser de primitive, calculer, pour $a<b$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b e^x\,\mathrm{d}x$

Nous allons utiliser les sommes de Riemann.

⇒ Nous subdivisons l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles réguliers de pas $\dfrac{b-a}{n}$; les points de la subdivision sont donc $x_k=a+k\times\dfrac{b-a}{n}$.

Nous avons donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{a+k\times\frac{b-a}{n}}=\int_a^b e^x\,\mathrm{d}x$

mathinfovannes.free.fr ©

$\Rightarrow$ Nous avons : $e^{a+k\times\frac{b-a}{n}} = e^a \times e^{k\times\frac{b-a}{n}} = e^a \times \left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^k$. Donc :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{a+k\times\frac{b-a}{n}} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^a \times \left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^k = \frac{e^a(b-a)}{n} \times \frac{1-e^{b-a}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}$$

$\Rightarrow$ Nous avons

$$\frac{e^a(b-a)}{n} \times \frac{1-e^{b-a}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}} = e^a\left(1-e^{b-a}\right) \times \frac{\frac{b-a}{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}} = \left(e^a - e^b\right) \times \frac{\frac{b-a}{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}$$

Il nous faut donc calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{b-a}{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}$

Nous avons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-e^x} = -1$, d'où, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{b-a}{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}} = -1$

$\Rightarrow$ D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{a+k\times\frac{b-a}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(e^a-e^b\right) \times \dfrac{\frac{b-a}{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}} = e^b - e^a$, c'est à dire : $\displaystyle\int_a^b e^x \,\mathrm{d}x = e^b - e^a$.

Ce qui ne nous surprend pas !!

Exercice 22 :

Soient $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann sur $[0;1]$ et $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et à dérivée bornée. Il faut montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

La question semble, quand même, assez bizarre puisque d'après les théorèmes sur les sommes de Riemann, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour résoudre la question, nous allons prendre des chemins de traverse. Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = {} & \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) + \\ & \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Et en passant aux valeurs absolues :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant {} & \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \\ & \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Etudions $\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) g\left(\dfrac{k+1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) g\left(\dfrac{k}{n}\right)\right|$

Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\left|g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right|\end{aligned}$$

⋆ Appliquons le théorème des accroissements finis à g entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$.

Il existe donc $c \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ tel que : $g'(c) = \frac{g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

Comme la dérivée est majorée, nous avons $\left|\frac{g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right| \leqslant M$, c'est à dire :

$$\left|g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{n}$$

Et nous avons donc :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right)$$

⋆ La fonction f est Riemann-intégrable sur $[0;1]$, et donc $|f|$ l'est aussi.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \int_0^1 |f(x)|\ \mathrm{d}x$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{M}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right) = 0$

⇒ Nous avons, d'après la remarque de début d'exercice

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\, g(x)\ \mathrm{d}x\right| = 0$$

⇒ En utilisant les règles d'addition dans les limites, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\, g(x)\ \mathrm{d}x\right| = 0$$

C'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\ \mathrm{d}x$

Ce que nous voulions

Exercice 23 :

Soient $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0;1]$ et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Il faut montrer que :

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi \circ f(x)\ \mathrm{d}x$$

1. φ étant convexe sur $\mathbb{R}$, alors, pour tout $y_i \in \mathbb{R}$ où $i = 1, \ldots, n$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$ avec $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, nous avons :

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(y_i)$$

2. φ étant convexe sur $\mathbb{R}$, est aussi continue sur $\mathbb{R}$ et donc $\varphi \circ f$ est aussi continue sur $[0;1]$, donc intégrable au sens de Riemann sur $[0;1]$ et donc $\int_0^1 \varphi \circ f(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie.
3. Soit $x_k = \frac{k}{n}$, pour $k = 0, \ldots, n$ une subdivision de $[0;1]$, nous avons alors, par la convexité de φ :
$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(f(x_i))$$
4. f continue sur $[0;1]$ est donc intégrable au sens de Riemann sur $[0;1]$ et :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$
De la continuité de φ, nous déduisons :
$$\lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right) = \varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$
5. $\varphi \circ f$ étant intégrable au sens de Riemann sur $[0;1]$ nous avons :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(f(x_i)) = \int_0^1 \varphi \circ f(x)\,\mathrm{d}x$$
6. Les limites conservant la relation d'ordre, nous avons donc
$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi \circ f(x)\,\mathrm{d}x$$
C'est l'inégalité de Jensen

Ce que nous voulions

Exercice 24 :

Soient $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$ et telle que cette dérivée soit bornée sur $]0;1[$. On appelle $M = \sup_{x\in]0;1[} |f'(x)|$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}$$

1. Tout d'abord, il est bon de remarquer que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$
2. On peut poursuivre ces préliminaires en remarquant aussi que $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\,\mathrm{d}x$
3. De telle sorte que
$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}x$$

4. D'après le théorème des accroissements finis appliqué entre x et $\frac{k}{n}$, il existe c tel que $\dfrac{f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)}{x - \frac{k}{n}} = f'(c)$
   De l'hypothèse de majoration de f', nous pouvons écrire :
   $$\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant M\left|x - \frac{k}{n}\right|$$
   De telle sorte que
   $$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant M\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|x - \frac{k}{n}\right|\,\mathrm{d}x$$
5. Calculons maintenant $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|x - \frac{k}{n}\right|\,\mathrm{d}x$
   C'est finalement assez simple, puisque :
   $$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|x - \frac{k}{n}\right|\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{k}{n} - x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\left(\frac{k}{n} - x\right)^2}{2}\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{2n^2}$$
6. Et donc $\displaystyle M\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|x - \frac{k}{n}\right|\,\mathrm{d}x = M\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n^2} = \frac{M}{2n}$
7. En conclusion, nous avons bien $\displaystyle\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}$

Ce que nous voulions

Exercice 25 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère la subdivision de l'intervalle $[a;b]$ à pas constant $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour $k = 0, \ldots, n$. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$. Donner :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)\right)$$

1. Nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Que se passe-t-il donc lorsqu'on multiplie par n ?...C'est l'intérêt de cet exercice
2. Comme dans l'exercice précédent, nous avons
   $$\frac{b-a}{n}f(x_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x$$
3. De telle sorte que :
   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) - f(x_k)\,\mathrm{d}x$$

