Jean-Luc Éveno ©

Les mathématiques de L_1

Version du 25 février 2024

La connaissance est un bien qui doit voyager entre les hommes,
de l'un à l'autre, d'une génération à l'autre, d'un pays à l'autre.

ARISTOTE

Table des matières

Première partie

Algèbre

Chapitre 1

Les groupes

DANS CE CHAPITRE, NOUS APPROFONDISSONS LA THÉORIE DES GROUPES. DANS LE COURS DE L_0, NOUS NOUS SOMMES INTÉRESSÉS, PAR DES EXERCICES, À DES NOTIONS QUI AURONT, DANS CET EXPOSÉ, VALEUR DE LEÇON À RETENIR ET À MIEUX TRAVAILLER.
DANS UNE PREMIÈRE PARTIE, NOUS FAISONS RAPPELS ET EXERCICES

1.1 Introduction

Un point de vue sur les lois de composition interne peut être celui ci :
On appelle loi de composition interne toute application.

$$\begin{array}{rcl} f : E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = x \star y \end{array}$$

C'est tout à fait correct, mais la notation d'opération $\star$ rend les choses plus simple ; c'est celle que nous utiliserons

1.1.1 Définition de groupe fini

Soit $(G, \star)$ un groupe, on dit que le groupe est fini si l'ensemble G l'est.
L'ordre du groupe G est le cardinal $\operatorname{Card} G$ de G , on le note aussi $\#(G)$ ou $|G|$.

Remarque 1 :

Du fait de la présence de l'élément neutre dans G, alors $G \neq \emptyset$ et on observera que $\#(G) \geqslant 1$ pour tout groupe $(G, \star)$

1.1.2 Définition de sous-groupe engendré

Soit $(G, \star)$ un groupe et $S \subset G$ une partie, non vide, de G
On appelle sous-groupe engendré par S le plus petit sous-groupe $\langle S \rangle$ contenant S
Autrement dit, si $\mathcal{H}_S$ est l'ensemble des sous-groupes de G contenant S, nous avons :

$$\langle S \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_S} H$$

Exercice 1 :

Soit G un groupe dont l'opération est notée multiplicativement et $S \subset G$ une partie non vide de G. Démontrer que :

$$\langle S \rangle = \left\{ y \in G \text{ où } y = \prod_{i=0}^{n} x_i \text{ avec } (\forall n \in \mathbb{N}) \left((x_n \in S) \text{ ou } \left(x_n^{-1} \in S\right) \right) \right\}$$

Exercice 2 :

Dans un groupe G, on considère un sous-groupe $H \subset G$ engendré par deux éléments a et b. Montrer que si $ab = ba$, alors H est abélien.

1.1.3 Définition

Soit G un groupe dont l'opération interne est notée multiplicativement et $S \subset G$ une partie de G, non vide.

1. Si $\langle S \rangle = G$, S est dite partie génératrice de G. S est un ensemble de générateurs de G et engendre G.
2. Si $S = \{x\}$, alors on dit que $\langle x \rangle$ est dit monogène
   Nous avons alors $\langle x \rangle = \{x^n \text{ où } n \in \mathbb{Z}\}$
3. S'il existe une partie $S \subset G$, non vide et de cardinal fini telle que S engendre G, on dira que G est un groupe de type fini.

Remarque 2 :

Attention !! **Un groupe G peut être de type fini sans être fini !** Exemple : $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ et $\mathbb{Z}$ n'est pas fini.

1.1.4 Définition de groupe cyclique

On appelle groupe cyclique tout groupe monogène et fini.

Exemple 1 :

Exemple de groupe cyclique : le groupe des racines n-ièmes de 1 :

$$\mathcal{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

1.1.5 Ordre d'un éléments d'un groupe

Soit G un groupe noté multiplicativement et $x \in G$

1. Si $\langle x \rangle$ est un groupe d'ordre infini, on dit que l'ordre de x est dit infini
2. Si, au contraire, $\langle x \rangle$ est un groupe d'ordre fini, on dit que l'ordre de x est fini et l'ordre de x est l'ordre du groupe $\langle x \rangle$, c'est à dire $\# (\langle x \rangle)$

Exercice 3 :

Dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$, déterminer l'ordre de $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$ et de $\dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$

Exercice 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = km$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Quel est l'ordre du groupe $\langle x^k \rangle$?

1.1.6 Exercices

Exercice 5 :

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition $\top$ associative avec un élément neutre e et telle que tout élément de E admet un inverse à gauche, c'est à dire :

$$(\forall a \in E)\,(\exists b \in E)\,(b \top a = e)$$

1. Montrer que tout élément de E possède un inverse à droite qui coïncide avec son inverse à gauche
2. En déduire que $(E, \top)$ est un groupe

Exercice 6 :

Montrer que si $(G,\star)$ est un groupe et E un ensemble quelconque non vide, alors l'ensemble G^E des applications de E dans G muni de la loi $\perp$ définie par :

$$\left(\forall f\in G^E\right)\left(\forall g\in G^E\right)\left(\left(f\perp g\right)(x)=f(x)\star g(x)\right)$$

est un groupe et que ce groupe est commutatif si $(G,\star)$ l'est.

Exercice 7 :

On considère l'ensemble $G=\left]-1,+1\right[$ muni de la loi $\star$ définie par :

$$x\star y=\frac{x+y}{1+xy}$$

Démontrer que $(G,\star)$ est un groupe commutatif.

Exercice 8 :

Soit G un groupe dont l'opération est notée multiplicativement d'élément neutre 1.

1. Montrer que G est commutatif si, et seulement si, pour tout $a\in G$ et tout $b\in G$, nous avons $(ab)^2=a^2b^2$ *(Ce qui revient à dire que l'application $a\mapsto a^2$ est un morphisme de groupes).*
2. Montrer que G est commutatif si, et seulement si, pour tout $a\in G$ et tout $b\in G$, nous avons $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$ *(Ce qui revient à dire que l'application $a\mapsto a^{-1}$ est un morphisme de groupes).*

Attention :

Dans $\mathrm{GL}_n(R)$ muni de la multiplication des matrices, nous n'avons pas, en général, pour $n\geqslant 2$ $(AB)^n=A^nB^n$.

Par exemple, pour $n=2$, prenons $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

Alors $(AB)^2=\begin{pmatrix}10&24\\24&58\end{pmatrix}$ et $A^2B^2=\begin{pmatrix}7&24\\15&52\end{pmatrix}$

Exercice 9 :

Montrer que l'ensemble $\mathrm{SL}_n(R)$ des matrices carrées réelles d'ordre n de déterminant égal à 1 est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(R)$.

Exercice 10 :

Montrer que l'ensemble G des matrices réelles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $M_{(a,b)}=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$ avec $a^2\neq b^2$ est un groupe multiplicatif. Est-il commutatif ?

Exercice 11 :

Soit H une partie finie non vide d'un groupe $(G,\star)$.
Montrer que H est un sous-groupe de $(G,\star)$ si, et seulement si, il est stable pour la loi $\star$

Exercice 12 :

Soit G un groupe dont l'opération est notée multiplicativement. Soient H et K deux sous-groupes de G. On définit les sous-ensembles HK et KH de G par :

$$HK=\{hk \text{ où } h\in H \text{ et } k\in K\} \text{ et } KH=\{kh \text{ où } h\in H \text{ et } k\in K\}$$

Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK=KH$

Exercice 13 :

1. Soit G un groupe dont l'opération est notée multiplicativement. Montrer que, pour tout $a \in G$ et tout $b \in G$
   (a) a et a^{-1} ont même ordre
   (b) a et bab^{-1} ont même ordre
   (c) ab et ba ont même ordre
2. Dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, groupe des matrices carrées inversibles. Donner l'ordre des éléments suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad AB$$

Exercice 14 :

Soit G un groupe, $a \in G$ et $b \in G$ deux éléments d'ordres finis dans G tels que $ab = ba$.

1. Montrer que le produit ab est d'ordre fini et que l'ordre de ab divise le ppcm des ordres de a et b.
2. Montrer que si G est abélien, l'ensemble des éléments d'ordre fini de G forme un sous-groupe.
3. Montrer que si les ordres de a et b sont premiers entre eux, l'ordre de ab est égal au ppcm des ordres de a et de b

Exercice 15 :

Générateurs d'un groupe cyclique

1. Dans un groupe G engendré par un élément a, montrer que tout sous-groupe est engendré par un éléement a^m où m est un entier positif.
2. Soit G un groupe cyclique d'ordre n : $G = \{e, a, a^2 \dots a^{n-1}\}$. Montrer que a^k engendre G si, et seulement si, k est premier avec n.

Exercice 16 :

Soient G et G' 2 groupes notés multiplicativement, $\varphi : G \longrightarrow G'$ un homomorphisme de groupe. Soit $x \in G$ un élément d'ordre n

1. Démontrer que $\varphi(x)$ est d'ordre fini et que son ordre divise n.
2. Démontrer que si φ est injective, l'ordre de $\varphi(x)$ est exactement égal à n

1.2 Classes suivant un sous-groupe

Soit G un groupe *(non forcément commutatif)*, dont l'opération est notée multiplicativement, et $H \subset G$ un sous-ensemble de G. Dans cette section nous noterons, pour $x \in G$:

$$xH = \{y \in G \text{ où } y = xh \text{ avec } h \in H\} \text{ et } Hx = \{y \in G \text{ où } y = hx \text{ avec } h \in H\}$$

1.2.1 Théorème

Soient G un groupe noté multiplicativement et $H \subset G$ un sous-groupe de G
Nous considérons la relation ${}_H\mathcal{R}$ suivante :

$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,\big((x\,{}_H\mathcal{R}\,y) \Longleftrightarrow (x^{-1}y \in H)\big)$$

1. ${}_H\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
2. La classe d'équivalence $\dot{x}$ d'un élément $x \in G$ est l'ensemble $\dot{x} = xH$
3. L'application φ_x ainsi définie :

$$\begin{cases} \varphi_x : H & \longrightarrow & xH \\ \qquad h & \longmapsto & \varphi_x(h) = xh \end{cases}$$

   est une bijection

Démonstration

Nous appellerons e l'élément neutre de G

1. ${}_H\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
   → **Elle est réflexive**
   Soit $x \in G$. Avons nous $x\,{}_H\mathcal{R}x$?
   Nous avons $xx^{-1} = e$; comme H est un sous-groupe de G, $e \in H$ et donc $xx^{-1} \in H$, c'est à dire que nous avons $x\,{}_H\mathcal{R}x$
   ${}_H\mathcal{R}$ est bien réflexive.
   → **Elle est symétrique**
   Soient $x \in G$ et $y \in G$ tels que $x\,{}_H\mathcal{R}y$. Avons nous $y\,{}_H\mathcal{R}x$?
   Nous avons, par définition $(x\,{}_H\mathcal{R}y) \iff \left(x^{-1}y \in H\right)$
   Comme H est un sous-groupe, H contient l'inverse de tous ses éléments. Ainsi, si $x^{-1}y \in H$, alors $\left(x^{-1}y\right)^{-1} \in H$.
   Comme $\left(x^{-1}y\right)^{-1} = y^{-1}x$, nous avons donc $y^{-1}x_i nH$ et donc $y\,{}_H\mathcal{R}x$
   ${}_H\mathcal{R}$ est bien symétrique
   → **Elle est transitive**
   Soient $x \in G$, $y \in G$ et $z \in G$ tels que $x\,{}_H\mathcal{R}y$ et $y\,{}_H\mathcal{R}z$. Avons nous $x\,{}_H\mathcal{R}z$?
   Nous avons, par définition $(x\,{}_H\mathcal{R}y) \iff \left(x^{-1}y \in H\right)$ et $(y\,{}_H\mathcal{R}z) \iff \left(y^{-1}z \in H\right)$
   Comme H est un sous-groupe, la composition déléments de H est interne. Ainsi, si $x^{-1}y \in H$ et $y^{-1}z \in H$, alors $\left(x^{-1}y\right)\left(y^{-1}z\right) \in H$.
   Or, $\left(x^{-1}y\right)\left(y^{-1}z\right) = x^{-1}z$ et donc $x^{-1}z \in H$ d'où $x\,{}_H\mathcal{R}z$
   ${}_H\mathcal{R}$ est bien transitive
   La relation ${}_H\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence.
2. La classe d'équivalence $\dot{x}$ d'un élément $x \in G$ est l'ensemble $\dot{x} = xH$
   Soit $y \in \dot{x}$; alors $x^{-1}y \in H$ et donc il existe $h \in H$ tel que $x^{-1}y = h \iff y = xh$, ce qui veut dire que $y \in xH$. Donc $\dot{x} \subset xH$
   Réciproquement, soit $y \in xH$; il existe $h \in H$ tel que $y = xh$ et donc $x^{-1}y = h \in H$, ce qui veut dire que $x\,{}_H\mathcal{R}y$ et que $y \in \dot{x}$. Ce qui veut dire que $xH \subset \dot{x}$
   Et donc $xH = \dot{x}$
3. L'application φ_x est bijective
   → **Elle est injective**
   Soient $h_1 \in H$ et $h_2 \in H$ tels que $\varphi_x(h_1) = \varphi_x(h_2)$.
   Alors $xh_1 = xh_2$ et donc $h_1 = h_2$. φ_x est donc injective
   → **Elle est surjective**
   Soit $y \in xH$; il existe alors $h \in H$ tel que $y = xh$, et donc $\varphi_x(h) = y$. φ_x est donc surjective
   L'application φ_x est donc bijective.

Remarque 3 :

1. Du théorème 1.2.1 ci-dessus, nous tirons que, si G est d'ordre fini, H l'est aussi et $\operatorname{Card} H = \operatorname{Card} xH$
2. ${}_H\mathcal{R}$ est la **relation d'équivalence à gauche**
3. Nous définirions, et avec des résultats semblables, **une relation d'équivalence à droite** $\mathcal{R}_H$ définie par :
   $$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,\left((x\mathcal{R}_H y) \iff \left(xy^{-1} \in H\right)\right)$$
   La classe d'équivalence $\dot{x}$ d'un élément $x \in G$ devient alors $\dot{x} = Hx$
4. (a) Les ensembles de la forme xH sont appelés **les classes à gauche**
   (b) Les ensembles de la forme Hx sont appelés **les classes à droite**
   (c) Dans un groupe commutatif, il n'y pas lieu de différencier les classes à gauche ou les classes à droite. On parle alors, plus simplement, **de classes suivant le sous-groupe** H

5. Comme d'habitude, nous notons $G/_H\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence à gauche et $G/\mathcal{R}_H$ l'ensemble des classes d'équivalences à droite. On note souvent :

$$G/_H\mathcal{R} = (G/H)_g \text{ et } G/\mathcal{R}_H = (G/H)_d$$

6. Il est clair que si G est un groupe commutatif, alors $_H\mathcal{R} = \mathcal{R}_H = \mathcal{R}$; l'ensemble des classes d'équivalence est noté G/H
7. Il est aussi très facile de démontrer que $\dot{e} = H$
8. Il est clair, aussi, que nous avons, la plupart du temps $xH \neq Hx$

Exemple 2 :

1. Si $H = G$, il n'y a qu'une seule classe d'équivalence et $(G/H)_g = (G/H)_d = G$
2. Autre exemple si $H = \{e\}$, alors la relation $\mathcal{R}_H$ devient

$$(x\mathcal{R}_H y) \iff (xy^{-1} = e) \iff (x = y)$$

   C'est à dire que la relation $\mathcal{R}_H$ est la relation d'égalité ; il en est de même de $_H\mathcal{R}$
3. l'exemple le plus canonique est celui du groupe additif $(\mathbb{Z}, +)$ des nombres relatifs. Tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont du type $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
   La relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \iff x-y \in n\mathbb{Z}$ est la relation de congruence. La classe d'équivalence d'un entier $x \in \mathbb{Z}$ est donnée par $\dot{x} = x + n\mathbb{Z} = \{\cdots x - 2n, x_n, x, x + n, x + 2n, \cdots x + kn\}$

Exercice 17 :

Nous considérons $(\mathbb{C}^*, \times)$ le groupe multiplicatif des nombres complexes et $\mathcal{U}$ le sous-groupe des nombres complexes de module 1. Quelles sont les classes d'équivalence modulo $\mathcal{U}$?

Exercice 18 :

Soit G un groupe cyclique d'ordre 12. Montrer qu'il existe un sous-groupe H d'ordre 4 et un seul. Déterminer alors l'ensemble des classes à gauche G/H.

1.2.2 Le théorème de Lagrange

Soit G un groupe fini et $H \subset G$, un sous-groupe de G
Alors, l'ordre de H divise l'ordre de G

Démonstration

L'opération interne du groupe G est notée multiplicativement.
Soit $_H\mathcal{R}$ la relation d'équivalence à gauche modulo le sous-groupe H. Les classes d'équivalence $xH \in (G/H)_g$ forment une partition de G. D'après 1.2.1, toutes ces classes d'équivalence ont le même nombre d'éléments que H.
Comme $G = \bigcap_{x\in G} xH$, nous avons $\operatorname{Card} G = \sum_{x\in G} \operatorname{Card} H$, c'est à dire $\operatorname{Card} G = p\operatorname{Card} H$
Ce que nous voulions

Remarque 4 :

On dit souvent :

Dans un groupe fini, l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe

1.2.3 Corollaire

Dans un groupe G d'ordre p nombre premier, les seuls sous-groupes sont G et $\{e\}$

Démonstration

La démonstration est simple.
Si $H \subset G$ est un sous-groupe de G, alors $\operatorname{Card} H$ est un nombre qui divise p. Ainsi, $\operatorname{Card} H = 1$ ou $\operatorname{Card} H = p$, c'est à dire $H = G$ ou $H = \{e\}$

Exercice 19 :

Montrer qu'un groupe fini d'ordre un nombre p premier est cyclique *(et donc commutatif)*.

Exercice 20 :

Soient S_1 et S_2 deux sous-groupes finis d'un groupe G d'ordres respectifs n_1 et n_2. Montrer que si n_1 est premier avec n_2 alors $S_1 \cap S_2 = \{e\}$.

Exercice 21 :

Montrer que si deux éléments d'un groupe ont des ordres finis premiers entre eux, l'intersection des sous-groupes qu'ils engendrent est réduite au singleton $\{e\}$.

1.3 Groupe quotient d'un groupe commutatif

Introduction

Soit G un groupe commutatif et $H \subset G$ un sous-groupe de G.
On appelle $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence dans G :

$$x\mathcal{R}y \iff x^{-1}y \in H \iff y \in xH$$

G étant commutatif, nous ne privilégions pas la relation à droite ou à gauche.
On appelle $E = G/\mathcal{R}$ l'ensemble quotient de G par $\mathcal{R}$ et nous y définissons une loi de composition :

$$\mathring{x} \times \mathring{y} = \overset{\circ}{\widehat{xy}}$$

1.3.1 Proposition

Soit G un groupe commutatif et $H \subset G$ un sous-groupe de G.
Nous considérons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence dans G définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff x^{-1}y \in H \iff y \in xH$$

et l'opération dans l'ensemble quotient $E = G/\mathcal{R}$ définie, pour tout $\mathring{x} \in G/\mathcal{R}$ et tout $\mathring{y} \in G/\mathcal{R}$ par :

$$\mathring{x} \times \mathring{y} = \overset{\circ}{\widehat{xy}}$$

Alors, cette opération est indépendante du choix du représentant

Démonstration

Soient $u \in \mathring{x}$ et $v \in \mathring{y}$; alors $\mathring{u} = \mathring{x}$ et $\mathring{v} = \mathring{y}$.

Il faut donc montrer que $\underset{\circ}{\widehat{xy}} = \underset{\circ}{\widehat{uv}}$, c'est à dire $uv\mathcal{R}xy$

- Si $u \in \mathring{x}$, alors $u\mathcal{R}x$ et donc $u \in xH$; de même, comme $v \in \mathring{y}$, alors $v \in yH$
- Il existe donc $h_1 \in H$ et $h_2 \in H$ tels que $u = xh_1$ et $v = yh_2$ et donc $uv = xyh_1h_2$
- Comme H est un sous groupe de G, $h_1h_2 \in H$ et donc $uv \in xyH$ et nous avons $uv\mathcal{R}xy$, c'est à dire $\overset{\circ}{\widehat{xy}} = \overset{\circ}{\widehat{uv}}$

Ce que nous voulions

1.3.2 Théorème

Soit G un groupe commutatif et $H \subset G$ un sous-groupe de G.
Nous considérons l'opération dans l'ensemble quotient $E = G/\mathcal{R}$ définie, pour tout $\mathring{x} \in G/\mathcal{R}$ et tout $\mathring{y} \in G/\mathcal{R}$ par :

$$\mathring{x} \times \mathring{y} = \overset{\circ}{\widehat{xy}}$$

Alors

1. $E = G/\mathcal{R}$, muni de cette opération est un groupe commutatif
2. L'application canonique $\varphi : E \longrightarrow G$ définie par :

$$\begin{cases} \varphi : E = G/\mathcal{R} & \longrightarrow & G \\ \qquad\qquad x & \longmapsto & \varphi(x) = \mathring{x} \end{cases}$$

   est un homomorphisme de groupe

Le groupe E ainsi défini se note G/H et est appelé groupe quotient de G par H

Démonstration

1. Démontrons que G/H est un groupe commutatif

   ⇒ Clairement, puisque $\mathring{x} \times \mathring{y} = \overset{\circ}{\widehat{xy}}$, la loi est une loi de composition interne.
   ⇒ **La loi est associative**
   En effet, soient $\mathring{x} \in E$, $\mathring{y} \in E$ et $\mathring{z} \in E$; alors :

$$\mathring{x} \times [\mathring{y} \times \mathring{z}] = \mathring{x} \times \overset{\circ}{\widehat{yz}} = \overset{\circ}{\widehat{xyz}}$$
$$[\mathring{x} \times \mathring{y}] \times \mathring{z} = \overset{\circ}{\widehat{xy}} \times \mathring{z} = \overset{\circ}{\widehat{xyz}}$$

   Nous avons donc $\mathring{x} \times [\mathring{y} \times \mathring{z}] = [\mathring{x} \times \mathring{y}] \times \mathring{z}$ et la loi est associative.
   ⇒ **La loi admet un élément neutre**
   Evidemment, si $e \in G$ est le neutre de G, le neutre de l'opération dans G est donné par $\mathring{e}$; en effet :

$$\mathring{e} \times \mathring{x} = \overset{\circ}{\widehat{ex}} = \mathring{x}$$

   ⇒ **Chaque élément $\mathring{x} \in E$ admet un inverse**

   Evidemment, nous avons $(\mathring{x})^{-1} = \overset{\circ}{\widehat{x^{-1}}}$; en effet :

$$\mathring{x} \times \overset{\circ}{x^{-1}} = \overset{\circ}{\widehat{xx^{-1}}} = \mathring{e}$$

   Comme $\mathring{e}$ est l'élément neutre, nous avons bien $(\mathring{x})^{-1} = \overset{\circ}{\widehat{x^{-1}}}$
   ⇒ **La loi est évidemment commutative**

2. φ est bien un homomorphisme de G sur G/H
   Soient $x \in G$ et $y \in G$, alors :

$$\varphi(x) \times \varphi(y) = \mathring{x} \times \mathring{y} = \overset{\circ}{\widehat{xy}} = \varphi(xy)$$

   φ est donc bien un homomorphisme de G sur G/H

Exemple 3 :

1. $\mathbb{Z}$ est un groupe additif et tous les sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$ où $a \in \mathbb{N}^*$.
   $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ est le groupe des entiers modulo a et $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ a n éléments. Les représentants canoniques de $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ sont les restes $\{0, 1, 2, \cdots, a-1\}$ dans la division par a.

2. $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$; qu'est ce que le groupe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$?.
   $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est défini par la relation $x\mathcal{R}y \iff x-y \in \mathbb{Z}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $x = [x] + (x - [x])$, où $[x]$ désigne la partie entière de x, et donc $(x - [x]) \in [0;+1[$.
   Ainsi, $\mathring{x} = x + \mathbb{Z} = \{\cdots, x-2, x-1, x, x+1, \cdots\}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq [0;+1[$.

   Un exemple d'opération dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est $\mathring{\widehat{1,425}} + \mathring{\widehat{3,730}} = \mathring{\widehat{5,155}} = \mathring{\widehat{0,155}}$

1.3.3 Proposition

Soient G et G' deux groupes ; on suppose G commutatif. Soit $f : G \longrightarrow G'$ un homomorphisme de groupe. Alors, l'application $\overline{f}$:

$$\begin{array}{rcl} \overline{f} : G/\ker f & \longrightarrow & f(G) \\ \mathring{x} & \longmapsto & h(\mathring{x}) = \overline{f}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme

Démonstration

Il faut d'abord dire que $f(G)$ *(parfois aussi noté* $\mathrm{Im} f$*)* est un sous-groupe de G' de neutre e'

1. Tout d'abord, $\overline{f}$ est un morphisme. En effet, pour tout $\mathring{x} \in G/\ker f$ et tout $\mathring{y} \in G/\ker f$:

$$\overline{f}(\mathring{x}\mathring{y}) = \overline{f}\left(\mathring{\widehat{xy}}\right) = f(xy) = f(x)f(y) = \overline{f}(\mathring{x})\,\overline{f}(\mathring{y})$$

2. Ensuite, $\overline{f}$ est injective :

$$\overline{f}(\mathring{x}) = e' \iff f(x) = e' \iff x \in \ker f \iff x \in \mathring{e} \iff \mathring{x} = \mathring{e}$$

3. Et, pour finir, $\overline{f}$ est surjective :
   En effet, soit $y \in f(G)$, il existe $x \in G$ tel que $y = f(x)$, et nous avons donc :

$$\overline{f}(\mathring{x}) = f(x) = y$$

   Donc, pour tout $y \in f(G)$, il existe $\mathring{x} \in G/\ker f$ tel que $\overline{f}(\mathring{x}) = y$

1.3.4 Décomposition canonique d'un morphisme $f : G \longrightarrow G'$

Soient G et G' deux groupes ; on suppose G commutatif. Soit $f : G \longrightarrow G'$ un homomorphisme de groupe. Alors, $f : G \longrightarrow G'$ se décompose de manière canonique en $f = i \circ \overline{f} \circ \varphi$ où :
→ φ est la projection canonique $\varphi : G \longrightarrow G/\ker f$
→ $\overline{f}$ est l'isomorphisme $\overline{f} : G/\ker f \longrightarrow f(G)$ défini en 1.3.3
→ Et $i : f(G) \longrightarrow G'$ est l'application d'insertion
Nous obtenons alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & G' \\ G/\ker f \arrow[r, "\overline{f}"'] & f(G) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Démonstration

1. On considère donc la projection canonique φ :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi : G & \longrightarrow & G/\ker f \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \dot{x} \end{array} \right.$$

2. De même, considérons l'insertion i définie par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} i : f(G) & \longrightarrow & G' \\ y & \longmapsto & i(y) = y \end{array}\right.$$
C'est l'application identique restreinte à $f(G)$
3. Pour terminer, considérons $\overline{f}$:
$$\begin{array}{rcl} \overline{f} : G/\ker f & \longrightarrow & f(G) \\ \mathring{x} & \longmapsto & \overline{f}(\mathring{x}) = f(x) \end{array}$$
On sait déjà que $\overline{f}$ est un isomorphisme.
4. Alors, pour tout $x \in G$, nous avons $f(x) = i \circ \overline{f} \circ \varphi(x)$. Nous avons donc le diagramme suivant. On dit qu'il est commutatif.
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & G' \\ G/\ker f \arrow[r, "\overline{f}"'] & f(G) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

1.3.5 Théorème

Soit G un groupe quelconque et $x \in G$ un élément de G. Nous notons toujours $\langle x \rangle$ le groupe engendré par x.

1. Si l'ordre de x est infini, alors les puissances de x sont 2 à 2 distinctes et $\langle x \rangle$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$
2. Si l'ordre de x est un nombre fini alors $\langle x \rangle$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$ et nous avons $x^p = x^q \iff p \equiv q\,[n]$

Démonstration

1. Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ définie par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ n & \longmapsto & f(n) = x^n \end{array}\right.$$
f est clairement un homomorphisme de groupe de $\mathbb{Z}$ dans G et nous avons $f(\mathbb{Z}) = \langle x \rangle$, et donc, d'après 1.3.3, $\langle x \rangle$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/\ker f$.
Remarquons que $\ker f$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ et il est donc du type $\ker f = b\mathbb{Z}$ où $b \in \mathbb{N}$
2. Si $\ker f = \{0\}$, alors f est injective et $\mathbb{Z}$ et $\langle x \rangle$ sont isomorphes.
Les puissances de x sont 2 à 2 distinctes.
En effet, supposons qu'il existe 2 entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$ avec $p \neq q$ tels que $x^p = x^q$, alors $x^{p-q} = e$ et donc $p - q \in \ker f$. Or si $p \neq q$, alors $p - q \neq 0$, ce qui contredit le fait que $\ker f = \{0\}$, et donc nous pouvons conclure que les puissances de x sont 2 à 2 distinctes.
3. Si $\ker f \neq \{0\}$ alors, il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $\ker f = b\mathbb{Z}$, et alors, toujours d'après 1.3.3, $\langle x \rangle$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ et n'a donc que b éléments
Soient 2 entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$ tels que $x^p = x^q$; alors $x^{p-q} = e$ et donc $p - q \in \ker f$, c'est à dire $p - q \in b\mathbb{Z}$ et donc $p \equiv q\,[b]$

1.3.6 Corollaire

Soit G un groupe et $x \in G$
Si x est un élément d'ordre n, alors n est le plus petit entier positif tel que $x^n = e$

Démonstration

On suppose que x est d'ordre n ; nous avons donc Card $(\langle x \rangle) = n$.
Soit $p \in \mathbb{N}$, avec $0 < p < n$ tel que $x^p = e$. En effectuant la division de n par p, nous obtenons $n = kp + r$ où $0 \leqslant r < p$, et donc $x^n = x^{kp+r} = (x^p)^k x^r = e^k x^r = x^r$
Dans ce cas, nous avons alors Card $(\langle x \rangle) = p$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
Donc, n est le plus petit entier positif tel que $x^n = e$

1.3.7 Corollaire

Soit G un groupe fini d'ordre n et de neutre e ; alors, pour tout $x \in G$, $x^n = e$

Démonstration

Soit $x \in G$, et on suppose que p est l'ordre de x.
Ceci signifie donc que le cardinal du sous-groupe $\langle x \rangle$ engendré par x est donc p et que $x^p = e$.
D'après le théorème de Lagrange 1.2.2, p est un diviseur de n. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = kp$ d'où :

$$x^n = x^{kp} = (x^p)^k = e^k = e$$

Ce que nous voulions

1.3.8 Corollaire

Tout groupe G d'ordre premier p est cyclique et isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Démonstration

Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p.
Comme $p \geqslant 2$, il existe $x \in G$ tel que $x \neq e$ et $\langle x \rangle$ est un sous-groupe de G. Card $(\langle x \rangle)$ divisant p, nous avons Card $(\langle x \rangle) = 1$ ou Card $(\langle x \rangle) = p$
Comme nous ne pouvons pas avoir Card $(\langle x \rangle) = 1$, nous avons Card $(\langle x \rangle) = p$, et donc $\langle x \rangle = G$; G est donc cyclique.
$\langle x \rangle = G$ est isomorphe à un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; comme l'ordre de G est p, G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

1.4 Groupe opérant dans un ensemble

1.4.1 Définition

Soit G un groupe et X un ensemble
On dit que G opère dans X s'il existe un homomorphisme $\Phi : G \longrightarrow \mathfrak{S}(X)$ où $\mathfrak{S}(X)$ est le groupe des permutations de X

Remarque 5 :

1. Nous avons donc, pour tout $g \in G$ et tout $g' \in G$:
   - $\star$ $\Phi(gg') = \Phi(g) \circ \Phi(g')$
   - $\star$ $\Phi(g^{-1}) = (\Phi(g))^{-1}$
   - $\star$ $\Phi(e) = \mathrm{Id}_X$
2. Il arrive, qu'au lieu de noter $\Phi(g)(x)$, on note gx ou $g \star x$.
   Pour ma part, je pense que c'est source de confusion ; je ne l'utiliserai que parcimonnieusement.

Exemple 4 :

1. Un groupe G peut opérer sur lui même. Si nous posons $\mathfrak{S}(G)$ le groupe des permutations de G, nous pouvons nous intéresser à divers homomorphismes de G vers $\mathfrak{S}(G)$.
   (a) Le premier est Δ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta : G & \longrightarrow & \mathfrak{S}(G) \\ a & \longmapsto & \Delta(a) = \delta_a \end{array}\right. \quad \text{où} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \delta_a : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & \delta_a(x) = a \star x \end{array}\right.$$

   Clairement Δ est un homomorphisme de G dans $\mathfrak{S}(G)$
   (b) Le second est Γ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Gamma : G & \longrightarrow & \mathfrak{S}(G) \\ a & \longmapsto & \Gamma(a) = \gamma_a \end{array}\right. \quad \text{où} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \gamma_a : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & \gamma_a(x) = x \star a \end{array}\right.$$

(c) Et pour terminer Aut où

$$\left\{\begin{array}{rcl} Aut : G & \longrightarrow & \mathfrak{S}(G) \\ a & \longmapsto & Aut(a) = h_a \end{array}\right. \text{ où } \left\{\begin{array}{rcl} h_a : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & h_a(x) = a^{-1} \star x \star a \end{array}\right.$$

2. On appelle, comme d'habitude, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices inversibles d'ordre n à coefficients réels. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ opère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par transitivité. En effet, si nous posons $\mathfrak{S}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ le groupe des permutations de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} C : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ P & \longmapsto & C(P) = C_P \end{array}\right. \text{ où } \left\{\begin{array}{rcl} C_P : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & C_P(M) = PMP^{-1} \end{array}\right.$$

1.4.2 Définition d'orbite d'un élément $x \in X$

Soit $x \in X$. On appelle orbite de $x \in X$ l'ensemble des transformations $\Phi(g)(x)$ où $g \in G$
En d'autres termes, si $\mathcal{O}(x)$ est l'orbite de x, nous avons

$$\mathcal{O}(x) = \{\Phi(g)(x) \text{ avec } g \in G\}$$

On dit que G opère transitivement sur G si, pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}(x) = G$

1.4.3 Proposition

Soit X un ensemble et G un groupe opérant dans X. On construit, dans X, la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$(\forall x \in X)(\forall x \in X)((x\mathcal{R}y) \Longleftrightarrow ((\exists g \in G)(y = \Phi(g)(x))))$$

Cette relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans X

Démonstration

1. **Elle est évidemment réflexive**
   Soit $x \in X$.
   Bien entendu, $x = \mathrm{Id}_X(x) = \Phi(e)(x)$, et donc $x\mathcal{R}x$
2. **Elle est aussi symétrique**
   Soient $x \in X$ et $y \in X$ tels que $x\mathcal{R}y$.
   Ceci veut dire qu'il existe $g \in G$ tel que $y = \Phi(g)(x)$
   $\Phi(g)$ étant une bijection de X, il existe une bijection réciproque $(\Phi(g))^{-1} = \Phi\left(g^{-1}\right)$
   Donc $y = \Phi(g)(x) \Longleftrightarrow (\Phi(g))^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow \left(\Phi\left(g^{-1}\right)\right)(y) = x$
   Il existe donc un élément de G, cet élément étant g^{-1} tel que $\left(\Phi\left(g^{-1}\right)\right)(y) = x$, et donc $y\mathcal{R}x$
   La relation $\mathcal{R}$ est donc bien symétrique
3. **La relation $\mathcal{R}$ est transitive**
   Soient $x \in X$, $y \in X$ et $z \in X$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$.
   Il existe donc $g_1 \in G$ et $g_2 \in G$ tels que $y = \Phi(g_1)(x)$ et $z = \Phi(g_2)(y)$. Alors :

$$z = \Phi(g_2)(y) = z = \Phi(g_2)[\Phi(g_1)(x)] = \Phi(g_2) \circ \Phi(g_1)(x) = \Phi(g_2 g_1)(x)$$

   Il existe donc un élément de G, cet élément étant $g_2 g_1$ tel que $z = \Phi(g_2 g_1)(x)$ et donc $x\mathcal{R}z$

$\mathcal{R}$ est donc bien une relation d'équivalence

1.4.4 Proposition

Pour tout $x \in X$, la classe d'équivalence dans la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie en 1.4.3 est l'orbite $\mathcal{O}(x)$ de x

Démonstration

La démonstration est simple et laissée au lecteur

Exemple 5 :

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'opération de conjugaison $C_P(M) = PMP^{-1}$, l'orbite $\mathcal{O}(M)$ d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables à M

1.4.5 Définition du stabilisateur d'un élément $x \in X$

Soit $x \in X$. On appelle stabilisateur de $x \in X$ l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $\Phi(g)(x) = x$
En d'autres termes, si $\mathcal{S}(x)$ est le stabilisateur de x, nous avons

$$\mathcal{S}(x) = \{g \in G \text{ tels que } \Phi(g)(x) = x\}$$

1.4.6 Proposition

Soit X un ensemble et G un groupe opérant dans X. Pour tout $x \in X$, $\mathcal{S}(x)$, le stabilisateur de x est un sous-groupe de G

Démonstration

1. Bien entendu que $\mathcal{S}(x) \neq \emptyset$ puisque, e l'élément neutre de G est un élément de $\mathcal{S}(x)$.
   En effet :
   $$\Phi(e)(x) = \mathrm{Id}_X(x) = x$$
2. D'autre part, si $g_1 \in \mathcal{S}(x)$ et $g_2 \in \mathcal{S}(x)$, alors $g_1g_2 \in \mathcal{S}(x)$. En effet :
   $$\Phi(g_1g_2)(x) = \Phi(g_1) \circ \Phi(g_2)(x) = \Phi(g_1)[\Phi(g_2)(x)] = \Phi(g_1)(x) = x$$
3. Dernière question : si $g \in \mathcal{S}(x)$, avons nous $g^{-1} \in \mathcal{S}(x)$?
   Première remarque, c'est que $\Phi(g)$ est une bijection de X et que donc $(\Phi(g))^{-1}$ est bien définie.
   Or, $(\Phi(g))^{-1} = \Phi\left(g^{-1}\right)$
   Ensuite :
   $$x = \Phi(g)(x) \iff (\Phi(g))^{-1}(x) = x \iff \Phi\left(g^{-1}\right)(x) = x$$
   Nous venons de démontrer que si $g \in \mathcal{S}(x)$ alors $g^{-1} \in \mathcal{S}(x)$

Exemple 6 :

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'opération de conjugaison $C_P(M) = PMP^{-1}$, quel est le stabilisateur d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
C'est donc, en fait, l'ensemble des matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $C_P(M) = M$. Autrement dit, c'est l'ensemble des matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PMP^{-1} \iff MP = PM$, c'est à dire l'ensemble des matrices inversibles qui commutent avec M. D'après 1.4.6, cet ensemble est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Exercice 22 :

1. Soit $\mathcal{H} = \left\{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R}^*\right\}$
   Démontrer que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$
2. Trouvez toutes les matrices $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1.5 Quelques exercices en complément

Exercice 23 :

Nous savons qu'une intersection quelconque de sous-groupes est un sous groupe ; nous n'avons pas du tout le même résultat avec la réunion.
Par exemple : $2\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{Z}$, mais $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
En effet, $2 \in 2\mathbb{Z}$ et $3 \in 3\mathbb{Z}$, mais $5 = 2 + 3 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$

Soient G un groupe et $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G. On suppose que, pour tout $i \in I$ et tout $j \in I$, il existe un élément $k \in I$ tel que $H_i \subset H_k$ et $H_j \subset H_k$.
Montrer que $\bigcup\limits_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G

Exercice 24 :

Soit G un groupe non commutatif de centre $Z(G)$. On désigne par $Aut(G)$ l'ensemble des automorphismes de G et $Int(G)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de G.
Nous avons démontré dans le cours de L_0 que $Z(G)$ est un sous-groupe de G et que les automorphismes intérieurs étaient des automorphismes.

1. (a) Démontrer que $(Aut(G), \circ)$ est un groupe
   (b) Démontrer que $(Int(G), \circ)$ est un sous-groupe de $(Aut(G), \circ)$
2. Nous allons démontrer que G opère sur luimême par les automorphismes intérieurs.
   Soit $\Phi : G \longrightarrow Int(G)$ défini par :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : G & \longrightarrow & Int(G) \\ a & \longmapsto & \Phi(a) = f_a \end{array}\right. \text{ où } \left\{\begin{array}{rcl} f_a : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & f_a(x) = axa^{-1} \end{array}\right.$$
   Il faut démontrer que Φ est un homomorphisme
3. Démontrer que $Int(G)$ est isomorphe à $G/Z(G)$

Exercice 25 :

1. Trouver tous les groupes d'ordre 4
2. Soit G un groupe d'ordre $2n$ et d'élément neutre e.
   On suppose qu'il existe 2 sous-groupes de G, différents, H_1 et H_2 d'ordre n et tels que $H_1 \cap H_2 = \{e\}$
   (a) Montrer que $n = 2$, c'est à dire que G est un groupe à 4 éléments
   (b) Montrer que la structure de G est entièrement déterminée et en donner la table de multiplication

Sur les groupes cycliques

Exercice 26 :

Soit G un groupe cyclique d'ordre n et de générateur a

1. Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique
2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a^m = e$ si et seulement si n divise m
3. Soit p un entier quelconque tel que $1 \leqslant p \leqslant n$ et $\langle a^p \rangle$ le sous-groupe de G engendré par a^p
   (a) Montrer que nous avons $\langle a^p \rangle = \langle a^q \rangle$ où q est le pgcd de n et p
   (b) Démontrer que $\langle a^p \rangle = G$ si et seulement si n et p sont premiers entre eux.