4. Etudions de manière plus précise $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) - f(x_k)\ \mathrm{d}x$

   Nous appliquons le théorème des accroissements finis entre x et x_k. Il existe donc c compris entre x et x_k tel que :
$$\frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} = f'(c)$$
5. f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$, f' est donc continue sur $[a;b]$, et il existe donc $m_k \in \mathbb{R}$ et $M_k \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in [x_{k-1};x_k]$, nous ayions $m_k \leqslant f'(c) \leqslant M_k$.
   Mieux, il existe $c_k \in [x_{k-1};x_k]$ et $d_k \in [x_{k-1};x_k]$ tels que $m_k = f'(c_k)$ et $M_k = f'(d_k)$
6. Donc, nous avons $m_k \leqslant \dfrac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} \leqslant M_k \Longleftrightarrow m_k(x_k - x) \leqslant f(x_k) - f(x) \leqslant M_k(x_k - x)$ et donc, en intégrant, nous avons :
$$m_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) - f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant M_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)\ \mathrm{d}x$$
7. Calculons maintenant $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)\ \mathrm{d}x$
$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{(x_k - x)^2}{2}\right]_{x_{k-1}}^{x_k} = \frac{(b-a)^2}{2n^2}$$
   de telle sorte que :
$$\frac{m_k (b-a)^2}{2n^2} \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) - f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{M_k (b-a)^2}{2n^2}$$
8. Et maintenant, en passant à la sommation :
$$\frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} m_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) - f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k$$
   Or, nous avons $\displaystyle\frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f'(c_k)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f'(c_k) = \int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x$ puisque f' est continue et donc Riemann-intégrable sur l'intervalle $[a;b]$
9. Ainsi, $\displaystyle n\left(\frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f'(c_k)\right) = n \times \frac{(b-a)}{2n} \times \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f'(c_k)\right) = \frac{(b-a)}{2} \times \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f'(c_k)\right)$.
   De telle sorte que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f'(c_k)\right) = \frac{(b-a)}{2} \int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x$
10. De la même manière, nous démontrerions que
$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f'(d_k)\right) = \frac{(b-a)}{2} \int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x$$
11. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) - f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{(b-a)}{2} \int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x$
12. En conclusion,
$$\lim_{n\to+\infty} \left(n\left(\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)\right) = -\frac{(b-a)}{2} \int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x$$
   Ou encore, écrit de manière plus positive :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(n\left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right)\right) = \frac{(b-a)}{2} \int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x$$

mathinfovannes.free.fr©

Exercice 26 :

Calculer $\int_0^{\pi} e^{(1+i)t}\, dt$. *En déduire* $\int_0^{\pi} e^t \cos t dt$

Voilà un calcul tout simple :

$$\int_0^{\pi} e^{(1+i)t}\, dt = \frac{1}{1+i}\left[e^{(1+i)t}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{1+i}\left(e^{(1+i)\pi}-1\right) = \frac{-1}{1+i}\left(e^{\pi}+1\right)$$

En déduire $\int_0^{\pi} e^t \cos t dt$

C'est simplement la partie réelle de $\int_0^{\pi} e^{(1+i)t}\, dt$; donc :

$$\int_0^{\pi} e^t \cos t\, dt = \operatorname{Re}\left(\frac{-1\,(1-i)}{2}\left(e^{\pi}+1\right)\right) = \frac{-1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$$

Exercice 27 :

Le symbole $\int f(t)\, dt$ *désigne l'ensemble des primitives. Donner :*

1. $\int \frac{dx}{\text{ch}x}$

   Nous avons : $\int \frac{dx}{\text{ch}x} = \int \frac{2}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{2e^x}{1+e^{2x}}dx.$
   En faisant le changement de variables $u = e^x$, nous obtenons $du = e^x dx$ et l'intégrale devient :

   $$\int \frac{2e^x}{1+e^{2x}}dx = 2\int \frac{du}{1+u^2} = 2\arctan u + \lambda = 2\arctan e^x + \lambda \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

2. $\int \frac{\text{ch}x}{\text{ch}x - \text{sh}x}dx$

   On commence par écrire : $\frac{\text{ch}x}{\text{ch}x-\text{sh}x} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \times \frac{2}{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}} = \frac{e^x+e^{-x}}{2e^{-x}} = \frac{e^{2x}}{2}+\frac{1}{2}.$
   Le calcul de primitive devient évident

3. $\int e^{\sqrt{x}}dx$

   On fait le changement de variable $u = \sqrt{x}$ et donc $dx = 2udu$, de telle sorte que notre intégrale devient : $\int e^{\sqrt{x}}dx = \int 2ue^u du$ que l'on calcule par une intégration par parties.

   $$\begin{array}{ll} X = u & X' = 1 \\ Y' = e^u & Y = e^u \end{array}$$

   Donc, $\int 2ue^u du = 2\left(ue^u - \int e^u du\right) = 2e^u\,(u-1) + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous en déduisons que :

   $$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right) + \lambda \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 28 :

Soit f *une fonction définie et continue sur l'intervalle* $[-1;+1]$. *Démontrer que la fonction* F *définie par :*

$$F(x) = \int_0^{\sin x} f(t)\, dt$$

mathinfovannes.free.fr ©

est dérivable et calculer sa dérivée.

C'est une question classique, mais importante.

Soit $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. f étant définie, et surtout continue sur $[-1;+1]$, G est définie, continue et dérivable sur $[-1;+1]$, et de dérivée $G'(x) = f(x)$.

F apparaît donc comme la composée $F(x) = G(\sin x)$ de 2 fonctions dérivables. La fonction $\sin x$ étant à valeurs dans $[-1;+1]$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est donnée par :

$$F'(x) = G'(\sin x) \times \cos x = f(\sin x) \times \cos x$$

Exercice 29 :

On considère la fonction partie entière notée $[x]$. Pour $x > 0$, on considère $F(x) = \displaystyle\int_0^x [t]\,dt$

1. *Calculer F*

   Supposons $x \geqslant 0$; alors, nous avons $[x] \leqslant x < [x]+1$, et nous avons :

   $$F(x) = \int_0^x [t]\,dt = \int_0^{[x]} [t]\,dt + \int_{[x]}^x [t]\,dt = \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_k^{k+1} [t]\,dt + \int_{[x]}^x [t]\,dt = \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_k^{k+1} k dt + \int_{[x]}^x [x]\,dt$$

   Nous avons donc :

   $$F(x) = \sum_{k=0}^{[x]-1} k + [x](x-[x]) = \frac{([x]-1)[x]}{2} + [x](x-[x]) = \frac{[x]}{2}(2x-[x]-1)$$

   Démontrez que F est continue.

   Il suffit de vérifier qu'elle est continue en $n_0 \in \mathbb{Z}$

2. *Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?*

   Elle n'est pas dérivable en $n_0 \in \mathbb{Z}$; on trouve une dérivée à droite différente de la dérivée à gauche.

   Que manque-t-il pour qu'elle soit dérivable ? ?

   La fonction partie entière a des points de discontinuité en $n_0 \in \mathbb{Z}$. pour que F soit dérivable, il manque à la fonction partie entière d'être continue.