Exercice 27 :

Soient G_1 et G_2 2 groupes et nous considérons leur produit direct $G_1 \times G_2$. Nous appelons e_1 l'élément neutre de G_1 et e_2, celui de G_2.
On consdère $a_1 \in G_1$ d'ordre n_1 et $a_2 \in G_2$ d'ordre n_2

1. Montrer que l'ordre de l'élément $(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$ est le ppcm de n_1 et de n_2
2. On suppose G_1 cyclique d'ordre n_1 et G_2 cyclique d'ordre n_2. Démontrer que si n_1 et n_2 sont premiers entre eux, alors $G_1 \times G_2$ est cyclique d'ordre $n_1 n_2$

Exercice 28 :

Nous commençons par donner ***une*** *définition de groupe simple. La définition de groupe simple est beaucoup plus large que celle que nous donnons ici. Dans notre cas, nous la restreignons aux seuls groupes abéliens*

Soit $(G, \star)$ un groupe abélien de neutre e
$(G, \star)$ est dit simple s'il n'admet d'autre sous-groupes que $\{e\}$ et G lui même

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. G est un groupe cyclique d'ordre premier
2. G est un groupe abélien simple

Exercices divers

Exercice 29 :

Soient G_1 et G_2 2 groupes et $G_1 \times G_2$ leur produit direct..
On appelle ϖ_1 la projection de $G_1 \times G_2$ sur G_1 et ϖ_2 la projection de $G_1 \times G_2$ sur G_2.
Soit G un groupe quelconque $u_1 : G \longrightarrow G_1$ un homomorphisme de groupe et $u_2 : G \longrightarrow G_2$ un second homomorphisme de groupe.
Démontrer qu'il existe un homomorphisme $h : G \longrightarrow G_1 \times G_2$ et un seul tel que $u_1 = \varpi_1 \circ h$ et $u_2 = \varpi_2 \circ h$

1.6 Correction de quelques exercices

Exercice 1 :

Soit G un groupe dont l'opération est notée multiplicativement et $S \subset G$ une partie non vide de G. Démontrer que :

$$\langle S \rangle = \left\{ y \in G \text{ où } y = \prod_{i=0}^{n} x_i \text{ avec } (\forall n \in \mathbb{N}) \left((x_n \in S) \text{ ou } \left(x_n^{-1} \in S \right) \right) \right\}$$

Nous faisons cette démonstration en 2 temps.
Appelons $\Gamma(S) = \left\{ y \in G \text{ où } y = \prod_{i=0}^{n} x_i \text{ avec } (\forall n \in \mathbb{N}) \left((x_n \in S) \text{ ou } \left(x_n^{-1} \in S \right) \right) \right\}$. Il est aussi tout à fait possible d'écrire $\Gamma(S) = \{y \in G \text{ où } y = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \text{ avec } x_i \in S \text{ et } \varepsilon_i \in \{-1; +1\}\}$.
Nous allons montrer que $\Gamma(S) = \langle S \rangle$

— Montrons que $\Gamma(S) \subset \langle S \rangle$
Soit $y \in \Gamma(S)$. Alors :

$$y = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \text{ avec } x_i \in S \text{ et } \varepsilon_i \in \{-1; +1\}$$

Nous savons que $\langle S \rangle$ est le plus petit sous-groupe de G tel que $S \subset \langle S \rangle$.
Ainsi, comme, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \in S$, alors $x_i \in \langle S \rangle$ et $x_n^{\varepsilon_n} \in \langle S \rangle$. La multiplication étant interne dans $\langle S \rangle$, nous avons $x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \in \langle S \rangle$, c'est à dire $y \in \langle S \rangle$, et donc $\Gamma(S) \subset \langle S \rangle$

— Montrons que $\Gamma(S)$ est un sous-groupe de G
  ⋆ S étant non vide, soit $x \in S$. Alors $e = x \times x^{-1} \in \Gamma(S)$, et donc $\Gamma(S) \neq \emptyset$
  ⋆ Soient $y \in \Gamma(S)$ et $y' \in \Gamma(S)$, alors $y = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ et $y_1 = x_{1,1}^{\varepsilon_{1,1}} \cdots x_{1,m}^{\varepsilon_{1,m}}$ et

$$y'y^{-1} = \left(x_{1,1}^{\varepsilon_{1,1}} \cdots x_{1,m}^{\varepsilon_{1,m}} \right) \left(x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \right)^{-1} = \left(x_{1,1}^{\varepsilon_{1,1}} \cdots x_{1,m}^{\varepsilon_{1,m}} \right) \left(x_n^{-\varepsilon_n} \cdots x_1^{-\varepsilon_1} \right) = x_{1,1}^{\varepsilon_{1,1}} \cdots x_{1,m}^{\varepsilon_{1,m}} x_n^{\varepsilon"_n} \cdots x_1^{\varepsilon"_1}$$

  où, pour tout i, $\varepsilon"_i = -\varepsilon_i \in \{-1; +1\}$ et $\varepsilon_{1,i} \in \{-1; +1\}$
  Et donc $y'y^{-1} \in \Gamma(S)$

Nous en déduisons donc que $\Gamma(S)$ est un sous groupe de G, contenant S, et donc $\langle S \rangle \subset \Gamma(S)$
Ainsi, $\langle S \rangle = \Gamma(S)$

Exercice 5 :

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition $\top$ associative avec un élément neutre e et telle que tout élément de E admet un inverse à gauche, c'est à dire :

$$(\forall a \in E)(\exists b \in E)(b \top a = e)$$

1. *Montrer que tout élément de E possède un inverse à droite qui coïncide avec son inverse à gauche*

   Soit $a \in E$.
   Par hypothèse, il existe $b \in E$ tel que $b \top a = e$. Pour ce même $b \in E$, il existe $k \in E$ tel que $k \top b = e$. Ainsi $(k \top b) \top a = a$.
   De l'associativité, nous avons : $a = (k \top b) \top a = k \top (b \top a) = k$, puis $a \top b = k \top b = e$ et donc $a \top b = e$.
   Ce qui montre que b est aussi un inverse à gauche de a

2. *En déduire que $(E, \top)$ est un groupe*

   La loi $\top$ est associative, admet un élément neutre, il ne manquait que l'existence d'un inverse à droite et à gauche pour que $(E, \top)$ soit un groupe

Exercice 6 :

Montrer que si $(G,\star)$ est un groupe et E un ensemble quelconque non vide, alors l'ensemble G^E des applications de E dans G muni de la loi $\perp$ définie par :

$$\left(\forall f\in G^E\right)\left(\forall g\in G^E\right)\left((f\perp g)(x)=f(x)\star g(x)\right)$$

est un groupe et que ce groupe est commutatif si $(G,\star)$ l'est.

Voilà un exercice intéressant !!

→ Il est clair que l'opération $\perp$ est une opération interne puisque si $f\in G^E$ et $g\in G^E$ alors $f\perp g\in G^E$

→ Etudions l'associativité. Soient $f\in G^E$, $g\in G^E$ et $h\in G^E$, alors, pour tout $x\in E$:

$$\begin{aligned}((f\perp g)\perp h)(x)=&\ (f\perp g)(x)\star h(x)\\ =&\ (f(x)\star g(x))\star h(x)\\ =&\ (f(x)\star g(x))\star h(x)\\ =&\ f(x)\star(g(x)\star h(x))\ (\text{ associativité de la loi }\star)\\ =&\ f(x)\star((g\perp h)(x))\\ =&\ (f\perp(g\perp h))(x)\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x\in E$, nous avons $((f\perp g)\perp h)(x)=(f\perp(g\perp h))(x)$ et donc

$$(f\perp g)\perp h=f\perp(g\perp h)$$

La loi $\perp$ est donc associative.

→ Soit $I:E\longrightarrow G$ telle que pour tout $x\in E$, $I(x)=e$ où e est l'élément neutre de $(G,\star)$. I est l'application constante qui à tout $x\in E$ fait correspondre l'élément neutre e de $(G,\star)$
Alors, nous avons $f\perp I=I\perp f=f$ et I est le neutre pour l'opération $\perp$ dans G^E.
En effet, pour tout $x\in E$:

$$(f\perp I)(x)=f(x)\star I(x)=f(x)\star e=f(x)=e\star f(x)=I(x)\star f(x)=(I\perp f)(x)$$

Donc I est le neutre pour la loi $\perp$

→ Soit $f\in G^E$; existe-t-il $g\in G^E$ tel que $f\perp g=g\perp f=I$.
Si nous posons, pour tout $x\in E$, $g(x)=[f(x)]^{-1}$. $g(x)$ est donc l'inverse de l'élément $f(x)$ pour la loi $\star$ dans G. Nous allons démontrer que g est le symétrique de f pour la loi $\perp$ dans G^E.
Pour tout $x\in E$, nous avons :

$$(f\perp g)(x)=f(x)\star g(x)=f(x)\star[f(x)]^{-1}=e=I(x)$$

Nous avons donc $f\perp g=I$. Nous démontrerions de la même manière que $g\perp f=I$.
g est donc le symétrique de f pour la loi $\perp$ dans G^E.

Nous venons de montrer que $\left(G^E,\perp\right)$ est un groupe.

Supposons $(G,\star)$ commutatif

Alors, très simplement, pour tout $f\in G^E$, tout $g\in G^E$ et tout $x\in E$, nous avons :

$$(f\perp g)(x)=\underbrace{f(x)\star g(x)=g(x)\star f(x)}_{\text{Commutativité}}=(g\perp f)(x)$$

Ainsi, si $(G,\star)$ est commutatif, alors, pour tout $f\in G^E$, tout $g\in G^E$, nous avons $f\perp g=g\perp f$ et ainsi $\left(G^E,\perp\right)$ est un groupe commutatif

Exercice 7 :

On considère l'ensemble $G=\left]-1,+1\right[$ muni de la loi $\star$ définie par :

$$x\star y=\frac{x+y}{1+xy}$$

Démontrer que $(G,\star)$ est un groupe commutatif.

$\Rightarrow$ **Dans un premier temps, avons nous, pour tout $x \in]-1,+1[$ et tout $y \in]-1,+1[$, $1+xy \neq 0$?**
Soient donc $x \in]-1,+1[$ et $y \in]-1,+1[$, alors $|x|<1$ et $|y|<1$, et donc $|xy| = |x|\,|y| < 1$, c'est à dire $-1 < xy < +1$ et donc $1+xy>0$, ce qui montre que $\dfrac{x+y}{1+xy}$ est défini lorsque $x \in]-1,+1[$ et $y \in]-1,+1[$

$\Rightarrow$ **Démontrons que pour tout $x \in]-1,+1[$ et tout $y \in]-1,+1[$, nous avons $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1,+1[$**
C'est à dire que nous allons démontrer que la loi $\star$ est interne. Nous avons :

$$\frac{x+y}{1+xy} \in]-1,+1[\iff \left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1 \iff \left|\frac{x+y}{1+xy}\right|^2 < 1$$

Or, $\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|^2 = \dfrac{|x+y|^2}{|1+xy|^2} = \dfrac{(x+y)^2}{(1+xy)^2}$.
Donc montrer que $\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right| < 1$, c'est montrer que $\dfrac{(x+y)^2}{(1+xy)^2} < 1 \iff (x+y)^2 < (1+xy)^2$.
Or,

$$(x+y)^2-(1+xy)^2 = x^2+y^2+2xy-1-x^2y^2-2xy = x^2+y^2-1-x^2y^2 = x^2\left(1-y^2\right)+y^2-1 = \left(y^2-1\right)\left(1-x^2\right)$$

Comme $|x|<1$ et $|y|<1$, nous avons $x^2<1$ et $y^2<1$ et donc $\left(y^2-1\right)\left(1-x^2\right)<0$ dont nous déduisons que $(x+y)^2 < (1+xy)^2$.
En conclusion, pour tout $x \in]-1,+1[$ et tout $y \in]-1,+1[$, nous avons $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1,+1[$ et la loi $\star$ est donc interne.

$\Rightarrow$ **La loi $\star$ est commutative**
Evidemment, cette commutativité provient de celles de la multiplication et de l'addition.

$\Rightarrow$ **La loi $\star$ est associative**
Soient $x \in]-1,+1[$, $y \in]-1,+1[$ et $z \in]-1,+1[$, il faut montrer que $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$.
Faisons les calculs :

$\triangleright$

$$\begin{aligned} x \star (y \star z) &= x \star \left(\frac{z+y}{1+zy}\right) \\ &= \frac{x+\frac{z+y}{1+zy}}{1+x\frac{z+y}{1+zy}} \\ &= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+xz} \end{aligned}$$

$\triangleright$

$$\begin{aligned} (x \star y) \star z &= \left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \star z \\ &= \frac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+z\frac{x+y}{1+xy}} \\ &= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+xz} \end{aligned}$$

Nous avons bien $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$ et la loi $\star$ est associative.

$\Rightarrow$ **Existence d'un élément neutre**
Si la loi $\star$ admet un neutre $e \in]-1,+1[$, nous avons, pour tout $x \in]-1,+1[$, $x \star e = e \star x = x$

$\triangleright$ Il est clair que nous avons $x \star 0 = 0 \star x = x$

$\triangleright$ Réciproquement, si e est l'élément neutre, nous avons :

$$\frac{x+e}{1+xe} = x \iff x+e = x+ex^2 \iff ex^2-e=0 \iff e\left(x^2-1\right)=0$$

Comme $x \neq \pm 1$, $x^2-1 \neq 0$ et donc $e=0$

⇒ **Tout $x \in]-1,+1[$ admet-il un symétrique pour la loi $\star$?**
Soit $x \in]-1,+1[$. S'il existe un symétrique $y \in]-1,+1[$ de x pour la loi $\star$, ce symétrique vérifie $x \star y = 0$. Nous avons alors :

$$\frac{x+y}{1+xy} = 0 \Longleftrightarrow y = -x$$

Ainsi, tout $x \in]-1,+1[$ admet un symétrique pour la loi $\star$ qui est $y = -x$

Nous venons de montrer que $(G, \star)$ est un groupe commutatif.

Exercice 8 :

Soit G un groupe dont l'opération est notée multiplicativement d'élément neutre 1.

1. *Montrer que G est commutatif si, et seulement si, pour tout $a \in G$ et tout $b \in G$, nous avons $(ab)^2 = a^2b^2$*

   ⇒ **Supposons G commutatif**
   Alors, nous avons :

   $$(ab)^2 = (ab) \times (ab) = a\,(ba)\,b = a\,(ab)\,b = (aa)\,(bb) = a^2b^2$$

   ⇒ **Supposons que $(ab)^2 = a^2b^2$**
   Montrons que G est un groupe commutatif. Soient $x \in G$ et $y \in G$; alors :

   $$(xy)^2 = (xy)\,(xy) = x^2y^2 = (xx)\,(yy)$$

   C'est à dire $xyxy = xxyy$
   Comme tout élément d'un groupe est régulier, nous avons les implications :

   $$xyxy = xxyy \Longrightarrow yxy = xyy \Longrightarrow yx = xy$$

   Nous venons de montrer la commutativité de G

2. *Montrer que G est commutatif si, et seulement si, pour tout $a \in G$ et tout $b \in G$, nous avons $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$*

   Tout d'abord, il faut remarquer que nous avons toujours, dans tout groupe *(commutatif ou non)*, pour tout $a \in G$ et tout $b \in G$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

   ⇒ **Supposons G commutatif**
   Alors nous avons $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
   Ce que nous voulions.

   ⇒ **Supposons maintenant que pour tout $a \in G$ et tout $b \in G$, nous avons $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$**
   Montrons que G est commutatif. Soient $x \in G$ et $y \in G$, alors :

   $$(xy)\,(xy)^{-1} = 1 \Longleftrightarrow (xy)\left(y^{-1}x^{-1}\right) = 1 \Longleftrightarrow (xy)\left(x^{-1}y^{-1}\right) = 1$$

   Multiplions à droite par y. Alors :

   $$(xy)\left(x^{-1}y^{-1}\right) = 1 \Longleftrightarrow (xy)\,x^{-1} = y$$

   Multiplions toujours à droite par x, cette fois-ci. Alors :

   $$(xy)\,x^{-1} = y \Longleftrightarrow xy = yx$$

   Le groupe G est donc bien commutatif

Exercice 9 :

Montrer que l'ensemble $\mathrm{SL}_n(R)$ des matrices carrées réelles d'ordre n de déterminant égal à 1 est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(R)$.

Bien entendu, nous avons $\mathrm{SL}_n(R) \subset \mathrm{GL}_n(R)$; nous allons montrer que $\mathrm{SL}_n(R)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(R)$

- ▷ Tout d'abord $\mathrm{SL}_n(R) \neq \emptyset$ puisque la matrice identité I_n qui a pour déterminant 1 et est donc dans $\mathrm{SL}_n(R)$
- ▷ Soient, maintenant $A \in \mathrm{SL}_n(R)$ et $B \in \mathrm{SL}_n(R)$.
  Alors B est inversible et $\det B^{-1} = \det B = 1$ et donc :
  $$\det\left(AB^{-1}\right) = \det A \times \det B^{-1} = 1$$
  Donc $\left(AB^{-1}\right) \in \mathrm{SL}_n(R)$

Donc, $\mathrm{SL}_n(R)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(R)$.

Exercice 10 :

Montrer que l'ensemble G des matrices réelles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 \neq b^2$ est un groupe multiplicatif. Est-il commutatif ?

Ré-écrivons G :

$$G = \left\{M_{(a,b)} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ où } a^2 - b^2 \neq 0\right\}$$

- ⇒ Tout d'abord, $G \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$
- ⇒ Puis, remarquons que toute matrice $M_{(a,b)} \in G$ est inversible puisque $\det M_{(a,b)} = a^2 - b^2 \neq 0$. Il nous est même possible de calculer $\left(M_{(a,b)}\right)^{-1}$:
  $$\left(M_{(a,b)}\right)^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = M_{\left(\frac{a}{a^2-b^2}, \frac{-b}{a^2-b^2}\right)}$$
  Et donc $\left(M_{(a,b)}\right)^{-1} \in G$
- ⇒ Ensuite, toute matrice $M_{(a,b)} \in G$ peut s'écrire :
  $$M_{(a,b)} = a\mathrm{I}_2 + bJ \text{ où } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
  En remarquant que $J^2 = -\mathrm{I}_2$, nous avons, pour 2 matrices $M_{(a,b)} \in G$ et $M_{(c,d)} \in G$:
  $$\begin{aligned} M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} &= (a\mathrm{I}_2 + bJ) \times (c\mathrm{I}_2 + dJ) \\ &= ac\mathrm{I}_2 + adJ + bcJ - bd\mathrm{I}_2 \\ &= (ac - bd)\,\mathrm{I}_2 + (ad + bc)\,J \\ &= M_{(ac-bd,bc+ad)} \end{aligned}$$
  Ce qui montre que l'opération de multiplication des matrices est interne dans G et commutative.
- ⇒ Ainsi, G muni de la multiplication des matrices est un groupe commutatif

Exercice 11 :

Soit H une partie finie non vide d'un groupe $(G, \star)$. Montrer que H est un sous-groupe de $(G, \star)$ si, et seulement si, il est stable pour la loi $\star$

- ⇒ **Si H est un sous-groupe de** $(G, \star)$ il est alors évident qu'il est stable pour la loi $\star$
- ⇒ **Supposons que H sous-ensemble fini de** $(G, \star)$ **soit stable pour la loi** $\star$
  La démonstration se fera en plusieurs temps.
  → H étant non vide, soit $a \in H$. Nous connaissons bien l'application δ_a définie par :
  $$\left\{\begin{array}{rcl} \delta_a : H & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & \delta_a(x) = x \star a \end{array}\right.$$
  Nous savons, comme H est stable pour la loi $\star$ que, pour tout $x \in H$, $\delta_a(x) \in H$ et donc $\delta_a(H) \subset H$
  D'autre part, nous avons démontré que les applications du type δ_a sont injectives.
  Donc $\delta_a : H \longrightarrow H$ est injective et comme H est de cardinal fini, l'application δ_a est bijective et donc, en fait, $\delta_a(H) = H$

→ Comme δ_a est bijective, il existe $u \in H$ tel que $\delta_a(u) = u \star a = a$. Cet élément $u \in H$ n'est autre que l'élément neutre e du groupe $(G, \star)$.
Nous venons donc de montrer que le neutre de $(G, \star)$ est dans H

→ Comme $e \in H$, et que δ_a est bijective, il existe $u \in H$ tel que $\delta_a(u) = u \star a = e$. Cet élément $u \in H$ n'est autre que l'élément symétrique a^{-1} de a dans $(G, \star)$.
Nous venons donc de montrer que si a_inH, alors $a^{-1} \in H$

En conclusion, $(H, \star)$ est bien un sous-groupe de$(G, \star)$

$(\mathbb{Z}, +)$ est l'exemple d'un groupe admettant un sous-ensemble non vide $\mathbb{N}$ stable pour l'addition, mais qui n'est pas un groupe *(Mais, $\mathbb{N}$ est un ensemble infini)*

Exercice 12 :

Soit G un groupe dont l'opération est notée multiplicativement. Soient H et K deux sous-groupes de G. On définit les sous-ensembles HK et KH de G par :

$$HK = \{hk \text{ où } h \in H \text{ et } k \in K\} \text{ et } KH = \{kh \text{ où } h \in H \text{ et } k \in K\}$$

Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$

⇒ **Supposons que HK soit un sous-groupe de G**
Nous allons montrer que $HK = KH$

→ Démontrons que $HK \subset KH$
Soit $g \in HK$.
HK étant un sous-groupe, $g^{-1} \in HK$; il existe alors $h \in H$ et $k \in K$ tels que $g^{-1} = hk$ et donc $g = k^{-1}h^{-1}$.
K et H étant 2 sous-groupes $k^{-1} \in K$ et $h^{-1} \in H$ et donc $g \in KH$. D'où nous pouvons conclure que $HK \subset KH$

→ Nous démontrerions, de la même manière que $KH \subset HK$

→ Donc, de $HK \subset KH$ et $KH \subset HK$, nous déduisons $KH = HK$

⇒ **Supposons $HK = KH$**
Démontrons que HK est un sous-groupe de G.

→ Dans un premier temps, nous avons $HK \neq \emptyset$ car $1 \in HK$.
En effet, H et K étant 2 sous-groupes de G, alors $1 \in H$ et $1 \in K$ et comme $1 = 1 \times 1$, nous avons $1 \in HK$

→ Soient $u \in HK$ et $v \in HK$. Montrons que $uv^{-1} \in HK$
Comme $u \in HK$ et $v \in HK$, il existe alors $h_u \in H$, $h_v \in H$, $k_u \in K$ et $k_v \in K$ tels que $u = h_u k_u$ et $v = h_v k_v$ et donc $u^{-1} = k_v^{-1} h_v^{-1}$.D'où

$$uv^{-1} = h_u k_u k_v^{-1} h_v^{-1} = h_u \left(k_u k_v^{-1}\right) h_v^{-1}$$

K étant un groupe, nous avons $\left(k_u k_v^{-1}\right) \in K$ et donc $h_u \left(k_u k_v^{-1}\right) \in HK$ et comme $HK = KH$, il existe $h_1 \in H$ et $k_1 \in K$ tels que $h_u \left(k_u k_v^{-1}\right) = k_1 h_1$; d'où :

$$uv^{-1} = h_u \left(k_u k_v^{-1}\right) h_v^{-1} = (k_1 h_1) h_v^{-1} = k_1 \left(h_1 h_v^{-1}\right)$$

Comme $\left(h_1 h_v^{-1}\right) \in H$, nous avons $k_1 \left(h_1 h_v^{-1}\right) \in KH$; comme, par hypothèse, nous avons $HK = KH$, nous avons aussi $k_1 \left(h_1 h_v^{-1}\right) \in HK$, c'est à dire $uv^{-1} \in HK$

→ Ainsi, si $HK = KH$, alors HK et KH sont des sous-groupes de G

Que se passe-t-il si le groupe G est commutatif ?

Exercice 13 :

Soit G un groupe dont l'opération est notée multiplicativement. Montrer que, pour tout $a \in G$ et tout $b \in G$

1. *a et a^{-1} ont même ordre*

   ▷ Supposons que a soit d'ordre n ; alors, $a^n = e$

- ⋆ En multipliant à droite par a^{-1}, nous obtenons $a^{n-1} = a^{-1}$
- ⋆ Puis, en itérant cette opération, nous avons $a^{n-p} = \left(a^{-1}\right)^p$
- ⋆ Et lorsque $p = n$, nous obtenons $e = \left(a^{-1}\right)^n$

D'où nous tirons que a^{-1} a même ordre que a

▷ Une autre façon de démontrer consiste à dire que si a est d'ordre n, Card $(\langle a\rangle) = n$. Or, $\langle a\rangle = \langle a^{-1}\rangle$ et donc Card $\left(\langle a^{-1}\rangle\right) = n$

2. *a et bab^{-1} ont même ordre*

Soit n l'ordre de a, c'est à dire $a^n = e$. Alors :

$$\begin{aligned} \left(bab^{-1}\right)^n &= \underbrace{\left(bab^{-1}\right)\left(bab^{-1}\right)\cdots\left(bab^{-1}\right)}_{n \text{ fois}} \\ &= ba\left(b^{-1}b\right)a\left(b^{-1}b\right)a\left(b^{-1}\cdots b\right)a\left(b^{-1}b\right)ab^{-1} \\ &= ba^nb^{-1} \\ &= ba^nb^{-1} = e \end{aligned}$$

Donc $\left(bab^{-1}\right)^n = e$ et l'ordre de bab^{-1} est donc encore n.

3. *ab et ba ont même ordre*

Soit n l'ordre de ab, c'est à dire $(ab)^n = e$. Alors :

$$\begin{aligned} e = &\ (ab)^n \\ = &\ \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n \text{ fois}} \\ = &\ a(ba)(ba)(ba)\cdots(ba)(ba)b \\ = &\ a(ba)^{n-1}b \end{aligned}$$

En composant à gauche par b, nous obtenons :

$$e = a(ba)^{n-1}b \Longleftrightarrow b = ba(ba)^{n-1}b \Longleftrightarrow b = (ba)^n b$$

Une loi de groupe étant régulière, nous pouvons « simplifier » par b et nous obtenons $(ba)^n = e$. En conclusion, ab et ba ont même ordre

Exercice 22 :

Soient G un groupe et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G. On suppose que, pour tout $i \in I$ et tout $j \in I$, il existe un élément $k \in I$ tel que $H_i \subset H_k$ et $H_j \subset H_k$.
Montrer que $\bigcup\limits_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G

⇒ En appelant e l'élément neutre de G, alors $e \in \bigcap\limits_{i\in I} H_i$ et donc $e \in \bigcup\limits_{i\in I} H_i$; ainsi, $e \in \bigcup\limits_{i\in I} H_i \neq \emptyset$

⇒ Soient $x \in \bigcup\limits_{i\in I} H_i$ et $y \in \bigcup\limits_{i\in I} H_i$; nous allons montrer que $xy^{-1} \in \bigcap\limits_{i\in I} H_i$

- ⋆ Il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in H_{i_0}$; de même, il existe $j_0 \in I$ tel que $x \in H_{j_0}$
- ⋆ D'après l'hypothèse, il existe $k \in I$ tel que $H_{i_0} \subset H_k$ et $H_{j_0} \subset H_k$; par cette inclusion, nous avons $x \in H_k$ et $y \in H_k$
- ⋆ H_k étant un groupe, nous avons $xy^{-1} \in H_k$, et donc $xy^{-1} \in \bigcap\limits_{i\in I} H_i$

⇒ $\bigcup\limits_{i\in I} H_i$ est donc un sous-groupe de G

Exercice 23 :

Soit G un groupe non commutatif de centre $Z(G)$. On désigne par $Aut(G)$ l'ensemble des automorphismes de G et $Int(G)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de G.

1. (a) *Démontrer que $(Aut(G), \circ)$ est un groupe*

En fait, un automorphisme est un isomorphisme particulier. C'est un isomorphisme qui va de G dans G. Nous allons donc utiliser, dès que nous le pourrons, les propriétés des isomorphismes vues en L_0

⇒ Premièrement, $Aut\,(G) \neq \emptyset$ puisque Id_G, l'application identique de G est un homomorphisme bijectif de G ; c'est l'élément neutre pour la composition des applications

⇒ Ensuite, si nous composons 2 homomorphismes, nous obtenons un homomorphisme, et si nous composons 2 bijections, nous obtenons aussi une bijection. La composition de 2 automorphismes de G est donc un automorphisme de G. La loi $\circ$ est donc interne.

⇒ Si $f \in Aut\,(G)$, alors f est bijective et donc f^{-1} existe. En L_0, nous avons démontré que si $f : G \longrightarrow H$ est un isomorphisme de groupe, il en est de même de $f^{-1} : H \longrightarrow G$. Donc, si f est un automorphisme, f^{-1} en est un aussi

Nous venons de démontrer que $(Aut\,(G)\,, \circ)$ est un groupe

En fait, $(Aut\,(G)\,, \circ)$ est un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}\,(G)$ des permutations de G, ces permutations pouvant être des homomorphismes ou non

(b) *Démontrer que $(Int\,(G)\,, \circ)$ est un sous-groupe de $(Aut\,(G)\,, \circ)$*

Nous avons défini en L_0, ce qu'était un automorphisme intérieur et démontré, en L_0, que c'était des automorphismes. Nous avons donc $(Int\,(G)\,, \circ) \subset (Aut\,(G)\,, \circ)$

Nous reprendrons la notation de L_0 en utilisant une opération multiplicative.

⇒ Tout d'abord, $Int\,(G) \neq \emptyset$, puisque $f_e = \mathrm{Id}_G$

⇒ Soient $f_a \in Int\,(G)$ et $f_b \in Int\,(G)$, alors, pour tout $x \in G$, nous avons :

$$f_a \circ f_b\,(x) = f_a\,[f_b\,(x)] = f_a\left[bxb^{-1}\right] = abxb^{-1}a^{-1} = abx\,(ab)^{-1} = f_{ab}\,(x)$$

La composition des automorphismes intérieurs est donc interne et nous avons $f_a \circ f_b = f_{ab}$

⇒ Un automorphisme intérieur est une bijection, et nous avons $(f_a)^{-1} = f_{a^{-1}}$

Donc $(Int\,(G)\,, \circ)$ est un sous-groupe de $(Aut\,(G)\,, \circ)$

2. *Nous allons démontrer que G opère sur luimême par les automorphismes intérieurs.*
Soit $\Phi : G \longrightarrow Int\,(G)$ défini par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : G & \longrightarrow & Int\,(G) \\ a & \longmapsto & \Phi\,(a) = f_a \end{array}\right. \text{ où } \left\{\begin{array}{rcl} f_a : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & f_a\,(x) = axa^{-1} \end{array}\right.$$

Il faut démontrer que Φ est un homomorphisme

Pas très difficile ; nous allons beaucoup utiliser la question précédente. Soient donc $a \in G$ et $b \in G$, alors :

$$\Phi\,(ab) = f_{ab} = f_a \circ f_b = \Phi\,(a) \circ \Phi\,(b)$$

Φ est bien un homomorphisme de groupe

3. *Démontrer que $Int\,(G)$ est isomorphe à $G/Z\,(G)$*

C'est, en fait le but de l'exercice ! !

Nous allons utiliser la proposition 1.3.3 de décomposition canonique d'un homomorphisme qui affirme que $G/\ker\Phi$ et $\Phi\,(G) = Int\,(G)$ sont isomorphes.

Nous devons donc démontrer que $\ker\Phi = Z\,(G)$.

→ Nous allons montrer que $Z\,(G) \subset \ker\Phi$

Soit $a \in Z\,(G)$. Il faut donc montrer que $\Phi\,(a) = \mathrm{Id}_G$ et alors, $a \in \ker\Phi$

Pour tout $x \in G$:

$$\Phi\,(a)\,(x) = f_a\,(x) = axa^{-1} \overset{a\in Z(G)}{=} aa^{-1}x = x = \mathrm{Id}_G\,(x)$$

Ainsi, pour tout $x \in G$, $\Phi\,(a)\,(x) = x$ et, donc, pour tout $a \in Z\,(G)$, nous avons $\Phi\,(a) = \mathrm{Id}_G$ et donc $a \in \ker\Phi$, c'est à dire $Z\,(G) \subset \ker\Phi$

→ Réciproquement, démontrons que $\ker\Phi \subset Z\,(G)$

Soit $a \in \ker\Phi$, alors, $\Phi\,(a) = \mathrm{Id}_G$ et donc, pour tout $x \in G$ $\Phi\,(a)\,(x) = x$, c'est à dire :

$$\Phi\,(a)\,(x) = x \Longleftrightarrow f_a\,(x) = x \Longleftrightarrow axa^{-1} = x \Longleftrightarrow ax = xa$$

Ainsi, pur tout $x \in G$, nous avons $ax = xa$ et donc $a \in Z\,(G)$, et donc $\ker\Phi \subset Z\,(G)$

En conclusion $\ker \Phi = Z(G)$ et d'après 1.3.3, nous avons démontré que $G/\ker \Phi$ et $\Phi(G) = Int(G)$ sont isomorphes.
Ce que nous voulions

Quelques compléments

$\Rightarrow$ Dans l'opération $\Phi : G \longrightarrow Int(G)$, l'orbite de $x \in G$ est donnée par :

$$\mathcal{O}(x) = \{y \in G \text{ tel que } \exists a \in G \text{ tel que } y = f_a(x)\} = \left\{y \in G \text{ tel que } \exists a \in G \text{ tel que } y = axa^{-1}\right\}$$

La relation $\mathcal{R}$ définie sur G par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si il existe $a \in G$ tel que $y = axa^{-1}$ peut être aussi définie par

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow y \in \mathcal{O}(x)$$

C'est, bien entendu, une relation d'équivalence

$\Rightarrow$ f_a étant un automorphisme de G, pour tout $a \in G$, et tout sous-groupe $H \subset G$, nous avons $f_a(H)$ qui est un sous-groupe de G. Si $H' = f_a(H)$, on dit que les sous-groupes H et H' sont conjugués.

Exercice 24 :

1. *Trouver tous les groupes d'ordre 4*

Soit G un tel groupe ; on pose $G = \{e, a, b, c\}$ avec e élément neutre de G.
Nous chosissons $a \in G$; bien entendu, $a \neq e$
Puisque $\langle a \rangle$ est un sous-groupe de G, l'ordre de a divise 4

$\rightarrow$ Cet ordre ne peut pas être 1, sinon $a = e$, ce qui est impossible

$\rightarrow$ Si l'ordre de a est 4, alors G est cyclique, engendré par a et $G = \left\{e, a, a^2, a^3\right\}$.
(On peut remarquer que $H = \left\{e, a^2\right\}$ est un sous-groupe de G)

$\rightarrow$ Si l'ordre de a est 2, alors $a^2 = e$, et nous avons $ab = ba = c$ et $ac = ca = b$. Il n'y a pas d'autre solution, puisque si $ab = b$, alors $a = e$, ce qui est impossible.

$\star$ Nous obtenons alors la table de multiplcation de G

$\curvearrowright$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$\star$ Considérons le groupe produit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow G$ telle que :

$$\varphi[(0,0)] = e \quad \varphi[(1,0)] = a \quad \varphi[(0,1)] = b \quad \varphi[(1,1)] = c$$

Il est facile *(et fastidieux)* de démontrer que φ est un isomorphisme de groupe

$\rightarrow$ il n'existe donc que 2 types de groupes à 4 éléments :

$\star$ Soit G est un groupe cyclique isimorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$

$\star$ Soit G est isomorphe au groupe produit $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ appelé **Groupe de Klein**

2. *Soit G un groupe d'ordre $2n$ et d'élément neutre e.*
On suppose qu'il existe 2 sous-groupes de G, différents, H_1 et H_2 d'ordre n et tels que $H_1 \cap H_2 = \{e\}$

(a) *Montrer que $n = 2$, c'est à dire que G est un groupe à 4 éléments*

$\Rightarrow$ Supposons que $n < 2$, c'est à dire $n = 1$; alors G est un groupe d'ordre 2 ; supposons $G = \{e, a\}$. Les seuls sous-groupes de G sont G ou $\{e\}$, les seules possibilités que nous ayions est $H_1 = H_2 = \{e\}$, ce qui est en contradiction avec le fait que $H_1 \neq H_2$
Nous avons donc $n \geqslant 2$

⇒ Supposons, maintenant que $n \geqslant 2$
Nous avons Card $(H_1 \cup H_2) = 2n - 1$, et il existe donc $\alpha \in G$ tel que $\alpha \notin H_1$ et $\alpha \notin H_2$
Nous avons $\alpha^{-1} = \alpha$
En effet, supposons le contraire, c'est à dire $\alpha^{-1} \neq \alpha$, alors, en regardant les cardinaux, nous avons $\alpha^{-1} \in H_1$ ou $\alpha^{-1} \in H_2$
Si $\alpha^{-1} \in H_1$, alors $\alpha^{-1} \times \alpha = e$ et, des propriétés de composition interne dans un groupe, nous aurions $\alpha \in H_1$, ce qui est impossible.

⇒ Supposons maintenant $n > 2$, c'est à dire $n \geqslant 3$
Comme Card $H_1 = n$, il existe des éléments $\beta_1 \in H_1$, $\gamma_1 \in H_1$, $\beta_2 \in H_2$, $\gamma_2 \in H_2$ tels que $\beta_1 \neq e$, $\gamma_1 \neq e$, $\beta_2 \neq e$ et $\gamma_2 \neq e$
- ▷ Nous avons $\beta_1 \times \beta_2 = \alpha$, car si nous avions $\beta_1 \times \beta_2 \in H_1$, alors, nous devons avoir $\beta_2 \in H_1$, ce qui est impossible puisque $\beta_2 \in H_2$ et $H_1 = H_2 = \{e\}$
- ▷ Pour les mêmes raisons, nous avons $\gamma_1 \times \beta_2 = \alpha$
- ▷ Donc, nous avons $\beta_1 \times \beta_2 = \gamma_1 \times \beta_2 = \alpha$, c'est à dire $\beta_1 = \gamma_1$, ce qui est impossible.
- ▷ Il y a donc une contradiction et l'hypothèse $n \geqslant 3$ est fausse et donc $n < 3$

En conclusion, $n = 2$

G est donc un groupe à 4 éléments

(b) *Montrer que la structure de G est entièrement déterminée et en donner la table de multiplication*

G étant un groupe à 4 éléments est cyclique ou isomorphe au groupe de Klein.
Nous avons donc $G = \{e, h_1, h_2, \alpha\}$ où $H_1 = \{e, h_1\}$ et $H_2 = \{e, h_2\}$, et donc, d'après les questions précédentes, $h_1^2 = e$ et $h_2^2 = e$, et, toujours d'après l'étude précédente, $h_1h_2 = \alpha$ et $\alpha^2 = e$.
C'est donc le groupe de Klein dont la table de multiplication est donnée dans la question précédente.
Il y a donc 3 sous-groupes d'ordre 2 : $H_1 = \{e, h_1\}$, $H_2 = \{e, h_2\}$ et $H_3 = \{e, \alpha\}$

Exercice 25 :

Soit G un groupe cyclique d'ordre n et de générateur a

1. *Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique*

Soit $H \subset G$ un sous-groupe de G
Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier strictement positif tel que $a^{n_0} \in H$.
Le sous-groupe $\langle a^{n_0} \rangle$ engendré par a^{n_0} est un sous-groupe de H.
Soit $x \in H$ un élément quelconque de H ; comme $x \in G$, il existe alors $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = a^m$.
Nous effectuons la division euclidienne de m par n_0

$$m = qn_0 + r \text{ où } 0 \leqslant r < n_0$$

Alors, $x = a^m = a^{qn_0+r} = (a^{n_0})^q \times a^r$. Nous avons $a^m \in H$ par définition ; puis nous avons $(a^{n_0})^q \in \langle a^{n_0} \rangle$, c'est à dire, puisque $\langle a^{n_0} \rangle \subset H$, $(a^{n_0})^q \in H$, et donc $a^r \in H$. Nous ne pouvons pas avoir $0 < r < n_0$, car c'est en contradiction avec le fait que n_0 est le plus petit entier strictement positif tel que $a^{n_0} \in H$. Donc $r = 0$.
Ainsi, tout $x \in H$ est du type $x = (a^{n_0})^q$ et donc $x \in \langle a^{n_0} \rangle$, ce qui veut dire que $H \subset \langle a^{n_0} \rangle$
Et donc, $H = \langle a^{n_0} \rangle$ et est donc un groupe cyclique.

2. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a^m = e$ si et seulement si n divise m*

⇒ Si n divise m, il existe alors $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = kn$, et alors $a^m = a^{kn} = (a^n)^k = e^k = e$
⇒ Réciproquement, supposons $a^m = e$.
Alors $m \geqslant n$, puisque si $m < n$, alors, a ne peut être générateur de G.
Faisons la division euclidenne de m par n : $m = kn + r$ avec $0 \leqslant r < n$; alors $a^m = a^{kn+r} = a^{kn}a^r = (a^n)^k \times a^r = a^r = e$. Et la seule possibilité est que $r = 0$ et donc n divise m

3. *Soit p un entier quelconque tel que $1 \leqslant p \leqslant n$ et $\langle a^p \rangle$ le sous-groupe de G engendré par a^p*

(a) *Montrer que nous avons $\langle a^p \rangle = \langle a^q \rangle$ où q est le pgcd de n et p*

Soit donc q le pgcd de n et p
→ Il existe donc $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $p = k_1 q$.
Alors $a^p = a^{k_1 q} = (a^q)^{k_1}$ et donc $a^p \in \langle a^q \rangle$; d'où $\langle a^p \rangle \subset \langle a^q \rangle$
→ D'après le théorème de Bezout, il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $q = un + vp$, et donc $a^q = a^{un+vp} = a^{un} \times a^{vp} = (a^n)^u \times (a^p)^v = (a^p)^v$, et donc $a^q \in \langle a^p \rangle$ et donc $\langle a^q \rangle \subset \langle a^p \rangle$
→ D'où $\langle a^p \rangle = \langle a^q \rangle$
Ce que nous voulions

(b) *Démontrer que $\langle a^p \rangle = G$ si et seulement si n et p sont premiers entre eux.*

Si n et p sont premiers entre eux, alors le pgcd de n et p est 1, et d'après la question qui précède, $\langle a^p \rangle = \langle a \rangle = G$

Nous avons démontré 2 résultats importants :

1. Tout sous groupe d'un groupe cyclique est cyclique
2. Si n est l'ordre d'un groupe cyclique G généré par a, alors pour tout entier p tel que p soit premier avec n, a^p engendre G

Exercice 26 :

Soient G_1 et G_2 2 groupes et nous considérons leur produit direct $G_1 \times G_2$. Nous appelons e_1 l'élément neutre de G_1 et e_2, celui de G_2
On consdère $a_1 \in G_1$ d'ordre n_1 et $a_2 \in G_2$ d'ordre n_2

1. *Montrer que l'ordre de l'élément $(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$ est le ppcm de n_1 et de n_2*

   C'est, cette fois-ci, assez facile.
   Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $(a_1, a_2)^q = (e_1, e_2)$, ceci veut dire que $(a_1^q, a_2^q) = (e_1, e_2) \iff a_1^q = e_1$ et $a_2^q = e_2$
   Et nous avons ces égalités si et seulement si q est un ùultiple commun à n_1 et n_2
   L'ordre de (a_1, a_2) est donc bien le ppcm de n_1 et de n_2
2. *On suppose G_1 cyclique d'ordre n_1 et G_2 cyclique d'ordre n_2. Démontrer que si n_1 et n_2 sont premiers entre eux, alors $G_1 \times G_2$ est cyclique d'ordre $n_1 n_2$*

   Si G_1 est cyclique d'ordre n_1 et G_2 cyclique d'ordre n_2, alors Card $[G_1 \times G_2] = n_1 n_2$.
   Si a_1 d'ordre n_1 engendre G_1 et a_2 d'ordre n_2 engendre G_2, alors, d'après la question précédente, l'ordre de (a_1, a_2) est le ppcm de n_1 et de n_2, et, ici, comme n_1 et n_2 sont premiers entre eux, ce ppcm est $n_1 n_2$
   Comme Card $[G_1 \times G_2] = n_1 n_2$, $G_1 \times G_2$ est cyclique d'ordre $n_1 n_2$.

Exercice 27 :

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. G est un groupe cyclique d'ordre premier
2. G est un groupe abélien simple

1. Supposons que G soit un groupe cyclique d'ordre premier
   ▷ Tout d'abord, G étant cyclique, est abélien
   ▷ Soit $p \geqslant 2$ l'ordre de G ; il y a donc au moins 2 éléments. Soit $x \neq e$ un autre élément générateur de G. Alors $\langle x \rangle$ est le sous-groupe engendré par x et l'ordre de $\langle x \rangle$ divise p, l'ordre de G. Comme p est premier, l'ordre de $\langle x \rangle$ est 1 ou p, c'est à dire $\langle x \rangle = \{e\}$ ou $\langle x \rangle = G$

   G est donc un groupe simple.
2. Supposons que G soit un groupe abélien simple
   Soit $x \in G$ tel que $x \neq e$. Alors $\langle x \rangle$ est un sous-groupe de G. G étant simple, $\langle x \rangle = G$, c'est à dire que G est monogène, autrement dit :

$$G = \{x^n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$$

- ▷ Ainsi, si G est infini, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et s'il est d'ordre fini n, il est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- ▷ G est sûrement d'ordre fini.
  En effet, soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G$, définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ n & \longmapsto & f(n) = x^n \end{array}\right.$$

  f est un homomorphisme de $\mathbb{Z}$ dans G, et si G est monogène, f est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$ dans G. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $m\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ et $f(m\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de G, différent de G et de $\{e\}$.
  Ce qui est impossible. Donc G est fini et d'ordre n
- ▷ n est un nombre premier
  En effet, supposons le contraire, et posons $n = pq$.
  Alors, x^n est un élément d'ordre q, et le sous-groupe $\langle x^p \rangle$ est un sous-groupe de G d'ordre q, différent de G et de $\{e\}$, ce qui est impossible.
  Donc n est premier.

G est donc un groupe cyclique d'ordre n premier.

Exercice 28 :

Soient G_1 et G_2 2 groupes et $G_1 \times G_2$ leur produit direct.. On appelle ϖ_1 la projection de $G_1 \times G_2$ sur G_1 et ϖ_2 la projection de $G_1 \times G_2$ sur G_2.
Soit G un groupe quelconque $u_1 : G \longrightarrow G_1$ un homomorphisme de groupe et $u_2 : G \longrightarrow G_2$ un second homomorphisme de groupe.
Démontrer qu'il existe un homomorphisme $h : G \longrightarrow G_1 \times G_2$ et un seul tel que $u_1 = \varpi_1 \circ h$ et $u_2 = \varpi_2 \circ h$

Commençons par faire un diagramme pour visualiser le problème :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "u_2"'] \arrow[dr, "h"] & G_1 \\ G_2 & G_1 \times G_2 \arrow[l, "\varpi_2"] \arrow[u, "\varpi_1"'] \end{tikzcd}$$

Rigoureusement, il n'y a pas de grandes mathématiques dans cet exercice. Il suffit de poser, pour $x \in G$, $h(x) = (u_1(x), u_2(x))$; l'unicité de h est liée à la définition même de h.
Nous avons, bien entendu, $\varpi_1 \circ h(x) = \varpi_1(u_1(x), u_2(x)) = u_1(x)$, et donc $u_1 = \varpi_1 \circ h$. De la même manière, nous avons $u_2 = \varpi_2 \circ h$

Chapitre 2

Anneaux et corps

2.1 Définitions d'anneau, premières propriétés

2.1.1 Définition

Un anneau R est un ensemble muni de 2 lois notées $+$ et $\times$ telles que :

1. $(R, +)$ est un groupe abélien
2. La multiplication $\times$ est associative
3. La multiplication est distributive par rapport à l'addition, c'est à dire :
$$(\forall a \in R)\,(\forall b \in R)\,(\forall c \in R)\,(a \times (b + c)) = a \times b + a \times c \text{ et } (b + c) \times a = b \times a + c \times a$$
4. L'anneau $(R, +, \times)$ est dit unitaire si la multiplication possède un élément neutre (ou unité)
5. L'anneau $(R, +, \times)$ est dit commutatif si la multiplication est commutative

Remarque 1 :

1. Nous utilisons l'addition $+$ et la multiplication $\times$ plutôt que des lois génériques comme $\star$ ou $\perp$, puisque, la plupart du temps, ce sera ce type d'opérations que nous utiliserons
2. Nous considérerons tous les anneaux comme des anneaux unitaires. Par contre, les anneaux ne sont pas forcément commutatifs.
3. Si aucune confusion n'est à craindre, nous noterons 0 le neutre pour l'addition $+$ et 1 l'élément neutre pour la multiplication $\times$
4. On appelle anneau trivial l'anneau réduit à 0, c'est à dire $R = \{0\}$
5. Nous oublierons souvent l'opérateur $\times$ en écrivant $a \times b = ab$
6. Dans un anneau non forcément commutatif, on dit que 2 éléments particuliers $a \in R$ et $b \in R$ sont permutables ou commutables si et seulement si $ab = ba$

2.1.2 Quelques propriétés immédiates des anneaux

Soit $(R, +, \times)$ un anneau unitaire. Alors

1. Pour tout $a \in R$, nous avons $a \times 0 = 0 \times a = 0$
2. Pour tout $a \in R$ et tout $b \in R$, nous avons $(-a) \times b = -(a \times b) = a \times (-b)$
3. Si l'anneau R n'est pas trivial, alors $0 \neq 1$

Démonstration

1. Soit $a \in R$.
Nous avons alors $a + 0 = a$; en multipliant par a, nous avons $a\,(a + 0) = a^2 \iff a^2 + a \times 0 = a^2$

De la régularité dans le groupe $(R, +)$, nous avons $a \times 0 = 0$.
Ce que nous voulions

2. Soient $a \in R$, $b \in R$
D'après la démonstration précédente, nous avons $0 = 0b$, et donc

$$0 = (a + (-a))\, b = ab + (-a)\, b$$

On montre ainsi que $(-a)\, b$ est l'opposé de ab, et nous pouvons écrire $-ab = (-a)\, b$
Nous démontrerions de même que $a\,(-b) = -ab$

3. Soit R un anneau non trivial, c'est à dire qu'il existe $r \in R$ tel que $r \neq 0$
Supposons que $0 = 1$ et soit $a \in R$ quelconque. Alors :

$$a = a \times 1 = a \times 0 = 0$$

R est donc l'anneau trivial

2.1.3 Définition

Soit $(R, +, \times)$ un anneau unitaire.

1. Si, pour $r \in R$, il existe un élément $s \in R$ tel que $rs = sr = 1$, alors r est dit inversible et son inverse s est noté $s = r^{-1}$
2. S'il existe dans $(R, +, \times)$ des éléments $a \in R$ et $b \in R$ tels que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $ab = 0$, on dit que a et b sont de véritables diviseurs de zéro
3. On appelle anneau intègre un anneau unitaire commutatif, non trivial et n'admettant pas de diviseurs de zéro.

Exercice 1 :

1. *Soit $(R, +, \times)$ un anneau unitaire. Montrer qu'un véritable de zéro n'est pas inversible dans R*

   Soit $a \in R$, avec $a \neq 0$, un véritable diviseur de zéro. Il existe donc $b \in R$, avec $b \neq 0$ tel que $ab = 0$.
   Supposons que a soit inversible. Il existe alors $a^{-1} \in R$ tel que $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$. Nous avons donc :
   $$a^{-1}(ab) = 0 \Longleftrightarrow \left(a^{-1}a\right) b = 0 \Longleftrightarrow 1 \times b = 0 \Longleftrightarrow b = 0$$
   Et donc $b = 0$; contradiction.

2. *Démontrer que, dans un anneau $(R, +, \times)$, la multiplication est distributive par rapport à la soustraction, c'est à dire*
   $$a\,(c - b) = ac - ab$$

   On peut écrire $a\,(c - b) + ab \overset{\text{Distributivité}}{=} a\,((c - b) + b) = a\,(c - b + b) = ac$.
   Nous avons donc $a\,(c - b) + ab = ac \Longleftrightarrow a\,(c - b) = ac - ab$

Exemple 1 :

Des exemples d'anneaux

1. $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire. Les éléments inversibles dans $\mathbb{Z}$ sont $+1$ et -1.
2. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est aussi un anneau commutatif unitaire.
   → Dans l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$, l'élément $(n-1)$ est toujours inversible, puisque :
   $$(n-1) \times (n-1) = n^2 - 2n + 1 \equiv 1\,[n]$$
   Donc, $(n-1)$ est son propre inverse ; ce qui n'était pas étonnant, puisque $(n-1) \equiv -1\,[n]$, et que $(n-1)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1\,[n]$

→ Considérons l'anneau $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+,\times)$. cet anneau contient de véritables diviseurs de 0 ; par exemple, comme $2\times 3\equiv 0\,[6]$, 2 et 3 sont de véritables diviseurs de zéro dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+,\times)$

→ A quelle condition un élé ment $a\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il inversible ?

Si a est premier avec n, alors a est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
En effet, d'après l'identité de Bachet-Bezout, a et n étant premiers entre eux, il existe $u\in\mathbb{Z}$ et $v\in\mathbb{Z}$ tels que $au+vn=1 \iff au=1-vn$, c'est à dire que $au\equiv 1\,[n]$ et donc $\dot{u}\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'inverse de a dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

3. $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$ et $(\mathbb{C},+,\times)$ sont trivialement des anneaux.
4. $\mathbb{K}[X]$, ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un anneau.
5. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau.

   → Ce n'est pas un anneau intègre ; en effet, si $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, A et B sont deux matrices carrées d'ordre 2, non nulles telles que $AB=BA=\mathcal{O}_2$

   → Tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas inversibles.
6. On considère l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On muni cet ensemble des lois suivantes :

   ⇒ **<u>L'addition</u>**
   Pour tout $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et tout $g\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on définit $f+g$ par $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

   ⇒ **<u>La multiplication</u>**
   Pour tout $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et tout $g\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on définit $f\times g$ par $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$

   Muni de ces deux lois, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un anneau commutatif unitaire

   ⋆ Le neutre pour l'addition est la fonction nulle $\mathcal{O}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\mathcal{O}:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \mathcal{O}(x)=0\end{array}\right.$$

   ⋆ L'élément unité pour la multiplication est la fonction 1 définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}1:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & 1(x)=1\end{array}\right.$$

7. L'anneau $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas un anneau intègre. Si nous définissons 2 fonctions f et g par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x)=\left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } x<0\\ x^2 \text{ si } x\geqslant 0\end{array}\right.\end{array}\right. \quad\text{et}\quad \left\{\begin{array}{rcl}g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & g(x)=\left\{\begin{array}{l}x \text{ si } x<0\\ 0 \text{ si } x\geqslant 0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

   Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)g(x)=0$, c'est à dire $f\times g=\mathcal{O}$ alors que ni f, ni g ne sont nulles. $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est donc pas un anneau intègre.

2.1.4 Définition

Soit $(R,+,\times)$ un anneau unitaire.

1. On dit qu'un élément $a\in R$ est <u>nilpotent</u> s'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $a^n=0$
2. On dit qu'un élément $a\in R$ est <u>idempotent</u> si $a^2=a$

Remarque 2 :

1. Si $a\in R$ est un élément nilpotent, a est un véritable diviseur de 0
2. Si $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ où $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, alors $A^3=\mathcal{O}_3$. A est donc nilpotente d'ordre 3
3. Soit $(R,+,\times)$ un anneau unitaire ; soit $x\in R$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Nous définissons nx par :

$$nx=\left\{\begin{array}{l}x+x+\cdots+x \text{ avec } n \text{ termes, si } n\in\mathbb{N}^*\\ 0 \text{ si } n=0\\ -((-n)x)\ \text{ si } n\in\mathbb{Z}^-\end{array}\right.$$

4. Les règles de calcul classiques dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ne sont pas toujours valides puisqu'à priori, un anneau n'est pas forcément commutatif. Nous avons donc :
   - $(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b) = a^2+ab+ba+b^2$
   - $(a+b)\times(a-b) = a^2-ab+ba-b^2$
5. Si **l'anneau est commutatif** ou si les éléments $a \in R$ et $b \in R$ commutent, c'est à dire $ab = ba$, nous avons les formules classiques :
   - $(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b) = a^2+2ab+b^2$
   - $(a+b)\times(a-b) = a^2-b^2$
6. Si $(R,+,\times)$ est un anneau unitaire de caractéristique p, alors, pour tout $a \in R$, nous avons $pa = 0$. En effet
$$pa = p\times(ea) = (pe)\times a = 0\times a = 0$$

2.1.5 Théorème : la formule du binôme

Soit $(R,+,\times)$ un anneau unitaire ; soient $x \in R$ et $y \in R$, 2 éléments de R qui commutent, c'est à dire que $xy = yx$. Nous avons alors la formule du binôme :
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k y^{n-k}$$

Démonstration

La démonstration est très semblable à celle qui a été faite dans le cours de L_0

Exercice 2 :

Nous avons démontré, en L_0, que, si p est un nombre premier, alors, pour tout $q \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant q \leqslant p-1$, $\mathrm{C}_p^q = \binom{p}{q}$ est divisible par p, c'est à dire qu'il existe $k_q \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{C}_p^q = \binom{p}{q} = k_q p$

1. Soit $(R,+,\times)$ un anneau commutatif de caractéristique p où p est un nombre premier. Démontrer que $(a+b)^p = a^p + b^p$
2. En déduire que $(a-b)^p = a^p - b^p$
3. Pour $a_1, a_2, \cdots, a_k$ k éléments de l'anneau R. Montrer que
$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^p = (a_1)^p + (a_2)^p + \cdots + (a_k)^p$$
4. p est toujours un nombre premier et $k \in \mathbb{N}$ quelqconque. Démontrer que $k^p \equiv k\ [p]$

Exercice 3 :

Soit $(R,+,\times)$ un anneau unitaire. Soient $a \in R$ et $b \in R$ tels que $ab+ba = 1$ et $a^2b+ba^2 = a$

1. Montrer que $a^2b = ba^2$ et que $2aba = a$
2. Etablir que a est inversible que son inverse est $2b$, c'est à dire $a^{-1} = 2b$

Exercice 4 :

Soit $(R,+,\times)$ un anneau unitaire.
On suppose que, pour tout $x \in R$ et tout $y \in R$, nous avons $(xy)^2 = x^2y^2$

1. Démontrer que, pour tout $x \in R$ et tout $y \in R$, nous avons $xyx = x^2y = yx^2$
2. En déduire que l'anneau R est commutatif

Exercice 5 :

Soit $(R, +, \times)$ un anneau unitaire.
Soit $a \in R$ un élément de R tel qu'il existe $b \in R$ tel que $ab = 1$

1. Démontrer que, si pour tout $x \in R$ et tout $y \in R$ nous avons $ax = ay$, alors $x = y$ *(On dit que a est régulier à gauche)*
2. Démontrer que a est un élément inversible de R et que $b = a^{-1}$

Exercice 6 :

Soit $(R, +, \times)$ un anneau unitaire. Nous appelons $\mathcal{U} \subset R$ l'ensemble des éléments inversibles de R.
Il faut démontrer que $(\mathcal{U}, \times)$ est un groupe.

Exercice 7 :

Montrer qu'un anneau $(R, +, \times)$ n'a pas de diviseurs de zéro si, et seulement si, tous ses éléments non nuls sont réguliers

Exercice 8 :

Soient a et b deux éléments d'un anneau $(R, +, \times)$ tels que ab soit inversible et b non diviseur de 0.
Montrer que a et b sont inversibles.

2.1.6 Définition de sous-anneau

Soit $(R, +, \times)$ un anneau.
On appelle sous-anneau d'un anneau R toute partie non vide $A \subset R$, non vide stable pour les lois $+$ et $\times$ et telle que la structure induite sur A par ces lois $+$ et $\times$ soit une structure d'anneau

Remarque 3 :

1. Ce qui veut donc dire que $(A, +, \times)$ un anneau et que, donc $(A, +)$ est un sous-groupe additif du groupe abélien additif $(R, +)$
2. A est donc aussi une partie stable pour la multiplication
3. La multiplication étant associative et distributive par rapport à l'addition sur R, elle l'est aussi sur A

2.1.7 Théorème

Soit $(R, +, \times)$ un anneau.
Pour qu'une partie non vide $A \subset R$ soit un sous-anneau de R, il faut et il suffit que :

$$(\forall x \in A)\,(\forall y \in A)\,((x - y \in A) \text{ et } (x \times y \in A))$$

Démonstration

La démonstration est simple et laissée au lecteur. La majorité des arguments est dans la remarque précédente.

Remarque 4 :

Si l'anneau R est commutatif et intègre, il en est de même du sous anneau $A \subset R$. Par contre, l'anneau R peut être unitaire sans que A ne le soit.

2.1.8 Théorème

Les seuls sous anneaux de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ sont les sous-ensembles de type $n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Démonstration

1. Tout d'abord, les seuls sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$ sont du type $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Les sous-anneaux sont donc, au mieux, des ensembles du type $n\mathbb{Z}$
2. Ensuite, ces ensembles du type $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, sont-ils stables pour la multiplication ?

   Soit donc $x \in n\mathbb{Z}$ et $y \in n\mathbb{Z}$.
   Il existe donc $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $x = k_1 n$ et $y = k_2 n$.
   Alors, $xy = k_1 k_2 n^2 = (k_1 k_2 n)\, n$, ce qui met en évidence que xy est un multiple de n et que, donc, $xy \in n\mathbb{Z}$

Remarque 5 :

Un sous-anneau n'hérite pas forcément de toutes les propriétés de l'anneau.
Ici, nous avons comme exemple que si $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau unitaire, $(n\mathbb{Z}, +, \times)$ ne l'est pas, puisque jamais $1 \in n\mathbb{Z}$

Exemple 2 :

1. Premier exemple simple de sous-anneau : $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$
2. Considérons l'anneau unitaire $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$. Quel sont ses sous-anneaux ?
   Ce sont d'abord des sous groupes additifs de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$, et, d'après le théorème de Lagrange, l'ordre de ces sous-groupes doit diviser l'ordre du groupe. Les sous-groupes auront donc pour cardinal 1,2 et 3
   - ⋆ Sous-anneau à un seul élément $A_1 = \left\{\dot{0}\right\}$
   - ⋆ Sous-anneau à 2 éléments $A_2 = \left\{\dot{0}, \dot{3}\right\}$
   - ⋆ Sous-anneau à 3 éléments $A_3 = \left\{\dot{0}, \dot{2}, \dot{4}\right\}$

Exercice 9 :

Dans l'anneau $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère l'ensemble A_{x_0} des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f(x_0) = 0$. Il faut démontrer que $(A_{x_0}, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$

Exercice 10 :

Soit $(R, +, \times)$ un anneau et nous considérons $Z(R)$, le centre de R, c'est à dire :

$$Z(R) = \{u \in R \text{ tels que, pour tout } x \in R \text{ nous avons } ux = xu\}$$

Il faut démontrer que $(Z(R), +, \times)$ est un sous-anneau de $(R, +, \times)$

Exercice 11 :

Soit $(R, +, \times)$ un anneau et $a \in R$. Nous considérons le sous-ensemble $A(a)$ défini par :

$$A(a) = \{x \in R \text{ tels que nous avons } ax = xa\}$$

Il faut démontrer que $(A(a), +, \times)$ est un sous-anneau de $(R, +, \times)$

Exercice 12 :

Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$
Nous notons $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right] = \left\{x = a + b\sqrt{d} \text{ où } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}\right\}$.
Il faut montrer que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$

Exercice 13 :

On pose $r = \sqrt[3]{2}$ et $A = \{x \in \mathbb{R}$ où $x = m + nr + pr^2$ avec $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}\}$.
Il faut démontrer que $(A, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$

Exercice 14 :

Soit $A = \left\{\dfrac{m}{2n+1} \text{ avec } m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\right\}$

1. Démontrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$
2. Quels sont les éléments inversibles de A ?

Exercice 15 :

Soit $A = \left\{\dfrac{m}{2^n} \text{ avec } m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\right\}$

1. Démontrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$
2. Quels sont les éléments inversibles de A ?

2.2 Idéal et homomorphismes d'anneaux

2.2.1 Définition d'idéal

Soit $(R, +, \times)$ un anneau

1. On appelle idéal à gauche de R, un sous-groupe additif I_g de R tel que

$$(\forall x \in R)\,(\forall a \in I_g)\,(xa \in I_g)$$

2. On appelle idéal à droite de R, un sous-groupe additif I_d de R tel que

$$(\forall x \in R)\,(\forall a \in I_d)\,(ax \in I_d)$$

3. On appelle idéal bilatère un sous-groupe additif I qui est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite

Remarque 6 :

1. Naturellement, dans un anneau commutatif $(R, +, \times)$, les notions d'idéal à gauche, d'idéal à droite ou d'idéal bilatère se confondent. On parle alors seulement **d'idéal** de R
2. Evidemment, un idéal de R est un sous-anneau de R

Exemple 3 :

1. L'exemple le plus simple *(et le plus parlant)* se situe dans $(\mathbb{Z}, +, \times)$: les ensembles $n\mathbb{Z}$ sont des idéaux bilatères de $\mathbb{Z}$.

   En effet, $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$
   De plus, si $u \in n\mathbb{Z}$, alors, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $au \in n\mathbb{Z}$. En effet, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $u = nk$, et donc $au = ank = akn$; ainsi $au \in n\mathbb{Z}$
2. L'intersection de 2 idéaux *(à gauche ou à droite)* de R est encore un idéal de R
3. Soient I_1 et I_2 2 idéaux de R *(à gauche ou à droite)*. Nous définissons l'ensemble

$$I_1 + I_2 = \{i_1 + i_2 \text{ où } i_1 \in I_1 \text{ et } i_2 \in I_2\}$$

   Alors, $I_1 + I_2$ est aussi un idéal contenant I_1 et I_2
4. Si $(R, +, \times)$ est un anneau, alors $\{0\}$ et R sont aussi des idéaux ; nous les appelons les **idéaux triviaux**

2.2.2 Définition d'idéal et d'anneau principal

Soit $(R,+,\times)$ un anneau commutatif
Soit $a \in R$ et $aR = \{y \in R$ tel qu'il existe $r \in R$ tel que $y = ar\}$

1. aR est l'ensemble des multiples de a et c'est un idéal de R. Tout idéal de ce type est appelé idéal principal
2. On appelle anneau principal un anneau $(R,+,\times)$ commutatif dans lequel tout idéal est principal

Remarque 7 :

Il est facile de démontrer que aR est un idéal de R

1. On démontre que $(aR,+)$ est un sous-groupe de $(R,+)$
   - ⋆ Tout d'abord $aR \neq \emptyset$ puisque $0 \in aR$; en effet, $0 = a \times 0 = 0 \times 0$
   - ⋆ Ensuite, soient $x \in aR$ et $y \in aR$; alors $x = ar_1$ et $y = ar_2$ avec $r_1 \in R$ et $r_2 \in R$. Et donc :
   $$x - y = ar_1 - ar_2 = a(r_1 - r_2)$$
   De $r_1 - r_2 \in R$, nous avons $a(r_1 - r_2) \in aR$, c'est à dire $x - y \in aR$

   De là, nous déduisons que $(aR,+)$ est un sous-groupe de $(R,+)$
2. D'autre part, soit $x \in R$ et $z \in aR$. Alors :
   $$xz = x(ar) = (xa)r = a(xr)$$
   Comme $xr \in R$ nous avons $a(xr) \in aR$, c'est à dire $xz \in aR$

En conclusion aR est un idéal de R

Exemple 4 :

1. Un exemple d'idéal principal est l'idéal $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Ce sont d'ailleurs les seuls types d'idéal de l'anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$ des entiers relatifs
2. $(\mathbb{Z},+,\times)$ est donc un anneau principal.

2.2.3 Définition

Soit $(R,+,\times)$ un anneau
Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur un anneau R est dite compatible avec la structure d'anneau de R si et seulement si

1. Pour tout $x \in R$ nous avons l'implication $a\mathcal{R}b \Longrightarrow (a+x)\,\mathcal{R}\,(b+x)$
2. Pour tout $x \in R$ nous avons les implications $a\mathcal{R}b \Longrightarrow (a \times x)\,\mathcal{R}\,(b \times x)$ et $a\mathcal{R}b \Longrightarrow (x \times a)\,\mathcal{R}\,(x \times b)$

2.2.4 Proposition

Soit $(R,+,\times)$ un anneau et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie sur R compatible avec la structure d'anneau de R
Alors, $\dot{0}$ est un idéal bilatère de R

Démonstration

1. Il faut d'abord démontrer que $(\dot{0},+)$ est un sous-groupe du groupe $(R,+)$
   - ⋆ Tout d'abord $\dot{0} \neq \emptyset$ puisque $0 \in \dot{0}$
   - ⋆ Ensuite, soient $x \in \dot{0}$ et $y \in \dot{0}$. Alors $x\mathcal{R}0$ et $y\mathcal{R}0$ et donc $x\mathcal{R}y$.
   Comme $\mathcal{R}$ est compatible avec la structure d'anneau de R, nous avons $(x-y)\,\mathcal{R}\,(y-y) \Longleftrightarrow (x-y)\,\mathcal{R}0$, c'est à dire $x - y \in \dot{0}$

   Donc, $(\dot{0},+)$ est un sous-groupe du groupe $(R,+)$

2. Soit $x \in R$, avons nous pour tout $a \in \dot{0}$, $ax \in \dot{0}$ et $xa \in \dot{0}$?
   Soit $a \in \dot{0}$ alors $a\mathcal{R}0$ et donc par compatibilité de la relation $\mathcal{R}$ avec la structure d'anneau, nous avons $xa\mathcal{R}0$ et $ax\mathcal{R}0$, c'est à dire $xa \in \dot{0}$ et $ax \in \dot{0}$

$\dot{0}$ est donc un idéal bilatère de R

2.2.5 Corollaire

Soit $(R, +, \times)$ un anneau
$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence définie sur R compatible avec la structure d'anneau de R si et seulement si $\mathcal{R}$ est de la forme $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - y \in I$ où I est un idéal bilatère de R

Démonstration

La démonstration est simple et laissée au lecteur. Nous remarquerons que $I = \dot{0}$

2.2.6 Proposition

Soit $(R, +, \times)$ un anneau et $I \subset R$, un idéal bilatère de R.
Soit $\mathcal{R}$, la relation d'équivalence liée à I, c'est à dire celle définie par :

$$(\forall x \in R)\,(\forall y \in R)\,((x\mathcal{R}y) \Longleftrightarrow (x - y \in I))$$

L'ensemble quotient de cette relation d'équivalence est noté R/I et nous définissons sur cet ensemble quotient les opétations suivants :

$$\dot{x} + \dot{y} = \overset{\bullet}{\widehat{x + y}} \text{ et } \dot{x} \times \dot{y} = \overset{\bullet}{\widehat{x \times y}}$$

Muni de ces 2 opérations, A/I est un anneau ; c'est l'anneau quotient de R par I

Démonstration

→ Il est connu, et démontré que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
→ En considérant $(R, +)$ comme un groupe commutatif et $(I, +)$ comme un sous-groupe de $(R, +)$, nous avons vu, dans la théorie des groupes, que $(R/I, +)$ est un groupe.
→ Il faut, maintenant, montrer l'associativité de la multiplication, et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
  ⋆ Associativité de la multiplication
    Soient $\dot{x} \in R/I$, $\dot{y} \in R/I$ et $\dot{z} \in R/I$ 3 éléments de R/I. Alors :

$$\dot{x}\,(\dot{y}\dot{z}) = \dot{x}\left(\overset{\bullet}{\widehat{y \times z}}\right) = \overset{\bullet}{\widehat{x \times y \times z}} = \left(\overset{\bullet}{\widehat{x \times y}}\right)\dot{z} = (\dot{x}\dot{y})\,\dot{z}$$

  ⋆ Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
    Soient $\dot{x} \in R/I$, $\dot{y} \in R/I$ et $\dot{z} \in R/I$ 3 éléments de R/I. Alors :

$$\dot{x}\,(\dot{y} + \dot{z}) = \dot{x}\left(\overset{\bullet}{\widehat{y + z}}\right) = \overset{\bullet}{\widehat{x\,(y + z)}} = \overset{\bullet}{\widehat{x \times y + x \times z}} = \overset{\bullet}{\widehat{x \times y}} + \overset{\bullet}{\widehat{x \times z}} = \dot{x}\dot{y} + \dot{x}\dot{z}$$

2.2.7 Définition d'homomorphisme d'anneaux

Soient $(R, +, \times)$ et $(R_1, +_1, \times_1)$ 2 anneaux
$f : R \longrightarrow R_1$ est un homomorphisme d'anneaux si et seulement si

$$(\forall x \in R)\,(\forall y \in R)\,((f\,(x + y) = f\,(x) +_1 f\,(y)) \text{ et } f\,(x \times y) = f\,(x) \times_1 f\,(y))$$

1. Si $f : R \longrightarrow R_1$ est un homomorphisme d'anneaux bijectif, alors f est appelé isomorphisme
2. Un homomorphisme $f : R \longrightarrow R$ de R dans lui même est un endomorphisme
3. Un homomorphisme $f : R \longrightarrow R$ de R dans lui même bijectif est un automorphisme

Exemple 5 :

Un premier exemple d'homomorphisme d'anneau est la projection canonique sur un anneau-quotient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p : R & \longrightarrow & R/I \\ x & \longmapsto & p(x) = \dot{x} \end{array} \right.$$

Remarque 8 :

1. $f : R \longrightarrow R_1$, homomorphisme d'anneaux est aussi un homomorphisme du groupe $(R, +)$ vers le groupe $(R_1, +_1)$. f hérite donc de toutes les propriétés d'homomorphisme de groupe additif. Ainsi $f(0_R) = 0_{R_1}$ et $f(-x) = -f(x)$
2. Il est facile à démontrer que la composée de 2 homomorphismes d'anneaux est un homomorphisme d'anneaux

2.2.8 Théorème

Soit $f : R \longrightarrow R_1$ est un homomorphisme d'anneaux. Alors

1. $f(0_R) = 0_{R_1}$ et $f(-x) = -f(x)$
2. $f(R)$ est un sous-anneau de R_1
3. $\ker f = f^{-1}(\{0_{R_1}\})$ est un idéal bilatère de R ; c'est donc le noyau de f

Démonstration

Nous ne démontrons pas tout. nous allons réutiliser les résultats liés aux homomorphismes de groupe.

1. **Montrons que $f(R)$ est un sous-anneau de R_1**
   → D'après les résultats sur les homomorphismes de groupe, $(f(R), +_1)$ est un sous-groupe de $(R_1, +_1)$
   → Il faut maintenant montrer que si $a \in f(R)$ et si $b \in f(R)$ alors $ab \in f(R)$.
   Soient donc $a \in f(R)$ et $b \in f(R)$; il existe alors $x \in R$ tel que $a = f(x)$ et $y \in R$ tel que $b = f(y)$. Alors :
   $$ab = f(x) \times f(y) = f(xy)$$
   Et donc $ab \in f(R)$ puisqu'il existe $z = xy \in R$ tel que $ab = f(xy)$
   $f(R)$ est donc bien un sous-anneau de R_1
2. **$\ker f = f^{-1}(\{0_{R_1}\})$ est un idéal bilatère de R**
   → D'après la théorie des groupes, nous savons que $(\ker f, +)$ est un sous-groupe de $(R, +)$
   → Soient $y \in \ker f$ et $x \in R$; il faut montrer que $xy \in \ker f$ et $yx \in \ker f$; alors
   $$f(xy) = f(x) \times f(y) = f(x) \times 0_{R_1} = 0_{R_1}$$
   Et donc $xy \in \ker f$. Nous démontrerions de même que $yx \in \ker f$
   $\ker f = f^{-1}(\{0_{R_1}\})$ est donc un idéal bilatère de R

2.2.9 Corollaire

Soit $f : R \longrightarrow R_1$ est un homomorphisme d'anneaux. Alors f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_R\}$

Exercice 16 :

Soient $(R, +, \times)$ et $(R_1, +_1, \times_1)$ 2 anneaux et $f : R \longrightarrow R_1$ un homomorphisme d'anneaux.

1. Démontrer que si $(R, +, \times)$ est un anneau commutatif, alors $f(R)$ l'est aussi
2. Démontrer que si $(R, +, \times)$ est un anneau unitaire d'unité 1_R, alors $f(1_R)$ est l'unité de $f(R)$
3. Démontrer que si $x \in R$ est un élément inversible, alors $f(x)$ est aussi inversible dans $f(R)$ et $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

2.2.10 Théorème

Soit $f : R \longrightarrow R_1$ est un isomorphisme d'anneaux. Alors $f^{-1} : R_1 \longrightarrow R$ est aussi un isomorphisme d'anneaux. On dit que les anneaux R et R_1 sont isomorphes

Démonstration

Soit $f : R \longrightarrow R_1$ est un isomorphisme d'anneaux.

- $\Rightarrow$ Tout d'abord, $f : (R, +) \longrightarrow (R_1, +_1)$ est aussi un isomorphisme de groupe, et donc, d'après la théorie des groupes, $f^{-1} : (R_1, +_1) \longrightarrow (R, +)$ est aussi un isomorphisme de groupe
- $\Rightarrow$ Il faut maintenant montrer que c'est un isomorphisme d'anneaux, c'est à dire que, pour tout $x \in R_1$ et tout $y \in R_1$, $f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) \times f^{-1}(y)$
  Soient donc $x \in R_1$ et $y \in R_1$. de l'isomorphisme qu'est f, on peut déduire qu'il existe $u \in R$ et $v \in R$ tels que $f(u) = x$ et $f(v) = y$, ou, ce qui est équivalent, $f^{-1}(x) = u$ et $f^{-1}(y) = v$. Alors :

$$f^{-1}(xy) = f^{-1}(f(u) f(v)) = f^{-1}(f(uv)) = f^{-1} \circ f(uv) = uv = f^{-1}(x) \times f^{-1}(y)$$

  Nous avons donc $f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) \times f^{-1}(y)$

Ce qui termine de montrer que f^{-1} est un isomorphisme d'anneaux.

Remarque 9 :

Comme dans la théorie des groupes, nous pouvons décomposer canoniquement un homomorphisme d'anneaux.
Si $f : R \longrightarrow R_1$ est un homomorphisme d'anneaux, $\ker f$ est un idéal bilatère, et la relation $\mathcal{S}$ définie par :

$$x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y) \Longleftrightarrow f(x-y) = 0_{R_1} \Longleftrightarrow x - y \in \ker f$$

est une relation d'équivalence. D'où la proposition qui suit, en tout point semblable à la proposition 1.3.4

2.2.11 Décomposition canonique d'un morphisme $f : G \longrightarrow G'$

Soient $(R, +, \times)$ et $(R_1, +_1, \times_1)$ deux anneaux. Soit $f : R \longrightarrow R_1$ un homomorphisme d'anneaux.
Alors, $f : R \longrightarrow R_1$ se décompose de manière canonique en $f = i \circ \overline{f} \circ \varphi$ où :

- $\rightarrow$ φ est la projection canonique $\varphi : R \longrightarrow R/\ker f$
- $\rightarrow$ $\overline{f}$ est l'isomorphisme $\overline{f} : R/\ker f \longrightarrow f(R)$
- $\rightarrow$ Et $i : f(R) \longrightarrow R_1$ est l'application d'insertion (ou injection canonique

Nous obtenons alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & R_1 \\
R/\ker f \arrow[r, "\overline{f}"'] & f(R) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Exercice 17 :

On considère $(R, +, \times)$ un anneau unitaire et $a \in R$, un élément inversible. Démontrer que l'application $f : R \longrightarrow R$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : R & \longrightarrow & R \\ x & \longmapsto & f(x) = axa^{-1} \end{array} \right.$$

est un automorphisme d'anneau.

2.2.12 Théorème et définition

Soit $(R, +, \times)$ un anneau unitaire d'unité e. Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ une application définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & R \\ \quad n & \longmapsto & f(n) = ne = \underbrace{e + e + \cdots + e + e}_{n \text{ fois}} \end{cases}$$

Alors

1. f est un homomorphisme d'anneaux
2. Si f est injective, c'est à dire si $\ker f = \{0\}$, alors le seul entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $f(p) = 0$ est $p = 0$ et $f(\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. On dit alors que <u>R est de caractéristique nulle</u>
3. Si l'application f n'est pas injective, alors, il existe un plus petit entier $p > 0$ tel que $f(p) = pe = 0_R$ et $f(\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On dit alors que <u>R est de caractéristique p</u>

Démonstration

1. <u>f est un homomorphisme d'anneaux</u>
   R est anneau unitaire d'unité e. Considérons le sous-groupe additif A' monogène engendré par e et l'application $f : \mathbb{Z} \longrightarrow A'$ définie par, pour $n \in \mathbb{Z}$, par $f(n) = ne$. Les règles de calculs dans un groupe additif montrent que pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(m+n) = (m+n)e = me + ne = f(m) + f(n)$$

   Et

$$f(mn) = (mn)e = m(ne) = (me)(ne) = f(m)f(n)$$

   f est donc un homomorphisme d'anneau. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow A'$ est surjective
2. En utilisant le schéma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & R \\ \varphi \downarrow & & \uparrow i \\ \mathbb{Z}/\ker f & \xrightarrow[\overline{f}]{} & f(\mathbb{Z}) = A' \end{array}$$

   Nous voyons que :
   ⋆ Si f est injective, alors $A' = f(\mathbb{Z})$ est un anneau isomorphe à $\mathbb{Z}$
   ⋆ Si f n'est pas injective, alors $\ker f$ est du type $p\mathbb{Z}$ où $p > 0$, et donc $A' = f(\mathbb{Z})$ est un anneau isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Remarque 10 :

Remarquons que si $(R, +, \times)$ un anneau unitaire d'unité e et de caractéristique $p > 0$, alors, pour tout $a \in R$, nous avons $pa = 0$

En effet, $pa = p(ea) = (pe)a = 0 \times a = 0$

2.2.13 Exercices

Exercice 18 :

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ un morphisme d'anneaux tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Montrer que f est l'identité ou la conjugaison complexe.

Exercice 19 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel et on appelle $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nous appelons Ev_a l'application suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Ev_a : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & Ev_a(f) = f(a) \end{array} \right.$$

Montrer l'application Ev_a est un morphisme d'anneaux.

Exercice 20 :

On note $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{m}{10^n} \text{ avec } m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble des nombres décimaux

1. Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +\times)$
2. Montrer que les idéaux de $\mathbb{D}$ sont principaux *(c'est-à-dire de la forme $a \times \mathbb{D}$ avec $a \in \mathbb{D}$)*

Exercice 21 :

Nilradical d'un anneau

On appelle nilradical d'un anneau commutatif $(R, +, \times)$, l'ensemble N formé des éléments nilpotents de R, c'est à dire des $x \in R$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $x^n = 0_R$. Montrer que N est un idéal de R

Exercice 22 :

Soient $(R, +, \times)$ un anneau commutatif et $a \in R$ un élément idempotent de R, c'est à dire tel que $a^2 = a$.

1. Montrer que $J = \{x \in R \text{ tel que } ax = 0\}$ est un idéal de R.
2. On note $I = aR$ l'idéal principal de R engendré par a. Déterminer $I + J$ et $I \cap J$.
3. Établir que pour tout idéal K de R : $(K \cap I) + (K \cap J) = K$.

2.3 Structure de corps

2.3.1 Proposition

Soit $(R, +, \times)$ un anneau unitaire commutatif non trivial *(Cf. 2.1.3)*.
Alors, $(R, +, \times)$ est un un anneau intègre si et seulement si il vérifie la règle de simplification suivante :

$$(\forall a \in R)(\forall b \in R)(\forall c \in R)((ab = ac \text{ et } a \neq 0) \Longrightarrow (b = c))$$

Démonstration

1. Supposons que $(R, +, \times)$ soit un anneau intègre.
   Soient donc $a \in R$ avec $a \neq 0$, $b \in R$ $c \in R$ tels que $ab = ac$.
   Alors $ab = ac \Longleftrightarrow ab - ac = 0 \Longleftrightarrow a(b - c) = 0$. Comme $a \neq 0$ et $(R, +, \times)$, intègre nous avons $b - c = 0$, c'est à dire $b = c$
2. Supposons que $(R, +, \times)$ vérifie la règle de simplification.
   Soient $a \in R$ et $b \in R$ tels que $a \neq 0$ et $ab = 0$. Alors
   $$ab = 0 \Longleftrightarrow a(b - 0) = 0 \overset{Simplification}{\Longrightarrow} b - 0 = 0 \Longleftrightarrow b = 0$$
   Donc R est un anneau intègre.

2.3.2 Définition de corps

Un ensemble $(\mathbb{F}, +, \times)$ est un corps commutatif si et seulement si

1. $(\mathbb{F}, +, \times)$ est un anneau unitaire commutatif
2. Tout élément $a \in \mathbb{F}$ non nul admet un inverse

Remarque 11 :

On note $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$

1. Ainsi $(\mathbb{F}, +, \times)$ est un corps commutatif si et seulement si
   $\Rightarrow$ $(\mathbb{F}, +)$ est un groupe additif commutatif
   $\Rightarrow$ $(\mathbb{F}^*, \times)$ est un groupe multiplicatif commutatif
2. Pour $a \in \mathbb{F}$ et $b \in \mathbb{F}^*$, le produit ab^{-1} est noté comme le quotient $\dfrac{a}{b}$ et ce quotient est la seule solution à l'équation $bx = a$
3. Pour $b \in \mathbb{F}^*$ et $d \in \mathbb{F}^*$, l'égalité de 2 quotients $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow ab^{-1} = cd^{-1} \Longleftrightarrow ad = bc$
4. **Somme, produit, quotient**
   $\Rightarrow$ Pour $b \in \mathbb{F}^*$ et $d \in \mathbb{F}^*$, nous avons $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$
   $\Rightarrow$ Pour $b \in \mathbb{F}^*$ et $d \in \mathbb{F}^*$, nous avons $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$
   $\Rightarrow$ Pour $b \in \mathbb{F}^*$, nous avons $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$
   $\Rightarrow$ Pour $a \in \mathbb{F}^*$ et $b \in \mathbb{F}^*$, nous avons $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$
5. Il existe des corps non commutatif qu'on appelle **corps gauche**

2.3.3 Caractéristique d'un corps

Soit $(\mathbb{F}, +, \times)$ un corps commutatif

1. La caractéristique d'un corps $\mathbb{F}$ est le plus petit entier n tel que $n \times 1 = 0$
2. La caractéristique d'un corps $\mathbb{F}$ est un nombre premier

Démonstration

Soit $(\mathbb{F}, +, \times)$ un corps commutatif de caractéristique p.
Supposons que p ne soit pas premier. Alors, $p = kh$ et $p \times 1 = (k \times 1)(h \times 1) = 0$
Le corps $\mathbb{F}$ étant intègre, alors $(k \times 1) = 0$ ou $(h \times 1) = 0$ car il n'y a a pas de diviseurs de zéro dans un corps.
Donc $h \leqslant p$ ou $k \leqslant p$
Ce qui contredit la définition de p. p est donc un nombre premier.

Remarque 12 :

Nous reprenons le morphisme d'anneau $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}$ défini par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ \quad n & \longmapsto & f(n) = n1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}_{n \text{ fois}} \end{cases}$$

Alors

1. Si $\mathbb{F}$ est de caractéristique nulle $\ker f = \{0\}$
2. Si $\mathbb{F}$ est de caractéristique p, $\ker f = p\mathbb{Z}$ et $f(\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exemple 6 :

Des exemples de corps

1. De manière classique, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps commutatifs
2. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si p est premier

En effet ; on sait déjà que les $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ sont des anneaux commutatifs. Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soont les éléments premiers avec n. Ainsi, si p est premier tous les éléments de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ sont inversibles et donc $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ est un corps.
Si n n'est pas premier, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$ possède de véritables diviseurs de zéro et donc ne peut être un corps.

3. Soit $(R,+,\times)$ un anneau unitaire intègre **fini**. Alors $(R,+,\times)$ est un corps

   Pour le démontrer il suffit de prouver que tout élément de R^* admet un inverse pour la multiplication.
   Pour ce faire, soit $a \in R^*$ et considérons $\psi_a : R^* \longrightarrow R^*$ défini par :

$$\begin{cases} \psi_a : R^* & \longrightarrow & R^* \\ x & \longmapsto & \psi_a(x) = ax \end{cases}$$

   → ψ_a est injective.
   En effet, soient $x \in R^*$ et $y \in R^*$ tels que $\psi_a(x) = \psi_a(y)$. Or :

$$\psi_a(x) = \psi_a(y) \Longleftrightarrow ax = ay \Longleftrightarrow a(x-y) = 0$$

   Comme $a \neq 0$ et que R est intègre, nous avons $a(x-y) = 0 \Longrightarrow x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y$
   Donc ψ_a est injective.

   → Comme ψ_a est injective et que R^* est un ensemble fini, ψ_a est surjective. Il existe donc un élément a_1 tel que $aa_1 = 1$, c'est à dire que $a \in R^*$ est inversible

   $(R,+,\times)$ est donc un corps

2.3.4 Définition de sous-corps

Soit $(\mathbb{F},+,\times)$ un corps commutatif
On appelle sous-corps de $(\mathbb{F},+,\times)$, toute partie non vide $\mathbb{L} \subset \mathbb{F}$, stable pour les lois de $\mathbb{F}$ et telle que la structure induite sur $\mathbb{L}$ par ces lois, soit une structure de corps.
On dit que $\mathbb{F}$ est un sur-corps ou une extension du corps $\mathbb{L}$

Remarque 13 :

1. On appelle sous-anneau R d'un corps $\mathbb{F}$, tout sous-anneau de $\mathbb{F}$ où $\mathbb{F}$ est considéré comme un anneau *(Par exemple, $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$)*
2. $\mathbb{F}$ est un sous-corps de $\mathbb{F}$. On dit qu'un corps est premier s'il ne contient d'autre sous-corps autre que lui-même. $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ où p est un nombre premier, est un exemple de corps premier

2.3.5 Théorème

Soit $(\mathbb{F},+,\times)$ un corps commutatif et $\mathbb{L} \subset \mathbb{F}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{F}$. Alors $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{F}$ si et seulement si :

1. Pour tout $a \in \mathbb{L}$ et tout $b \in \mathbb{L}$ nous avons $a - b \in \mathbb{L}$ et $ab \in \mathbb{L}$
2. Pour tout $a \in \mathbb{L}^*$, alors $a^{-1} \in \mathbb{L}^*$

Démonstration

La démonstration est évidente

Remarque 14 :

Soit $(\mathbb{F},+,\times)$ un corps commutatif. Alors l'intersection de 2 sous-corps de $\mathbb{F}$ est aussi un sous-corps de $\mathbb{F}$

Exemple 7 :

$\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$

Exercice 23 :

Nous appelons $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{u = p + q\sqrt{2} \text{ où } p \in \mathbb{Q} \text{ et } q \in \mathbb{Q}\right\}$. Montrer que $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$ *(C'est donc une extension de $\mathbb{Q}$)*

Exercice 24 :

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on considère l'ensemble $\mathbb{H}$ défini par :

$$\mathbb{H} = \left\{\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathbb{C} \text{ et } b \in \mathbb{C}\right\}$$

Il faut montrer que $\mathbb{H}$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un corps non commutatif *(corps gauche)*

2.3.6 Proposition

Un anneau unitaire commutatif non trivial est un corps si et seulement si il n'admet que des idéaux triviaux

Démonstration

Un idéal trivial d'un anneau R est un idéal I tel que $I = R$ ou $I = \{0\}$

1. **Soit $(R, +, \times)$ un anneau commutatif unitaire n'admettant que des idéaux triviaux**
   Démontrons que $(R, +, \times)$ est un corps.
   Soit $r \in R$ tel que $r \neq 0$ et regardons l'ensemble rR des multiples de r dans R ; rR est un idéal de $(R, +, \times)$ *(démonstration évidente)*
   $(R, +, \times)$ n'admettant que des idéaux triviaux, et comme $rR \neq \{0\}$, nous avons $rR = R$.
   R étant unitaire, $1 \in R$ et donc, il existe $a \in R$ tel que $ar = 1$ et donc r admet un inverse dans R et que cet inverse est a.
   $(R, +, \times)$ est donc un corps.
2. **Supposons que $(\mathbb{F}, +, \times)$ soit un corps commutatif**
   Démontrons qu'il n'admet que des idéaux triviaux.
   Soit donc $I \subset \mathbb{F}$ un idéal de $\mathbb{F}$ non trivial ; en particulier $I \neq \{0\}$; il existe donc $u \in I$ tel que $u \neq 0$. Comme $u \in \mathbb{F}$, u est inversible et donc u^{-1} existe.
   Soit $x \in \mathbb{F}$; alors $x = \left(xu^{-1}\right)u$. I étant un idéal, alors, comme $u \in I$, nous avons $\left(xu^{-1}\right)u \in I$, c'est à dire $x \in I$, et donc nous concluons que $I = \mathbb{F}$
   $\mathbb{F}$ n'admet donc que des idéaux triviaux.

2.3.7 Morphisme de corps

Soient $(\mathbb{F}_1, +, \times)$ et $(\mathbb{F}_2, +, \times)$ 2 corps commutatifs.
$\alpha : \mathbb{F}_1 \longrightarrow \mathbb{F}_2$ est un morphisme de corps si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{F}_1$ et tout $y \in \mathbb{F}_1$, nous avons :

1. $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$
2. $\alpha(x \times y) = \alpha(x) \times \alpha(y)$

Remarque 15 :

1. Un morphisme de corps est aussi un morphisme d'anneaux
2. Nous avons toujours le noyau d'un morphisme de corps $\ker\alpha = \{x \in \mathbb{F}_1 \text{ tels que } \alpha(x) = 0\}$
3. Nous avons, bien entendu : $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(1) = 1$

2.3.8 Proposition

Tout morphisme de corps est injectif

Démonstration

Soient $(\mathbb{F}_1, +, \times)$ et $(\mathbb{F}_2, +, \times)$ 2 corps commutatifs et $\alpha : \mathbb{F}_1 \longrightarrow \mathbb{F}_2$ un morphisme de corps. Nous allons montrer que $\ker \alpha$ est réduit à 0, c'est à dire que $\ker \alpha = \{0\}$ et nous aurons ainsi montré que $_{a}lpha$ est injective.
En 2.2.8, nous avons montré que $\ker \alpha$ est un idéal de $\mathbb{F}_1$; or, $\mathbb{F}_1$ étant un corps n'admet que des idéaux triviaux, c'est à dire $\ker \alpha = \{0\}$ ou $\ker \alpha = \mathbb{F}_1$

- ⋆ Tout d'abord $\ker \alpha \neq \mathbb{F}_1$ puisque $\alpha(1) = 1$ et donc , $1 \notin \ker \alpha$
- ⋆ Donc, $\ker \alpha = \{0\}$, ce qui montre que α est injectif

Donc, tout morphisme de corps est injectif

Remarque 16 :

1. Un morphisme injectif est aussi appelé **monomorphisme**
2. Un corps peut, bien entendu, ne pas être commutatif

2.4 Le corps des quotients

Dans cette section, il s'agit de construire un corps à partir d'un anneau intègre

2.4.1 Théorème

Soit $(R, +, \times)$ un anneau unitaire commutatif intègre.
Il existe un corps $Q(R)$ et un monomorphisme d'anneau $j : R \longrightarrow Q(R)$ tel que :

1. Tout élément $x \in Q(R)$ soit de la forme $x = \dfrac{j(a)}{j(b)} = j(a)(j(b))^{-1}$ avec $a \in R$, $b \in R$ et $b \neq 0$
2. De plus, tout monomorphisme d'anneau $\alpha : R \longrightarrow \mathbb{F}$ où $\mathbb{F}$ est un corps peut se mettre sous la forme composée $\alpha = \alpha' \circ j$ où $\alpha' : Q(R) \longrightarrow \mathbb{F}$ est un monomorphisme unique de corps.
   C'est à dire que nous obtenons alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "j"'] & \mathbb{F} \\ & Q(R) \arrow[u, "\alpha'"'] \end{tikzcd}$$

Démonstration

Soit $(R, +, \times)$ un anneau unitaire commutatif intègre.

1. **On construit le corps $Q(R)$**
   Soit R^* l'ensemble des éléments non nuls de R
   (a) <u>On définit une relation d'équivalence sur $R \times R^*$</u>
   On définit sur $R \times R^*$ la relation $\mathcal{R}$ suivante :
   $$(a, b)\, \mathcal{R}\, (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc$$
   Nous allons montrer que c'est une relation d'équivalence
   → La relation $\mathcal{R}$ est réflexive
   En effet, pour tout $(a, b) \in R \times R^*$, nous avons $ab = ab$ et donc $(a, b)\, \mathcal{R}\, (a, b)$
   → La relation $\mathcal{R}$ est symétrique
   Soient $(a, b) \in R \times R^*$ et $(c, d) \in R \times R^*$ tels que $(a, b)\, \mathcal{R}\, (c, d)$.
   Alors $ad = bc \Longleftrightarrow cb = da \Longleftrightarrow (c, d)\, \mathcal{R}\, (a, b)$.
   La relation $\mathcal{R}$ est donc symétrique

→ La relation $\mathcal{R}$ est transitive
Soient $(a,b) \in R \times R^*$, $(c,d) \in R \times R^*$ et $(e,f) \in R \times R^*$ tels que $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ et $(c,d)\,\mathcal{R}\,(e,f)$
Nous avons donc $ad = bc$ et $cf = de$

- Si $c = 0$, alors $ad = 0$, et comme $d \neq 0$, de l'intégrité de R, nous déduisons que $a = 0$; de la même manière, nous démontrons que $e = 0$. Nous avons alors :

$$(0,b)\,\mathcal{R}\,(0,d) \text{ et } (0,d)\,\mathcal{R}\,(0,f) \text{ et donc } (0,b)\,\mathcal{R}\,(0,f)$$

- Si $c \neq 0$, de $ad = bc$ et $cf = de$, nous déduisons par multiplication $adcf = bcde \iff dc\,(af) = dc\,(be)$. De la règle de simplification dans un anneau intègre vue en 2.3.1 et comme $dc \neq 0$, nous déduisons que $af = be$, c'est à dire $(a,b)\,\mathcal{R}\,(e,f)$

La relation $\mathcal{R}$ est bien transitive
La relation $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence sur $R \times R^*$

(b) On appelle $Q(R) = R \times R^*/\mathcal{R}$ l'ensemble quotient
Tout élément de $Q(R)$ est donc une classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ d'un couple $(a,b) \in R \times R^*$.
Pour la commodité des calculs qui suivent, nous appelons $[a;b]$ cette classe.
Donc $[a;b] = [c;d] \iff ad = bc$

→ Définissons une addition sur $Q(R)$:

$$(\forall\,[a;b] \in Q(R))\,(\forall\,[c;d] \in Q(R))\,([a;b] \oplus [c;d]) = [ad + bc; bd]$$

Cette addition ne dépend pas des représentants choisis
En effet, soient $(a,b) \in R \times R^*$, $(c,d) \in R \times R^*$, $(x,y) \in R \times R^*$ et $(z,t) \in R \times R^*$ tels que $[a;b] = [x;y]$ et $[c;d] = [z;t]$.
Nous avons donc :

$$[a;b] = [x;y] \iff ay = bx \text{ et } [c;d] = [z;t] \iff ct = dz$$

Nous avons donc $[a;b] \oplus [c;d] = [ad + bc; bd]$ et $[x;y] \oplus [z;t] = [xt + yz; yt]$.
Il faut donc montrer que $[ad + bc; bd] = [xt + yz; yt]$. Or :

$$yt\,(ad + bc) = ytad + ytbc = (ay)\,dt + (ct)\,by = (bx)\,dt + (dz)\,by = bxdt + dzby = bd\,(tx + zy)$$

Nous avons bien $[ad + bc; bd] = [xt + yz; yt]$
L'addition est bien définie et ne dépend donc pas des représentants choisis.
Cette addition confère à $(Q(R), \oplus)$ la structure de groupe abélien

⋆ L'addition $\oplus$ est évidemment interne

⋆ L'addition $\oplus$ est associative
Soient $[a;b] \in Q(R)$, $[c;d] \in Q(R)$ et $[e;f] \in Q(R)$.
Alors :

$$\begin{aligned} [[a;b] \oplus [c;d]] \oplus [e;f] &= [ad + bc; bd] \oplus [e;f] \\ &= [(ad + bc)\,f + bde; bdf] \\ &= [adf + bcf + bde; bdf] \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} [a;b] \oplus [[c;d] \oplus [e;f]] &= [a;b] \oplus [cf + de; df] \\ &= [adf + b\,(cf + de)\,; bdf] \\ &= [adf + bcf + bde; bdf] \end{aligned}$$

Nous avons donc $[[a;b] \oplus [c;d]] \oplus [e;f] = [a;b] \oplus [[c;d] \oplus [e;f]]$ et la loi $\oplus$ est bien associative.

⋆ La loi $\oplus$ admet un élément neutre : $[0;1]$.
En effet, pour tout $[a;b] \in Q(R)$, nous avons :

$$[a;b] \oplus [0;1] = [a \times 1 + 0 \times b; b \times 1] = [a;b] \text{ et } [0;1] \oplus [a;b] = [a;b]$$

- ⋆ Tout élément $[a;b] \in Q(R)$ admet, pour $\oplus$ un symétrique.
  Soit $[a;b] \in Q(R)$; le symétrique de $[a;b]$ pour $\oplus$ est donné par $[-a;b]$. En effet :
  $$[a;b] \oplus [-a;b] = \left[0;b^2\right]$$
  Et nous avons $\left[0;b^2\right] = [0;1]$ puisque $0 \times 1 = b^2 \times 0$ et donc $[a;b] \oplus [-a;b] = [0;1]$. De la même manière, nous montrerions que $[-a;b] \oplus [a;b] = [0;1]$
- ⋆ La loi $\oplus$ est commutative.
  Soient $[a;b] \in Q(R)$ et $[c;d] \in Q(R)$. Alors :
  $$[a;b] \oplus [c;d] = [ad+bc;bd] \text{ et } [c;d] \oplus [a;b] = [cb+ad;bd]$$
  La loi $\oplus$ est bien commutative

Nous venons de montrer que $(Q(R), \oplus)$ est un groupe abélien

→ Nous appelons $Q(R)^* = Q(R) \setminus \{[0;1]\}$.
De manière évidente, pour tout $b \in R^*$, $[0;1] = [0;b]$ et que si $a \in R$ et $a \neq 0$, $[0;1] \neq [a;b]$ et donc,
$$Q(R)^* = \{[a;b] \text{ où } a \in R^* \text{ et } b \in R^*\}$$

Nous définissons sur $Q(R)^*$ la multiplication suivante :
$$(\forall [a;b] \in Q(R))\,(\forall [c;d] \in Q(R))\,([a;b] \otimes [c;d]) = [ac;bd]$$
Cette multiplication ne dépend pas des représentants choisis
En effet, soient $(a,b) \in R \times R^*$, $(c,d) \in R \times R^*$, $(x,y) \in R \times R^*$ et $(z,t) \in R \times R^*$ tels que $[a;b] = [x;y]$ et $[c;d] = [z;t]$.
Nous avons donc :
$$[a;b] = [x;y] \Longleftrightarrow ay = bx \text{ et } [c;d] = [z;t] \Longleftrightarrow ct = dz$$
Nous avons donc $[a;b] \otimes [c;d] = [ac;bd]$ et $[x;y] \otimes [z;t] = [xz;yt]$.
Il faut donc montrer que $[ac;bd] = [xz;yt]$. Or :
$$yt\,(ac) = ytac = (ay)\,tc = (bx)\,tc = (bx)\,dz = bdxz$$
Nous avons bien $[ac;bd] = [xz;yt]$
La multiplication $\otimes$ est bien définie et ne dépend donc pas des représentants choisis.
Cette multiplication confère à $\left(Q(R)^*, \otimes\right)$ la structure de groupe abélien

- ⋆ La multiplication $\otimes$ est évidemment interne
- ⋆ La multiplication $\otimes$ est associative
  Soient $[a;b] \in Q(R)^*$, $[c;d] \in Q(R)^*$ et $[e;f] \in Q(R)^*$.
  Alors :
  $$[[a;b] \otimes [c;d]] \otimes [e;f] = [ac;bd] \otimes [e;f] = [ace;bdf]$$
  De même :
  $$[a;b] \otimes [[c;d] \otimes [e;f]] = [a;b] \otimes [ce;df] = [ace;bdf]$$
  Nous avons donc $[[a;b] \otimes [c;d]] \otimes [e;f] = [a;b] \otimes [[c;d] \otimes [e;f]]$ et la loi $\otimes$ est bien associative.
- ⋆ La loi $\otimes$ admet un élément neutre : $[1;1]$.
  En effet, pour tout $[a;b] \in Q(R)^*$, nous avons :
  $$[a;b] \otimes [1;1] = [a \times 1; b \times 1] = [a;b] \text{ et } [1;1] \otimes [a;b] = [a;b]$$
- ⋆ Tout élément $[a;b] \in Q(R)^*$ admet, pour $\otimes$ un inverse.
  Soit $[a;b] \in Q(R)^*$; l'inverse de $[a;b]$ pour $\otimes$ est donné par $[b;a]$, possible puisque $a \in R^*$ et $b \in R^*$. Donc :
  $$[a;b] \otimes [b;a] = [ab;ab]$$
  Et nous avons $[ab;ab] = [1;1]$ *(évident)* et donc $[a;b] \otimes [b;a] = [1;1]$. De la même manière, nous montrerions que $[b;a] \otimes [a;b] = [1;1]$

⋆ La loi $\otimes$ est commutative.
Soient $[a;b] \in Q(R)^*$ et $[c;d] \in Q(R)^*$. Alors :

$$[a;b] \otimes [c;d] = [ac;bd] \text{ et } [c;d] \otimes [a;b] = [ca;bd]$$

La loi $\oplus$ est bien commutative
Nous venons de montrer que $\left(Q(R)^*, \otimes\right)$ est un groupe abélien

→ La loi $\otimes$ est distributive par rapport à la loi $\oplus$
Soient $[a;b] \in Q(R)^*$, $[c;d] \in Q(R)^*$ et $[e;f] \in Q(R)^*$. Alors :

$$[a;b] \otimes ([c;d] \oplus [e;f]) = [a;b] \otimes [cf+de;df] = [acf+ade;bdf]$$

Et

$$([a;b] \otimes [c;d]) \oplus ([a;b] \otimes [e;f]) = [ac;bd] \oplus [ae;bf] = \left[acbf+bdae;b^2df\right]$$

Nous avons $[acf+ade;bdf] = \left[acbf+bdae;b^2df\right]$ puisque $b^2df\,(acf+ade) = bdf\,(acbf+bdae)$
Et donc :

$$[a;b] \otimes ([c;d] \oplus [e;f]) = ([a;b] \otimes [c;d]) \oplus ([a;b] \otimes [e;f])$$

La loi $\otimes$ est donc distributive par rapport à la loi $\oplus$

Ainsi, $(Q(R), \oplus, \otimes)$ est un corps commutatif.

Ainsi, à partit d'un anneau unitaire, commutatif et intègre, nous avons pu construire un corps

2. **On construit un morphisme de R vers $Q(R)$**
Soit $j : R \longrightarrow Q(R)$ défini par :

$$\begin{cases} j : R & \longrightarrow & Q(R) \\ \quad a & \longmapsto & j(a) = [a;1] \end{cases}$$

⇒ <u>j est un homomorphisme d'anneau</u>

⋆ Soient $a \in R$ et $b \in R$. Alors :

$$j(a) \oplus j(b) = [a;1] \oplus [b;1] = [a \times 1 + 1 \times b; 1 \times 1] = [a+b;1] = j(a+b)$$

⋆ Soient $a \in R$ et $b \in R$. Alors :

$$j(a) \otimes j(b) = [a;1] \otimes [b;1] = [ab;1] = [a+b;1] = j(ab)$$

⋆ Et, de manière évidente, $j(1) = [1;1]$

⇒ <u>j est injectif</u>
En effet, soient $a \in R$ et $b \in R$ tels que $j(a) = j(b)$. Nous avons :

$$j(a) = j(b) \Longleftrightarrow [a;1] = [b;1] \Longleftrightarrow a = b$$

3. **Soit $x = [a;b]$ un élément quelconque de $Q(R)$**
Alors, considérons l'expression $[b;1] \otimes x$

$$[b;1] \otimes x = [b;1] \otimes [a;b] = [ab;b] = [a;1]$$

Ainsi, x est la solution de l'équation $j(b)\,x = j(a)$; comme $b \in R^*$, $(j(b))^{-1}$ existe dans $Q(R)$, et donc $x = j(a)\,(j(b))^{-1}$, et d'après la définition de quotient déjà rencontrée, nous avons $x = \dfrac{j(a)}{j(b)}$

4. **Soit $\mathbb{F}$ un corps et $\alpha : R \longrightarrow \mathbb{F}$ un morphisme d'anneaux**
Si $\alpha' : Q(R) \longrightarrow \mathbb{F}$ telle que $\alpha = \alpha' \circ j$ existe, comme α' est un morphisme de corps (donc injectif) et j injective par construction, α est forcément injectif et α' doit vérifier :

$$\begin{aligned} \alpha'([a;b]) = & \ \alpha'\left(j(a)\,(j(b))^{-1}\right) \\ = & \ \alpha'(j(a))\,\alpha'\left((j(b))^{-1}\right) \\ = & \ \alpha'(j(a))\,(\alpha'(j(b)))^{-1} \\ = & \ \alpha(a)\,(\alpha(b))^{-1} \\ = & \ \frac{\alpha(a)}{\alpha(b)} \end{aligned}$$

Ainsi, α' est-elle bien définie.

Remarque 17 :

Soit $(R,+,\times)$ un anneau unitaire commutatif intègre. Il est donc possible d'identifier chaque élément $a \in R$ avec son image $j(a) \in Q(R)$. Cette identification a pour effet de faire de $j : R \longrightarrow Q(R)$ un morphisme injectif d'insertion.
Ainsi, tout anneau intègre $(R,+,\times)$ est un sous-anneau d'un corps $(Q(R),\oplus,\otimes)$, les opérations $\oplus$ et $\otimes$ n'étant qu'un prolongement de l'addition $+$ et $\times$ dans R.

2.4.2 Corollaire

Si un anneau unitaire commutatif intègre $(R,+,\times)$ est un sous-anneau d'un corps $(\mathbb{F},+,\times)$, dans lequel tout les éléments $x \in \mathbb{F}$ sont de la forme $x = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in R$ et $b \in R^*$, alors $Q(R)$ est isomorphe à $\mathbb{F}$

Remarque 18 :

C'est par cette méthode que nous construisons $\mathbb{Q}$ à partir de l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$

2.5 Problèmes

Exercice 25 :

Soit $j = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ une racine cubique de 1. Nous rappelons que $1 + j + j^2 = 0$ et que $j^2 = \overline{j}$.
Nous notons $\mathbb{Z}[j] = \{z \in \mathbb{C}$ où $z = a + jb$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}\}$

1. Démontrer que $(\mathbb{Z}[j], +\times)$ est un sous anneau de $(\mathbb{C},+,\times)$
2. (a) Pour $z = a + jb \in \mathbb{Z}[j]$, montrer que $(a+bj)\left(a+bj^2\right)$ est un entier positif
   (b) Nous considérons l'application suivante $N : \mathbb{Z}[j] \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} N : \mathbb{Z}[j] & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ z = a + jb & \longmapsto & N(z) = (a+bj)\left(a+bj^2\right) \end{array}\right.$$
   Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{Z}[j]$ et tout $z' \in \mathbb{Z}[j]$, nous avons $N(zz') = N(z)N(z')$
   Le nombre entier naturel $N(z)$ est appelé **norme** de $z \in \mathbb{Z}[j]$
   (c) Trouver tous les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[j]$
3. Soient $x \in \mathbb{Z}[j]$ et $y \in \mathbb{Z}[j]$. On dit que y divise x dans $\mathbb{Z}[j]$ s'il existe $z \in \mathbb{Z}[j]$ tel que $x = yz$.
   Un nombre $x \in \mathbb{Z}[j]$ est dit **premier** si ses seuls diviseurs sont des nombres de la forme ε ou $\mu\varepsilon$, ε étant un élément inversible de $\mathbb{Z}[j]$ et $\mu \in \mathbb{Z}[j]$ tel que $N(x) = N(\mu)$
   On dit que $x \equiv y \mod z$ si et seulement si $x - y$ est divisible par z
   (a) Donner, en utilisant la fonction N, une condition nécessaire de divisibilité
   (b) On note $\lambda = 1 - j$. Démontrer que λ divise 3 et que λ est premier.
   (c) Démontrer que tout élément de $z \in \mathbb{Z}[j]$ est est tel que $z \equiv 0 \mod \lambda$ ou $z \equiv 1 \mod \lambda$ ou $z \equiv -1 \mod \lambda$
   (d) Démontrer que 0, 1 et -1 sont distincts modulo λ
   (e) On suppose que $x \in \mathbb{Z}[j]$ est un élément non divisible par λ. Démontrer que $x^3 \equiv 1 \mod \lambda^4$ ou $x^3 \equiv -1 \mod \lambda^4$

Exercice 26 :

Sur les entiers de Gauss et petite incursion dans le théorème des 2 carrés

Présentation du problème

L'objet du problème est de déterminer quels entiers $n \in \mathbb{N}$ sont somme de 2 carrés, c'est à dire de trouver les $n \in \mathbb{N}$, tels qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ tels que $n = a^2 + b^2$.
Nous appelons $\Sigma = \left\{n \in \mathbb{N} \text{ tels que il existe } a \in \mathbb{N} \text{ et } b \in \mathbb{N} \text{ tels que } n = a^2 + b^2\right\}$
Nous avons, par exemple :

→ $0 \in \Sigma$, $1 \in \Sigma$,$2 \in \Sigma$,$4 \in \Sigma$,$5 \in \Sigma$, $8 \in \Sigma$, $9 \in \Sigma$, $10 \in \Sigma$
→ $3 \notin \Sigma$, $6 \notin \Sigma$, $7 \notin \Sigma$, $11 \notin \Sigma$, $12 \notin \Sigma$

1. Montrer que si $n \equiv 3 \mod 4$, alors $n \notin \Sigma$.

   L'idée que nous allons utiliser pour étudier Σ et qui est sans doute due à Gauss est de noter que si $n \in \Sigma$ donc $n = a^2 + b^2$, on a, dans $\mathbb{C}$ $n = (a + ib)(a - ib)$, relation qui a lieu en fait, dans l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

2. Nous notons donc $\mathbb{Z}[i] = \left\{x = a + bi \text{ où } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z} \text{ et } i^2 = -1\right\}$
   (a) Démontrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau intègre de $(\mathbb{C}, +, \times)$
   (b) Pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, nous définissons $N(z) = z \times \bar{z} = |z|^2$.
   Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$ et tout $z_1 \in \mathbb{Z}[i]$, nous avons $N(z) \in \mathbb{N}$ et
   $$N(zz_1) = N(z) \times N(z_1)$$
   (c) Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?
3. Démontrer que Σ est stable par multiplication.
4. On dit qu'un élément $x \in \mathbb{Z}[i]$ est irréductible si $x = \alpha \times \beta$ alors α ou β est inversible.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}[i]$, si $N(x)$ est un entier premier, alors x est irréductible. La réciproque est-elle vraie ?
   (b) Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier. Démontrer que nous avons l'équivalence suivante
   $$p \in \Sigma \Longleftrightarrow p \text{ n'est pas irréductible dans } \mathbb{Z}[i]$$
   (c) En déduire que si p est premier tel que $p \equiv 3 \mod 4$ alors p est iréductible
5. **Une division euclidienne dans $\mathbb{Z}[i]$**
   (a) Soient $x \in \mathbb{Z}[i]$ et $y \in \mathbb{Z}[i]^* = \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$.
   On pose $\dfrac{x}{y} = u + iv$ où $u \in \mathbb{Q}$ et $v \in \mathbb{Q}$. On prend $u_0 \in \mathbb{Z}$ et $v_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $|u - u_0| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $|v - v_0| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   Montrer qu'on a : $x = y(u_0 + iv_0) + r$ avec $N(r) < N(y)$.
   (b) Application :
   Trouver $q \in \mathbb{Z}[i]$ et $r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $(7 + 2i) = q(2 + 3i) + r$ avec $N(r) < N(2 + 3i)$
6. Démontrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est principal

2.6 Correction de quelques exercices

Dans ces premiers exercices, nous manipulons surtout des calculs ; peu de questions de fond

Exercice 2 :

1. *Soit $(R,+,\times)$ un anneau commutatif de caractéristique p où p est un nombre premier. Démontrer que $(a+b)^p = a^p + b^p$*

   Nous pouvons utiliser la formule du binôme :

   $$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k a^k b^{p-k} = b^p + a^p + \sum_{k=1}^{p-1} \mathrm{C}_p^k a^k b^{p-k}$$

   Comme, pour $1 \leqslant q \leqslant p-1$, nous avons $\mathrm{C}_p^q = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = k_q p$, nous avons alors

   $$\mathrm{C}_p^k a^k b^{p-k} = k_q p a^k b^{p-k} = (pa)\, k_q a^{k-1} b^{p-k} = 0$$

   Et donc $(a+b)^p = a^p + b^p$

2. *En déduire que $(a-b)^p = a^p - b^p$*

   Pas si difficile ; en effet :

   $$a^p = ((a-b)+b)^p = (a-b)^p + b^p \Longleftrightarrow a^p - b^p = (a-b)^p$$

3. *Pour $a_1, a_2, \cdots, a_k$ k éléments de l'anneau R. Montrer que*

   $$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^p = (a_1)^p + (a_2)^p + \cdots + (a_k)^p$$

   Nous allons faire cette démonstration par une récurrence sur k
   - ⋆ C'est évidemment vrai pour $k = 1$
   - ⋆ Supposons que c'est vrai pour k, c'est à dire que :

     $$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^p = (a_1)^p + (a_2)^p + \cdots + (a_k)^p$$

   - ⋆ Démontrons l'affirmation pour $k+1$

     $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1})^p = ((a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1})^p = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^p + +a_{k+1}^p$

     D'après l'hypothèse de récurrence $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^p = (a_1)^p + (a_2)^p + \cdots + (a_k)^p$ et donc :

     $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1})^p = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^p + a_{k+1}^p = (a_1)^p + (a_2)^p + \cdots + (a_k)^p + (a_{k+1})^p$

     Ce que nous voulions

4. *p est toujours un nombre premier et $k \in \mathbb{N}$ quelconque. Démontrer que $k^p \equiv k\,[p]$*

   Nous nous posons dans l'anneau $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ qui est bien entendu de caractéristique p.

   Donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k^p = \left(\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{k \text{ fois}}\right)^p$, et, dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$, d'après les questions précédentes, dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, nous avons

   $$\left(\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{k \text{ fois}}\right)^p = \underbrace{(1)^p + (1)^p + \cdots + (1)^p}_{k \text{ fois}} = k$$

   Ce qui veut dire que $k^p \equiv k\,[p]$

Exercice 3 :

Soit $(R,+,\times)$ un anneau unitaire. Soient $a \in R$ et $b \in R$ tels que $ab+ba=1$ et $a^2b+ba^2=a$

1. *Montrer que $a^2b=ba^2$ et que $2aba=a$*

   $\Rightarrow$ De $ab+ba=1$, nous tirons, par la multiplication à gauche par a $a\,(ab+ba)=a \Longleftrightarrow a^2b+aba=a$, d'où nous déduisons, de $a^2b+ba^2=a$ que $a^2b+aba=a^2+ba^2 \Longleftrightarrow aba=ba^2$
   $\Rightarrow$ De même, de $ab+ba=1$, nous tirons, par la multiplication à droite par a $(ab+ba)\,a=a \Longleftrightarrow aba+ba^2=a$, d'où nous déduisons, de $a^2b+ba^2=a$ que $aba+ba^2=a^2+ba^2 \Longleftrightarrow aba=a^2b$
   $\Rightarrow$ De $aba=ba^2$ et $aba=a^2b$, nous déduisons que $ba^2=a^2b$, et en additionnant, $2aba=ba^2+ab^2=a$
   Et donc $a^2b=ba^2$ et $2aba=a$

2. *Etablir que a est inversible que son inverse est $2b$, c'est à dire $a^{-1}=2b$*

   $\Rightarrow$ Nous avons $(ab)^2=abab=(aba)\,b$; de $aba=ba^2$, nous tirons $(ab)^2=ba^2b$
   $\Rightarrow$ De même, $(ba)^2=baba=b\,(aba)$; de $aba=a^2b$, nous tirons $(ba)^2=ba^2b$
   $\Rightarrow$ De $ab+ba=1$, nous tirons $ab=1-ba$, c'est à dire $(ab)^2=(1-ba)^2=1+(ba)^2-2ba$. Nous en déduisons donc que

   $$ba^2b=1+ba^2b-2ba \Longleftrightarrow 1-2ba=0 \Longleftrightarrow 2ba=1 \Longleftrightarrow a^{-1}=2b$$

   Ce que nous voulions

Exercice 4 :

Soit $(R,+,\times)$ un anneau unitaire.
On suppose que, pour tout $x \in R$ et tout $y \in R$, nous avons $(xy)^2=x^2y^2$

1. *Démontrer que, pour tout $x \in R$ et tout $y \in R$, nous avons $xyx=x^2y=yx^2$*

   Soient $x \in R$ et $y \in R$. Alors :
   $\Rightarrow$
   $$\begin{aligned}[(1+y)\,x]^2 &= [x+yx]^2\\ &= (x+yx)\,(x+yx)\\ &= x^2+xyx+yx^2+(yx)^2\end{aligned}$$

   $\Rightarrow$ Maintenant :
   $$\begin{aligned}(1+y)^2\,x^2 &= (1+y)\,(1+y)\,x^2\\ &= \left(1+2y+y^2\right)x^2\\ &= x^2+2yx^2+y^2x^2\end{aligned}$$

   $\Rightarrow$ De l'hypothèse, nous avons $(xy)^2=x^2y^2$ vraie pour tout $x \in R$ et tout $y \in R$, nous avons ;

   $$[(1+y)\,x]^2=(1+y)^2\,x^2 \Longleftrightarrow x^2+xyx+yx^2+(yx)^2=x^2+2yx^2+y^2x^2 \Longleftrightarrow xyx=yx^2$$

   Ainsi, nous avons $xyx=yx^2$
   Pour démontrer que $xyx=x^2y$, nous faisons, de la même manière, le calcul de $[x\,(1+y)]^2$ et $x^2\,(1+y)^2$

2. *En déduire que l'anneau R est commutatif*

   De l'identité $xyx=x^2y=yx^2$ vraie pour tout $x \in R$ et tout $y \in R$, nous avons :

   $$(1+x)^2\,y=y\,(1+x)^2$$

   $\Rightarrow$ $(1+x)^2\,y=\left(1+x^2+2x\right)y=y+x^2y+2xy$
   $\Rightarrow$ $y\,(1+x)^2=y\left(1+2x+x^2\right)=y+2yx+yx^2$
   $\Rightarrow$ Donc, $y+2yx+x^2y=y+x^2y+2xy \Longleftrightarrow 2yx+yx^2=2xy+x^2y$. Comme, nous avons démontré que $x^2y=yx^2$, nous obtenons $2yx=2xy \Longleftrightarrow yx=xy$
   L'anneau R est donc commutatif.

Exercice 5 :

Soit $(R, +, \times)$ un anneau unitaire.
Soit $a \in R$ un élément de R tel qu'il existe $b \in R$ tel que $ab = 1$

1. *Démontrer que, si pour tout $x \in R$ et tout $y \in R$ nous avons $ax = ay$, alors $x = y$*

   Soient $x \in R$ et $y \in R$ tels que $ax = ay$, alors $ax - ay + 1 = 1$ et donc :

   $$ax - ay + 1 = 1 \iff ax - ay + ab = 1 \iff a(x - y + b) = 1$$

   De l'unicité de l'existence de $b \in R$ tel que $ab = 1$, nous déduisons de $a(x - y + b) = 1$ que $x - y + b = b$
   De la régularité dans un groupe additif, nous déduisons que $x - y = 0$ et donc que $x = y$
   a est donc un élément régulier pour la multiplication.
2. *Démontrer que a est un élément inversible de R et que $b = a^{-1}$*

   Nous avons $a(ba) = (ab) = 1 \times a = a = a \times 1$, c'est à dire $a(ba) = a \times 1$.
   De la régularité de a, nous déduisons de $a(ba) = a \times 1$ que $ba = 1$.
   Nous avons donc $ab = ba = 1$ et donc $b = a^{-1}$.
   a est donc inversible et l'inverse de a est b, et donc $b = a^{-1}$

Exercice 6 :

Soit $(R, +, \times)$ un anneau unitaire. Nous appelons $\mathcal{U} \subset R$ l'ensemble des éléments inversibles de R.
Il faut démontrer que $(\mathcal{U}, \times)$ est un groupe.