Exercice 30 :

Soit k un réel strictement positif. On considère la fonction F définie pour $x > 0$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 s^k \sin sx\; ds$

1. *Etablir l'égalité $F(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}} \displaystyle\int_0^x u^k \sin u\; du$*

   Il suffit de faire le changement de variable $u = sx$, et alors $\dfrac{du}{ds} = x \Longleftrightarrow \dfrac{du}{x} = ds$

   A ce moment là :

   $$F(x) = \int_0^1 s^k \sin sx\; ds = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k \sin u\, \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k \sin u du$$

   Ce que nous voulions

2. *En déduire que F est dérivable pour $x > 0$ et vérifie la relation $xF'(x) + (k+1)F(x) = \sin x$*

   La fonction numérique $u^k \sin u$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ et donc la fonction $H(x) = \displaystyle\int_0^x u^k \sin u du$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ de dérivée $H'(x) = x^k \sin x$

Donc, $F(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}} H(x)$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$. Touts calculs faits, nous trouvons $F'(x) = \dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{k+1}{x} F(x)$ ce qui équivaut, sur $\mathbb{R}^{*+}$ à $xF'(x) + (k+1) F(x) = \sin x$

Il est tout à fait possible de calculer F en résolvant l'équation différentielle linéaire du premier ordre $xy' + (k+1) y = \sin x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$

Exercice 31 :

On considère une fonction f, continue sur l'intervalle $[0,1]$. On définit F sur l'intervalle $[0,1]$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t)\, dt$

1. *Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer F''*

   Soit $x \in [0,1]$; alors :

   $$F(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\, dt = \int_0^x t f(t)\, dt + \int_x^1 x f(t)\, dt = \int_0^x t f(t)\, dt - x \int_1^x f(t)\, dt$$

   F est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables. Nous avons :

   $$F'(x) = x f(x) - \int_1^x f(t)\, dt - x f(x) = -\int_1^x f(t)\, dt$$

   Comme f est continue, F' est à nouveau dérivable, et $F''(x) = -f(x)$

   f étant continue, F'' l'est aussi. F est donc bien de classe $\mathcal{C}^2$

2. *En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\, dt \right) du$*

   De $F''(x) = -f(x)$, nous tirons $F'(x) = -\displaystyle\int_1^x f(t)\, dt$

   Et donc, $F(x) = \displaystyle\int_0^x F'(t)\ dt = \int_0^x \left(-\int_1^t f(u)\, du \right)\ dt = \int_0^x \left(\int_t^1 f(u)\, du \right)\ dt$

   Ce que nous voulions

Exercice 32 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ +1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

On pose $F(x) = \displaystyle\int_{1-x}^{1+x} f(t)\ dt$

1. *Vérifier que F est impaire et que l'on peut donc restreindre l'étude à $[0\ ;\ +\infty[$.*

   Il suffit de voir que $F(-x) = \displaystyle\int_{1+x}^{1-x} f(t)\ dt = -\int_{1-x}^{1+x} f(t)\ dt = -F(x)$. On peut donc restreindre l'étude à $[0;\ +\infty[$

   Tracer la représentation graphique de F

   On étudie F sur $[0;\ +\infty[$ et on construit le graphe par symétrie.

   — Si $0 \leqslant x \leqslant +1$, alors $1 - x \geqslant 0$, et de même, $1 + x \geqslant 0$; donc, $F(x) = \displaystyle\int_{1-x}^{1+x} f(t)\ dt = \int_{1-x}^{1+x} dt = 2x$

— Si $x \geqslant 1$ alors $1-x \leqslant 0$, et $1+x \geqslant 0$; donc,

$$F(x) = \int_{1-x}^{1+x} f(t)\ dt = \int_{1-x}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{1+x} f(t)\ dt = \int_{1-x}^{0} -1\ dt + \int_{0}^{1+x} 1\ dt = 2$$

D'où le graphe donné figure 7.3 :

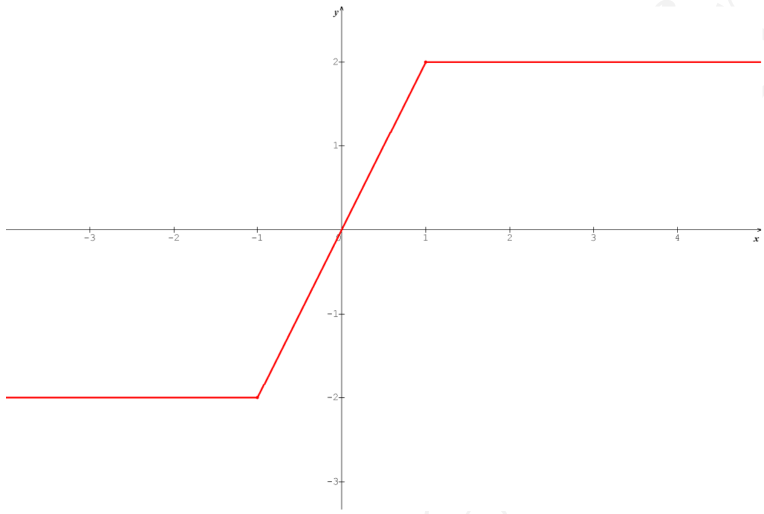

FIGURE 7.3 – Le graphe de F

2. *En quels points F est-elle dérivable ? ?*

   Il est clair que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf en $+1$ et en -1

3. *On pose $G(x) = \int_{1-x}^{1+x} F(t)\ dt$. G est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?*

   Il est clair que F étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $\int_0^x F(t)\ dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   D'autre part, $G(x) = \int_{1-x}^{1+x} F(t)\ dt = \int_{1-x}^{0} F(t)\ dt + \int_{0}^{1+x} F(t)\ dt$

   G est dérivable sur $\mathbb{R}$ en entier et de dérivée $G'(x) = F(1+x) + F(1-x)$

   D'autre part, comme F, G est impaire. L'étude de G se fera encore sur $[0;\ +\infty[$

   En tracer la représentation graphique

   On étudie G sur $[0;\ +\infty[$ et on construit le graphe par symétrie.

   — Si $0 \leqslant x \leqslant +2$, alors $-1 \leqslant 1-x \geqslant +1$, et de même, $1+x \geqslant 1$; donc :

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{1-x}^{1+x} F(t)\ dt \\ &= \int_{1-x}^{1} F(t)\ dt + \int_{1}^{1+x} F(t)\ dt \\ &= \int_{1-x}^{1} 2t\ dt + \int_{1}^{1+x} 2\ dt \\ &= \left[t^2\right]_{1-x}^{1} + [2t]_1^{1+x} \\ &= 4x - x^2 \end{aligned}$$

— Si $x \geqslant 2$ alors $1-x \leqslant -1$, et $1+x \geqslant 3$; donc :

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_{1-x}^{1+x} F(t)\ dt \\
&= \int_{1-x}^{-1} F(t)\ dt + \int_{-1}^{1} F(t)\ dt + \int_{1}^{1+x} F(t)\ dt \\
&= \int_{1-x}^{-1} -2\ dt + \int_{-1}^{1} 2t\ dt + \int_{1}^{1+x} 2\ dt \\
&= -2(-1-1+x) + \left[t^2\right]_{-1}^{1} + 2(1+x-1) \\
&= 4
\end{aligned}$$

D'où le graphe donné figure 7.4 :

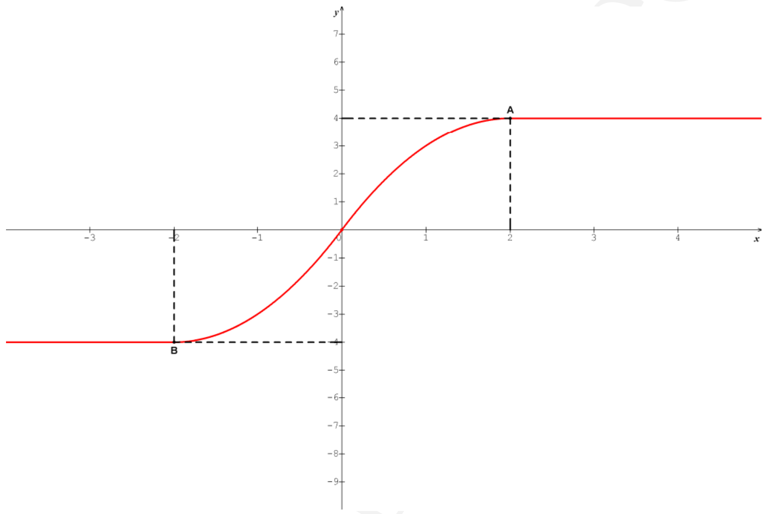

FIGURE 7.4 – Le graphe de G

Exercice 33 :

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et F la fonction définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\ dt \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } F(0) = f(0)$$

1. *Montrer que F est continue en 0*

Si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $H(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $H'(x) = f(x)$

Ici, nous avons $F(x) = \dfrac{1}{2x}(H(x) - H(-x))$. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2x}(H(x) - H(-x)) \\
&= \frac{1}{2x}(H(x) - H(0) + H(0) - H(-x)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{H(x) - H(0)}{x} + \frac{H(0) - H(-x)}{x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{H(x) - H(0)}{x} + \frac{H(-x) - H(0)}{-x}\right)
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{H(x)-H(0)}{x}=H'(0)=f(0)$ et, de même, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{H(-x)-H(0)}{-x}=H'(0)=f(0)$, de telle sorte que $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=f(0)$

F est donc continue en 0

2. *En prenant pour f, la fonction valeur absolue, montrer que F n'est pas forcément dérivable.*

   Cette fois ci, nous avons $f(t)=|t|$

   — Si $x>0$, alors

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}f(t)\ dt\\&=\frac{1}{2x}\left(\int_{-x}^{0}|t|\ dt+\int_{0}^{x}|t|\ dt\right)\\&=\frac{1}{2x}\left(\int_{-x}^{0}-t\ dt+\int_{0}^{x}t\ dt\right)\\&=\frac{1}{2x}\left(\left[\frac{-t^2}{2}\right]_{-x}^{0}+\left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{x}\right)\\&=\frac{x}{2}\end{aligned}$$

   — Si $x<0$, alors

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}f(t)\ dt\\&=\frac{1}{2x}\left(\int_{-x}^{0}|t|\ dt+\int_{0}^{x}|t|\ dt\right)\\&=\frac{1}{2x}\left(\int_{-x}^{0}t\ dt+\int_{0}^{x}-t\ dt\right)\\&=\frac{1}{2x}\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-x}^{0}+\left[\frac{-t^2}{2}\right]_{0}^{x}\right)\\&=\frac{-x}{2}\end{aligned}$$

   En fait, nous avons, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(t)=\dfrac{|t|}{2}$, ce qui montre que F n'est pas dérivable en 0.

Exercice 34 :

Soit $a>0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$ telle que $f(0)=0$. L'objet de l'exercice est de démontrer que $\displaystyle\int_0^a |f(x)\,f'(x)|\ dx\leqslant\frac{a}{2}\int_0^a (f'(x))^2\ dx$

1. *Montrer que $g(x)=\displaystyle\int_0^x |f'(t)|\ dt$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$ telle que $g(0)=0$*

   Comme f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$, la fonction f' est continue sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$, et par composition, la fonction $|f'|$ est continue sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$.

   Donc, $\displaystyle\int_0^x |f'(t)|\ dt$ est une fonction dérivable de dérivée $|f'(x)|$, laquelle est continue. Donc, g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$ telle que $g(0)=0$

2. *Vérifier que $f(x)=\displaystyle\int_0^x f'(t)\ dt$ et démontrer que $|f(x)|\leqslant g(x)$*

   Que $f(x)=\displaystyle\int_0^x f'(t)\ dt$ est évident.

   Donc, $|f(x)|=\left|\displaystyle\int_0^x f'(t)\ dt\right|\leqslant\displaystyle\int_0^x |f'(t)|\ dt=g(x)$

   Ce que nous voulions

3. *En déduire que* $\displaystyle\int_0^a |f(x) f'(x)|\ dx \leqslant \frac{1}{2}(g(a))^2$

   En utilisant la question précédente, nous avons :

$$|f(x) f'(x)| = |f(x)|\,|f'(x)| \leqslant g(x)\,|f'(x)|$$

   Or, $|f'(x)| = g'(x)$, et nous concluons que $|f(x) f'(x)| \leqslant g(x) g'(x)$
   En passant à l'intégrale, nous avons :

$$\int_0^a |f(x) f'(x)|\ dx \leqslant \int_0^a g(x) g'(x)\ dx = \left[\frac{(g(x))^2}{2}\right]_0^a = \frac{(g(a))^2}{2}$$

   Donc, $\displaystyle\int_0^a |f(x) f'(x)|\ dx \leqslant \frac{1}{2}(g(a))^2$

4. *En utilisant l'inégalité de Schwarz, démontrez que* $\displaystyle(g(a))^2 \leqslant a\int_0^a (f'(x))^2\ dx$ *et conclure*

   Nous avons $\displaystyle(g(a))^2 = \left(\int_0^a |f'(t)|\ dt\right)^2$.
   En écrivant $|f'(t)| = 1 \times |f'(t)|$, et en utilisant l'inégalité de Schwarz, nous avons :

$$\left(\int_0^a |f'(t)|\ dt\right)^2 \leqslant \left(\int_0^a (1)^2\ dt\right)\left(\int_0^a (f'(t))^2\ dt\right) = a\int_0^a (f'(t))^2\ dt$$

   Nous avons donc : $\displaystyle(g(a))^2 \leqslant a\int_0^a (f'(t))^2\ dt$

   Nous en déduisons donc : $\displaystyle\int_0^a |f(x) f'(x)|\ dx \leqslant \frac{1}{2}(g(a))^2 \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a (f'(t))^2\ dt$

   Donc $\displaystyle\int_0^a |f(x) f'(x)|\ dx \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a (f'(x))^2\ dx$
   Ce que nous voulions

Exercice 35 :

On considère l'intégrale $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

1. *En majorant la fonction intégrée, montrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

   Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, nous avons $1 \leqslant 1+x \leqslant 2$, c'est à dire $\displaystyle\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1$

   Donc, $\displaystyle|I_n| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leqslant \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

   Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, nous en déduisons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

2. *Calculer* $I_n + I_{n+1}$

   Nous avons :

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

mathinfovannes.free.fr©

3. *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$

Nous avons $\sum\limits_{k=0}^{n} (-x)^k = \dfrac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$.

En passant à l'intégrale, nous avons : $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-x)^k \, dx = \int_0^1 \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} dx$

Nous avons $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-x)^k \, dx = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-x)^k \, dx = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

D'autre part, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = \ln 2 + (-1)^n I_n$

Nous avons donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 + (-1)^n I_n \iff \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 = (-1)^n I_n$

Donc $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2\right| = |I_n|$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$

Ce que nous voulions. *(On remarquera que* $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$*)*

Exercice 36 :

1. *Donner* $\lim\limits_{a\to 0} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\sin x)\, \mathrm{d}x$

   ▷ D'après les formules trigonométriques, nous avons, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u$, de telle sorte que :

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\sin x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2\sin^2\left(\frac{a\sin x}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{a\sin x}{2}\right) \mathrm{d}x$$

   ▷ Rappelons nous que nous avons, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin u| \leqslant |u|$, et donc, $\sin^2 u \leqslant u^2$.