1. Tout d'abord, il est clair que $\mathcal{U} \neq \emptyset$ puisque $1 \in \mathcal{U}$
2. D'autre part, la loi $\times$ est associative, par construction des anneaux.
3. Ensuite, la loi $\times$ est interne ; en effet, si $a \in \mathcal{U}$ et $b \in \mathcal{U}$, alors $ab \in \mathcal{U}$

   En effet,
   Pour démontrer que $ab \in \mathcal{U}$, il faut démontrer que ab est inversible. Or, $(ab)^{-1} = b^{-1} \times a^{-1}$ puisque :
   $\rightarrow$ $(ab)\left(b^{-1} \times a^{-1}\right) = a\left(bb^{-1}\right)a = a \times 1 \times a^{-1} = a \times a^{-1} = 1$
   $\rightarrow$ Et $\left(b^{-1} \times a^{-1}\right)(ab) = b^{-1} \times \left(a^{-1} \times a\right)b = b^{-1} \times 1 \times b = b^{-1} \times b = 1$
4. De manière évidente, si $b \in \mathcal{U}$, alors $b^{-1} \in \mathcal{U}$, puisque $b = \left(b^{-1}\right)^{-1}$; b^{-1} est donc inversible et donc $b^{-1} \in \mathcal{U}$

$(\mathcal{U}, \times)$ est donc un groupe.

Exercice 7 :

Montrer qu'un anneau $(R, +, \times)$ n'a pas de diviseurs de zéro si, et seulement si, tous ses éléments non nuls sont réguliers

1. On suppose que R n'admet pas de véritables diviseurs de zéro et soient 3 éléments $a \in R$ avec $a \neq 0$, $x \in R$ et $y \in R$ tels que $ax = ay$. Alors :

   $$ax = ay \iff ax - ay = 0 \iff a(x - y) = 0$$

   Comme $a \neq 0$ et que R est un anneau intègre, alors $x - y = 0$, c'est à dire $x = y$
2. Réciproquement, supposons que tous les éléments non nuls de R sont réguliers.
   Soient $x \in R$ et $y \in R$ tels que $xy = 0$. Alors

   $$xy = 0 \iff xy = x \times 0$$

   De l'égalité et de la régularité, puisque $xy = x \times 0$, alors $x = 0$
   De la même manière $xy = 0 \iff xy = 0 \times y$, et de cette régularité on déduit $y = 0$
   Nous avons donc $xy = 0 \implies (x = 0)$ ou $(y = 0)$
   R est donc intègre

Exercice 8 :

Soient a et b deux éléments d'un anneau $(R, +, \times)$ tels que ab soit inversible et b non diviseur de 0.
Montrer que a et b sont inversibles.

Soient a et b deux éléments d'un anneau $(R, +, \times)$ tels que ab soit inversible et b non diviseur de 0.

1. Soit $x = b\,(ab)^{-1}$. Montrons que x est l'inverse de a
   Nous avons donc :
   $$ax = a \times b\,(ab)^{-1} = (ab)\,(ab)^{-1} = 1$$
   D'autre part :
   $$xab = b\,(ab)^{-1}\,ab = b \Longleftrightarrow xab = b \Longleftrightarrow xab - b = 0 \Longleftrightarrow b\,(xa - 1) = 0$$
   b n'étant pas un diviseur de zéro, $xa - 1 = 0 \Longleftrightarrow xa = 1$ et x est bien l'inverse de a
2. Nous avons $b = a^{-1}\,(ab)$. b apparaît comme le produit d'éléments inversibles et est donc inversible.
   Nous avons même $b^{-1} = (ab)^{-1} \times a$

Exercice 10 :

Soit $(R, +, \times)$ un anneau et nous considérons $Z(R)$, le centre de R, c'est à dire :

$$Z(R) = \{u \in R \text{ tels que, pour tout } x \in R \text{ nous avons } ux = xu\}$$

Il faut démontrer que $(Z(R), +, \times)$ est un sous-anneau de $(R, +, \times)$

Nous allons utiliser le théorème 2.1.7 pour démontrer que $(Z(R), +, \times)$ est un sous-anneau de $(R, +, \times)$
Soient $u \in Z(R)$ et $v \in Z(R)$. Alors, pour tout $x \in R$, $ux = xu$ et $vx = xv$

1. Montrons que $u - v \in Z(R)$. Soit donc $x \in R$; alors :
   $$(u - v)\,x = ux - vx = xu - xv = x\,(u - v)$$
   Ainsi $u - v$ commute avec tout $x \in R$ et $u - v \in Z(R)$
2. Montrons que $uv \in Z(R)$. Soit donc $x \in R$; alors :
   $$(uv)\,x = u\,(vx) = u\,(xv) = (ux)\,v = (xu)\,v = x\,(uv)$$
   Ainsi le produit uv commute avec tout $x \in R$ et $uv \in Z(R)$

Donc, $(Z(R), +, \times)$ est un sous-anneau de $(R, +, \times)$

Exercice 13 :

On pose $r = \sqrt[3]{2}$ et $A = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ où } x = m + nr + pr^2 \text{ avec } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}\right\}$.
Il faut démontrer que $(A, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$

Quelques remarques avant de commencer :

- $r = \sqrt[3]{2}$ est racine du polynôme $X^3 - 2$ qui se factorise en $\left(X^3 - 2\right) = (X - r)\left(X^2 + rX + r^2\right)$ qui sont des polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$
- Nous aurons aussi à utiliser le fait que $r^3 = 2$
- Nous avons $A \neq \emptyset$ puisque $0 \in A$ et $1 \in A$

Démontrons maintenant que $(A, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$

Le fait que $A \subset \mathbb{R}$, $(A, +, \times)$ récupère de toutes les propriétés d'anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$, en particulier la distributivité de $\times$ par rapport à $+$

$\Rightarrow$ Soit $x \in A$ et $y \in A$; nous allons montrer que $x - y \in A$.
Nous avons $x = m + nr + pr^2$ et $y = m' + n'r + p'r^2$ avec $m \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$,$p \in \mathbb{Z}$,$m' \in \mathbb{Z}$, $n' \in \mathbb{Z}$ et $p' \in \mathbb{Z}$.
Alors :
$$x - y = \left(m + nr + pr^2\right) - \left(m' + n'r + p'r^2\right) = (m - m') + (n - n')\,r + (p - p')\,r^2$$
Bien entendu, nous avons $(m - m') \in \mathbb{Z}$, $(n - n') \in \mathbb{Z}$ et $(p - p') \in \mathbb{Z}$ et donc $x - y \in A$

$\Rightarrow$ Maintenant, montrons que pour $x \in A$ et $y \in A$, $x \times y \in A$
En reprenant l'écriture de x et de y cidessus, nous avons :

$$\begin{aligned} x \times y = &\quad \left(m + nr + pr^2\right) \times \left(m' + n'r + p'r^2\right) \\ = &\quad mm' + mn'r + mp'r^2 + nm'r + nn'r^2 + 2np' + m'pr^2 + 2n'p + 2pp'r \\ = &\quad (mm' + 2np' + 2n'p) + (mn' + nm' + 2pp')\, r + (mp' + nn' + m'p)\, r^2 \end{aligned}$$

Comme $(mm' + 2np' + 2n'p) \in \mathbb{Z}$, que $(mn' + nm' + 2pp') \in \mathbb{Z}$ et que $(mp' + nn' + m'p) \in \mathbb{Z}$, nous avons $x \times y \in A$

$(A, +, \times)$ est un donc sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$

Exercice 18 :

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ un morphisme d'anneaux tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Montrer que f est l'identité ou la conjugaison complexe.

Posons $f(i) = \lambda$. Alors :

- $\rightarrow$ Pour $z = a + ib$, nous avons $f(z) = f(a) + f(i) = a + \lambda b$
- $\rightarrow$ D'autre part, $f\left(i^2\right) = \left(f(i)\right)^2 = \lambda^2$
- $\rightarrow$ Mais, $f\left(i^2\right) = f(-1) = -f(1) = -1$
- $\rightarrow$ D'où $\lambda^2 = -1$, c'est à dire $\lambda = \pm i$

Si $f(i) = i$, alors $f(z) = f(a) + f(i) = a + ib = z$ et donc $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$

Et, très simplement, si $f(i) = -i$, alors $f(z) = f(a) + f(i) = a - ib = \overline{z}$ et donc f est la conjugaison dans $\mathbb{C}$

Exercice 20 :

On note $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{m}{10^n} \text{ avec } m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble des nombres décimaux

1. *Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +\times)$*
2. *Montrer que les idéaux de $\mathbb{D}$ sont principaux* (c'est-à-dire de la forme $a \times \mathbb{D}$ avec $a \in \mathbb{D}$)

Que $\mathbb{D}$ soit un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +\times)$ est évident ; il suffit d'en vérifier les axiômes.
Soit maintenant $I \subset \mathbb{D}$ un idéal de $\mathbb{D}$.
Alors, par définition, nous avons $(I, +)$ qui est un sous-groupe additif de $(\mathbb{D}, +)$; de la même manière, comme $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$, $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe additif de $(\mathbb{D}, +)$
L'intersection de 2 sous groupes est un sous-groupe, $I \cap \mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $(\mathbb{D}, +)$; mais comme $I \cap \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, $(I \cap \mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe additif de $(\mathbb{Z}, +)$. Les seuls sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ étant du type $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{N}$, il existe donc $a \in \mathbb{N}$ tel que $I \cap \mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$

- $\rightarrow$ Comme $a\mathbb{Z} \subset I$, alors $a = a \times 1 \in I$, et donc, pour tout $x \in \mathbb{D}$, du fait que I soit un idéal, $ax \in I$ et donc $a\mathbb{D} \subset I$
- $\rightarrow$ Réciproquement, soit $x \in I$ et nous allons démontrer que $x \in a\mathbb{D}$
  Si $x \in I$, alors $x \in \mathbb{D}$ et il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \dfrac{m}{10^n}$
  De la notion d'idéal, nous pouvons écrire que $10^n \times x \in I$, c'est à dire $10^n \times \dfrac{m}{10^n} = m \in I$, c'est à dire que $m \in I \cap \mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$. L'entier a est donc un diviseur de m. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = ka$
  Dès lors $x = \dfrac{m}{10^n} = \dfrac{k \times a}{10^n} = a \times dfrack10^n$, ce qui signifie que $x \in a\mathbb{D}$ et donc $I \subset a\mathbb{D}$
- $\rightarrow$ De $a\mathbb{D} \subset I$ et $I \subset a\mathbb{D}$, nous en déduisons que $I = a\mathbb{D}$

Ainsi, les idéaux de $\mathbb{D}$ sont principaux et $\mathbb{D}$ est donc un anneau principal.

Exercice 21 :

Le nilradical d'un anneau commutatif $(R, +, \times)$, est l'ensemble N formé des éléments nilpotents de R, c'est à dire des $x \in R$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $x^n = 0_R$. Montrer que N est un idéal de R

- $\rightarrow$ Il faut d'abord démontrer que $(N, +)$ est un sous-groupe de $(R, +)$.
  - $\star$ Il faut d'abord montrer que $N \neq \emptyset$
    Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0_R^n = 0$ et donc $0_R \in N$

⋆ Soient, maintenant, $x \in N$ et $y \in N$; il faut montrer que $x - y \in N$.
Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x^m = 0_R$ et $y^n = 0_R$. Calculons $(x-y)^{m+n}$ et utilisons pour cela, la formule du binôme de Newton. Nous pouvons le faire puisque $(R, +, \times)$ est commutatif.

$$\begin{aligned}(x-y)^{m+n} &= \sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^k y^{m+n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m+n}{k}(-1)^{m+n-k}\,x^k y^{m+n-k} + \sum_{k=m+1}^{m+n}\binom{m+n}{k}(-1)^{m+n-k}\,x^k y^{m+n-k}\end{aligned}$$

▷ Pour $0 \leqslant k \leqslant m$, nous avons $-m \leqslant -k \leqslant 0$
Ainsi, si $n \leqslant m+n-k \leqslant m+1$, et donc, si $0 \leqslant k \leqslant m$, nous avons $y^{m+n-k} = y^n \times y^{m-k} = 0_R$, et donc

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m+n}{k}(-1)^{m+n-k}\,x^k y^{m+n-k} = 0_R$$

▷ Pour $m+1 \leqslant k \leqslant m+n$, nous avons $x^k = x^m \times x^{k-m} = 0_R$ et donc

$$\sum_{k=m+1}^{m+n}\binom{m+n}{k}(-1)^{m+n-k}\,x^k y^{m+n-k} = 0_R$$

En conclusion,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^k y^{m+n-k} &= \sum_{k=0}^{m}\binom{m+n}{k}(-1)^{m+n-k}\,x^k y^{m+n-k} + \cdots\\ &\qquad \cdots \sum_{k=m+1}^{m+n}\binom{m+n}{k}(-1)^{m+n-k}\,x^k y^{m+n-k}\\ &= 0_R\end{aligned}$$

C'est à dire $(x-y)^{m+n} = 0_R$, c'est à dire que $x - y \in N$

→ Soit $a \in A$ et $x \in N$; il faut démontrer que $ax \in N$.
Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0_R$; par la commutativité dans R, on peut écrire $(ax)^n = a^n \times x^n = 0_R$, et donc $ax \in N$

Et donc N est bien un idéal.

Exercice 22 :

Soient $(R, +, \times)$ un anneau commutatif et $a \in R$ un élément idempotent de R, c'est à dire tel que $a^2 = a$.

1. *Montrer que $J = \{x \in R \text{ tel que } ax = 0\}$ est un idéal de R.*

Il faut montrer que J est un idéal.

⇒ Tout d'abord, il faut montrer que $(J, +)$ est un sous-groupe.
⋆ Bien entendu, $J \neq \emptyset$ puisque $0_R \in J$
⋆ Soit $x \in J$ et $y \in J$; il faut, maintenant montrer que $x - y \in J$. Donc :

$$a\,(x-y) = ax - ay = 0_R - 0_R = 0_R$$

Donc, $x - y \in J$

Et, $(J, +)$ est un sous-groupe de $(R, +)$

⇒ Soit $y \in R$ et $z \in J$; il faut, maintenant, montrer que $yz \in J$, c'est à dire que $a\,(yz) = 0$
Comme $z \in J$, $az = 0$, et, par commutativité de $\times$ dans R :

$$a\,(yz) = (ay)\,z = (ya)\,z = y\,(az) = y \times 0 = 0$$

Donc $yz \in J$

Et pour conclure, J est un idéal de R

2. *On note $I = aR$ l'idéal principal de R engendré par a. Déterminer $I + J$ et $I \cap J$*

⇒ Premièrement, il faut remarquer que $I + J \subset R$.
Réciproquement, soit $r \in R$; alors $r = ar + r - ar$
Nous avons, clairement $ar \in I$.
Montrons que $r - ar \in J$
$a(r - ar) = ar - a^2r \overset{\text{idempotence}}{=} ar - ar = 0_R$, et donc $r - ar \in J$. Nous avons donc :

$$r = \underbrace{ar}_{\in I} + \underbrace{r - ar}_{\in J}$$

Et donc, $\boxed{r \in I + J}$
Et nous concluons donc que $R = I + J$

⇒ Soit $y \in I \cap J$
Alors, $y \in I$, et il existe $r \in R$ tel que $y = ar$. Comme $y \in J$, alors $ay = 0_R$, et donc :

$$0_R = ay = a(ar) = a^2r = ar = y$$

Donc, $y = 0_R$ et nous concluons, en disant que $\boxed{I \cap J = \{0_R\}}$

3. *Établir que pour tout idéal K de R : $(K \cap I) + (K \cap J) = K$.*

⇒ Il est évident que $(K \cap I) + (K \cap J) \subset K$

⇒ Réciproquement, soit $k \in K$
Alors, nous avons $k = ak + k - ak$, et par définition des idéaux, nous avons $ak \in I$ et $ak \in K$, c'est à dire $ak \in I \cap K$
D'après une démonstration précédente, $k - ak \in J$ et $k - ak \in K$ puisque K est un sous-groupe ; donc $k - ak \in J \cap K$.
Nous avons bien $k \in (K \cap I) + (K \cap J)$ et donc $K \subset (K \cap I) + (K \cap J)$, c'est à dire, finalement, $(K \cap I) + (K \cap J) = K$

Exercice 24 :

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on considère l'ensemble $\mathbb{H}$ défini par :

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathbb{C} \text{ et } b \in \mathbb{C} \right\}$$

Il faut montrer que $\mathbb{H}$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un corps non commutatif.

⇒ Nous allons commencer par montrer que $(\mathbb{H}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +)$

⋆ Tout d'abord, $\mathbb{H} \neq \emptyset$ puisque $\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$

⋆ Ensuite, soient $M_1 \in \mathbb{H}$ et $M_2 \in \mathbb{H}$ avec $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -\overline{b_1} \\ b_1 & \overline{a_1} \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -\overline{b_2} \\ b_2 & \overline{a_2} \end{pmatrix}$.

Alors, un calcul très simple montre que $M_1 - M_2 = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & -\overline{(b_1 - b_2)} \\ b_1 - b_2 & \overline{(a_1 - a_2)} \end{pmatrix}$ et donc $M_1 - M_2 \in \mathbb{H}$

$(\mathbb{H}, +)$ est un donc sous-groupe additif de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +)$

⇒ Notons $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{\mathcal{O}_2\}$. Il est tout à fait loisible de penser que $\mathbb{H}^*$ est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ telles que $|a|^2 + |b|^2 \neq 0$
Nous allons donc montrer que $(\mathbb{H}^*, \times)$ est un groupe multiplicatif.

⋆ Tout d'abord $\mathbb{H}^* \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^*$

⋆ La multiplication étant associative dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, elle l'est aussi dans $(\mathbb{H}^*, \times)$

- ⋆ La multiplication est une loi de composition interne. En effet, si $M_1 \in \mathbb{H}$ et $M_2 \in \mathbb{H}$ avec $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -\overline{b_1} \\ b_1 & \overline{a_1} \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -\overline{b_2} \\ b_2 & \overline{a_2} \end{pmatrix}$, nous avons :

$$\begin{pmatrix} a_1 & -\overline{b_1} \\ b_1 & \overline{a_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 & -\overline{b_2} \\ b_2 & \overline{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - \overline{b_1}b_2 & -a_1\overline{b_2} - \overline{b_1}\,\overline{a_2} \\ b_1a_2 + \overline{a_1}b_2 & -b_1\overline{b_2} + \overline{a_1}\,\overline{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - \overline{b_1}b_2 & -\overline{b_1a_2 + \overline{a_1}b_2} \\ b_1a_2 + \overline{a_1}b_2 & \overline{a_1a_2 - \overline{b_1}b_2} \end{pmatrix}$$

  Ce qui montre que le produite $M_1 \times M_2 \in \mathbb{H}^*$
- ⋆ La multiplication admet un élément neutre Id_2
- ⋆ Chaque élément $M \in \mathbb{H}^*$ admet un inverse.

  En effet, si $M = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec $|a|^2 + |b|^2 \neq 0$, alors $M^{-1} = \dfrac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$ et M^{-1} est bien un élément de $\mathbb{H}^*$

$(\mathbb{H}^*, \times)$ est donc un groupe multiplicatif.

⇒ La multiplication étant distributive par rapport à l'addition dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, elle l'est aussi dans $(\mathbb{H}^*, \times)$

Nous venons de démontrer que $\mathbb{H}$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un corps. Montrons que ce corps n'est pas commutatif.

Soient $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

- ▷ Alors $M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} 1-2i & i-2 \\ 2+i & 2i+1 \end{pmatrix}$
- ▷ Et $M_2 \times M_1 = \begin{pmatrix} 1+2i & -2+i \\ i+2 & -2i+1 \end{pmatrix}$

Clairement, nous avons $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$ et $(\mathbb{H}^*, \times)$ est donc un groupe multiplicatif non commutatif, c'est à dire que $\mathbb{H}$ n'est pas un corps commutatif

Exercice 25 :

Soit $j = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ une racine cubique de 1. Nous rappelons que $1 + j + j^2 = 0$ et que $j^2 = \overline{j}$. Nous notons $\mathbb{Z}[j] = \{z \in \mathbb{C}$ où $z = a + jb$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}\}$

1. *Démontrer que $(\mathbb{Z}[j], +\times)$ est un sous anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$*

   ⇒ Il est évident que $\mathbb{Z}[j]$ est non vide puisque $0 \in \mathbb{Z}[j]$ et $1 \in \mathbb{Z}[j]$ et stable pour l'addition.

   ⇒ Soit $u = a + bj \in \mathbb{Z}[j]$ et $v = c + dj \in \mathbb{Z}[j]$, il est clair que $u - v = (a-c) + (b-d)\,j \in \mathbb{Z}[j]$. Donc $(\mathbb{Z}[j], +)$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}, +)$

   ⇒ Démontrons que $\mathbb{Z}[j]$ est stable pour la multiplication.

$$\begin{aligned} uv = & \ (a+bj)(c+dj) \\ = & \ ac + adj + bcj + bdj^2 \\ = & \ ac + adj + bcj + bd(-1-j) \\ = & \ (ac - bd) + (ad + bc - bd)\,j \end{aligned}$$

   La multiplication est bien une loi de composition interne

   Donc, $(\mathbb{Z}[j], +\times)$ est un sous anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$

2. (a) *Pour $z = a + jb \in \mathbb{Z}[j]$, montrer que $(a + bj)\left(a + bj^2\right)$ est un entier positif*

   Si $z = a + jb$, alors $\overline{z} = a + b\overline{j} = a + bj^2$, de telle sorte que $(a+bj)\left(a+bj^2\right) = z\overline{z} = |z|^2$

   Maintenant, par le calcul :

$$(a+bj)\left(a+bj^2\right) = a^2 + abj^2 + abj + b^2j^3 == a^2 + b^2 + ab\left(j + j^2\right) = a^2 + b^2 - ab$$

   Nous avons, bien entendu, $a^2 + b^2 - ab \in \mathbb{Z}$, et comme $a^2 + b^2 - ab = |z|^2 \geqslant 0$, nous avons $a^2 + b^2 - ab \in \mathbb{N}$

   Il aurait aussi été possible d'utiliser d'un argument plus spécieux, d'une égalité de derrière les fagots : $a^2 + b^2 - ab = \dfrac{1}{4}(a+b)^2 + \dfrac{3}{4}(a-b)^2$. Et donc, nous en déduisons que $a^2 + b^2 - ab \geqslant 0$. Bof...

(b) *Nous considérons l'application suivante $N : \mathbb{Z}[j] \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par :*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} N : \mathbb{Z}[j] & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ z = a + jb & \longmapsto & N(z) = (a + bj)\left(a + bj^2\right) \end{array} \right.$$

Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{Z}[j]$ et tout $z' \in \mathbb{Z}[j]$, nous avons $N(zz') = N(z)N(z')$

Nous utilisons la remarque mettant en évidence que $a + bj^2 = a + b\overline{j} = \overline{a + bj}$, de telle sorte que $N(z) = z\overline{z} = |z|^2$, où $|z|$ désigne le module complexe de $z \in \mathbb{C}$.
Bien entendu, en utilisant les propriétés de ces modules, nous avons $N(zz') = N(z)N(z')$

(c) *Trouver tous les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[j]$*

Si $z \in \mathbb{Z}[j]$ est inversible, ceci veut dire qu'il existe $u \in \mathbb{Z}[j]$ tel que $zu = 1$; en fait, nous avons $u = z^{-1}$, l'inverse de $z \in \mathbb{C}$.
Dans notre cas, en nous intéressant aux normes, nous avons $N\left(zz^{-1}\right) = N(z)N\left(z^{-1}\right) = 1$, ce qui signifie que $N(z)$ et $N\left(z^{-1}\right)$ sont des diviseurs de 1 dans $\mathbb{N}$ et nous n'avons donc pas d'autres choix pour $N(z)$ et $N\left(z^{-1}\right)$ que d'avoir $N(z) = 1$ et $N\left(z^{-1}\right) = 1$.
Si $z = a + bj$, $N(z) = (a + bj)\left(a + bj^2\right) = a^2 + b^2 - ab = 1$.

C'est ici que l'égalité de derrière les fagots : $a^2 + b^2 - ab = \dfrac{1}{4}(a + b)^2 + \dfrac{3}{4}(a - b)^2$ joue son rôle. Nous devons donc avoir :

$$\frac{1}{4}(a + b)^2 + \frac{3}{4}(a - b)^2 = 1$$

C'est une équation en nombres entiers qui peut nous jouer des tours ! ! Ne devons donc avoir

$$\left\{ \begin{array}{rl} (a + b)^2 = & 4 \\ (a - b)^2 = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rl} (a + b)^2 = & 1 \\ (a - b)^2 = & 1 \end{array} \right.$$

→ Dans le premier cas

$$\left\{ \begin{array}{rl} (a + b)^2 = & 4 \\ (a - b)^2 = & 0 \end{array} \right.$$

Nous tirons $a = b$ et $(2a)^2 = 4 \Longleftrightarrow a^2 = 1 \Longleftrightarrow a = \pm 1$
D'où une première rafale d'éléments inversibles : $\varepsilon_1 = 1 + j = -j^2 = -\overline{j}$ ou $\varepsilon_2 = -1 - j = j^2 = \overline{j}$

→ Dans le second cas

$$\left\{ \begin{array}{rl} (a + b)^2 = & 1 \\ (a - b)^2 = & 1 \end{array} \right.$$

Nous tirons de ce système, beaucoup d'autres systèmes

⋆ $\left\{ \begin{array}{rl} a + b = & 1 \\ a - b = & 1 \end{array} \right.$
D'où nous tirons $a = 1$ et $b = 0$ et donc $\varepsilon_3 = 1$

⋆ $\left\{ \begin{array}{rl} a + b = & -1 \\ a - b = & 1 \end{array} \right.$
D'où nous tirons $a = 0$ et $b = -1$ et donc $\varepsilon_4 = -j$

⋆ $\left\{ \begin{array}{rl} a + b = & 1 \\ a - b = & -1 \end{array} \right.$
D'où nous tirons $a = 0$ et $b = 1$ et donc $\varepsilon_5 = j$

⋆ $\left\{ \begin{array}{rl} a + b = & -1 \\ a - b = & -1 \end{array} \right.$
D'où nous tirons $a = -1$ et $b = 0$ et donc $\varepsilon_6 = -1$

Les éléments inversibles sont donc $\left\{1, -1, j, -j, j^2, -j^2\right\}$

3. *Soient $x \in \mathbb{Z}[j]$ et $y \in \mathbb{Z}[j]$. On dit que y divise x dans $\mathbb{Z}[j]$ s'il existe $z \in \mathbb{Z}[j]$ tel que $x = yz$.*
Un nombre $x \in \mathbb{Z}[j]$ est dit ***premier*** *si ses seuls diviseurs sont des nombres de la forme ε ou $\mu\varepsilon$, ε étant un élément inversible de $\mathbb{Z}[j]$ et $\mu \in \mathbb{Z}[j]$ tel que $N(x) = N(\mu)$*
On dit que $x \equiv y \mod z$ si et seulement si $x - y$ est divisible par z

(a) *Donner, en utilisant la fonction N, une condition nécessaire de divisibilité*

Si y divise x dans $\mathbb{Z}[j]$ s'il existe $z \in \mathbb{Z}[j]$ tel que $x = yz$, ce qui veut dire en termes de norme N, $N(x) = N(yz) = N(y) \times N(z)$ et donc $N(y)$ divise $N(x)$.
Si $N(y)$ ne divise pas $N(x)$ alors y ne divise pas x

(b) *On note $\lambda = 1 - j$. Démontrer que λ divise 3 et que λ est premier.*

▷ Il faut d'abord remarquer que $N(3) = 9$, et que, peut-être, 3 est divisible dans $\mathbb{Z}[j]$. Or :

$$(1-j)\left(1-\overline{j}\right) = (1-j)\left(1-j^2\right) = (1-j)(2+j) = |1-j|^2 = 3$$

3 est donc divisible dans $\mathbb{Z}[j]$, puisque nous avons $3 = \lambda(2+j)$

▷ Nous venons de montrer que $N(\lambda) = 3$; 3 étant un nombre premier dans $\mathbb{N}$, et si μ divise λ dans $\mathbb{Z}[j]$, alors $N(\mu)$ divise $N(\lambda)$ et donc $N(\mu) = 3$ ou $N(\mu) = 1$
Si $N(\mu) = 3$, alors si $\lambda = \mu \times z$, nous avons $N(z) = 1$ et $z \in \mathbb{Z}[j]$ est un élément inversible.
Et donc λ est bien premier dans $\mathbb{Z}[j]$

- ⋆ Nous avons, par exemple $\lambda = 1 \times \lambda$ et $\lambda = -1 \times -\lambda$
- ⋆ Puis $\lambda = j \times (-2-j)$ et $\lambda = -j \times (2+j)$
- ⋆ Et pour terminer $\lambda = j^2 \times (1+2j)$ et $\lambda = -j^2 \times (-1-2j)$

(c) *Démontrer que tout élément de $z \in \mathbb{Z}[j]$ est tel que $z \equiv 0 \mod \lambda$ ou $z \equiv 1 \mod \lambda$ ou $z \equiv -1 \mod \lambda$*

Soit $z \in \mathbb{Z}[j]$ où $z = a + bj$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.
Nous pouvons écrire $z = (a+b) - b(1-j) = (a+b) - b\lambda$
Comme $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, nous avons $a+b \equiv 0\,[3] \iff a+b = 3k$ ou $a+b \equiv 1\,[3] \iff a+b = 1+3k$ ou $a+b \equiv -1\,[3] \iff a+b = -1+3k$. De plus, $3 = \lambda(1+2j)$.
Ainsi :

⋆ Si $a+b \equiv 0\,[3] \iff a+b = 3k$, alors :

$$z = (a+b) - b(1-j) = (a+b) - b\lambda = 3k - b\lambda = \lambda k(1+2j) - b\lambda = \lambda(k(1+2j) - b)$$

Ce qui veut dire que z est divisible par λ et donc, nous avons $z \equiv 0 \mod \lambda$

⋆ Ensuite, si $a+b \equiv 1\,[3] \iff a+b = 3k+1$, alors :

$$z = (a+b) - b(1-j) = (a+b) - b\lambda = 3k+1-b\lambda = 1+\lambda k(1+2j) - b\lambda = 1+\lambda(k(1+2j) - b)$$

Ce qui veut dire que $z-1$ est divisible par λ et donc, nous avons $z \equiv 1 \mod \lambda$

⋆ Pour terminer, si $a+b \equiv -1\,[3] \iff a+b = 3k-1$, alors :

$$z = (a+b) - b(1-j) = (a+b) - b\lambda = 3k-1-b\lambda = -1+\lambda k(1+2j) - b\lambda = -1+\lambda(k(1+2j) - b)$$

Ce qui veut dire que $z-(-1)$ est divisible par λ et donc, nous avons $z \equiv -1 \mod \lambda$

En conclusion, tout élément de $z \in \mathbb{Z}[j]$ est tel que $z \equiv 0 \mod \lambda$ ou $z \equiv 1 \mod \lambda$ ou $z \equiv -1 \mod \lambda$

(d) *Démontrer que 0, 1 et -1 sont distincts modulo λ*

La question est donc :

▷ Avons nous $1 \equiv 0 \mod \lambda$?

Il faut donc voir si $1 - 0 = 1$ est divisible par λ
Si λ divise 1, alors $N(\lambda)$ divise $N(1)$; comme $N(\lambda) = 3$ et $N(1) = 1$, et que 3 ne divise pas 1, 1 n'est pas congru à 0 modulo λ

▷ Par le même raisonnement, 1 n'est pas congru à -1 modulo λ puisque $1-(-1) = 2$ et que $N(2) = 4$

▷ De la même manière, -1 n'est pas congru à 0 modulo λ

(e) *On suppose que $x \in \mathbb{Z}[j]$ est un élément non divisible par λ. Démontrer que $x^3 \equiv 1 \mod \lambda^4$ ou $x^3 \equiv -1 \mod \lambda^4$*

On vient de voir que tout $z \in \mathbb{Z}[j]$ est tel que $z \equiv 0 \mod \lambda$ ou $z \equiv 1 \mod \lambda$ ou $z \equiv -1 \mod \lambda$. Donc, si $x \in \mathbb{Z}[j]$ est un élément non divisible par λ, alors $x \equiv 1 \mod \lambda$ ou $x \equiv -1 \mod \lambda$. Nous avons donc $x = \pm 1 + \mu\lambda$ où $\mu \in \mathbb{Z}[j]$

Supposons $x = 1 + \mu\lambda$ où $\mu \in \mathbb{Z}[j]$.

Alors,

⋆ $x - 1 = \mu\lambda$

⋆ $x - j = x - 1 + 1 - j = \mu\lambda + \lambda = \lambda(\mu + 1)$

⋆ $x - j^2 = x - 1 + 1 - j^2 = \mu\lambda + (1 + j)(1 - j) = \mu\lambda + (1 + j)\lambda = \lambda(\mu + 1 + j)$

Nous devons, maintenant, nous intéresser à $x^3 - 1$. Or :

$$\begin{aligned} x^3 - 1 = &\ (x-1)\left(x^2+x+1\right) \\ = &\ (x-1)(x-j)\left(x-j^2\right) \\ = &\ \mu\lambda \times \lambda(\mu+1) \times \lambda(\mu+1+j) \\ = &\ \lambda^3\left[\mu(\mu+1)(\mu+1+j)\right] \end{aligned}$$

Nous avons $\mu + 1 + j = \mu + 2 - 1 + j = \mu + 2 - \lambda$ de telle sorte que :

$$\begin{aligned} x^3 - 1 = &\ \lambda^3\left[\mu(\mu+1)(\mu+2-\lambda)\right] \\ = &\ \lambda^3\left[\mu(\mu+1)(\mu+2) - \lambda\mu(\mu+1)\right] \\ = &\ \lambda^3\mu(\mu+1)(\mu+2) - \lambda^4\mu(\mu+1) \end{aligned}$$

Nous avons démontré, dans une question précédente que tout élément de $\mu \in \mathbb{Z}[j]$ est tel que $\mu \equiv 0 \mod \lambda$ ou $\mu \equiv 1 \mod \lambda$ ou $\mu \equiv -1 \mod \lambda$

→ Si $\mu \equiv 0 \mod \lambda$, alors $\mu = \lambda k$ où $k \in \mathbb{Z}[j]$; et donc

$$\mu(\mu+1)(\mu+2) = \lambda k(\lambda k+1)(\lambda k+2) = \lambda\left(k(\lambda k+1)(\lambda k+2)\right) = \alpha_1\lambda$$

→ Si $\mu \equiv 1 \mod \lambda$, alors $\mu = \lambda k + 1$ où $k \in \mathbb{Z}[j]$; et donc

$$\mu(\mu+1)(\mu+2) = (\lambda k+1)(\lambda k+2)(\lambda k+3)$$

Or, nous avons vu que $3 = \lambda(2 + j)$, et donc

$$\begin{aligned} \mu(\mu+1)(\mu+2) = &\ (\lambda k+1)(\lambda k+2)(\lambda k+3) \\ = &\ (\lambda k+1)(\lambda k+2)(\lambda k+\lambda(2+j)) \\ = &\ \lambda\left[(\lambda k+1)(\lambda k+2)(k+(2+j))\right] \\ = &\ \alpha_2\lambda \end{aligned}$$

→ La résolution est semblable si $\mu \equiv -1 \mod \lambda \Longleftrightarrow \mu = -1 + \lambda k$ où $k \in \mathbb{Z}[j]$

Ainsi, pour tout $\mu \in \mathbb{Z}[j]$, nous avons $(\mu + 1)(\mu + 2) = \alpha\lambda$, de telle sorte que :

$$x^3 - 1 = \lambda^4\alpha - \lambda^4\mu(\mu+1) = \lambda^4\left(\alpha - \mu(\mu+1)\right)$$

Ainsi, $x^3 - 1$ est divisible par λ^4 et donc $x^3 \equiv 1 \mod \lambda^4$

La démonstration est semblable si $x = -1 + \mu\lambda$ où $\mu \in \mathbb{Z}[j]$ pour prouver qu'alors $x^3 \equiv -1 \mod \lambda$.

***Note :** Dans le travail ci-dessus, je n'ai volontairement pas voulu appliquer à $\mathbb{Z}[j]$ la théorie des congruences que nous avons vues pour $\mathbb{Z}$; en effet, nous n'avons pas travaillé, pas établi, la relation d'équivalence compatible avec l'addition et la multiplication. J'ai donc voulu rester le plus proche possible de la définition.*

Exercice 26 :

Nous appelons $\Sigma = \left\{n \in \mathbb{N} \text{ tels que il existe } a \in \mathbb{N} \text{ et } b \in \mathbb{N} \text{ tels que } n = a^2 + b^2\right\}$

1. *Montrer que si $n \equiv 3 \mod 4$, alors $n \notin \Sigma$.*

   Ce n'est pas une question très difficile.

   Remarquons que si a est pair, alors $a = 2k$ et $a^2 = 4k^2$ et donc $a^2 \equiv 0 \mod 4$ et si a est impair (et donc $a = 2k + 1$) alors $a^2 = 4\left(k^2 + k\right) + 1$, ce qui veut dire $a^2 \equiv 1 \mod 4$. Ainsi :

⋆ Si a et b sont pairs, alors $a^2+b^2 \equiv 0 \mod 4$
⋆ Si a et b sont impairs, alors $a^2+b^2 \equiv 2 \mod 4$
⋆ Si a est pair et b impair, ou a est impair et b pair alors $a^2+b^2 \equiv 1 \mod 4$

Ainsi, jamais a^2+b^2 n'est congru à 3 modulo 4 et donc, si $n \equiv 3 \mod 4$, alors il n'existe pas d'entiers a et b tels que $n = a^2+b^2$ et donc $n \notin \Sigma$

2. *Nous notons $\mathbb{Z}[i] = \left\{x = a+bi \text{ où } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z} \text{ et } i^2 = -1\right\}$*

   (a) *Démontrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau intègre de $(\mathbb{C}, +, \times)$*

   La démonstration ne pose pas de grandes difficultés *(en fait, aucune)* puisque $\mathbb{Z}[i]$ hérite des propriétés de corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$; d'autre part, il n'est pas anodin de remarquer que $\mathbb{Z}[i] \neq \emptyset$ puisque $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[i]$

   → Il est clair que $\mathbb{Z}[i]$ est intègre puisque $(\mathbb{C}, +, \times)$ l'est.
   → La multiplication est distributive par rapport à l'addition *(puisqu'elle l'est dans $\mathbb{C}$)*
   → Il est clair que si $z \in \mathbb{Z}[i]$ et $z_1 \in \mathbb{Z}[i]$ alors $z - z_1 \in \mathbb{Z}[i]$
   → Il est plus délicat *(quoique... !)* de montrer que si $z \in \mathbb{Z}[i]$ et $z_1 \in \mathbb{Z}[i]$ alors $z \times z_1 \in \mathbb{Z}[i]$. Soient donc $z = a+ib$ et $z_1 = a_1 + ib_1$; alors $zz_1 = (a+ib)(a_1+ib_1) = (aa_1 - bb_1) + i(ab_1 + ba_1)$.
   Comme $aa_1 - bb_1 \in \mathbb{Z}$ et $ab_1 + ba_1 \in \mathbb{Z}$, nous avons $z \times z_1 \in \mathbb{Z}[i]$

   Ainsi, $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau intègre de $(\mathbb{C}, +, \times)$

   (b) *Pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, nous définissons $N(z) = z \times \bar{z} = |z|^2$.*
   Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$ et tout $z_1 \in \mathbb{Z}[i]$, nous avons $N(z) \in \mathbb{N}$ et

   $$N(zz_1) = N(z) \times N(z_1)$$

   → De $z = a+ib$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, nous avons $N(z) = z \times \bar{z} = |z|^2 = a^2+b^2$; comme $a^2+b^2 \in \mathbb{N}$, nous avons bien $N(z) \in \mathbb{N}$
   → La propriété $N(zz_1) = N(z) \times N(z_1)$ se déduit de celle des modules des nombres complexes

   (c) *Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?*

   Soit $u \in \mathbb{Z}[i]$; il existe donc $v \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $uv = 1$.
   Nous avons alors $N(uv) = N(u)N(v) = N(1) = 1$; de $N(u)N(v) = 1$, nous déduisons $N(u) \neq 0$ et $N(v) \neq 0$ et ce qui veut dire que $N(v) = \dfrac{1}{N(u)}$.
   Comme nous avons démontré que $N(v) \in \mathbb{N}$, nous ne pouvons avoir que $N(u) = 1$.
   Si $u = a+ib$, nous avons $N(u) = a^2+b^2 = 1$; les seules solutions sont les couples $(a,b) = (1,0)$, $(a,b) = (-1,0)$, $(a,b) = (0,1)$ et $(a,b) = (0,-1)$. D'où les éléments inversibles sont :

   $$u = 1 \quad u = -1 \quad u = i \quad u = -i$$

   Réciproquement, il est clair que $u = 1$,$u = -1$, $u = i$ et $u = -i$ sont des éléments inversibles.

3. *Démontrer que Σ est stable par multiplication.*

   Soit $n \in \Sigma$; il existe donc $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ tels que $n = a^2+b^2$, c'est à dire qu'il existe $u = a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $n = N(u)$.
   De même, si $m \in \Sigma$, il existe $v = c+di \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $m = N(v)$, et donc :

   $$mn = N(v) \times N(u) = N(vu)$$

   Ce qui montre déjà que mn est la somme de 2 carrés, mais allons plus loin :
   ⋆ $uv = (a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$ et donc $mn = N(vu) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$
   ⋆ Nous avons $N(v) = c^2+d^2$ et $N(u) = a^2+b^2$ et nous venons de montrer la célèbre identité de Lagrange

   $$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

4. *On dit qu'un élément $x \in \mathbb{Z}[i]$ est irréductible si $x = \alpha \times \beta$ alors α ou β est inversible.*

(a) *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}[i]$, si $N(x)$ est un entier premier, alors x est irréductible. La réciproque est-elle vraie ?*

Soit $x = \alpha\beta$ où $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ et $p = N(x)$ est un nombre entier premier
Nous avons $p = N(\alpha) N(\beta)$. Les nombres $N(\alpha)$ et $N(\beta)$ divisent p. L'un des deux nombres $N(\alpha)$ ou $N(\beta)$ est égal à p, et l'autre est égal à 1, car p est premier.
Or $u \in \mathbb{Z}[i]$ est inversible si et seulement si $N(u) = 1$. Donc α ou β est inversible. x est donc irréductible.
La réciproque est fausse : par exemple, 5 est irréductible, mais $N(5) = 25$ n'est pas premier.