   Donc, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{a\sin x}{2}\right) \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a\sin x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, \mathrm{d}x$

   Comme $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, \mathrm{d}x$ est un nombre fixe, $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{a^2}{4} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = 0$.

   De $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{a\sin x}{2}\right) \mathrm{d}x \leqslant \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, \mathrm{d}x$, nous déduisons $\lim\limits_{a\to 0} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{a\sin x}{2}\right) \mathrm{d}x = 0$ d'où $\lim\limits_{a\to 0} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\sin x)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

2. *Donner* $\lim\limits_{a\to 0} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\sin x}\, \mathrm{d}x$

   (a) Nous allons utilise l'inégalité vraie pour tout $u \in \mathbb{R}$: $1 + u \leqslant e^u$ que nous allons appliquer à $-u$ en écrivant $1 - u \leqslant e^{-u}$.
   De la dernière inégalité, nous tirons facilement, pour tout $u \in \mathbb{R}^{*+}$, $0 < 1 - e^{-u} \leqslant u$

   (b) De là, nous tirons : $0 \leqslant 1 - e^{-a\sin x} \leqslant -a\sin x$ et en passant à l'intégrale :

   $$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - e^{-a\sin x} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} -a\sin x \, \mathrm{d}x = -a\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -a$$

(c) Nous en déduisons que $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-e^{-a\sin x}\,\mathrm{d}x = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

Exercice 37 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales I_n et J_n, définies par :

$$I_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{n}{2}}\ dt \qquad \textit{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n\ du$$

1. *En faisant un changement de variables approprié, démontrez que $I_n = J_{n+1}$*

   Le changement de variables le plus évident est donné par $t = \cos u$ avec $\dfrac{dt}{du} = -\sin u \iff dt = -du\sin u$

   Alors :
   $$\begin{aligned} I_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{n}{2}}\ dt = & \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1-\cos^2 u\right)^{\frac{n}{2}} \times -\sin u\, du \\ = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 u\right)^{\frac{n}{2}} \sin u\, du \\ = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n+1}\ du = J_{n+1} \end{aligned}$$

   Nous avons bien $I_n = J_{n+1}$

2. *Démontrez que nous avons $0 \leqslant J_{n+1} \leqslant J_n$*

   Il y a, en fait, 2 choses à montrer : d'une par que J_n est positive, et d'autre part, que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   — J_n est positive

   Il suffit de remarquer que si $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n\ du$, comme nous avons $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$, nous avons $0 \leqslant \sin u \leqslant 1$; donc, $(\sin u)^n \geqslant 0$, et donc $J_n \geqslant 0$

   — La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

   Il suffit de faire la différence $J_{n+1} - J_n$

   $$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n+1}\ du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n\ du \\ = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n+1} - (\sin u)^n\ du \\ = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n (\sin u - 1)\ du \end{aligned}$$

   Comme $\sin u - 1 \leqslant 0$ et $(\sin u)^n \geqslant 0$ car $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$, nous avons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n (\sin u - 1)\ du \leqslant 0$, c'est à dire $J_{n+1} - J_n \leqslant 0$

   C'est à dire que nous avons bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant J_{n+1} \leqslant J_n$

3. (a) *Montrer que nous avons $J_n = J_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2}\cos^2 u\, du$*

Rigoureusement, voici une question qui ne pose aucune difficulté.

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n \; du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \sin^2 u \, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \left(1 - \cos^2 u\right) \; du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \; du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \cos^2 u \, du \\ &= J_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \cos^2 u \, du \end{aligned}$$

(b) *On appelle $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \cos^2 u \, du$; en intégrant par parties, montrez que $K_n = \frac{1}{n-1} J_n$*

Voilà qui n'est pas d'une évidence folle, mais qui n'est pas non plus insurmontable ! !. Il suffit de bien choisir ses fonctions :

$$\begin{array}{ll} X' = (\sin u)^{n-2} \cos u & X = \dfrac{(\sin u)^{n-1}}{n-1} \\ Y = \cos u & Y' = -\sin u \end{array}$$

De telle sorte que :

$$\begin{aligned} K_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \cos^2 u \, du \\ &= \left[\cos u \frac{(\sin u)^{n-1}}{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin u)^{n-1}}{n-1} \times -\sin u \, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin u)^{n-1}}{n-1} \times \sin u \, du \\ &= \frac{1}{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n \; du \\ &= \frac{1}{n-1} J_n \end{aligned}$$

Donc $K_n = \frac{1}{n-1} J_n$

(c) *En déduire que $J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$ et que $I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}$*

Nous avons $J_n = J_{n-2} - K_n$, c'est à dire $J_n = J_{n-2} - \frac{1}{n-1} J_n$. Nous en déduisons que

$$J_n + \frac{1}{n-1} J_n = J_{n-2} \iff \frac{n}{n-1} J_n = J_{n-2} \iff J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

Et, en remplaçant J_n par I_{n-1} et J_{n-2} par I_{n-3}, nous obtenons l'égalité $I_{n-1} = \frac{n-1}{n} I_{n-3}$, ce qui est équivalent à $I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}$

4. (a) *En déduire que $I_{2p} = \frac{\left(2^p \times p!\right)^2}{(2p+1)!}$*

Nous avons $I_{2p} = \dfrac{2p}{2p+1} I_{2p-2}$, puis, $I_{2p-2} = \dfrac{2p-2}{2p-1} I_{2p-4}$ et en mettant cela en tableau :

$$\begin{array}{rl} I_{2p} = & \dfrac{2p}{2p+1} I_{2p-2} \\ I_{2p-2} = & \dfrac{2p-2}{2p-1} I_{2p-4} \\ \vdots & \vdots \\ I_{2p-2k} = & \dfrac{2p-2k}{2p-(2k-1)} I_{2p-2(k+1)} \\ \vdots & \vdots \\ I_2 = & \dfrac{2}{1} I_0 \end{array}$$

De telle sorte qu'en faisant le produit, nous obtenons :

$$\prod_{k=1}^{p} I_{2k} = \prod_{k=1}^{p} \frac{2k}{2k+1} I_{2(k-1)}$$

En simplifiant, nous obtenons : $I_{2p} = \left(\prod\limits_{k=1}^{p} \dfrac{2k}{2k+1}\right) I_0$.

Le calcul de I_0, nous donne : $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^0 \, dt = 1$. Donc, $I_{2p} = \prod\limits_{k=1}^{p} \dfrac{2k}{2k+1}$

Continuons le calcul :

$$\begin{array}{rl} \prod\limits_{k=1}^{p} \dfrac{2k}{2k+1} = & \dfrac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p}{3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2p+1)} \\ = & \dfrac{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p)(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p)}{(3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2p+1))(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p)} \\ = & \dfrac{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p)^2}{(2p+1)!} \\ = & \dfrac{(2^p \times p!)^2}{(2p+1)!} \end{array}$$

Donc, $I_{2p} = \dfrac{(2^p \times p!)^2}{(2p+1)!}$

(b) *En déduire que* $I_{2p+1} = \dfrac{(2p+2)!}{\left(2^{p+1}(p+1)!\right)^2} \dfrac{\pi}{2}$

La méthode de résolution est la même que celle utilisée précédemment.

Nous avons $I_{2p+1} = \dfrac{2p+1}{2p+2} I_{2p-1}$, puis, $I_{2p-1} = \dfrac{2p-1}{2p} I_{2p-3}$ et en mettant cela en tableau :

$$\begin{array}{rl} I_{2p+1} = & \dfrac{2p+1}{2p+2} I_{2p-1} \\ I_{2p-1} = & \dfrac{2p-1}{2p} I_{2p-3} \\ \vdots & \vdots \\ I_{2p-(2k-1)} = & \dfrac{2p-(2k-1)}{2p-(2k-2)} I_{2p-(2k+1)} \\ \vdots & \vdots \\ I_3 = & \dfrac{3}{4} I_1 \end{array}$$

De telle sorte qu'en faisant le produit, nous obtenons :

$$\prod_{k=1}^{p} I_{2k+1} = \prod_{k=1}^{p} \frac{2k+1}{2k+2} I_{2k-1}$$

En simplifiant, nous obtenons : $I_{2p+1} = \left(\prod_{k=1}^{p} \frac{2k+1}{2k+2}\right) I_1$.

Le calcul de I_1, nous donne : $I_1 = J_2$ et $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^2 \ du$. Il faut donc linéariser $\sin^2 u$.

Nous avons $\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u \iff \sin^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}$, de telle sorte que :

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^2 \ du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2u}{2} \ du = \frac{1}{2}\left[u - \frac{\sin 2u}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Il faut, maintenant, calculer $\prod_{k=1}^{p} \frac{2k+1}{2k+2}$

Continuons le calcul :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{p} \frac{2k+1}{2k+2} &= \frac{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2p+1)}{4\times 6\times 8\times\cdots\times(2p+2)} \\
&= \frac{(3\times 5\times 7\times\cdots\times(2p+1))(2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p+2))}{(4\times 6\times 8\times\cdots\times(2p+2))(2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p+2))} \\
&= \frac{(2p+2)!\times 2}{(2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p+2))^2} \\
&= \frac{(2p+2)!\times 2}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}
\end{aligned}$$

Donc, $I_{2p+1} = \frac{(2p+2)!\times 2}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}$

Ce que nous voulions.

(c) *En déduire que* $\lim_{n\to+\infty} nI_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

— Si n est pair, c'est à dire $n = 2p$, nous devons alors évaluer $2pI_{2p}I_{2p+1}$

$$2pI_{2p}I_{2p+1} = \frac{2p(2^p\times p!)^2}{(2p+1)!} \times \frac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{2p(2p+2)}{(2(p+1))^2}\frac{\pi}{2} = \frac{2p}{2p+2}\frac{\pi}{2}$$

Nous avons bien $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} nI_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

— Si n est impair, c'est à dire $n = 2p+1$, nous devons alors évaluer $(2p+1)I_{2p+1}I_{2p+2}$

$$(2p+1)I_{2p+1}I_{2p+2} = (2p+1)\frac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}\frac{\pi}{2}\times\frac{(2^{p+1}\times(p+1)!)^2}{(2p+3)!} = \frac{2p+1}{2p+3}\frac{\pi}{2} = \frac{n}{n+2}\frac{\pi}{2}$$

A nouveau, nous avons bien $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} nI_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} nI_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

7.7.2 Miscelleanous

Exercice 38 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite numérique telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0;1]$. *Pour tout* $\alpha \in [0;1]$ *et tout* $\beta \in [0;1]$ *tels que* $\alpha \leqslant \beta$, *on pose :*

$$k_n(\alpha,\beta) = \mathrm{Card}\ \{m \in \mathbb{N}^* \textit{ tels que } m \leqslant n \textit{ et } \alpha \leqslant u_n \leqslant \beta\}$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est* <u>*équirépartie*</u> *si, pour tout* $\alpha \in [0;1]$ *et tout* $\beta \in [0;1]$ *tels que* $\alpha \leqslant \beta$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n(\alpha,\beta)}{n} = \beta - \alpha$

1. *Propriétés élémentaires*

   Avant de commencer, nous pouvons donner un cas particulier.
   En effet, comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $[0;1]$, nous avons $k_n(0;1) = n$ et donc $\dfrac{k_n(0;1)}{n} = 1$.
   Pour la suite, nous poserons, pour $\alpha \in [0;1]$, $k_n(\alpha,\alpha) = \text{Card}\,\{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } u_n = \alpha\}$

   (a) *Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie, alors elle n'admet pas de limite*

   Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

   - Tout d'abord, comme, pourt out $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0;1]$, nous avons $l \in [0;1]$
   - Soit $\varepsilon > 0$.
     Il existe alors $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $u_n \in [l-\varepsilon; l+\varepsilon]$. On choisit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $[0;1] \setminus [l-\varepsilon; l+\varepsilon]$ contienne un intervalle $[\alpha;\beta]$ avec $\alpha < \beta$
     Alors, $k_n(\alpha,\beta) \leqslant N_\varepsilon$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k_n(\alpha,\beta)}{n} = 0 \neq \beta - \alpha$.
     Ce qui est en contradiction avec le fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie
   - Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite.

   Il est alors possible de conclure qu'une suite équirépartie n'a ni valeur d'adhérence, ni point d'accumulation

   (b) *Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(\alpha,\beta) = +\infty$*

   Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit équirépartie ; alors, pour tout $\alpha \in [0;1]$ et tout $\beta \in [0;1]$, avec $\alpha \leqslant \beta$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k_n(\alpha,\beta)}{n} = \beta - \alpha$
   Donc, pour $0 < \varepsilon < \beta - \alpha$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors :

   $$\beta - \alpha - \varepsilon < \frac{k_n(\alpha,\beta)}{n} < \beta - \alpha + \varepsilon \iff n(\beta-\alpha-\varepsilon) < k_n(\alpha,\beta) < n(\beta-\alpha+\varepsilon)$$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\beta-\alpha-\varepsilon) = +\infty$, nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(\alpha,\beta) = +\infty$

   (c) *Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie, alors l'ensemble $S = \{u_n \text{ où } n \in \mathbb{N}^*\}$ des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $[0;1]$*

   Pour montrer que $S = \{u_n \text{ où } n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[0;1]$, il faut montrer que, pour tout $\alpha \in [0;1]$ et tout $\beta \in [0;1]$ tels que $\alpha < \beta$, il existe $s \in S$ tel que $\alpha < s < \beta$; ce $s \in S$ étant un terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, c'est à dire qu'il existe $i_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $s = u_{i_0}$
   Soient donc $\alpha \in [0;1]$ et tout $\beta \in [0;1]$ tels que $\alpha < \beta$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant équirépartie, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k_n(\alpha,\beta)}{n} = \beta - \alpha > 0$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{k_{n_0}(\alpha,\beta)}{n_0} > 0$, c'est à dire tel que $k_{n_0}(\alpha,\beta) > 0$, et comme $k_{n_0}(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}$, nous avons $k_{n_0}(\alpha,\beta) \geqslant 1$, c'est à dire qu'il existe $i_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha < u_{i_0} < \beta$
   S est donc bien dense dans $[0;1]$