(b) *Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier. Démontrer que nous avons l'équivalence suivante*

$$p \in \Sigma \Longleftrightarrow p \text{ n'est pas irréductible dans } \mathbb{Z}[i]$$

$\Rightarrow$ Soit p un nombre premier tel que $p \in \Sigma$
Alors, il existe $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $p = a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib) = N(a+ib)$. Comme $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$, les éléments $a+ib$ et $a-ib$ ne sont pas inversibles et donc p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$

$\Rightarrow$ Supposons que p ne soit pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$
Il existe donc $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ et $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ non inversibles tels que $p = \alpha\beta$.
Alors $N(p) = p^2 = N(\alpha\beta) = N(\alpha) N(\beta)$.
Remarquons que, comme $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ et $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ ne sont pas inversibles, alors $N(\alpha) \neq 1$ et $N(\beta) \neq 1$.
$N(\alpha)$ et $N(\beta)$ étant des diviseurs de p^2, et p étant premier, nous avons $N(\alpha) = N(\beta) = p$ et donc $p = (\mathrm{Re}(\alpha))^2 + (\mathrm{Im}(\alpha))^2 = (\mathrm{Re}(\beta))^2 + (\mathrm{Im}(\beta))^2$ est donc la somme de 2 carrés, d'où $p \in \Sigma$

(c) *En déduire que si p est premier tel que $p \equiv 3 \mod 4$ alors p est iréductible*

Si $p \equiv 3 \mod 4$ alors $p \notin \Sigma$ et donc p est irréductible

5. (a) *Soient $x \in \mathbb{Z}[i]$ et $y \in \mathbb{Z}[i]^* = \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$.*
On pose $\dfrac{x}{y} = u + iv$ où $u \in \mathbb{Q}$ et $v \in \mathbb{Q}$. On prend $u_0 \in \mathbb{Z}$ et $v_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $|u - u_0| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $|v - v_0| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Montrer qu'on a : $x = y(u_0 + iv_0) + r$ avec $N(r) < N(y)$.

En écrivant $\dfrac{x}{y} = u + iv$ où $u \in \mathbb{Q}$ et $v \in \mathbb{Q}$, on choisit $u_0 \in \mathbb{Z}$ et $v_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $|u - u_0| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $|v - v_0| \leqslant \dfrac{1}{2}$; ces entiers $u_0 \in \mathbb{Z}$ et $v_0 \in \mathbb{Z}$ existent ; ce sont, en fait, les entiers les plus proches de u_0 et v_0.
De $x = y(u_0 + iv_0) + r$, nous tirons

$$\frac{x}{y} = (u_0 + iv_0) + \frac{r}{y} \Longleftrightarrow \frac{r}{y} = \frac{x}{y} - (u_0 + iv_0) = (u - u_0) + i(v - v_0)$$

En utilisant les normes, nous avons $N\left(\dfrac{r}{y}\right) = \dfrac{N(x)}{N(y)} = (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2$.

Comme $|u - u_0| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $|v - v_0| \leqslant \dfrac{1}{2}$, nous avons

$$\frac{N(x)}{N(y)} = (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$$

Et donc $N(x) < N(y)$
Nous avons $x = y(u_0 + iv_0) + r$ avec $N(r) < N(y)$

(b) *Trouver $q \in \mathbb{Z}[i]$ et $r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $(7 + 2i) = q(2 + 3i) + r$ avec $N(r) < N(2 + 3i)$*

Il suffit d'appliquer la démonstration précédente ; on pose, simplement $x = 7 + 2i$ et $y = 2 + 3i$

- ⋆ Dans un premier temps $\dfrac{x}{y} = \dfrac{7+2i}{2+3i} = \dfrac{(7+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{20-17i}{13} = \dfrac{20}{13} - \dfrac{7i}{13}$
- ⋆ L'entier $u_0 \in \mathbb{Z}$ le plus proche de $\dfrac{20}{13}$ est 2 et l'entier $v_0 \in \mathbb{Z}$ le plus proche de $-\dfrac{7}{13}$ est -1 de telle sorte que $q = u_0 + iv_0 = 2 - i$
- ⋆ Et maintenant, $r = 7 + 2i - (2+3i)(2-i) = -2i$, de telle sorte que nous avons

$$(7+2i) = q(2+3i) + r \Longleftrightarrow (7+2i) = (2-i)(2+3i) - 2i$$

- ⋆ Il faut, maintenant, montrer que $N(r) < N(2+3i)$. Or $N(r) = N(-2i) = 4$ et $N(2-i) = 13$.
  Nous avons bien $N(r) < N(2-i)$

6. *Démontrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est principal*

L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est principal si et seulement si tous les idéaux de $\mathbb{Z}[i]$ sont principaux, c'est à dire que les idéaux sont des ensembles de multiples de la forme $u \times \mathbb{Z}[i]$ où $u \in \mathbb{Z}[i]$.
Soit donc $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbb{Z}[i]$ et $n = \min\limits_{x \in \mathcal{I}\setminus\{0\}} N(x)$. Soit $a \in \mathcal{I}$ tel que $n = N(a)$.
Soit $x \in \mathcal{I}$ un élément quelconque de l'idéal $\mathcal{I}$ et effectuons la « division euclidienne » dans $\mathbb{Z}[i]$ de x par a.
Il existe donc un nombre $u_0 + iv_0 \in \mathbb{Z}[i]$ et $r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que $x = a(u_0 + iv_0) + r$ avec $N(r) < N(a)$.
De là, nous avons $a(u_0 + iv_0) \in \mathcal{I}$ puisque $\mathcal{I}$ est un idéal. Comme par hypothèse, $x \in \mathcal{I}$ et, d'après les propriétés de sous-groupe de $\mathcal{I}$, nous avons $r = x - a(u_0 + iv_0) \in \mathcal{I}$.
De $N(r) < N(a)$ et $r \in \mathcal{I}$, nous tirons $N(r) = 0$ et donc $r = 0$, ce qui montre que $x = a(u_0 + iv_0)$, que tout élément $x \in \mathcal{I}$ est un multiple de a et que donc l'idéal $\mathcal{I}$ est principal.
Ainsi, l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est principal

Chapitre 3

Les espaces vectoriels

Voilà un chapitre important. Vous le savez déjà si vous avez lu le cours de L_0. Dans ce cours, nous ne nous limiterons pas au corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, mais nous allons nous étendre à $\mathbb{C}$ et sans doute d'autres corps
La notion d'espaces vectoriels va permettre **d'unifier tous les problèmes d'algèbre linéaire** comme par exemple la résolution des équations linéaires.

Dans ce chapitre, les corps $\mathbb{K}$ sont toujours commutatifs, en précisant quand cela sera nécessaire s'il s'agit de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'élément neutre du corps $\mathbb{K}$ pour la multiplication sera toujours noté 1

3.1 Premières définitions, premiers exemples

3.1.1 Définition de loi externe

Soit E un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps.
Une loi de composition externe sur E de domaine $\mathbb{K}$ est une application Φ de $\mathbb{K} \times E$ dans E :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \Phi\left[(\lambda, u)\right] = \lambda \bullet u \end{array} \right.$$

Remarque 1 :

Le point $\bullet$ entre λ et u « est » la loi externe. Ce point va rapidement disparaître et on écrira $2u$ à la place de $\Phi\left[(\lambda, u)\right]$ ou $\lambda \bullet u$

3.1.2 Définition d'espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un ensemble.
On dit que E espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ si E est muni :

$\Rightarrow$ D'une loi de composition interne : $+$

$\Rightarrow$ D'une loi de composition externe : $\bullet$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E

vérifiant

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif
2. La loi externe vérifie :
   (a) $(\forall x \in E)$, $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $(\forall \mu \in \mathbb{K})$ $\lambda \bullet (\mu \bullet x) = (\lambda \times \mu) \bullet x$
   (b) $(\forall x \in E)$, $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $(\forall \mu \in \mathbb{K})$ $(\lambda + \mu) \bullet x = (\lambda \bullet x) + (\mu \bullet x)$
   (c) $(\forall x \in E)$, $(\forall y \in E)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $\lambda \bullet (x + y) = \lambda \bullet x + \lambda \bullet y$
   (d) $(\forall x \in E)$, $1 \bullet x = x$

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les **scalaires** . Les éléments de E sont appelés **vecteurs**.
On dit que E est un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel**

Remarque 2 :

A partir de maintenant, nous enlevons le $\bullet$ de la loi externe et le $\times$ de la loi multiplicative de $\mathbb{K}$

3.1.3 Propriétés immédiates

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Nous notons 0_E le neutre pour l'addition de E *(le vecteur nul)*. Alors :

1. $(\forall x \in E)$, $(\forall y \in E)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $\lambda (x - y) = \lambda x - \lambda y$
2. $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $\lambda \bullet 0_E = 0_E$
3. $(\forall y \in E)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $\lambda (-y) = -\lambda y$
4. $(\forall x \in E)$, $(\forall \mu \in \mathbb{K})$ $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $(\lambda - \mu) x = \lambda x - \mu y$
5. $(\forall x \in E)$, $0 \bullet x = 0_E$
6. $(\forall x \in E)$, $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $(-\lambda) x = -(\lambda x)$, en particulier, $(-1) x = -x$
7. $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$, $(\forall x \in E)$, $(-\lambda)(-x) = \lambda x$
8. $\lambda x = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$
9. L'application $h_\lambda : E \longrightarrow E$ définie par :
$$\begin{cases} h_\lambda : E & \longrightarrow & E \\ \quad x & \longmapsto & h_\lambda(x) = \lambda x \end{cases}$$
   est appelée homothétie de rapport λ. h_λ est bijective si et seulement si $\lambda \neq 0$

Démonstration

1. **Montrons que** $(\forall x \in E)$**,** $(\forall y \in E)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $\lambda (x - y) = \lambda x - \lambda y$
   En effet : $\lambda x = \lambda [(x - y) + y] = \lambda (x - y) + \lambda y$ et donc $\lambda x - \lambda y = \lambda (x - y)$
2. **Montrons que** $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $\lambda \bullet 0_E = 0_E$
   En faisant $x = y$ dans l'item précédent, nous avons :
$$\lambda (x - x) = \lambda x - \lambda x \Longleftrightarrow \lambda \bullet 0 = 0_E$$
3. **Montrons que** $(\forall y \in E)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $\lambda (-y) = -\lambda y$
   En faisant $x = 0_E$ dans le premier item, nous avons :
$$\lambda (0_E - y) = \lambda (-y) = \lambda 0_E - \lambda y = 0_E - \lambda y = -\lambda y \Longleftrightarrow \lambda (-y) = -\lambda y$$

4. **Montrons que** $(\forall x \in E)$**,** $(\forall \mu \in \mathbb{K})$ $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $(\lambda - \mu)\, x = \lambda x - \mu y$
   Nous reprenons la méthode du premier item :
   $$\lambda x = [(\lambda - \mu) + \mu]\, x = (\lambda - \mu)\, x + \mu x$$
   Et donc $\lambda x = (\lambda - \mu)\, x + \mu x \Longleftrightarrow \lambda x - \mu x = (\lambda - \mu)\, x$
5. **Montrons que** $(\forall x \in E)$**,** $0 \bullet x = 0_E$
   Facile à démontrer ; il suffit de faire $\lambda = \mu$ dans l'identité précédente.
6. **Montrons que** $(\forall x \in E)$**,** $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $(-\lambda)\, x = -(\lambda x)$
   C'est facile à démontrer, nous avons $\mu x - \lambda x = (\mu - \lambda)\, x$, et en faisant $\mu = 0$, nous avons :
   $$0x - \lambda x = (0 - \lambda)\, x \Longleftrightarrow 0_E - \lambda x = (-\lambda)\, x \Longleftrightarrow (-\lambda)\, x = -(\lambda x)$$
7. **Montrons que** $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$**,** $(\forall x \in E)$**,** $(-\lambda)(-x) = \lambda x$
   Nous avons $(-\lambda)(-x) = -(\lambda(-x)) = -(-\lambda x) = \lambda x$
8. **Montrons que** $\lambda x = 0_E$ **si et seulement si** $\lambda = 0$ **ou** $x = 0_E$
   - ▷ Si $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$ alors, bien entendu, $\lambda x = 0_E$
   - ▷ Supposons $\lambda x = 0_E$ et $\lambda \neq 0$. Comme $\lambda \in \mathbb{K}$, alors, λ est inversible, et donc :
   $$\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} 0_E \Longleftrightarrow \left(\lambda^{-1}\lambda\right) x = 0_E \Longleftrightarrow 1 \bullet x = 0_E \Longleftrightarrow x = 0_E$$
9. **Montrons que l'homothétie** $h_\lambda : E \longrightarrow E$ **est bijective si et seulement si** $\lambda \neq 0$
   - ▷ Si $\lambda = 0$, alors, pour tout $x \in E$, $h_\lambda(x) = 0x = 0_E$, et, évidemment, h_λ n'est pas bijective
   - ▷ Supposons $\lambda \neq 0$.
     - ⋆ Alors h_λ est injective
       Soient $x \in E$ et $y \in E$ tels que $h_\lambda(x) = h_\lambda(y)$.
       Alors, $\lambda x = \lambda y \Longleftrightarrow \lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1}(\lambda y) \Longleftrightarrow \left(\lambda^{-1}\lambda\right) x = \left(\lambda^{-1}\lambda\right) y \Longleftrightarrow x = y$
       h_λ est bien injective
     - ⋆ Alors h_λ est surjective
       Soit $y \in E$; alors, $x = \lambda^{-1} y$ est tel que $h_\lambda(x) = h_\lambda\left(\lambda^{-1} y\right) = \lambda\left(\lambda^{-1} y\right) = y$

     h_λ est donc bijective.

Exemple 1 :

Premiers exemples basiques de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

1. L'ensemble des vecteurs de la géométrie classique forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour l'addition des vecteurs et la multiplication par un scalaire.
2. Tout corps $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même
3. Si $\mathbb{K}_1$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}_1$. En particulier, $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sue $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
4. On munit $\mathbb{K}^n$ d'une addition et d'une multiplication par un scalaire :
   $$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$
   Et de la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$:
   $$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$$
   Muni de ces deux opérations $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
   En particulier $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . c'est l'espace vectoriel de la géométrie plane et $\mathbb{C}^2$ peut être considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
5. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficents dans le corps $\mathbb{K}$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire habituelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
6. Si A est un en semble quelconque et $\mathbb{K}$ un corps. On note $\mathbb{K}^A = \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications de A dans $\mathbb{K}$. On définit :

→ L'addition :

$$\left(\forall f\in\mathbb{K}^A\right)\left(\forall g\in\mathbb{K}^A\right)(\forall a\in A)\left((f+g)(a)=f(a)+g(a)\right)$$

→ La multiplication par un scalaire $\lambda\in\mathbb{K}$

$$\left(\forall f\in\mathbb{K}^A\right)(\forall\lambda\in\mathbb{K})(\forall a\in A)\left((\lambda f)(a)=\lambda f(a)\right)$$

Muni de ces 2 opérations, $\mathbb{K}^A$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

7. En particulier l'espace des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . les vecteurs sont donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le vecteur nul est donc la suite nulle $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $O_n=0$
8. Toujours comme cas particulier de $\mathbb{K}^A=\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$, on peut donner $\mathbb{R}^{\mathbb{C}}=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ des fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$
9. Produit d'espaces vectoriels
   Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel , alors le produit

$$E\times F=\{(x,y)\ \text{ où } x\in E \text{ et } y\in F\}$$

   muni des 2 opérations d'addition et de multiplication :
   ▷ L'addition :

$$(\forall(x,y)\in E\times F)(\forall(z,t)\in E\times F)\left((x,y)+(z,t)=(x+z,y+t)\right)$$

   ▷ La multiplication par un scalaire $\lambda\in\mathbb{K}$

$$(\forall(x,y)\in E\times F)(\forall\lambda\in\mathbb{K})\left(\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)\right)$$

   Muni de ces 2 opérations, $E\times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
   Il est possible de généraliser à n $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E_1,E_2,\cdots,E_n$ et l'espace produit $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$
   On retrouve comme cas particulier $\mathbb{K}^n$ lorsque nous faisons $E_1=\mathbb{K},E_2=\mathbb{K},\cdots,E_n=\mathbb{K}$

3.2 Sous-espaces vectoriels

3.2.1 Définition de sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F\subset E$ une partie de E
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $0_E\in F$
2. $(\forall x\in F)(\forall y\in F)(x+y\in F)$
3. $(\forall x\in F)(\forall\lambda\in\mathbb{K})(\lambda x\in F)$

Remarque 3 :

1. Un sous-espace vectoriel F est forcément un sous-groupe additif de $(E,+)$
2. Un sous-espace vectoriel est bien entendu, pour les lois induites par celles de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

3.2.2 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Alors :
$F\subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $F\neq\emptyset$
2. $(\forall x\in F)(\forall y\in F)(\forall\lambda\in\mathbb{K})(\forall\mu\in\mathbb{K})(\lambda x+\mu y\in F)$

Démonstration

1. Si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
   - ▷ Alors $(F, +)$ est un sous-groupe additif de $(E, +)$ et donc $0_E \in F$ et donc $F \neq \emptyset$
   - ▷ D'autre part, soient $x \in F$, $y \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x \in F$ et $\mu y \in F$. De la structure de sous-groupe de F, nous avons $\lambda x + \mu y \in F$

   La condition est donc suffisante
2. Réciproquement, supposons $F \neq \emptyset$ et $(\forall x \in F)\,(\forall y \in F)\,(\forall \lambda \in \mathbb{K})\,(\forall \mu \in \mathbb{K})\,(\lambda x + \mu y \in F)$
   - ▷ Comme $f \neq \emptyset$, il existe $x \in F$, et en faisant $\lambda = \mu = 0$, nous avons $\lambda x + \mu y = 0x + 0y = 0_E$
   - ▷ Ensuite, pour $x \in F$ et $y \in F$, $x + y = 1x + 1y \in F$ et donc $x + y \in F$
   - ▷ Et en prenant $x \in F$ et $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, nous avons $\lambda x + 0y = \lambda x \in F$

Nous avons donc établi l'équivalence

Remarque 4 :

IMPORTANT et intéressant à retenir
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors on a nécessairement $0_E \in F$. En d'autres termes, si $0_E \notin F$ alors F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 2 :

Des exemples canoniques de sous-espaces vectoriels

1. Premier exemple trivial, mais immensément nécessaire et utile. Dans tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $\{0_E\}$ et E lui-même sont des sous-espaces vectoriels de E
2. Si E et F dont 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel , alors $E \times \{0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$.
   Plus généralement, $\mathbb{K} \times \{0\} \times \{0\}_t imes \cdots \times \{0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$
   (a) Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont :
      - ▷ $\{(0, 0)\}$ et $\mathbb{R}^2$
      - ▷ Les droites vectorielles : $\Delta = \{\lambda\,(x_0, y_0)\ \text{avec}\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

   (b) Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont :
      - ▷ $\{(0, 0, 0)\}$ et $\mathbb{R}^3$
      - ▷ Les droites vectorielles : $\Delta = \{\lambda\,(x_0, y_0, z_0)\ \text{avec}\ \lambda \in \mathbb{R}\}$
      - ▷ Les plans vectoriels : $\Pi = \{\lambda\,(x_0, y_0, z_0) + \mu\,(x_1, y_1, z_1)\ \text{avec}\ \lambda \in \mathbb{R}\ \text{et}\ \mu \in \mathbb{R}\}$
3. Dans $\mathbb{K}[X]$, le sous-ensemble noté $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$
4. Dans $\mathbb{K}^A = \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$, le sous-ensemble des fonctions qui s'annulent en un point $a \in A$ est un sous-espace vectoriel
5. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, le sous ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est un sous-espace vectoriel
6. De même pour le sous ensembles $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions k fois continuement dérivables.

Exercice 1 :

On munit $\mathbb{R}^3$ des opérations usuelles, donnant à $\mathbb{R}^3$ la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel

1. Montrer que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y - 2z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
2. Montrer que $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y - 2z = 1\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
3. Montrer que $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } xyz = 0\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Exercice 2 :

Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

1. $E_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})\ \text{telles que}\ f(1) = 0\}$
2. $E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})\ \text{telles que}\ f(0) = f(1) + 2\}$
3. $E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})\ \text{telles que}\ (\forall x \in \mathbb{R})\, f(x) = f(1 - x)\}$

Exercice 3 :

1. Soit Λ l'ensemble des suites numériques réelles convergeant vers 0. Vérifiez qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
2. Prouver que l'ensemble des suites réelles presque nulles *(c'est à dire qui s'annulent à partir d'un certain rang)* est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel .

3.2.3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit I un ensemble non vide.
Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille *(finie ou infinie)* de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration

La démonstration n'est pas difficile et nous allons utiliser 3.2.2 pour le faire.

1. Comme, pour tout $i \in I$, F_i est un sous-espace vectoriel de E, alors, pour tout $i \in I$, $0_E \in F_i$, c'est à dire $o_E \in \bigcap_{i\in I} F_i$ et donc $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$
2. En second lieu, soient $x \in \bigcap_{i\in I} F_i$, $y \in \bigcap_{i\in I} F_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Alors, comme pour tout $i \in I$, F_i est un sous-espace vectoriel de E, pour tout $i \in I$, $\lambda x + \mu y \in F_i$ et donc $\lambda x + \mu y \in \bigcap_{i\in I} F_i$

Ainsi, $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E

Exercice 4 :

On considère $\mathbb{R}^2$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

1. Montrer que $F_1 = \{\lambda\,(2,3)\ \text{où}\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{\lambda\,(-2,3)\ \text{où}\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
2. Est-ce que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

3.2.4 Définition

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ n éléments de E
   On appelle <u>combinaison linéaire</u> de ces n éléments, tout élément de la forme :
   $$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{ où } \lambda_i \in \mathbb{K}$$
2. Soit $A \neq \emptyset$ une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
   L'ensemble des combinaisons linéaires d'eléments de A est un sous-espace vectoriel de E noté $\mathrm{Vect}\,(A)$.
   $$\mathrm{Vect}\,(A) = \left\{ x \in E \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \text{ où } \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ et } a_i \in A \right\}$$

Démonstration

Il faut, tout d'abord, remarquer que A peut très bien être un ensemble fini du type $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ou un ensemble infini. Dans ce cas, la combinaison linéaire $\sum_{i\in I} \lambda_i a_i$ est toujours une combinaison linéaure *finie d'éléments de I, c'est à dire que nous extrayons une famille finie $\{i_1, \cdots, i_p\} \subset I$ d'éléments de I et $\sum_{i\in I} \lambda_i a_i = \sum_{k=i_1}^{i_p} \lambda_{i_k} a_{i_k}$; d'où l'énoncé qui ne considère que des sommes finies.*

La démonstration du fait que $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E est évidente.

1. Premièrement, $\text{Vect}(A) \neq \emptyset$ puisque $0_E \in \text{Vect}(A)$
   En effet, pour tout $a \in A$, $0_E = 0 \times a$
2. D'autre part, si $u \in \text{Vect}(A)$ et $v \in \text{Vect}(A)$, alors, $u = \sum_{i=i_1}^{i_m} \lambda_i a_i$ et $v = \sum_{k=k_1}^{k_p} \mu_k a_k$, et donc :

$$u + v = \sum_{i=i_1}^{i_m} \lambda_i a_i + \sum_{k=k_1}^{k_p} \mu_k a_k = \lambda_{i_1} a_{i_1} + \lambda_{i_2} a_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_m} a_{i_m} + \mu_{k_1} a_{k_1} + \cdots + \mu_{k_p} a_{k_p}$$

   $u + v$ apparaît donc comme la combinaison linéaire de $i_m + k_p$ éléments de A, et donc $u + v \in \mu_{k_1} a_{k_1} \text{Vect}(A)$
3. Pour terminer, si $u = \sum_{i=i_1}^{i_m} \lambda_i a_i$ est un élément de $\text{Vect}(A)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha u = \sum_{i=i_1}^{i_m} \alpha \lambda_i a_i$ est aussi un élément de $\text{Vect}(A)$

Et donc $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E

Remarque 5 :

Il est immédiat que si $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ sont n éléments d'un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors toute combinaison linéaire des x_i est dans F.

3.2.5 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \subset E$ une partie de E
Alors, il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.
Ce sous-espace vectoriel noté $\Gamma(A)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A

Démonstration

Nous appelons $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A.
Alors, $\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X$ est un sous-espace vectoriel de E comme intersection des sous-espaces vectoriels de E
D'autre part, comme pour tout $X \in \mathcal{A}$, $A \subset X$ et que, toujours pour tout $X \in \mathcal{A}$, $\bigcap_{X\in\mathcal{A}} X \subset X$, nous avons $\Gamma(A) = \bigcap_{X\in\mathcal{A}} X$

3.2.6 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \subset E$ une partie de E
Alors, $\Gamma(A) = \text{Vect}(A)$
Autrement dit, le plus petit sous-espace vectoriel contenant A ou encore sous-espace vectoriel engendré par A est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A

Démonstration

Soit A une partie de E. On appelle toujours $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A et donc $\Gamma(A) = \bigcap_{X\in\mathcal{A}} X$.
Nous appelons aussi $\text{Vect}(A)$ le sous-espace vectoriel des combinaisons linéaires d'éléments de A

1. Nous démontrons que $\Gamma(A) \subset \text{Vect}(A)$
   Tout d'abord, et clairement, $A \subset \text{Vect}(A)$, et donc, par définition de $\Gamma(A)$, $\Gamma(A) \subset \text{Vect}(A)$
2. Démontrons, maintenant que $\text{Vect}(A) \subset \Gamma(A)$
   Soit X un sous-espace vectoriel de E contenant A, c'est à dire $X \in \mathcal{A}$.
   Alors, toutes les combinaisons linéaires $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i$ où $a_i \in A$ et $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sont des éléments de X puisque X est un sous-espace vectoriel et que, pour tout $i \in I$, $a_i \in X$.
   Ainsi, tous les éléments de $\text{Vect}(A)$ sont des éléments de X, et ce, pour tout $X \in \mathcal{A}$, et donc, $\text{Vect}(A) \subset \bigcap_{X \in \mathcal{A}} X = \Gamma(A)$

Remarque 6 :

1. On dit que A est un **système générateur** de $\text{Vect}(A)$
2. Par convention, on dira que $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$
3. **Quelques propriétés évidentes :**
   (a) Pour tout $A \subset E$, $A = \text{Vect}(A) \iff A$ sous-espace vectoriel de E
   (b) Pour tout $A \subset E$, $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$
   (c) Pour tout $A \subset E$ et tout $B \subset E$, $A \subset B \Longrightarrow \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$

Exemple 3 :

1. **Droite vectorielle :***(Voir aussi 3.8.3)*
   Si $x_0 \in E$ avec $x_0 \neq 0_E$, alors le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\{x_0\}) = \{\lambda x_0 \text{ où } \lambda \in \mathbb{K}\}$ est appelé une droite vectorielle de E.
2. **Plan vectoriel :***(de même, voir aussi 3.8.3)*
   Si x_0 et x_1 sont deux vecteurs non colinéaires de E, alors le sous-espace vectoriel
   $$\text{Vect}(\{x_0, x_1\}) = \{\lambda x_0 + \mu x_1 \text{ où } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } \mu \in \mathbb{K}\}$$
   est appelé plan vectoriel de E.
3. Puisque tout polynôme est combinaison linéaire de la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}(\{X^n; n \in \mathbb{N}\})$
4. De même, $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}\left(\left\{X^k; 0 \leqslant k \leqslant n\right\}\right)$
5. L'ensemble $\mathcal{E}$ des suites numériques réelles vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$$
   sont les suites de la forme $(\lambda 2^n + \mu 5^n)_{n\in\mathbb{N}}$, et donc $\mathcal{E} = \text{Vect}\left(\left\{(2^n)_{n\in\mathbb{N}}; (5^n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}\right)$

Exercice 5 :

$\mathbb{R}^3$ est muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. On fournira, dans chaque cas, sa partie génératrice

1. $F_1 = \{(x+y, 2y, x-y) \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$
2. $F_2 = \{(x, x, x) \text{ où } x \in \mathbb{R}\}$
3. $F_3 = \{(x-y, 2y, x+y) \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$
4. $F_4 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ où } x - y + z = 0\right\}$
5. $F_5 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ où } x - y + z = 0 \text{ et } 2x + 5y + z = 0\right\}$

Exercice 6 :

$\mathbb{R}^3$ est muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
Soient $u = (1, 1, 3)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (2, 1, 0)$
Il faut montrer que l'ensemble $\{u, v, w\}$ est générateur de $\mathbb{R}^3$, autrement dit que $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(\{u, v, w\})$

3.2.7 Somme de 2 sous-espaces vectoriels

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , F et G 2 sous-espaces vectoriels de E
On appelle sous-espace vectoriel somme de F et G l'ensemble $F+G$ ainsi défini :

$$F+G=\{u\in E \text{ tel que } u=x_F+x_G \text{ où } x_F\in F \text{ et } x_G\in G\}$$

$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration

Démontrons que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E
- ⇒ $F+G$ est non vide puisque $0_E\in F+G$.
  En effet, comme $0_E\in F$ et $0_E\in G$ et que $0_E=0_E+0_E$, nous avons bien $0_E\in F+G$
- ⇒ D'autre part, soient $u\in F+G$, $v\in F+G$, $\lambda\in\mathbb{K}$ et $\mu\in\mathbb{K}$
  - ⋆ Comme $u\in F+G$, il existe $x_F^u\in F$ et $x_G^u\in G$ tels que $u=x_F^u+x_G^u$
  - ⋆ De même, comme $v\in F+G$, il existe $x_F^v\in F$ et $x_G^v\in G$ tels que $v=x_F^v+x_G^v$
  - ⋆ Ainsi,
  $$\lambda u+\mu v=\lambda\left(x_F^u+x_G^u\right)+\mu\left(x_F^v+x_G^v\right)=\left(\lambda x_F^u+\mu x_F^v\right)+\left(\lambda x_G^u+\mu x_G^v\right)$$
  F étant un sous-espace vectoriel de E, alors $\lambda x_F^u+\mu x_F^v\in F$ et G étant un sous-espace vectoriel de E, alors $\lambda x_G^u+\mu x_G^v\in G$

  Et donc, $\lambda u+\mu v\in F+G$

$F+G$ est donc bien un sous-espace vectoriel de E

Remarque 7 :

Cette proposition est aussi vraie pour la somme de n sous-espaces vectoriels de E

3.2.8 Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $A\subset E$ et $B\subset E$ 2 sous-ensembles de E. Alors

$$\operatorname{Vect}(A\cup B)=\operatorname{Vect}(A)+\operatorname{Vect}(B)$$

Démonstration

1. On démontre que $\operatorname{Vect}(A)+\operatorname{Vect}(B)\subset\operatorname{Vect}(A\cup B)$
   - → Comme $A\subset A\cup B$, nous avons $\operatorname{Vect}(A)\subset\operatorname{Vect}(A\cup B)$; de même, $\operatorname{Vect}(B)\subset\operatorname{Vect}(A\cup B)$
   - → Soit $y\in\operatorname{Vect}(A)+\operatorname{Vect}(B)$
     Alors $y=u_A+u_B$ où $u_A\in\operatorname{Vect}(A)$ et $u_B\in\operatorname{Vect}(B)$
     Or, d'après la remarque précédente, $u_A\in\operatorname{Vect}(A\cup B)$ et $u_B\in\operatorname{Vect}(A\cup B)$. Comme $\operatorname{Vect}(A\cup B)$ est un sous-espace vectoriel de E, $u_A+u_B\in\operatorname{Vect}(A\cup B)$, et donc $y\in\operatorname{Vect}(A\cup B)$

   En conclusion, $\operatorname{Vect}(A)+\operatorname{Vect}(B)\subset\operatorname{Vect}(A\cup B)$
2. On démontre que $\operatorname{Vect}(A\cup B)\subset\operatorname{Vect}(A)+\operatorname{Vect}(B)$
   D'après la proposition 3.2.7, $\operatorname{Vect}(A)+\operatorname{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E
   - → Tout d'abord, $A\subset\operatorname{Vect}(A)$ et $B\subset\operatorname{Vect}(V)$
   - → D'autre part, $\operatorname{Vect}(A)\subset\operatorname{Vect}(A)+\operatorname{Vect}(B)$ tout comme $\operatorname{Vect}(B)\subset\operatorname{Vect}(A)+\operatorname{Vect}(B)$
   - → Ainsi $A\subset\operatorname{Vect}(A)+\operatorname{Vect}(B)$ et $B\subset\operatorname{Vect}(A)+\operatorname{Vect}(B)$ et donc, $A\cup B\subset\operatorname{Vect}(A)+\operatorname{Vect}(B)$
   - → $\operatorname{Vect}(A\cup B)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $A\cup B$; nous avons donc
   $$\operatorname{Vect}(A\cup B)\subset\operatorname{Vect}(A)+\operatorname{Vect}(B)$$

De $\operatorname{Vect}(A\cup B)\subset\operatorname{Vect}(A)+\operatorname{Vect}(B)$ et $\operatorname{Vect}(A)+\operatorname{Vect}(B)\subset\operatorname{Vect}(A\cup B)$, nous déduisons

$$\operatorname{Vect}(A)+\operatorname{Vect}(B)=\operatorname{Vect}(A\cup B)$$

Ce que nous voulions

Remarque 8 :

En particulier, si F **et** G **sont 2 sous-espaces vectoriels d'un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** E, alors

$$\text{Vect}\,(F \cup G) = F + G$$

Exercice 7 :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère les ensembles suivants :

1. $F = \{(x, 0, 0) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\}$
2. $G = \{(y, y, 0) \text{ avec } y \in \mathbb{R}\}$

Il faut montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $F + G$

Remarque 9 :

Autre remarque, pratique, mais néanmoins importante.
Considérons $\mathbb{R}^3$ est muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Soient les sous-espaces vectoriels suivants :

- ▷ $F = \{(0, y, z) \text{ avec } z \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$
- ▷ $G = \{(x, y, 0) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$

Considérons, maintenant $F + G$.
Nous avons le triplet $(1, 2, 3)$ qui est un élément de $F + G$, puisque $(1, 2, 3) = (1, 1, 0) + (0, 1, 3)$, mais cette décomposition n'est pas unique puisque :

$$(1, 2, 3) = (1, 1, 0) + (0, 1, 3) = (1, -3, 0) + (0, 5, 3)$$

De manière générale, pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cette décomposition n'est pas unique, puisque :

$$(x, y, z) = \left(x, \frac{y}{2}, 0\right) + \left(0, \frac{y}{2}, z\right) = (x, -3y, 0) + (0, 4y, z)$$

Quelles sont les conditions d'unicité ?

3.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

3.3.1 Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , F et G 2 sous-espaces vectoriels de E
Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $F + G = E$ et $F \cap G = \emptyset$
2. Tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$

Démonstration

1. Supposons que $F + G = E$ et $F \cap G = \emptyset$
   - ▷ De $F + G = E$ nous avons pouvons décomposer tout $x \in E$ en $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$
   - ▷ Il faut, maintenant, démontrer l'unicité.
     Supposons qu'il y ait 2 décompositions possibles, c'est à dire :

     $$x = x_F + x_G = x_F^1 + x_G^1$$

     Alors $x_F + x_G = x_F^1 + x_G^1 \iff x_F - x_F^1 = x_G^1 - x_G$. En posant $y = x_F - x_F^1 = x_G^1 - x_G$, nous avons $y \in F \cap G$ et donc $y = 0_E$, de telle sorte que $x_F = x_F^1$. et $x_G^1 = x_G$ et l'unicité est démontrée.

2. Supposons que tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$
   - ▷ Que tout $x \in E$ s'écrive $x = x_F + x_G$ montrer que $E = F + G$
   - ▷ Démontrons maintenant que $F \cap G = \emptyset$
     Soit $x \in F \cap G$; alors $x = 0_E + x = x + 0_E$ puisque $x \in F$ et $x \in G$, et de l'unicité de cette décomposition, nous tirons $x = 0_E$

3.3.2 Définition de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , F et G 2 sous-espaces vectoriels de E
Quand l'une des deux conditions équivalentes du théorème 3.3.1 sont vérifiées, on dit que F et G sont supplémentaires dans E et nous notons $E = F \bigoplus G$
On dit encore que E est somme directe de F et de G et que F est un supplémentaire de G dans E

Exemple 4 :

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions numériques à valeurs complexes, nous considérons $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, le sous-espace vectoriel des fonctions impaires et $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel des fonctions paires. Alors, $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

En effet :
- ⋆ Que $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ soient des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est facile à démontrer
- ⋆ D'autre part, soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
  Posons $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ et $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$
  De manière évidente, i est une fonction impaire et p une fonction paire ; de plus, nous avons $f = i + p$ et nous pouvons donc conclure que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) + \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
- ⋆ Démontrons que, maintenant, $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \mathrm{O}$ où $\mathcal{O}$ est la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$
  Soit donc $\varphi \in \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :
  $$\varphi(x) = \varphi(-x) = -\varphi(x)$$
  De $\varphi(x) = -\varphi(x)$, nous déduisons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\varphi(x) = 0 \iff \varphi(x) = 0$, c'est à dire $\varphi = \mathcal{O}$

Nous avons donc bien $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \bigoplus \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Remarque 10 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. En fait, F admet une infinité de supplémentaires dans E

Exercice 8 :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère les ensembles suivants :

1. $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } x + y + z = 0\right\}$
2. $G = \{(y, y, y) \text{ avec } y \in \mathbb{R}\}$

Il faut montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9 :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F = \text{Vect}\left(\{(2,1,0);(0,1,2)\}\right)$
2. $G = \text{Vect}\left(\{(0,1,0);(1,0,2)\}\right)$

F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10 :

Soit $\mathbb{C}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 3.
Soient E_1, E_2 et E_3 les sous-ensembles de $\mathbb{C}_3[X]$ formés des polynômes multiples respectivement de $(X-1)$, $\left(X^2+1\right)$ et $\left(X^3+1\right)$.

1. Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_3[X]$
2. Avons nous :

   (a) $\mathbb{C}_3[X] = E_1 \bigoplus E_2$ (b) $\mathbb{C}_3[X] = E_1 \bigoplus E_3$ (c) $\mathbb{C}_3[X] = E_2 \bigoplus E_3$

Exercice 11 :

On considère $\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de l'intervalle $[-1;+1]$ dans $\mathbb{C}$.
Soient

- $F = \{f \in \mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C}) \text{ telle que } f \text{ est constante}\}$
- $G = \left\{f \in \mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C}) \text{ telle que } \int_{-1}^{+1} f(t)\ \mathrm{d}t = 0\right\}$

Il faut montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})$

Exercice 12 :

Soit $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ non nul et F l'ensemble des multiples de P_0 dans $\mathbb{R}[X]$, c'est à dire :

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P = P_0 \times Q \text{ où } Q \in \mathbb{R}[X]\}$$

Déterminer un supplémentaire de F.*(Se reporter au chapitre sur les polynômes)*

3.3.3 Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G 2 sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \bigoplus G$
Alors E et $F \times G$ sont en bijection

Démonstration

La démonstration ne devrait pas poser de problème.
Il faut d'abord définir cette bijection.
Tout $u \in E$ se décompose de manière unique en $u = u_F + u_G$ où $u_F \in F$ et $u_G \in G$. Il est donc normal de poser :

$$\begin{cases} \Phi : E & \longrightarrow & F \times G \\ u = u_F + u_G & \longmapsto & \Phi(u) = (u_F, u_G) \end{cases}$$

1. **Φ est injective**
   En effet, supposons que, pour $u \in E$ et $v \in E$ $\Phi(u) = \Phi(v)$. Alors, si $\Phi(u) = (x,y)$ et $\Phi(v) = (x_1,y_1)$, nous avons dans E, $u = x + y = x_1 + y_1$, et de l'unicité de la décomposition $u = v$.
   Donc Φ est injective
2. **Φ est surjective**
   En effet, soit $(x,y) \in E \times F$, alors $u \in E$ tel que $u = x + y$ est tel que $\Phi(u) = (x,y)$
   Φ est donc surjective

Φ est donc bijective

Remarque 11 :

En utilisant la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel du produit $E \times F$, nous pourrions démontrer *(et c'est facile !)* que :
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $u \in E$, $\Phi(\lambda u) = \lambda \Phi(u)$
- Pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$, $\Phi(u+v) = \Phi(u) + \Phi(v)$

3.4 Applications linéaires

3.4.1 Définition

Soient E et F, 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel
Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire si et seulement si :

1. Pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. Pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$
Une application linéaire est aussi appelée homomorphisme d'espaces vectoriels

Exemple 5 :

1. L'application identique de E est une application linéaire
2. Dans tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel , les homothéties sont des applications linéaires
3. Si $E = \mathbb{K}[X]$ et $F = \mathbb{K}$, l'application Υ définie par :
$$\begin{cases} \Upsilon : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k & \longmapsto & \Upsilon(P) = \sum_{k=1}^{n} a_k \end{cases}$$
Υ est la fonction qui, à un polynôme, fait correspondre la somme de ses coefficients.
Υ est une application linéaire
4. Si $E = \mathcal{C}([-1;+1], \mathbb{C})$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1;+1]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, l'application Ψ définie par :
$$\begin{cases} \Psi : \mathcal{C}([-1;+1], \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \Psi(f) = \int_{-1}^{+1} f(t)\, \mathrm{d}t \end{cases}$$
Ψ est la fonction qui, à une fonction, fait correspondre son intégrale entre -1 et $+1$.
Ψ est une application linéaire

Exercice 13 :

Vérifier que la bijection Φ définie en 3.3.3 est bien une application linéaire

Remarque 12 :

Soient E et F, 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire

1. Alors, pour toute famille $\{x_1, \cdots, x_n\}$ d'éléments de E et toute famille $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, nous avons :
$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$
2. Si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire , c'est, en particulier, un morphisme du groupe additif $(E, +)$ dans $(F, +)$, et nous avons, en particulier $f(0_E) = 0_F$

3.4.2 Proposition

Soient E et F, 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application de E dans F
f est linéaire si et seulement si :

$$(\forall u \in E)\,(\forall v \in E)\,(\forall \lambda \in \mathbb{K})\,(\forall \mu \in \mathbb{K})\,(f\,(\lambda x + \mu y) = \lambda f\,(x) + \mu f\,(y))$$

Démonstration

La démonstration est simple et laissée au lecteur

Exercice 14 :

$\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis des opérations usuelles de la structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
On considère $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{ccl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & f\,[(x, y, z)] = (2x - y + z, y - z) \end{array}\right.$$

Démontrer que f est une application linéaire

3.4.3 Théorème

Soient E, F et G 3 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ 2 applications linéaires
Alors, la composition $g \circ f : E \longrightarrow G$ est une application linéaire

Démonstration

La démonstration a été faite dans le cours de L_0 pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; il suffit de la reproduire ici

3.4.4 Théorème

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire

1. Si $X \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E, alors $f\,(X)$ est un sous-espace vectoriel de F
2. Si $Y \subset F$ est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}\,(Y)$ est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration

1. Soit $X \subset E$ un sous-espace vectoriel de E, montrons que $f\,(X)$ est un sous-espace vectoriel de F
   - ▷ Tout d'abord, $f\,(X) \neq \emptyset$ puisque, comme X est un sous-espace vectoriel de E, $0_E \in X$ et comme $f\,(0_E) = 0_F$, $0_F \in f\,(X)$ et nous avons bien $f\,(X) \neq \emptyset$
   - ▷ Ensuite, soient $x \in f\,(X)$, $y \in f\,(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$; avons nous $\lambda x + \mu y \in f\,(X)$?
     Comme $x \in f\,(X)$, il existe $u \in X$ tel que $x = f\,(u)$; de même, comme $y \in f\,(X)$, il existe $v \in X$ tel que $y = f\,(v)$, de telle sorte que :
     $$\lambda x + \mu y = \lambda f\,(u) + \mu f\,(v) = f\,(\lambda u + \mu v)$$
     Comme X est un sous-espace vectoriel de E, $\lambda u + \mu v \in X$ et de l'égalité $\lambda x + \mu y = f\,(\lambda u + \mu v)$, nous déduisons que $\lambda x + \mu y \in f\,(X)$

   $f\,(X)$ est donc bien un sous-espace vectoriel de F
2. Soit $Y \subset F$ un sous-espace vectoriel de F, montrons que $f^{-1}\,(Y)$ est un sous-espace vectoriel de E
   - ▷ Tout d'abord, $f^{-1}\,(Y) \neq \emptyset$ puisque $0_E \in f^{-1}\,(Y)$; en effet, $f\,(0_E) = 0_F$, et comme Y est un sous-espace vectoriel de F, $0_F \in Y$ et donc $0_E \in f^{-1}\,(Y)$
   - ▷ Ensuite, soient $x \in f^{-1}\,(Y)$, $y \in f^{-1}\,(Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$; avons nous $\lambda x + \mu y \in f^{-1}\,(Y)$?
     Comme $x \in f^{-1}\,(Y)$, alors $f\,(x) \in Y$, et, de même, $f\,(y) \in Y$.
     Comme Y est un sous-espace vectoriel de F, $\lambda f\,(x) + \mu f\,(y) \in Y$. De $\lambda f\,(x) + \mu f\,(y) = f\,(\lambda x + \mu y)$, nous déduisons que $\lambda x + \mu y \in f^{-1}\,(Y)$.