2. *Une simplification du critère*
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $[0;1]$. Pour tout $\alpha \in [0;1]$ et tout $\beta \in [0;1]$ tels que $\alpha < \beta$, on pose :

   $$K_n(\alpha,\beta) = \text{Card}\,\{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } \alpha < u_n < \beta\}$$

   Et

   $$K_n(\beta) = K_n(0,\beta) = \text{Card}\,\{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } 0 < u_n < \beta\} \text{ pour } 0 < \beta \leqslant 1$$

   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si, pour tout $\beta \in]0;+1]$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{K_n(\beta)}{n} = \beta$

La clef de cette démonstration de cette équivalence se situe dans l'égalité :

$$\begin{aligned}\{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } \alpha \leqslant u_n \leqslant \beta\} = & \{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } \alpha < u_n < \beta\} \\ & \cup \{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } \alpha = u_n\} \\ & \cup \{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } u_n = \beta\}\end{aligned}$$

C'est à dire, en passant aux cardinaux :

$$k_n(\alpha, \beta) = K_n(\alpha, \beta) + k_n(\alpha, \alpha) + k_n(\beta, \beta)$$

Et donc :

$$\frac{k_n(\alpha, \beta)}{n} = \frac{K_n(\alpha, \beta)}{n} + \frac{k_n(\alpha, \alpha)}{n} + \frac{k_n(\beta, \beta)}{n}$$

▷ Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit équirépartie
La suite étant équirépartie,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n(\alpha, \alpha)}{n} = (\alpha - \alpha) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{k_n(\beta, \beta)}{n} = (\beta - \beta) = 0$$

Et nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{K_n(\alpha, \beta)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{k_n(\alpha, \beta)}{n} = \beta - \alpha$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{K_n(\beta)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{K_n(0, \beta)}{n} = \beta$

▷ Réciproquement, supposons que pour tout $\beta \in]0; +1]$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{K_n(\beta)}{n} = \beta$
Il faut donc démontrer que pour tout $\alpha \in [0; 1]$ et tout $\beta \in [0; 1]$ tels que $\alpha \leqslant \beta$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n(\alpha, \beta)}{n} = (\beta - \alpha)$

▷ Soient $\alpha \in [0; 1]$ et $\beta \in [0; 1]$ tels que $\alpha < \beta$. Alors :

$$\begin{aligned}\{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } \alpha < u_m < \beta\} = & \{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } 0 \leqslant u_m < \beta\} \setminus \\ & \{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } 0 \leqslant u_m \leqslant \alpha\}\end{aligned}$$

Comme $\{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } 0 \leqslant u_m \leqslant \alpha\} \subset \{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } 0 \leqslant u_m < \beta\}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\text{Card}(\{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } \alpha < u_m < \beta\}) = & \text{Card}(\{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } 0 \leqslant u_m < \beta\}) - \\ & \text{Card}(\{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } 0 \leqslant u_m \leqslant \alpha\})\end{aligned}$$

Or :
→ $\text{Card}(\{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } 0 \leqslant u_m < \beta\}) = k_n(0, 0) + K_n(0, \beta)$
→ $\text{Card}(\{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } 0 \leqslant u_m \leqslant \alpha\}) = k_n(0, 0) + K_n(0, \alpha) + k_n(\alpha, \alpha)$
Et donc :

$$K_n(\alpha, \beta) = K_n(0, \beta) - K_n(0, \alpha) - k_n(\alpha, \alpha)$$

Comme $K_n(\alpha, \beta) \geqslant 0$, nous en déduisons $k_n(\alpha, \alpha) \leqslant K_n(0, \beta) - K_n(0, \alpha)$

▷ Soit, maintenant, $0 \leqslant \alpha < 1$ et $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \varepsilon < 1 - \alpha$. Alors, d'après ci-dessus :

$$k_n(\alpha, \alpha) \leqslant K_n(0, \alpha + \varepsilon) - K_n(0, \alpha) \Longleftrightarrow k_n(\alpha, \alpha) \leqslant K_n(\alpha + \varepsilon) - K_n(\alpha)$$

C'est à dire aussi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{k_n(\alpha, \alpha)}{n} \leqslant \frac{K_n(\alpha + \varepsilon)}{n} - \frac{K_n(\alpha)}{n}$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{K_n(\alpha + \varepsilon)}{n} = \alpha + \varepsilon$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{K_n(\alpha)}{n} = \alpha$, nous avons, et ce pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n(\alpha, \alpha)}{n} \leqslant \varepsilon$$

Et donc, $\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n(\alpha, \alpha)}{n} = 0$

▷ Pour terminer, nous avons, pour $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$:

$$\begin{aligned} k_n(\alpha,\beta) = & \; k_n(\alpha,\alpha) + K_n(\alpha,\beta) + k_n(\beta,\beta) \\ = & \; k_n(\alpha,\alpha) + (K_n(\beta) - K_n(\alpha) - k_n(\alpha,\alpha)) + k_n(\beta,\beta) \\ = & \; K_n(\beta) - K_n(\alpha) + k_n(\beta,\beta) \end{aligned}$$

D'où $\dfrac{k_n(\alpha,\beta)}{n} = \dfrac{K_n(\beta)}{n} - \dfrac{K_n(\alpha)}{n} + \dfrac{k_n(\beta,\beta)}{n}$, et par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n(\alpha,\beta)}{n} = \beta - \alpha$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc équirépartie

3. *Caractérisation des suites équiréparties*
Démontrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si pour toute application f intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[0;1]$, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n)}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

▷ **Supposons que pour toute fonction f Riemann-intégrable, nous ayions**

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n)}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Soient $\alpha \in [0;1]$ et $\beta \in [0;1]$ tels que $\alpha \leqslant \beta$.
Il nous faut donc moncter que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k_n(\alpha,\beta)}{n} = \beta - \alpha$.
Considérons la fonction indicatrice $1_{[\alpha;\beta]}$. Cette fonction est Riemann-Intégrable sur $[0;1]$, et nous avons $\displaystyle\int_0^1 1_{[\alpha;\beta]}(t)\,\mathrm{d}t = \beta - \alpha$
L'expression $\left(1_{[\alpha;\beta]}(u_1) + 1_{[\alpha;\beta]}(u_2) + \cdots + 1_{[\alpha;\beta]}(u_n)\right)$ compte le nombre d'éléments de l'ensemble $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ qui sont dans l'intervalle $[\alpha;\beta]$. Ainsi :

$$1_{[\alpha;\beta]}(u_1) + 1_{[\alpha;\beta]}(u_2) + \cdots + 1_{[\alpha;\beta]}(u_n) = k_n(\alpha,\beta)$$

Et nous avons, en utilisant l'hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k_n(\alpha,\beta)}{n} = \displaystyle\int_0^1 1_{[\alpha;\beta]}(t)\,\mathrm{d}t = \beta - \alpha$, ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie

▷ **Réciproquement, supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie**

⇒ Reprenons la démonstration précédente et considérons la fonction indicatrice $1_{[\alpha;\beta]}$. Alors :

$$1_{[\alpha;\beta]}(u_1) + 1_{[\alpha;\beta]}(u_2) + \cdots + 1_{[\alpha;\beta]}(u_n) = \sum_{i=1}^{n} 1_{[\alpha;\beta]}(u_i) = k_n(\alpha,\beta)$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n(\alpha,\beta)}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1_{[\alpha;\beta]}(u_1) + 1_{[\alpha;\beta]}(u_2) + \cdots + 1_{[\alpha;\beta]}(u_n)}{n}\right) = \beta-\alpha = \int_0^1 1_{[\alpha;\beta]}(t)\,\mathrm{d}t$$

⇒ Démontrons que la propriété est vraie pour toutes les fonctions en escalier.

Soit donc $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i 1_{A_i}$, où $A_i = [\alpha_i;\beta_i]$ une fonction en escalier.

Alors :

$$\begin{aligned} f(u_1) + f(u_2) + \cdots + f(u_n) = & \; \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i 1_{A_i}(u_k)\right) \\ = & \; \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_i}(u_k)\right) \\ = & \; \sum_{i=1}^{p} \lambda_i k_n(\alpha_i,\beta_i) \end{aligned}$$

mathinfovannes.free.fr©

De là, nous avons $\left(\dfrac{f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n)}{n}\right)=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\frac{k_n(\alpha_i,\beta_i)}{n}$

En passant à la limite, et en utilisant le point précédent, nous avons :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n)}{n}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\frac{k_n(\alpha_i,\beta_i)}{n}\\ &= \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\lim_{n\to+\infty}\frac{k_n(\alpha_i,\beta_i)}{n}\\ &= \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\int_0^1 1_{[\alpha_i;\beta_i]}(t)\ \mathrm{d}t\\ &= \int_0^1\sum_{i=1}^{p}\lambda_i 1_{[\alpha_i;\beta_i]}(t)\ \mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Le résultat est donc vrai pour les fonctions en escaliers

⇒ Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[0;1]$.
Il existe donc 2 fonctions en escaliers sur $[0;1]$ appelées φ et ψ telles que, pour tout $\varepsilon>0$:

$$\varphi\leqslant f\leqslant\psi \text{ et } \int_0^1(f-\varphi)(t)\ \mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \int_0^1(\psi-f)(t)\ \mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2}$$

Ceci signifiant que :

$$\frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\cdots+\varphi(u_n)}{n}\leqslant\frac{f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n)}{n}\leqslant\frac{\psi(u_1)+\psi(u_2)+\cdots+\psi(u_n)}{n}$$

De plus, remarquant que $\displaystyle\int_0^1(f-\varphi)(t)\ \mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2}\Longleftrightarrow\int_0^1(f-\varphi)(t)\ \mathrm{d}t-\frac{\varepsilon}{2}<0$ et que nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^1(f-\varphi)(t)\ \mathrm{d}t-\frac{\varepsilon}{2} &= \int_0^1(f-\varphi)(t)-\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1(f(t)-\varepsilon)-\left(\varphi(t)-\frac{\varepsilon}{2}\right)\ \mathrm{d}t\\ &= \int_0^1(f(t)-\varepsilon)\ \mathrm{d}t-\int_0^1\left(\varphi(t)-\frac{\varepsilon}{2}\right)\ \mathrm{d}t\\ &= \left(\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t-\varepsilon\right)-\left(\int_0^1\varphi(t)\ \mathrm{d}t-\frac{\varepsilon}{2}\right)\end{aligned}$$

D'où nous concluons que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t-\varepsilon<\int_0^1\varphi(t)\ \mathrm{d}t-\frac{\varepsilon}{2}$

De la même manière, nous montrerions que $\displaystyle\int_0^1\psi(t)\ \mathrm{d}t+\frac{\varepsilon}{2}<\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t+\varepsilon$

⇒ Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\cdots+\varphi(u_n)}{n}\right)=\int_0^1\varphi(t)\ \mathrm{d}t$, il existe $N_\varphi\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geqslant N_\varphi$, alors :

$$\left|\frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\cdots+\varphi(u_n)}{n}-\int_0^1\varphi(t)\ \mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

De même, il existe $N_\psi\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geqslant N_\psi$, alors :

$$\left|\frac{\psi(u_1)+\psi(u_2)+\cdots+\psi(u_n)}{n}-\int_0^1\psi(t)\ \mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Et donc, pour $n \geqslant N \geqslant \max\{N_\psi; N_\varphi\}$, nous avons :

$$\left|\frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\cdots+\varphi(u_n)}{n} - \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\left|\frac{\psi(u_1)+\psi(u_2)+\cdots+\psi(u_n)}{n} - \int_0^1 \psi(t)\,\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Et donc, pour $n \geqslant N \geqslant \max\{N_\psi; N_\varphi\}$, nous avons :

$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\cdots+\varphi(u_n)}{n} < \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\int_0^1 \psi(t)\,\mathrm{d}t - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\psi(u_1)+\psi(u_2)+\cdots+\psi(u_n)}{n} < \int_0^1 \psi(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow$ Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geqslant N$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \varepsilon < & \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \frac{\varepsilon}{2} \\ \leqslant & \frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\cdots+\varphi(u_n)}{n} \\ \leqslant & \frac{f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n)}{n} \\ \leqslant & \frac{\psi(u_1)+\psi(u_2)+\cdots+\psi(u_n)}{n} \\ < & \int_0^1 \psi(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2} < \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon\end{aligned}$$

C'est à dire que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \varepsilon < \frac{f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n)}{n} < \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon$$

Ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n)}{n}\right) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$

4. *Soient $\alpha \in [0;1]$ et $\beta \in [0;1]$ tels que $\alpha \leqslant \beta$. Nous appelons $S_n(\alpha,\beta)$ la somme des u_i tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\alpha < u_i < \beta$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n(\alpha,\beta)}{n} = \dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}$*

   Soient $\alpha \in [0;1]$ et $\beta \in [0;1]$ tels que $\alpha \leqslant \beta$.
   Pour démontrer ce résultat, nous allons utiliser la fonction $f(x) = x \times 1_{[\alpha;\beta]}(x)$ qui est égale à x si $x \in [\alpha;\beta]$ et à 0 sinon.
   Cette fonction est Riemann-intégrable sur $[0;1]$ comme produit de 2 fonctions intégrables au sens de Riemann.
   Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n)}{n}\right) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Précisons les choses :
   - ⋆ Tout d'abord $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t \times 1_{[\alpha;\beta]}(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_\alpha^\beta = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$
   - ⋆ Puis :

   $$f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n) = u_1 \times 1_{[\alpha;\beta]}(u_1) + u_2 \times 1_{[\alpha;\beta]}(u_2) + \cdots + u_n \times 1_{[\alpha;\beta]}(u_n) = S_n(\alpha,\beta)$$

   - ⋆ Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n(\alpha,\beta)}{n} = \dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}$