   $f^{-1}\,(Y)$ est donc bien un sous-espace vectoriel de E

Remarque 13 :

1. Parmi tous les sous-espace vectoriel $X \subset E$, il y en a un qui tout à fait particulier, c'est $X = E$ lui-même. Ainsi $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F

   Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire . $f(E)$ est appelé image de f et est notée $\text{Im} f$
   D'après 3.4.4, $\text{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F

2. De même, parmi tous les sous-espace vectoriel $Y \subset F$, il y en a un qui tout à fait particulier, c'est $Y = \{0_F\}$ le sous-espace vectoriel uniquement formé du vecteur nul. Ainsi $f^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace vectoriel de E

   Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire . $f^{-1}(\{0_F\})$ est appelé noyau de f et est notée $\ker f$
   D'après 3.4.4, $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E

3.4.5 Théorème

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire
f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$

Démonstration

Comme tout à l'heure, la démonstration a été faite dans le cours de L_0 pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; il suffit de la reproduire ici

Remarque 14 :

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire ; f est surjective si et seulement si $\text{Im} f = F$

Exercice 15 :

$\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis des opérations usuelles de la structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Soit f : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & f[(x, y)] = (x - y, x + 2y, -y) \end{cases}$$

Déterminer $\ker f$ et $\text{Im} f$. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 16 :

$\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; soit $a \in \mathbb{C}^*$. Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\begin{cases} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) = z + a\overline{z} \end{cases}$$

Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire et déterminer son noyau et son image

3.4.6 Proposition

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire bijective
Alors, son application inverse $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi une application linéaire

Démonstration

$f : E \longrightarrow F$ étant une application bijective, f^{-1} existe.
Pour $y_1 \in F$, $y_2 \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$, il faut montrer que $f^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda f^{-1}(y_1) + \mu f^{-1}(y_2)$
f étant bijective, il existe $x_1 \in E$ tel que $f(x_1) = y_1 \Longleftrightarrow x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 \in E$ tel que $f(x_2) = y_2 \Longleftrightarrow x_2 = f^{-1}(y_2)$
Nous avons :

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_2 + \mu x_2)$$

Ce qui veut dire que $\lambda x_1 + \mu x_2 = f^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2) \Longleftrightarrow \lambda f^{-1}(y_1) + \mu f^{-1}(y_2) = f^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2)$
f^{-1} est donc linéaire

3.4.7 Définitions

1. Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On appelle isomorphisme entre E et F toute application linéaire bijective de E sur F
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On appelle endomorphisme de E toute application linéaire de E dans lui-même. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On appelle automorphisme de E toute application linéaire bijective de E dans lui-même. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$

Exercice 17 :

Cet exercice ne devrait pas poser de difficultés
Nous considérons 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F, G et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, une application linéaire surjective et $g : F \longrightarrow G$, une application quelconque.
On suppose que $f \circ g : E \longrightarrow G$ est une application linéaire . Il faut montrer que g est linéaire

Exercice 18 :

Soient E_1, E_2, F_1 et F_2, 4 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels . On considère $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$.
On construit une application $\Phi : E_1 \times E_2 \longrightarrow F_1 \times F_2$ de cette manière :

$$\begin{cases} \Phi : E_1 \times E_2 & \longrightarrow & F_1 \times F_2 \\ \quad (x_1, x_2) & \longmapsto & \Phi[(x_1, x_2)] = (f(x_1), f(x_2)) \end{cases}$$

1. Démontrer que Φ est une application linéaire
2. Démontrer que Φ est surjective si et seulement si f_1 et f_2 sont surjectives
3. Démontrer que Φ est injective si et seulement si f_1 et f_2 sont injectives

Exercice 19 :

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On construit $\Phi : E \times F \longrightarrow E \times F$ par :

$$\begin{cases} \Phi : E \times F & \longrightarrow & E \times F \\ \quad (x, y) & \longmapsto & \Phi[(x, y)] = (x, y - f(x)) \end{cases}$$

Il faut montrer que Φ est linéaire et bijective, donc $\Phi \in \mathrm{GL}(E \times F)$

3.5 Indépendance, bases

3.5.1 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{x_1, \cdots, x_n\}$ une famille de vecteurs de E
Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il existe des scalaires λ_i non tous nuls tels que :
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E$$
2. L'un des x_i est combinaison linéaire des autres

Démonstration

1. **Supposons qu'il existe des scalaires λ_i non tous nuls tels que :** $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n == 0_E$
Soit i_0 l'indice $1 \leqslant i_0 \leqslant n$. tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Alors :
$$\begin{aligned}
\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \iff \quad & \lambda_{i_0} x_{i_0} = -(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \\
& \quad \cdots + \lambda_{i_0-1} x_{i_0-1} + \lambda_{i_0+1} x_{i_0+1} + \cdots + \lambda_n x_n) \\
\iff \quad & x_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \\
& \quad \cdots + \lambda_{i_0-1} x_{i_0-1} + \lambda_{i_0+1} x_{i_0+1} + \cdots + \lambda_n x_n) \\
\iff \quad & x_{i_0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{i_0}} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{i_0}} x_2 + \cdots + \\
& \quad \cdots + \frac{\lambda_{i_0-1}}{\lambda_{i_0}} x_{i_0-1} + \frac{\lambda_{i_0+1}}{\lambda_{i_0}} x_{i_0+1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_{i_0}} x_n
\end{aligned}$$
On montre ainsi que x_{i_0} est combinaison linéaire des autres vecteurs
2. **Supposons que l'un des x_i est combinaison linéaire des autres**
Ceci veut donc dire que $x_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k x_k$ et donc, nous avons :
$$x_i = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \cdots + \lambda_n x_n \iff x_i - \lambda_1 x_1 - \cdots - \lambda_{i-1} x_{i-1} - \lambda_{i+1} x_{i+1} - \cdots + \lambda_n x_n = 0_E$$

3.5.2 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

1. Si l'une des 2 conditions équivalentes de la proposition 3.5.1 est vérifiée, on dit que les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont linéairement dépendants ou qu'ils forment une famille liée
2. Dans le cas où les 2 conditions équivalentes de la proposition 3.5.1 ne sont pas vérifiées, on dit que les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont linéairement indépendants ou qu'ils forment un famille libre
3. Autrement dit, le système $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est libre si et seulement si l'implication suivante est vraie :
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Remarque 15 :

Dans une famille libre, aucun vecteur ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres

3.5.3 Définition dans le cas d'une famille quelconque

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
Soit I un ensemble non vide d'indices puis $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E

1. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement si il existe une sous-famille finie de la famille $(x_i)_{i\in I}$ qui est liée ou encore il existe une partie finie non vide $J \subset I$ telle que la famille $(x_i)_{i\in J}$ soit liée.
2. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si toute sous-famille finie de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre ou encore pour toute partie finie non vide $J \subset I$, la famille $(x_i)_{i\in J}$ est libre.

Remarque 16 :

La définition précédente est surtout utile dans les espaces de polynômes, les espaces de suites ou les espaces fonctionnels.

Exemple 6 :

Des exemples de familles liées ou libres

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On dit que 2 vecteurs $u \in E$ et $v \in E$ **sont colinéaires** si et seulement si il existe $a \in \mathbb{K}$ et $a \neq 0$ tel que $u = av$

   La famille de vecteurs $\{u, v\}$ est liée puisque $u - av = 0_E$
2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni des sa structure habituelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel les vecteurs $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ et $w = (7, 8, 9)$v puisque
$$u + w = 2v \Longleftrightarrow u - 2v + w = 0_{\mathbb{R}^3}$$
3. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, la famille $\{u\}$ est libre si et seulement si $u \neq 0_E$
4. Une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E contenant le vecteur nul 0_E n'est pas libre *(Elle est donc liée)*
5. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre, alors tous les vecteurs de cette famille sont non nuls.
6. Une famille contenant 2 fois le même vecteur est liée.
7. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
8. Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes X^2 X^2+1, X^2-1 forment un système lié puisque :
$$\left(X^2+1\right) + \left(X^2-1\right) = 2X^2 \Longleftrightarrow \left(X^2+1\right) + \left(X^2-1\right) - 2X^2 = 0$$
9. Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ est libre

   La démonstration n'est pas très difficile.
   On doit montrer que toute sous-famille finie non vide de la famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ est libre.
   Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\{i_1, \dots i_p\}$ p entiers tels que $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$.
   Soient $\lambda_1 \in \mathbb{K}, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 X^{i_1} + \lambda_2 X^{i_2} + \cdots + \lambda_p X^{i_p} = 0$. Le polynôme $P(X) = \lambda_1 X^{i_1} + \lambda_2 X^{i_2} + \cdots + \lambda_p X^{i_p}$ apparaît donc comme le polynôme nul, et P est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, c'est à dire si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$.
   On vient de montrer que toute sous-famille finie non vide de la famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ est libre.
   La famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ est donc une famille libre
10. Soit $\{P_n; n \in \mathbb{N}\}$ une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts, c'est à dire que, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{N}$, si $i \neq j$, alors $\deg P_i \neq \deg P_j$. La famille $\{P_n; n \in \mathbb{N}\}$ est libre.

Cette fois-ci, la démonstration est plus délicate!!
Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\{i_1, \dots i_p\}$ p entiers. Nous extrayons de la famille $\{P_n; n \in \mathbb{N}\}$, une famille de polynômes $P_{i_1}, \cdots, P_{i_p}$ tels que, quitte à ré-ordonner, $\deg P_{i_1} < \deg P_{i_2} < \cdots < \deg P_{i_p}$
Supposons que la famille $P_{i_1}, \cdots, P_{i_p}$ soit liée, c'est à dire qu'il existe des scalaires $\lambda_1 \in \mathbb{K}, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, non tous nuls tels que $\lambda_1 P_{i_1} + \lambda_2 P_{i_2} + \cdots + \lambda_p P_{i_p} = 0$.
On appelle Q le polynôme $Q = \lambda_1 P_{i_1} + \lambda_2 P_{i_2} + \cdots + \lambda_p P_{i_p}$. Q est le polynôme nul.
Soit k, $1 \leqslant k \leqslant p$, le plus grand entier tel que $\lambda_k \neq 0$. Alors $Q = \lambda_k P_{i_k} + \sum\limits_{j<k} \lambda_j P_{i_j}$ et $\deg Q = \deg P_k$, ce qui est incompatible avec le fait que Q soit le polynôme nul.
On vient de montrer que toute sous-famille finie non vide extraite de la famille $\{P_n; n \in \mathbb{N}\}$ est libre.
La famille $\{P_n; n \in \mathbb{N}\}$ est donc une famille libre

11. En particulier, la famille $\{P_n; n \in \mathbb{N}$ tels que $\deg P_n = n\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$

Exercice 20 :

Dans $\mathbb{R}^3$, muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel , les familles $\{u, v, w\}$ forment-elles une famille libre ou liée ?

1. $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (3, 5, 5)$
2. $u = (1, -1, 1)$, $v = (14, -2, 5)$, $w = (4, 0, 1)$

Exercice 21 :

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{C}$-espace vectoriel , les familles $\{f_1, f_2, f_3\}$ forment-elles une famille libre ou liée ?

1. $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos 2x$
2. $f_1(x) = \cos^2 x$, $f_2(x) = \sin^2 x$, $f_3(x) = 1$

Exercice 22 :

1. Prouver que la famille de polynômes $\left\{X^k(1 - X^n); k \in \mathbb{N}\right\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha \neq \beta$ et $n \in \mathbb{N}$
   Montrer que la famille de polynômes $\left\{(X - \alpha)^k (X - \beta)^{n-k}; 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

3.5.4 Définition de base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
On appelle base de E toute partie $A \subset E$ libre et génératrice

Remarque 17 :

Rappel : une famille $\{e_i; i \in I\}$ est génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E si et seulement si tout vecteur $u \in E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de la famille $\{e_i; i \in I\}$

Exemple 7 :

1. Dans $\mathbb{K}^n$, la famille $\{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ où $e_i = (0, 0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ où le 1 se trouve en i-ème position, forme une base de $\mathbb{K}^n$, cette base est la base canonique
   - ▷ Dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}^2$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel), la base canonique est donnée par $\{(1, 0); (0, 1)\}$
   - ▷ Dans $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{C}^3$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel), la base canonique est donnée par $\{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$
2. La famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ forme une base de $\mathbb{K}[X]$ puisque :
   - ▷ On vient de montrer que la famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ est une famille libre

- ▷ D'autre part, tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit comme combinaison linéaire finie d'éléments de la famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$; la famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ est donc génératrice de $\mathbb{K}[X]$

La famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ forme donc une base de $\mathbb{K}[X]$

3. La famille $\left\{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\right\}$ forme une base de $\mathrm{Vect}\left(\left\{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\right\}\right)$
   - ▷ Elle est,bien entendu, et par définition, génératrice de $\mathrm{Vect}\left(\left\{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\right\}\right)$
   - ▷ D'autre part, la famille $\left\{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\right\}$ forme une famille libre *(Démonstration en exercice)*

   On retrouve cette situation dans les séries de Fourier

Exercice 23 :

Montrer que la famille formée des vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, -1, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

3.5.5 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
Soit $\{g_i; 1 \leqslant i \leqslant q\}$ et $\{h_i; 1 \leqslant i \leqslant p\}$ 2 familles de vecteurs de E
On suppose que la famille $\{h_i; 1 \leqslant i \leqslant p\}$ est libre et que la famille $\{g_1, g_2, \cdots, g_q, h_1, h_2, \cdots h_p\}$ est liée.
Alors, l'un des g_{i_0} avec $1 \leqslant i_0 \leqslant q$ est combinaison linéaire des autres $\{g_i; 1 \leqslant i \leqslant q \text{ et } i \neq i_0\}$ et $\{h_i; 1 \leqslant i \leqslant p\}$

Démonstration

La famille $\{g_1, g_2, \cdots, g_q, h_1, h_2, \cdots h_p\}$ étant liée, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_q, \mu_1, \ldots, \mu_p$ non tous nuls *(sinon, la famille $\{g_1, g_2, \cdots, g_q, h_1, h_2, \cdots h_p\}$ serait libre, ce qui est contraire à l'hypothèse)* tels que :

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_q g_q + \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \cdots + \mu_p h_p = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i g_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j = 0_E$$

Il existe un indice i_0 avec $1 \leqslant i_0 \leqslant p$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$.

En effet, si tous les $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ étaient nuls, nous aurions alors $\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \cdots + \mu_p h_p = 0_E$, et de l'indépendance de la famille $\{h_i; 1 \leqslant i \leqslant p\}$, tous les scalaires $\mu_1, \ldots, \mu_p$ sont nuls, et nous tomberions sur une contradiction

Soit donc i_0 avec $1 \leqslant i_0 \leqslant q$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Nous avons alors :

$$-\lambda_{i_0} g_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{q} \lambda_i g_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j \iff g_{i_0} = \frac{-1}{\lambda_{i_0}} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{q} \lambda_i g_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j \right]$$

Nous venons donc de démontrer que g_{i_0} était combinaison linéaire des autres $\{g_i; 1 \leqslant i \leqslant q \text{ et } i \neq i_0\}$ et $\{h_i; 1 \leqslant i \leqslant p\}$

3.5.6 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{e_i; i \in I\}$ une base de E
Alors, tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire finie des $\{e_i; i \in I\}$
- ⇒ On écrit $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$, où les λ_i sont tous nuls sauf un nombre fini
- ⇒ Les scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ sont appelées les coordonnées de $x \in E$ dans la base $\{e_i; i \in I\}$

Démonstration

La démonstration ne pose pas de difficultés.

- ⋆ La famille $\{e_i; i \in I\}$ étant une base de E, il existe des scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ tels que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$

$\star$ Supposons qu'il existe une seconde famille $(\mu_i)_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \mu_i e_i$; alors :

$$x = \sum_{i\in I} \mu_i e_i = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \Longleftrightarrow \sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0_E$$

Du fait que la famille $\{e_i; i \in I\}$ est une famille libre, nous avons :

$$\sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0_E \Longrightarrow (\forall i \in I) (\lambda_i - \mu_i = 0) \Longleftrightarrow (\forall i \in I) (\lambda_i = \mu_i)$$

Nous venons donc de montrer l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base.

Exercice 24 :

La famille formée des vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, -1, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$; quelles sont les coordonnées, dans la base $(e_1, e_2, e_3\}$ du vecteur $(1, 2, 3)$, et plus généralement, du vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 25 :

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique, vérifier que les vecteurs

$$a = (1, 2, -1, -2) \qquad b = (2, 3, 0, -1) \qquad c = (1, 3, -1, 0) \qquad d = (1, 2, 1, 4)$$

forment une base de $\mathbb{R}^4$
Calculer les coordonnées du vecteur $X = (7, 14, -1, 2)$ dans la base $\{a, b, c, d\}$

Exercice 26 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ une famille libre de E. On pose :

$$b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \ldots, b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Montrer que la famille $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ est une famille libre de E

3.5.7 Proposition

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
Soit $\{e_i; i \in I\}$ une base de E

1. Toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est entièrement déterminée par la donnée des $\{f(e_i); i \in I\}$
2. De plus, pour toute famille $\{f_i; i \in I\}$ de F, il existe une et une seule application linéaire $u : E \longrightarrow F$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$

Par ailleurs

1. L'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ forme un système libre dans F
2. L'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ est une famille génératrice F
3. L'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement si la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ est une base de F

Démonstration

1. Soit $x \in E$. Il existe alors $J \subset I$, J ensemble fini, tel que $x = \sum_{i\in J} \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Alors :

$$f(x) = f\left(\sum_{i\in J} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i\in J} \lambda_i f(e_i)$$

Ce qui montre que f est entièrement déterminée par la connaissance des $\{f(e_i); i \in I\}$

2. Soit $\{f_i; i \in I\}$ une famille de vecteurs de F et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$. Montrons que cette application linéaire est unique.
   Soit donc $f : E \longrightarrow F$ une seconde application linéaire telle que, pour tout $i \in I$, $f(e_i) = f_i$; montrons que $f = u$
   Soit donc $x \in E$; nous avons $x = \sum_{i \in J} \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Alors :
   $$u(x) = u\left(\sum_{i \in J} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i \in J} \lambda_i u(e_i) = \sum_{i \in J} \lambda_i f_i = \sum_{i \in J} \lambda_i f(e_i) = f\left(\sum_{i \in J} \lambda_i e_i\right) = f(x)$$
   Donc, pour tout $x \in E$, $u(x) = f(x)$, c'est à dire que $u = f$
3. $\Rightarrow$ **Supposons que l'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ soit injective.**
   Démontrons que la famille $\{f(e_i) ; i \in I\}$ forme un système libre dans F.
   Soient donc $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F$ où seuls un nombre fini de λ_i sont non nuls. Alors :
   $$\sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F \Longleftrightarrow f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = 0_F$$
   Ce qui signifie donc que $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i \in \ker f$.
   De l'injectivité de f nous déduisons que $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E$, et comme la famille $\{e_i; i \in I\}$ est une base de E, donc libre, pour tout $i \in I$, nous avons $\lambda_i = 0$ et donc la famille $\{f(e_i) ; i \in I\}$ forme un système libre dans F
   $\Rightarrow$ **Supposons que la famille $\{f(e_i) ; i \in I\}$ forme un système libre dans F**
   Démontrons que f est injective.
   Soit $x \in \ker f$; alors, il existe un ensemble fini $J \subset I$ et des réels λ_i où $i \subset J$, tel que $x = \sum_{i \in J} \lambda_i e_i$. Comme $f(x) = 0_F$, nous avons :
   $$f\left(\sum_{i \in J} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i \in J} \lambda_i f(e_i) = 0_F$$
   De l'indépendance de la famille $\{f(e_i) ; i \in I\}$, nous déduisons que, pour tout $i \in J$, $\lambda_i = 0$ et donc $x = 0_E$, ce qui termine de montrer que f est injective.
4. $\Rightarrow$ **Supposons que l'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ soit surjective.**
   Démontrons que la famille $\{f(e_i) ; i \in I\}$ est une famille génératrice F.
   Soit $y \in F$; alors, comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Comme la famille $\{e_i; i \in I\}$ est une base de E, il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ et des scalaires $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i \in J} \lambda_i e_i$ et donc, $y = f(x) = f\left(\sum_{i \in J} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i \in J} \lambda_i f(e_i)$.
   Ainsi, tout $y \in F$ s'écrit comme combinaison linéaire finie d'éléments de a famille $\{f(e_i) ; i \in I\}$
   Ce qui montre que la famille $\{f(e_i) ; i \in I\}$ est une famille génératrice F
   $\Rightarrow$ **Supposons, maintenant, que la famille $\{f(e_i) ; i \in I\}$ est une famille génératrice F**
   Démontrons que f est surjective.
   Soit $y \in F$. Il faut donc trouver $x \in E$ tel que $f(x) = y$
   La famille $\{f(e_i) ; i \in I\}$ étant une famille génératrice F, il existe un sous-ensemble $J \subset I$, fini et $\lambda_i \in \mathbb{K}$ avec $i \in J$ tel que $y = \sum_{i \in J} \lambda_i f(e_i)$.
   De la linéarité de f, nous déduisons :
   $$y = \sum_{i \in J} \lambda_i f(e_i) = f\left(\sum_{i \in J} \lambda_i e_i\right)$$

En posant $x = \sum_{i \in J} \lambda_i e_i$, nous avons $x \in E$ et $f(x) = y$

f est donc surjective

5. Pour terminer,

$\Rightarrow$ Si f est bijective, elle est injective et surjective.

 ⋆ Si elle est injective, alors la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ forme un système libre dans F

 ⋆ Si elle est surjective, alors la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ forme un système générateur de F

 Et donc, la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ est une base de F

$\Rightarrow$ Si la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ est une base de F

 ⋆ Si la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ est une base de F, elle est libre dans F, et f est injective

 ⋆ Si la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ est une base de F, elle est génératrice de F, et f est donc surjective

 Finalement, f est bijective.

3.6 Espaces vectoriels de dimension finie

3.6.1 Définition

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie

Exemple 8 :

1. $\mathbb{R}^2$ admet pour famille génératrice $\{(1,0);(0,1)\}$ ou $\{(1,2);(3,4);(5,6)\}$

 En effet :

 (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; alors $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$; on peut même, et facilement, démontrer que $\{(1,0);(0,1)\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ et que c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$

 (b) La famille $\{(1,2);(3,4);(5,6)\}$ est génératrice, puisque tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire :

$$(x,y) = (-2x+y)(1,2) + \left(x + \frac{1}{2}y\right)(3,4) - \frac{1}{2}y(5,6)$$

 Ou encore

$$(x,y) = \left(-2x + \frac{3}{2}y + 1\right)(1,2) + \left(x - \frac{1}{2}y - 2\right)(3,4) + (5,6)$$

 On remarque que la « décomposition » n'est pas unique.

 Il n'y a rien de plus normal, puisque la famille $\{(1,2);(3,4);(5,6)\}$ est liée : nous avons, en effet :

$$-(1,2) + 2(3,4) = (5,6)$$

 Si elle est génératrice, la famille $\{(1,2);(3,4);(5,6)\}$ ne forme pas une base.

2. Plus généralement, si $\mathbb{K}$ est un corps, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie puisque la famille $\{e_i; i = 1, \cdots, n\}$ où $e_i = (0,0,\cdots 0,1,0,\cdots,0)$ et le 1 placé en i-ième place, engendre $\mathbb{K}^n$

3. Par contre, $\mathbb{K}[X]$ n'est pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si la famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, toute partie finie de $\mathbb{K}[X]$ ne peut générer qu'un sous-espace vectoriel formé de polynômes qui ont leur degré borné.

3.6.2 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie

Soit $G = \{x_1, \cdots, x_m\}$ une famille génératrice de E.

Alors, de cette famille génératrice G, on peut en extraire une base

Démonstration

Nous allons faire cette démonstration par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$, en posant :

$P(m)$: « Si E admet une famille génératrice G de cardinal m, alors, de G, on peut extraire une base »

- ▷ Si $m = 1$, alors $G = \{x_1\}$
  - ⋆ Si $x_1 = 0_E$, alors $E = \{0_E\}$
  - ⋆ Si $x_1 \neq 0_E$, alors, G étant une famille génératrice de E est aussi une famille libre de E, donc une base de E
- ▷ Si $m = 2$, alors $G = \{x_1, x_2\}$
  - ⋆ Si la famille $G = \{x_1, x_2\}$ est libre, alors, comme elle est aussi génératrice de E, elle en forme aussi une base
  - ⋆ Si la famille $G = \{x_1, x_2\}$ est liée,, alors, par exemple, x_2 est colinéaire à x_1 *($x_2 = \lambda x_1$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$)*, et de la famille $G = \{x_1, x_2\}$, on peut extraire une base qui sera $\{x_1\}$
- ▷ Supposons maintenant $P(m)$ vraie
- ▷ Démontrons, maintenant $P(m+1)$

  Soit donc $G = \{x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}\}$ une famille génératrice de E
  - ⋆ Si la famille $G = \{x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}\}$ est libre, alors, comme elle est aussi génératrice de E, elle en forme aussi une base.
  - ⋆ Si la famille $G = \{x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}\}$ est liée,, alors, l'un des vecteurs de G s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de G. Quitte à ré-ordonner, admettons que ce soit x_{m+1} qui soit combinaison linéaire des $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$.

    Alors, la famille $G_1 = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, à m éléments,est aussi génératrice de E. En utilisant l'hypothèse de récurrence $P(m)$, de cette famille G_1, on peut extraire une base de E

D'où le théorème est démontré

Remarque 18 :

1. Une autre façon de le dire est celle-ci :

   Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, de toute famille génératrice, on peut extraire une base finie

   Ainsi, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet une base finie
2. De ce théorème, on peut aussi déduire que si $G = \{x_1, \cdots, x_m\}$ une famille génératrice de E et $B = \{y_1, \cdots, y_n\}$ une base de E, alors $n \leqslant m$

3.6.3 Lemme

La démonstration de ce lemme sera utile à la démonstration du théorème 3.6.4

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$
On considère $n+1$ vecteurs de E $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ qui sont combinaison linéaire de n autres vecteurs $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ de E
Alors la famille $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ est aussi une famille liée

Démonstration

On remarquera que E n'est pas spécifié de dimension finie.
Nous démontrons ce théorème par récurrence sur n en démontrant la propriété $P(n)$ suivante.

$P(n)$: « Si $n+1$ vecteurs de E $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ sont combinaison linéaire de n autres vecteurs $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ de E alors la famille $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ forme aussi une famille liée »

1. Vérifions pour $n = 1$

   Soient donc 2 vecteurs de E $\{x_1, x_2\}$ qui sont combinaison linéaire d'un vecteur $u \in E$.

   Il existe alors $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{K}$ tels que $x_1 = \lambda_1 u$ et $x_2 = \lambda_2 u$
   - ▷ Si $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$, alors $x_1 = 0_E$ ou $x_2 = 0_E$ et la famille $\{x_1, x_2\}$ est bien liée

- ▷ Si $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, alors, par exemple, $u = \dfrac{1}{\lambda_2} x_2$, et donc $x_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2$ et la famille $\{x_1, x_2\}$ est bien liée

  $P(1)$ est donc bien vérifiée

2. Supposons maintenant $P(n)$ vraie
3. Démontrons $P(n+1)$

   Soient $n+2$ vecteurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}$ qui sont combinaisons linéaires de $n+1$ vecteurs $\{u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}\}$ de E.

   Il existe donc des scalaires $\alpha_{i,j}$ où $1 \leqslant i \leqslant n+2$ et $1 \leqslant j \leqslant n+1$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 = & \alpha_{1,1}u_1 + \alpha_{1,2}u_2 + \cdots + \alpha_{1,n+1}u_{n+1} \\ x_2 = & \alpha_{2,1}u_1 + \alpha_{2,2}u_2 + \cdots + \alpha_{2,n+1}u_{n+1} \\ x_3 = & \alpha_{3,1}u_1 + \alpha_{3,2}u_2 + \cdots + \alpha_{3,n}u_{n+1} \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x_{n+1} = & \alpha_{n+1,1}u_1 + \alpha_{n+1,2}u_2 + \cdots + \alpha_{n+1,n+1}u_{n+1} \\ x_{n+2} = & \alpha_{n+2,1}u_1 + \alpha_{n+2,2}u_2 + \cdots + \alpha_{n+2,n+1}u_{n+1} \end{array}\right.$$

- ▷ Supposons que pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n+2$, nous ayions $\alpha_{i,n+1} = 0$, alors, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 = & \alpha_{1,1}u_1 + \alpha_{1,2}u_2 + \cdots + \alpha_{1,n}u_n \\ x_2 = & \alpha_{2,1}u_1 + \alpha_{2,2}u_2 + \cdots + \alpha_{2,n}u_n \\ x_3 = & \alpha_{3,1}u_1 + \alpha_{3,2}u_2 + \cdots + \alpha_{3,n}u_n \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x_{n+1} = & \alpha_{n+1,1}u_1 + \alpha_{n+1,2}u_2 + \cdots + \alpha_{n+1,n}u_n \end{array}\right.$$

  Ce qui montre que la famille $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ est combinaison linéaire des n vecteurs $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ de E et donc, d'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$, la famille $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ est liée et, à fortiori, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}$ est aussi liée.
- ▷ Supposons qu'il existe i_0 tel que $1 \leqslant i_0 \leqslant n+2$ tel que nous ayions $\alpha_{i_0,n+1} \neq 0$. Quitte à ré-ordonner, pour simplifier la démonstration, nous supposons $\alpha_{n+2,n+1} \neq 0$. Alors, dans ce cas :

$$u_{n+1} = \frac{1}{\alpha_{n+2,n+1}} x_{n+2} - \frac{\alpha_{n+2,1}}{\alpha_{n+2,n+1}} u_1 - \frac{\alpha_{n+2,2}}{\alpha_{n+2,n+1}} u_2 - \cdots - \frac{\alpha_{n+2,n}}{\alpha_{n+2,n+1}} u_n$$

  En remplaçant u_{n+1} dans les $n+1$ vecteurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 - \dfrac{1}{\alpha_{n+2,n+1}} x_{n+2} = & \lambda_{1,1}u_1 + \lambda_{1,2}u_2 + \cdots + \lambda_{1,n}u_n \\ x_2 - \dfrac{1}{\alpha_{n+2,n+1}} x_{n+2} = & \lambda_{2,1}u_1 + \lambda_{2,2}u_2 + \cdots + \lambda_{2,n}u_n \\ x_3 - \dfrac{1}{\alpha_{n+2,n+1}} x_{n+2} = & \lambda_{3,1}u_1 + \lambda_{3,2}u_2 + \cdots + \lambda_{3,n}u_n \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x_{n+1} - \dfrac{1}{\alpha_{n+2,n+1}} x_{n+2} = & \lambda_{n+1,1}u_1 + \lambda_{n+1,2}u_2 + \cdots + \lambda_{n+1,n}u_n \end{array}\right.$$

  Où, pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, nous avons $\lambda_{i,j} = \alpha_{i,j} - \dfrac{\alpha_{n+2,j}}{\alpha_{n+2,n+1}}$

  Les $n+1$ vecteurs $x_i - \dfrac{1}{\alpha_{n+2,n+1}} x_{n+2}$ où $1 \leqslant i \leqslant n+1$ sont donc combinaisons linéaires des n vecteurs $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ et, d'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$, la famille

$$\left\{x_1 - \frac{1}{\alpha_{n+2,n+1}} x_{n+2}, x_2 - \frac{1}{\alpha_{n+2,n+1}} x_{n+2}, \cdots, x_n - \frac{1}{\alpha_{n+2,n+1}} x_{n+2}, x_{n+1} - \frac{1}{\alpha_{n+2,n+1}} x_{n+2}\right\}$$

  est liée.

Il existe donc des scalaires $\beta_i \in \mathbb{K}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n+1$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \left(x_i - \frac{1}{\alpha_{n+2,n+1}} x_{n+2} \right) = 0_E$$

Et donc :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \left(x_i - \frac{1}{\alpha_{n+2,n+1}} x_{n+2} \right) = 0_E \iff \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i x_i - \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\beta_i}{\alpha_{n+2,n+1}} \right) x_{n+2} = 0_E$$

Avec des β_i non tous nuls, ce qui montre que la famille $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}$ est une famille liée.

Le lemme est démontré

3.6.4 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie
Alors, toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.
Ce nombre est appelé **la dimension** de E et est noté $\dim E$

Démonstration

Soient $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n,\}$ et $\mathcal{B}_1 = \{y_1, y_2, \cdots, y_m,\}$ 2 bases de E.
$\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E, et donc, chacun des vecteurs de $\mathcal{B}_1$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.
Nous avons $n \leqslant m$

En effet, supposons $n > m$.
D'après le lemme 3.6.3, ceci signifierait que la famille $\mathcal{B}_1$ est une famille liée, ce qui est contradictoire avec le fait que $\mathcal{B}_1$ est une base.
Donc $n \leqslant m$

De même, on montre que $m \leqslant n$.
Donc $m = n$

Remarque 19 :

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel réduit au vecteur nul, c'est à dire si $E = \{0_E\}$, nous convenons alors que $\dim E = 0$

Exemple 9 :

1. $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, puisque nous en connaissons une base de cardinal n, la base canonique
2. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1, alors E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet pour base un seul vecteur non nul ; c'est une roite vectorielle

3.6.5 Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ un **système libre** de E et soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E.
Alors H peut être complétée par $(n-m)$ vecteurs $\{x_{m+1}, \cdots, x_n\}$ de telle sorte que la famille $\{h_1, h_2, \ldots, h_m, x_{m+1}, \cdots, x_n\}$ forme une base de E

Démonstration

Soient $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ une famille libre de E et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E

- Si H est une famille génératrice de E, alors H est une base de E, et c'est terminé
- Si, cette fois ci, H n'est pas une famille génératrice de E. Considérons $\text{Vect}(\{h_1, h_2, \ldots, h_m\})$ le sous-espace vectoriel engendré par H. Nous disons qu'il existe un indice i_0, avec $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ tel que $e_{i_0} \notin \text{Vect}(\{h_1, h_2, \ldots, h_m\})$

  Sinon,

  Supposons que pour tout i avec $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $e_i \in \text{Vect}(\{h_1, h_2, \ldots, h_m\})$, ceci sous-entend que la la famille H est génératrice *(donc base)* de E, et il y a donc contradiction.

  Alors, la famille $H \cup \{e_{i_0}\} = \{h_1, h_2, \ldots, h_m, e_{i_0}\}$ forme une famille libre car e_{i_0} n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de la famille H
- Si la famille $H \cup \{e_{i_0}\}$ est génératrice, c'est donc une base et nous nous arrêtons. Si elle ne l'est pas, nous itérons le processus.
- Ce processus s'arrêtera sûrement et nous obtiendrons une famille libre et génératrice donc une base.

  Si ce processus ne s'arrêtait pas, nous obtiendrions, au final, une famille $H \cup \mathcal{B}$ qui serait génératrice, mais pas libre.

Remarque 20 :

1. Le théorème signifie que si on a une famille libre de E, on peut **la compléter** pour obtenir une base de E, d'où le nom de base incomplète.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors :
   (a) Les familles libres de E ont au plus n éléments
   (b) Si une famille libre de E est de cardinal n, alors, c'est une base de E
3. D'après la démonstration du théorème, pour compléter une famille libre de E pour en faire une base, nous pouvons la compléter en prenant des éléments dans une base de E fixée d'avance.
4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors :
   (a) Les familles génératrices de E ont **au moins** n éléments
   (b) Si une famille génératrice de E est de cardinal n, alors, c'est une base de E
5. La dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est le nombre minimum de vecteurs générateurs et le nombre maximum de vecteurs libres
6. La dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dépend du corps de base, c'est pourquoi nous notons souvent la dimension $\dim_{\mathbb{K}} E$ et la référence au corps $\mathbb{K}$ est enlevée lorsqu'il n'y a pas ambiguité

   Exemples

   Nous avons $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
7. Nous avons, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie : $E \neq \{0_E\} \iff \dim_{\mathbb{K}} E \geqslant 1$

3.6.6 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors :

1. On appelle **droite** sous-espace vectoriel de E de dimension 1
2. On appelle **plan** sous-espace vectoriel de E de dimension 2
3. On appelle **hyperplan** sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$

Remarque 21 :

On peut remarquer que dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, plans et hyperplans sont identiques alors que si $n \neq 3$, ces 2 notions sont distinctes.

Exemple 10 :

1. Nous avons $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$, et plus généralement, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. Ainsi, tout corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 sur lui-même.
2. $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ sur $\mathbb{K}$. Une base de $\mathbb{K}_n[X]$ est donnée par $\left\{1, X, X^2, \cdots, X^n\right\}$
3. $\mathbb{R}$ peut être considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ; ce n'est sûrement pas un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 1.

   En effet, la famille $\left\{1, \sqrt{2}\right\}$ forme une famille libre.
   Démontrons le :
   Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ tels que $a + b\sqrt{2} = 0$;
   Si $a = b = 0$, nous avons bien entendu $a + b\sqrt{2} = 0$
   Sinon supposons $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
   - ⋆ Si $a \neq 0$, alors $b \neq 0$ et :

   $$a + b\sqrt{2} = 0 \Longleftrightarrow b\sqrt{2} = -a \Longleftrightarrow \sqrt{2} = \frac{-a}{b}$$

     Comme $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{2} = \dfrac{-a}{b} \in \mathbb{Q}$, ce qui est impossible
   - ⋆ Si $b \neq 0$, alors, nous avons, à nouveau :

   $$a + b\sqrt{2} = 0 \Longleftrightarrow b\sqrt{2} = -a \Longleftrightarrow \sqrt{2} = \frac{-a}{b}$$

     Et la conclusion est identique

   La seule possibilité que nous ayions est $a = b = 0$ et donc la famille $\left\{1, \sqrt{2}\right\}$ forme une famille libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$

Exercice 27 :

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$, alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$
2. Démontrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, tout $\beta \in \mathbb{Q}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$, nous avons l'implication :
$$\alpha + \beta\sqrt{n} = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$
3. Démontrer que la famille $\left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$

3.6.7 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ; alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$

Démonstration

Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
On appelle $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ l'unique application linéaire définie par $\Phi(e_i) = \varepsilon_i$. Comme $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, Φ est bien un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$

Remarque 22 :

De cet isomorphisme, on peut dire que que les seuls $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension n sont les $\mathbb{K}^n$

3.6.8 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

1. F est de dimension finie et $\dim F \leqslant n$
2. Si $\dim F = n$, alors $F = E$

Démonstration

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\{u_1, \cdots, u_p\}$ une famille libre de p éléments de F ; c'est, en particulier une famille libre de E.
   Cette remarque s'applique évidemment si $\{u_1, \cdots, u_p\}$ est une base de F et donc $\dim F \leqslant n$
2. Si $p = n$, c'est à dire, si $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est une base de F, c'est aussi une base de E, et donc $F = E$

3.6.9 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors, tout sous-espace vectoriel $F \subset E$ admet, dans E un supplémentaire G, c'est à dire $E = F \bigoplus G$ et ce supplémentaire G n'est, en général, pas unique

Démonstration

Soit F un sous-espace vectoriel de E

$\Longrightarrow$ Si $F = E$, alors le supplémentaire de F est alors $G = \{0_E\}$

$\Longrightarrow$ Et vice-versa, si $F = \{0_E\}$ alors le supplémentaire de F est alors E

$\Longrightarrow$ Supposons, maintenant F de dimension finie p avec $1 \leqslant p < n$.

Soit $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_p\}$ une base de F. C'est aussi une famille libre de E. D'après le théorème de la base incomplète 3.6.5, il existe des vecteurs $\{u_{p+1}, \cdots, u_n\}$ indépendants de telle sorte que la famille $\mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_p, u_{p+1}, \cdots, u_n\}$ forme une base de E.

Nous appelons $G = \operatorname{Vect}(\{u_{p+1}, \cdots, u_n\})$, et nous disons que G est un supplémentaire de F dans G, c'est à dire que $E = F \bigoplus G$.

En effet :

- Tout vecteur $u \in E$ se décompose en $u = x + y$ où $x \in F$ et $x \in G$

  En effet, si $u \in E$, alors u se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{F}$: $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$. Or, nous pouvons écrire :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i u_i}_{\in G}$$

  Ainsi, tout élément $u \in E$ est donc la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G [1]

- Nous avons $F \cap G = \{0_E\}$

  En effet, soit $x \in F \cap G$. Alors, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$ et $x = \displaystyle\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i u_i$ de telle sorte que nous ayions :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i u_i \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i - \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \Longleftrightarrow \lambda_1 u_1 + \cdots \lambda_p u_p - \lambda_{p+1} u_{p+1} - \cdots - \lambda_n u_n = 0_E$$

  De l'indépendance des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$, nous déduisons $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ d'où nous tirons $x = 0_E$

  Et nous déduisons donc que $F \cap G = \{0_E\}$

D'où nous tirons que $E = F \bigoplus G$

Du choix des vecteurs $\{u_{p+1}, \cdots, u_n\}$, on déduit bien que le choix de G n'est pas unique.

3.6.10 Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ une famille de n vecteurs de E
Le **rang** de $\mathcal{F}$ est la dimension de $\operatorname{Vect}(\{x_1, \cdots, x_n\})$

$$\operatorname{rang}(\mathcal{F}) = \dim(\operatorname{Vect}(\{x_1, \cdots, x_n\}))$$

1. La décomposition de u dans la base $\mathcal{F}$ nous laisse penser que cette décomposition est unique

Exemple 11 :

1. Considérons, dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, u_3\}$ où $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (4,5,6)$, $u_3 = (7,8,9)$.

   Par calcul simple et évident, nous avons $u_2 = \dfrac{1}{2}(u_1 + u_3)$ et, comme les vecteurs u_1 et u_3 sont linéairement indépendants, nous avons $\operatorname{rang}(\mathcal{F}) = \dim(\operatorname{Vect}(\{u_1, u_2, u_3\})) = 2$

2. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, la famille de 5 vecteurs

$$\mathcal{F} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (49,6,3,0), (-5,3,-1,0)\}$$

   est de rang 3

3. Considérons cette fois-ci $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques d'une variable réelle.
   On considère 3 fonctions f_1, f_2 et f_3 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_1(x) = 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} f_2 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_2(x) = e^x \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} f_3 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_3(x) = |x| \end{array}\right.$$

   Nous avons $\operatorname{rang}(\{f_1, f_2, f_3\}) = 3$, c'est à dire que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre et forme une base de $\operatorname{Vect}(\{f_1, f_2, f_3\})$

   Montrons que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre
   Soient donc $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est la fonction nulle. Ceci signifie donc que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 e^x + \lambda_3 |x| = 0$$

   ⋆ Pour $x = -1$, nous obtenons $\lambda_1 + \lambda_2 e^{-1} + \lambda_3 = 0$
   ⋆ Pour $x = 0$, nous avons $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$
   ⋆ Pour $x = 1$, nous obtenons $\lambda_1 + \lambda_2 e + \lambda_3 = 0$
   D'où nous obtenons le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda_1 + \lambda_2 e^{-1} + \lambda_3 = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 e + \lambda_3 = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

   La famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est donc libre

Exercice 28 :

1. On considère $\mathbb{C}^3$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3, muni de sa base canonique. Déterminer, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{C}$ le rang de la famille $\mathcal{F} = \{a, b, c\}$ où

$$a = (1, 1, \alpha) \quad b = (1, \alpha, 1) \quad c = (\alpha, 1, 1)$$

2. Même question, pour le même système considéré comme famille de vecteurs de l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

3.6.11 Définition et théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
On considère F et G 2 sous-espaces vectoriels de E de dimension finie tels que $F \cap G = \{0_E\}$. Il nous est alors possible de considérer $H = F \oplus G$. On dit que **F et G sont en somme directe**

1. Si $\{u_1, \cdots, u_p\}$ est une base de F et $\{v_1, \cdots, v_n\}$ une base de G, alors $\{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_n\}$ est une base de $H = F \oplus G$
2. Nous avons aussi $\dim H = \dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$

Démonstration

1. Si nous appelons $H = F + G = \{u \in E$ tels que $u = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G\}$.
   Comme $F \cap G = \{0_E\}$, la décomposition $u = x_F + x_G$ est unique et il est possible d'écrire $H = F \oplus G$
2. Soient $\{u_1, \cdots, u_p\}$ une base de F et $\{v_1, \cdots, v_n\}$ une base de G.
   (a) La famille $\{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_n\}$ est une famille génératrice de $H = F \oplus G$

   En effet, si $u \in H$, alors $u = x_F + x_G$ et comme $x_F = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$ et $x_g = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$ avec les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $\mu_i \in \mathbb{K}$, nous avons alors :
   $$u = x_F + x_G = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$$
   Ce qui montre que la famille $\{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_n\}$ est une famille génératrice de $H = F \oplus G$

   (b) La famille $\{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_n\}$ est une famille linéairement indépendante.
   Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p, \mu_1, \cdots, \mu_n$, $n + p$ scalaires telles que :
   $$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n = 0_E$$
   Alors
   $$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = -\mu_1 v_1 - \cdots - \mu_n v_n$$
   Posons $X = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = -\mu_1 v_1 - \cdots - \mu_n v_n$; comme $X = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$, alors $X \in F$ et comme nous avons aussi $X = -\mu_1 v_1 - \cdots - \mu_n v_n$, nous avons aussi $X \in G$, c'est à dire que $X \in F \cap G$, et donc $X = 0_E$.
   Alors, de l'indépendance de $\{u_1, \cdots, u_p\}$, nous avons :
   $$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$$
   Et, par le même argument d'indépendance de $\{v_1, \cdots, v_n\}$, nous avons
   $$\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n = 0_E \Longrightarrow \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$$
   Et donc, la famille $\{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_n\}$ est une famille linéairement indépendante.

   On conclue donc que $\{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_n\}$ est une base de $H = F \oplus G$
3. D'après ce nous venons de démontrer, nous avons $\dim H = \dim(F \oplus G) = n + p = \dim F + \dim G$

3.6.12 Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , F et G 2 sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Alors :
$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Démonstration

1. On pose $H = F \cap G$
   Alors, H est un sous-espace vectoriel de G, sous-espace vectoriel de dimension finie ; H admet, dans G, un supplémentaire G_1, et nous avons dons $G = H \oplus G_1$
2. Nous avons $F + G = F \oplus G_1$
   (a) Tout d'abord $F \cap G_1 = \{0_E\}$
   Soit $u \in F \cap G_1$; comme $G_1 \subset G$, nous avons aussi $u \in F \cap G$, c'est à dire $u \in H$ et donc $u \in H \cap G_1$; comme $H \cap G_1 = \{0_E\}$, nous avons $u = 0_E$ et donc $F \cap G_1 = \{0_E\}$
   (b) Nous avons $F + G = F + G_1$

→ Nous avons $F+G \subset F+G_1$
En effet, soit $u \in F+G$; alors $u = x_F + x_G$. Comme G est somme directe de H et G_1, nous avons, et de manière unique, $x_G = y_H + y_{G_1}$ d'où $u = x_F + x_G = x_F + y_H + y_{G_1}$. Comme $H = F \cap G$, nous avons $y_H \in F$ et donc $u = \underbrace{x_F + y_H}_{\in F} + \underbrace{y_{G_1}}_{\in G_1}$

C'est à dire $u \in F + G_1$

→ Démontrons que nous avons $F + G_1 \subset F + G$
Là, c'est évident, puisque si $u \in F + G_1$, alors $u = x_F + x_{G_1}$. Comme $G_1 \subset G$, nous avons aussi $x_{G_1} \in G$, et donc $u \in F + G$

Et donc $F + G = F + G_1$

(c) Comme F et G_1 sont en somme directe, nous avons, en fait, $F + G = F \oplus G_1$

3. Ainsi, $\dim(F+G) = \dim(F \oplus G_1) = \dim F + \dim G_1$.
Comme $G = H \oplus G_1$, nous avons $\dim G = \dim H + \dim G_1$, et en remplaçant $\dim G_1$ par $\dim G - \dim H$, nous obtenons :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim H \iff \dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Ce que nous voulions

3.6.13 Théorème du rang

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque.
Nous considérons une application linéaire $f : E \longrightarrow F$

1. On appelle rang de f, le nombre $\text{rang}(f)$ défini par $\text{rang}(f) = \dim(\text{Im} f)$
2. Nous avons : $\dim(\text{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim E$

Démonstration

1. **Nous commençons par un commentaire**

(a) Tout d'abord, il faut remarquer que seul le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie, alors que F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, et, surtout, pas forcément de dimension finie.

(b) Si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de E, $\text{Im} f = f(E)$ admet pour famille génératrice, la famille $\{f(e_1), \cdots, f(e_n)\}$. Ainsi, $\dim(\text{Im} f) = \text{rang}(\{e_1, \cdots, e_n\})$, et il n'est donc pas aberrant de parler du rang de f en posant :

$$\text{rang}(f) = \text{rang}(\{e_1, \cdots, e_n\}) = \dim(\text{Im} f)$$

2. **Démontrons le théorème du rang**

(a) Si $\ker f = \{0_E\}$, alors $\dim(\ker f) = 0$ et f est injective. Si la famille $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de E, alors la famille $\{f(e_1), \cdots, f(e_n)\}$ est libre, forme une base de $\text{Im} f$ et donc $\dim(\text{Im} f) = n$. Nous avons bien, dans ce cas, l'égalité

$$\dim(\text{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim E$$

(b) Supposons, maintenant, que $\ker f \neq \{0_E\}$ et $\dim(\ker f) = p$ où $1 \leqslant p \leqslant n$.
Soit alors $\{x_1, \cdots, x_p\}$ une base de $\ker f$ que nous complétons par des vecteurs $\{x_{p+1}, \cdots, x_n\}$ de telle sorte que $\{x_1, \cdots, x_p, x_{p+1}, \cdots, x_n\}$ forme une base de E

i. La famille $\{f(x_{p+1}), \cdots, f(x_n)\}$ est génératrice de $\text{Im} f$

En effet, soit $y \in \text{Im} f$; il existe donc $u \in E$ tel que $y = f(u)$, et, dans la base $\{x_1, \cdots, x_p, x_{p+1}, \cdots, x_n\}$, nous avons $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, d'où $f(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Or, pour $i = 1, \cdots, p$, nous avons $f(x_i) = 0_F$, de telle sorte que

$$y = f(u) = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Ainsi, tout $y \in \mathrm{Im} f$ s'écrit en fonction de $\{f(x_{p+1}), \cdots, f(x_n)\}$ et nous pouvons en déduire que la famille de vecteurs de F $\{f(x_{p+1}), \cdots, f(x_n)\}$ est génératrice de $\mathrm{Im} f$

ii. <u>La famille $\{f(x_{p+1}), \cdots, f(x_n)\}$ est une famille libre de E</u>
Soient $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-p}$, $n-p$ scalaires tels que

$$\alpha_1 f(x_{p+1}) + \alpha_2 f(x_{p+2}) + \cdots + \alpha_{n-p} f(x_n) = 0_F$$

Alors,

$$\begin{gathered} \alpha_1 f(x_{p+1}) + \alpha_2 f(x_{p+2}) + \cdots + \alpha_{n-p} f(x_n) = 0_F \\ \Longleftrightarrow \\ f(\alpha_1 x_{p+1} + \alpha_2 x_{p+2} + \cdots + \alpha_{n-p} x_n) = 0_F \end{gathered}$$

Ce qui veut dire que $\alpha_1 x_{p+1} + \alpha_2 x_{p+2} + \cdots + \alpha_{n-p} x_n \in \ker f$, et donc est combinaison linéaire des vecteurs $\{x_1, \cdots, x_p\}$, et donc :

$$\begin{gathered} \alpha_1 x_{p+1} + \alpha_2 x_{p+2} + \cdots + \alpha_{n-p} x_n = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_p x_p \\ \Longleftrightarrow \\ \alpha_1 x_{p+1} + \alpha_2 x_{p+2} + \cdots + \alpha_{n-p} x_n - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \cdots - \lambda_p x_p = 0_E \end{gathered}$$

La famille $\{x_1, \cdots, x_p, x_{p+1}, \cdots, x_n\}$ formant une base de E, nous avons

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots + \alpha_{n-p} = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$$

Ce qui montre que la famille $\{f(x_{p+1}), \cdots, f(x_n)\}$ est une famille libre de E

En conclusion, la famille $\{f(x_{p+1}), \cdots, f(x_n)\}$ est une base de E
Donc, $\dim(\mathrm{Im} f) = n - p$.
Ainsi, $\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\ker f) = n - p + p = n = \dim E$

Remarque 23 :

Dans la démonstration précédente, nous avons choisi des bases adaptées au problème à résoudre. C'est un principe qui facilite grandement les démonstrations.

Exemple 12 :

Nous allons prendre des exemples de base adaptéee dans $\mathbb{K}_n[X]$

1. Dans $\mathbb{K}_n[X]$ on étudie 1'application linéaire D définie par $D(P) = P'$ où P' est le polynôme dérivé de P

   Une base adaptée sera formée des polynômes $E_k = \dfrac{X^k}{k!}$ avec $k = 0, \cdots, n$ dont les transformées par D sont de la même forme ; en effet, nous avons, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $D(E_k) = E_{k-1}$ et $D(E_0) = 0$
2. Mais si on étudie l'application linéaire V définie par $V(P)(x) = P(x+1) - P(x)$, on vérifiera que la base formée des poiynomes $F_k(X) = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-(k-1))}{k!}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$, est adepte car nous avons $V(P_k) = P_{k-1}$ si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $V(P_0) = 0$

3.6.14 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n
Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E.
Les 4 propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est un automorphisme de E
2. f est injective
3. f est surjective
4. $\text{rang}\,(f) = n$

Démonstration

Une application linéaire $f : E \longrightarrow E$ est un automorphisme de E, veut dire que f est une application linéaire bijective de E dans E.

1. On suppose que f est un automorphisme de E
   f est, par définition, bijective, donc f est injective
2. On suppose que f est injective
   Alors, $\ker f = \{0_E\}$ et de $\dim(\ker f) = 0$, on tire $\dim(\text{Im} f) = n$, et donc $\text{Im} f = E$ et f est bien surjective.
3. On suppose que f est surjective
   Alors $\dim(\text{Im} f) = n$ et donc, $\text{rang}\,(f) = n$
4. On suppose que $\text{rang}\,(f) = n$
   Alors $\dim(\text{Im} f) = n$ et donc $\dim(\ker f) = 0$, d'où f est surjective et injective. Donc bijective

3.7 Espaces d'applications linéaires

3.7.1 Introduction

Soit E un ensemble quelconque et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tout aussi quelconque.
Nous allons considérer $F^E = \mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F. Nous construisons, pour $\mathcal{F}(E, F)$ 2 lois de composition :

1. **Une opération d'addition**
   Pour définir cette opération d'addition, nous utilisons les outils habituels :
   Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(E, F)$, nous définissons la fonction $f + g \in \mathcal{F}(E, F)$ par :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} f + g : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array} \right.$$
   On démontre facilement que cette addition est commutative, associative, admet un élément neutre *(la fonction nulle)*, et chaque fonction $f \in \mathcal{F}(E, F)$ admet un symétrique pour l'opération d'addition : $-f$.
   Muni de cette opération, $(\mathcal{F}(E, F), +)$ est un groupe commutatif
2. **Une loi externe**
   De la même manière, pour définir cette loi externe, nous utilisons les outils habituels :
   Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, nous définissons la fonction $\lambda f \in \mathcal{F}(E, F)$ par :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} (\lambda f)\, E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \end{array} \right.$$

On démontre facilement que, **muni de ces deux lois,** $\mathcal{F}(E, F)$ **est un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel .**
Il est intéressant de remarquer que cette structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$ dépendent uniquement de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de F

Exercice 29 :

$\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$; c'est, en fait, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites numériques complexes.

1. Soient $a_1 \in \mathbb{C}$ et $a_2 \in \mathbb{C}$ 2 scalaires complexes
   Nous appelons F le sous-ensemble $F \subset \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ défini par :
   $$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \text{ telles que pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ nous avons } f(n) + a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) = 0\}$$
   Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.
   Cet ensemble est l'ensemble des suites vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 2
2. Soit Φ une application de F dans $\mathbb{C}^2$ ainsi définie :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : F & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ f & \longmapsto & \Phi(f) = (f(0), f(0)) \end{array} \right.$$
   Démontrer que Φ est un isomorphisme de F vers $\mathbb{C}^2$
   Quelle est la dimension de F ?
3. Touver tous les éléments $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = \alpha^n$ soit dans F.
4. Trouver une base de F lorsque $a_1^2 \neq 4a_2$.
5. On suppose que $a_1^2 = 4a_2$. Montrer que si $\gamma \in \mathbb{C}$ vérifie $\gamma^2 + a_1\gamma + a_2 = 0$, alors, la fonction $h \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $h(n) = n\gamma^n$ est dans F. Trouver une base de F

3.7.2 Définition et théorème

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels
On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F
$\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$

Démonstration

1. Tout d'abord $\mathcal{L}(E, F) \neq \emptyset$ puisque l'application nulle $\mathcal{O}_{E \to F}$ est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$
   Rappel de ce qu'est $\mathcal{O}_{E \to F}$:
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{E \to F} : E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \mathcal{O}_{E \to F}(u) = 0_F \end{array} \right.$$
   La démonstration de la linéarité de $\mathcal{O}_{E \to F}$ est simple
2. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Il faut donc montrer que $\lambda u + \mu v \in \mathcal{L}(E, F)$.
   Soient donc $x \in E$, $y \in E$, $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$. Alors :
   $$\begin{array}{rcl} (\lambda u + \mu v)(ax + by) = & & (\lambda u)(ax + by) + (\mu v)(ax + by) \\ & = & (\lambda u)(ax) + (\lambda u)(by) + (\mu v)(ax) + (\mu v)(by) \\ & = & \lambda u(ax) + \lambda u(by) + \mu v(ax) + \mu v(by) \\ & = & a\lambda u(x) + b\lambda u(y) + a\mu v(x) + b\mu v(y) \text{ linéarité} \\ & = & a\lambda u(x) + a\mu v(x) + b\lambda u(y) + b\mu v(y) \\ & = & a(\lambda u)(x) + a(\mu v)(x) + b(\lambda u)(y) + b(\mu v)(y) \\ & = & a[(\lambda u)(x) + (\mu v)(x)] + b[(\lambda u)(y) + (\mu v)(y)] \\ & = & a[(\lambda u + \mu v)(x)] + b[(\lambda u + \mu v)(y)] \end{array}$$
   Nous venons de montrer que $\lambda u + \mu v$ est linéaire et que, donc, $\lambda u + \mu v \in \mathcal{L}(E, F)$

$\mathcal{L}(E, F)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$

3.7.3 Proposition

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **dimension finie**. On suppose $\dim E = m$ et $\dim F = n$
Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F = mn$

Démonstration

1. Soit $\{e_1, \ldots, e_m\}$ une base de E et soit $\Phi : \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow F^m$ une application définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & F^m \\ u & \longmapsto & \Phi(u) = (u(e_1), \ldots, u(e_m)) \end{array} \right.$$

2. Par hypothèse, F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et comme produit cartésien F^m est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $m \times \dim F = mn$. Il suffit de voitr que F, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ et donc que F^m est isomorphe à $(\mathbb{K}^n)^m = \mathbb{K}^{mn}$
3. **Φ est un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et F^m**
En effet,
   (a) Φ est linaire
   $\Rightarrow$ Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(E, F)$, alors :

$$\begin{array}{rl} \Phi(u+v) = & ((u+v)(e_1), \ldots, (u+v)(e_m)) \\ = & (u(e_1) + v(e_1), \ldots, u(e_m) + v(e_m)) \\ = & (u(e_1), \ldots, u(e_m)) + (v(e_1), \ldots, v(e_m)) \\ = & \Phi(u) + \Phi(v) \end{array}$$

   Donc, $\Phi(u+v) = \Phi(u) + \Phi(v)$
   $\Rightarrow$ Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$\begin{array}{rl} \Phi(\lambda u) = & ((\lambda u)(e_1), \ldots, (\lambda u)(e_m)) \\ = & (\lambda u(e_1), \ldots, \lambda u(e_m)) \\ = & \lambda(u(e_1), \ldots, u(e_m)) \\ = & \lambda \Phi(u) \end{array}$$

   Donc, $\Phi(\lambda u) = \lambda \Phi(u)$
   Φ est donc linéaire
   (b) Φ est bijective
   $\Rightarrow$ Montrons que Φ est injective en recherchant son noyau $\ker \Phi$; nous avons :

$$u \in \ker \Phi \Longleftrightarrow \Phi(u) = 0_{F^m} = (0_F, \ldots, 0_F)$$

   Ce qui veut dire que $u(e_1) = u(e_2) = \cdots = u(e_m) = 0_F$ et donc que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est la fonction nulle $\mathcal{O}_{E \to F}$ et donc $\ker \Phi = \{\mathcal{O}_{E \to F}\}$
   Φ est donc injective
   $\Rightarrow$ Montrons que Φ est surjective.
   Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_m) \in F^m$. Une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée des images de ses vecteurs de base. Il existe donc une et une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, $u(e_i) = f_i$.
   En d'autres termes, il existe une et une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\Phi(u) = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$
   Φ est donc surjective
   $\Rightarrow$ Comme Φ est à la fois surjective et injective, elle est donc bijective.
   (L'unicité de l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ du point précédent est aussi une marque de la bijection)
   Φ est donc un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et F^m
4. De l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et F^m, nous déduisons que $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim F^m = mn$

3.7.4 Définition et théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E ; alors

1. $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un **anneau unitaire** d'unité Id_E l'application identique de E

Démonstration

1. Le fait que $\mathcal{L}(E)$ soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un cas particulier du théorème 3.7.2 qui dit que $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. On sait, déjà que $(\mathcal{L}(E), +)$ est un groupe abélien, que la composition de 2 applications linéaires est une application linéaire et que cette même composition est associative. Il reste à montrer que la composition est distributive par rapport à l'addition.
   Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $v \in \mathcal{L}(E)$ et $w \in \mathcal{L}(E)$; alors, pour tout $x \in E$, nous avons :
   $$\begin{aligned} [u \circ (v + w)](x) &= u[(v + w)(x)] \\ &= u[v(x) + w(x)] \\ &= u[v(x)] + u[w(x)] \\ &= u \circ v(x) + u \circ w(x) \\ &= [u \circ v + u \circ w](x) \end{aligned}$$
   Et nous avons donc $u \circ (v + w) = u \circ v + u \circ w$; il y a donc distributivité.

Remarque 24 :

1. L'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ n'est, en général pas commutatif
   Considérons, par exemple, dans $\mathbb{R}[X]$ les 2 applications linéaires suivantes :
   $$\begin{cases} D : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ \quad P & \longmapsto & D(P) = P' \end{cases} \qquad \begin{cases} I : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ \quad P & \longmapsto & I(P) = \displaystyle\int_0^X P(t)\, \mathrm{d}t \end{cases}$$
   Alors, pour $P(X) = 1$, nous avons :
   $$(D \circ I)\, P(X) = 1 \text{ alors que } (I \circ D)\, P(X) = 0$$
   Nous avons donc $I \circ D \neq D \circ I$
2. On appelle $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$. On l'appelle le **groupe linéaire** C'est aussi le groupe des automorphismes de E
3. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, u^n désigne donc Id_E si $n = 0$ et $\underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$
4. Comme dans tout anneau, deux formules importantes sont vraies dans $\mathcal{L}(E)$
   - ⋆ La formule du binôme $(f + g)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$
   - ⋆ $f^n - g^n = (f - g) \circ \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-k-1} \right)$

   pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et tout $g \in \mathcal{L}(E)$ **QUI COMMUTENT**.
5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **nilpotent** si $f^k = \mathcal{O}_E$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Le plus petit de ces entiers k est alors appelé **l'indice de nilpotence** de f .

Exercice 30 :

E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , on appelle projecteur tout endomorphisme p de E, tel que $p^2 = p \circ p = p$. On désigne par Id_E l'identité de E.

1. Démontrer que p est un projecteur si et seulement si $(\mathrm{Id}_E - p)$ en est un.
2. Montrer que si p est un projecteur, alors les relations suivantes sont vérifiées :

$\rightarrow$ $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p) = \ker p$ $\rightarrow$ $\ker\,(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im} p$

3. Démontrer que si p est un projecteur, alors $E = \mathrm{Im} p \oplus \ker p$
4. Démontrer qu'un projecteur p commute avec un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si son noyau et son image sont stables par u.

Exercice 31 :

E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n où $n \geqslant 2$, on désigne par f un endomorphisme non nul de E ($f \in \mathcal{L}(E)$) commutant avec tout automorphisme de E.

1. Montrer que si x et y sont deux éléments linéairement indépendants de E, il existe un automorphisme $u \in \mathrm{GL}(E)$ de E tel que $u(x) = x$ et $u(y) = x + y$
2. Soit $a \in E$ un élément de E n'appartenant pas à $\ker f$. Démontrer que les vecteurs a et $b = f(a)$ sont liés. En déduire l'existence d'un élément $\lambda(a)$ de $\mathbb{K}$ tel que $f(a) = \lambda(a)\,a$
3. Démontrer que $\lambda(a)$ ne dépend pas de a.
4. Quel est le centre de l'anneau $\mathcal{L}(E)$?

Exercice 32 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On pose :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \quad f^k = f^{k-1} \circ f (k \geqslant 1) \quad N_k = \ker f^k \quad I_k = \mathrm{Im} f^k$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel k, on a :
$$N_k \subset N_{k+1} \text{ et } I_{k+1} \subset I_k$$
2. Démontrer qu'il existe un entier naturel r_0 tel que pour $k < r_0$ on ait $N_k \neq N_{k+1}$, et pour $k \geqslant r_0$, $N_k = N_{k+1}$
3. Démontrer que pour $k \leqslant r_0$,$I_k \neq I_{k+1}$ et pour $k > r_0$, $I_k = I_{k+1}$
4. Démontrer que $E = I_{r_0} \oplus N_{r_0}$
5. Démontrer que la restriction de f à I_{r_0} induit une fonction de I_{r_0} dans I_{r_0} qui est un automorphisme de I_{r_0}

3.8 Formes linéaires

3.8.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On appelle **forme linéaire** toute application linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$
On appelle **espace dual** et on le note souvent E^* l'ensemble des formes linéaires $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$

Remarque 25 :

1. Une forme linéaire est donc un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$; nous avons donc $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Comme vu précédemment, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. Pour toute forme linéaire $f \in E^*$, l'image de x par f peut être écrite $f(x)$ ou $\langle f/x \rangle$

Exemple 13 :

1. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut considérer l'application linéaire Φ_a, avec $a \in \mathbb{R}$ définie par :
$$\begin{cases} \Phi_a : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\qquad f & \longmapsto \Phi_a(f) = f(a) \end{cases}$$
Φ_a est une forme linéaire

2. Par contre, dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions numériques continuement dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, l'application linéaire Ψ_a, avec $a\in\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Psi_a:\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ f & \longmapsto & \Psi_a(f)=(f'(a))^2\end{array}\right.$$

   n'est pas une forme linéaire.
   En effet, si f est, par exemple, la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=(1+i)x$; alors, $f'(x)=(1+i)$ et $\Psi_a(f)=(1+i)^2$
   Nous avons $(2f)(x)=2f(x)=2(1+i)x$ d'où $(2f)'(x)=2f'(x)=2(1+i)$, d'où

$$\Psi_a(2f)=(2(1+i))^2=4(1+i)^2=4\Psi_a(f)$$

   Il n'y a donc pas linéarité ; nous n'avons pas $\Psi_a(\lambda f)=\lambda\Psi_a(f)$ pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$

3. Dans $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on peut considérer l'application linéaire I définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}I:\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ f & \longmapsto & I(f)=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$$

   I est une forme linéaire

4. Dans $\mathbb{C}[X]$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$, on peut considérer l'application linéaire S qui à un polynômes P fait correspondre la somme des coefficients :

$$\left\{\begin{array}{rcl}S:\mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ P(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k & \longmapsto & S(P)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\end{array}\right.$$

   S est une forme linéaire

Remarque 26 :

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, d'après le théorème du rang, pour toute forme linéaire f, $\dim\ker f+\dim\mathbb{K}=\dim E=n\iff\dim\ker f+1=n\iff\dim\ker f=n-1$
Le noyau d'une forme linéaire f est donc un hyperplan.
Etant donné un hyperplan $H\subset E$, il y a plusieurs *(une infinité même !)* formes linéaires qui admettent H comme noyau

3.8.2 Définition et théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E

1. On appelle e_i^* l'application linéaire qui, à tout $x\in E$ fait correspondre la composante de x sur le vecteur e_i, c'est à dire :

$$\left\{\begin{array}{rcl}e_i^*:E & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ x=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_ie_i & \longmapsto & e_i^*(x)=x_i\end{array}\right.$$

2. $\{e_1^*,\dots,e_n^*\}$ forme une base de $E^*=\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ qui est donc de même dimension que E.
3. La base $\{e_1^*,\dots,e_n^*\}$ est caractérisée par :

$$(\forall 1\leqslant i\leqslant n)(\forall 1\leqslant j\leqslant n)\left(e_i^*(e_j)=\left\{\begin{array}{ll}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{array}\right.\right)$$

Démonstration

1. Il est, bien entendu évident, d'après la définition de e_i^*, que, pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$, $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker
2. Démontrons, maintenant, que la famille $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ forme une base de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$
   $\Rightarrow$ **C'est une famille génératrice de E^***
   Soit $f \in E^*$.
   Alors, tout $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et donc, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^*(x)$, en remarquant que, par définition, $e_i^*(x) = x_i$.
   Ainsi, pour tout $x \in E$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^*(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^*\right)(x)$ et nous avons donc $f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^*$
   f est donc combinaison linéaire des $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$, et la famille $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est donc génératrice.
   $\Rightarrow$ **C'est une famille libre de E^***
   Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, n scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = \mathcal{O}$, ce qui veut dire que, pour tout $x \in E$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(x) = 0$.
   En particulier, pour tout vecteur e_j de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E :
   $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(e_j) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{i,j} = 0 \Longleftrightarrow \lambda_j = 0$$
   Et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$
   Ainsi, la famille $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est libre.
   Libre et génératrice, la famille $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est une base de E^*
   Nous en déduisons que $\dim E^* = n$

Remarque 27 :

1. Il est clair que les coordonnées de $f \in E^*$ sont $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ dans la base $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$.
2. Il existe donc un isomorphisme linéaire $u : E \longrightarrow E^*$, tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $u(e_i) = e_i^*$.
   Cet isomorphisme dépend essentiellement de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ choisie.
   Ainsi, étant donnée une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E, il existe une et une seule base $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ de E^* telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$; ...et réciproquement : étant donnée une base $\{f_1^*, \dots, f_n^*\}$ de E^*, il existe une et une seule base $\{f_1, \dots, f_n\}$ de Ef telle que $f_i^*(f_j) = \delta_{i,j}$

Exercice 33 :

On considère $\mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique classique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.
On considère, maintenant, la base duale de $\left(\mathbb{R}^4\right)^\star = \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}\right)$, $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*\}$ et les formes linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4 de coordonnées, dans les bases duales :

$$f_1 = (1, 0, -\lambda, 0) \quad f_2 = \left(0, 1, 0, \frac{-1}{\lambda}\right) \quad f_3 = (1, 0, 0, -\mu) \quad f_4 = \left(0, 1, 0, \frac{-1}{\mu}\right)$$

Avec $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$
Etudier l'indépendance de ces formes linéaires, et trouver, lorsqu'elles sont indépendantes, la base de $\mathbb{R}^4$, duale de $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

Exercice 34 :

Cet exercice est exactement le même que celui ci-dessus. C'est seulement l'ensemble de référence qui change ; ici, ce seront les polynômes $\mathbb{K}_2[X]$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à 2. On considère les formes linéaires Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3 définies par :

$$\begin{cases} \Psi_1 : \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & \Psi_1(P) = P(1) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Psi_2 : \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & \Psi_2(P) = P'(1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Psi_3 : \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & \Psi_3(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

1. Démontrer que la famille $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ est une base de $(\mathbb{K}_2[X])^*$
2. En déterminer la base duale dans $\mathbb{K}_2[X]$

3.8.3 Définition de droite vectorielle

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
Soit $a \in E$ tel que $a \neq 0_E$. Nous appelons $\mathbb{K}a$ l'ensemble suivant :

$$\mathbb{K}a = \{u \in E \text{ tels que } u = \lambda a \text{ où } \lambda \in \mathbb{K}\}$$

L'ensemble $\mathbb{K}a$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 appelé **droite vectorielle**

Démonstration

La démonstration que $\mathbb{K}a$ est un sous-espace vectoriel de E est évidente. La définition de droite vectorielle a déjà été donnée

Remarque 28 :

Il nous serait tout aussi possible de définir de la même manière **un plan vectoriel** :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
Soit $a \in E$, $b \in E$ tels que $a \neq 0_E$, $b \neq 0_E$ et a et b non colinéaires. Nous appelons $\mathbb{K}a + \mathbb{K}b$ l'ensemble suivant :

$$\mathbb{K}a + \mathbb{K}b = \{u \in E \text{ tels que } u = \lambda a + \mu b \text{ où } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } \mu \in \mathbb{K}\}$$

L'ensemble $\mathbb{K}a + \mathbb{K}b$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 appelé **plan vectoriel**

Voir aussi page 76

3.8.4 Définition d'hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace vectoriel H de E qui admet une droite vectorielle pour supplémentaire.

Remarque 29 :

1. Ceci veut donc dire qu'il existe $a \in E$ tel que $a \notin H$ et $a \neq 0$ et $E = H \oplus \mathbb{K}a$
2. **Si E est de dimension finie** n, cela équivaut à $\dim H = n - 1$

3.8.5 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
Si H est un hyperplan de E, alors, pour tout vecteur $b \notin H$ non nul, nous avons $E = H \oplus \mathbb{K}b$.

Démonstration

C'est un résultat assez remarquable qui ne pose pas de difficultés dans la démonstration.
H est un hyperplan et donc, par définition, il existe $a \in E$ tel que $a \notin H$ et $E = H \oplus \mathbb{K}a$
Soit $b \notin H$

$\Rightarrow$ Montrons que $\mathbb{K}b \cap H = \{0_E\}$
Soit $x \in \mathbb{K}b \cap H$, alors $x = \lambda b$. Si $\lambda b \in H$ pour tout $\lambda \neq 0$, comme H est un sous-espace vectoriel de E, pour tout $\mu \in \mathbb{K}$, $\mu x = \mu\lambda x \in H$, en particulier pour $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ qui nous montre qu'alors $b \in H$; ce qui est contradictoire.
Donc $x = \lambda b \notin H$ sauf pour $\lambda = 0$.
Le seul élément commun à H et $\mathbb{K}b$ est 0_E et donc $\mathbb{K}b \cap H = \{0_E\}$

$\Rightarrow$ Montrons que $\mathbb{K}b + H = E$
Soit $x \in E$.
Nous allons démontrer que nous pouvons écrire $x = h + \mu b$ avec $h \in H$ et $\mu \in \mathbb{K}$
Tout d'abord, comme $E = H \oplus \mathbb{K}a$, nous pouvons écrire, et de manière unique :
- ⋆ $x = h_x + \lambda_x a$
- ⋆ $b = h_b + \lambda_b a$ avec $\lambda_b \neq 0$, puisque $b \notin H$

De la seconde égalité, nous tirons $a = \dfrac{1}{\lambda_b}(b - h_b)$, expression que nous pouvons remplacer dans $x = h_x + \lambda_x a$:

$$x = h_x + \lambda_x a \Longleftrightarrow x = h_x + \lambda_x \left(\frac{1}{\lambda_b}(b - h_b)\right) \Longleftrightarrow x = \left(h_x - \frac{\lambda_x}{\lambda_b} h_b\right) + \frac{1}{\lambda_b} b$$

Or, $\left(h_x - \dfrac{\lambda_x}{\lambda_b} h_b\right) \in H$ et $\dfrac{1}{\lambda_b} b \in \mathbb{K}b$
Ainsi, tout $x \in E$ peut s'écrire $x = h + \mu b$ avec $h \in H$ et $\mu \in \mathbb{K}$ et donc $\mathbb{K}b + H = E$

Nous venons de démontrer que $\mathbb{K}b + H = E$ et $\mathbb{K}b \cap H = \{0_E\}$, nous avons donc $E = H \oplus \mathbb{K}b$
Ce que nous voulions

3.8.6 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

1. Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$, non nulle, telle que $H = \ker \varphi$
2. Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E telles que $\ker \varphi = \ker \psi$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$

Démonstration

1. **Démontrons l'équivalence du premier point**

$\Rightarrow$ Soit H un hyperplan de E
Alors, il existe $a \in E$ tel que $a \notin H$ et $E = H \oplus \mathbb{K}a$.
Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\begin{cases} \varphi : E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = h + \lambda a & \longmapsto & \varphi(x) = \lambda \end{cases}$$

φ est linéaire et donc $\varphi \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

Soient $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$. Alors :
- ⋆ Comme $E = H \oplus \mathbb{K}a$, nous pouvons écrire, et de manière unique, $x_1 = h_1 + \lambda_1 a$ et $x_2 = h_1 + \lambda_2 a$ où $h_1 \in H$ et $h_2 \in H$ et nous avons :

$$\varphi(x_1) = \lambda_1 \text{ et } \varphi(x_2) = \lambda_2$$

- ⋆ Dès lors,

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha(h_1 + \lambda_1 a) + \beta(h_2 + \lambda_2 a) = (\alpha h_1 + \beta h_2) + (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2) a$$

H étant un sous-espace vectoriel , $(\alpha h_1 + \beta h_2) \in H$ et donc :

$$\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2) = (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2) = \alpha\varphi(x_1) + \beta\varphi(x_2)$$

φ est donc linéaire

Maintenant :

$$x \in \ker\varphi \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(h + \lambda a) = \varphi(h) + \lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$$

puisque $\varphi(h) = 0$
Et donc, $x = h$, ce qui sous-entend que $x \in H$ et donc $\ker\varphi = H$

$\Rightarrow$ Soit $\varphi \in E^*$ une forme linéaire non nulle et on note $H = \ker\varphi$
Nous allons démontrer que H est un hyperplan
φ étant non nulle, il existe $b \in E$ tel que $\varphi(b) \neq 0$.
Posons $a = \dfrac{1}{\varphi(b)}b$, nous avons alors $\varphi(a) = 1$
Nous allons montrer alors que $E = H \oplus \mathbb{K}a$, ce qui prouvera que H est un hyperplan.

⋆ Tout d'abord, montrons que $H \cap \mathbb{K}a = \{0_E\}$
Soit $x \in H \cap \mathbb{K}a$, alors, comme $x \in \mathbb{K}a$, nous avons $x = \lambda a$ et comme $x \in H$, $\varphi(x) = 0$, d'où nous déduisons

$$\varphi(\lambda a) = 0 \Longleftrightarrow \lambda\varphi(a) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$$

Donc $x = 0_E$ et donc $H \cap \mathbb{K}a = \{0_E\}$

⋆ Montrons, maintenant, que $E = H + \mathbb{K}a$
C'est à dire que tout $x \in E$ peut s'écrire de la forme $x = h + \lambda a$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
Ecrivons $x = \varphi(x)a + (x - \varphi(x)a)$
▷ De manière évidente, comme $\varphi(x) \in \mathbb{K}$, nous avons $\varphi(x)a \in \mathbb{K}a$
▷ D'autre part :

$$\varphi(x - \varphi(x)a) = \varphi(x) - \varphi(x)\varphi(a) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$$

Et donc, $(x - \varphi(x)a) \in \ker\varphi = H$
Ainsi, tout $x \in E$ peut s'écrire de la forme $x = h + \lambda a$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$
Et donc $E = H \oplus \mathbb{K}a$

2. **Montrons le second point**
Soient $\varphi \in E^*$ et $\psi \in E^*$ telles que $\ker\varphi = \ker\psi$. Notons $H = \ker\varphi$.
Il existe alors $a \notin H$ tel que $\varphi(a) \neq 0$ et $E = H \oplus \mathbb{K}a$.
Soit $\lambda = \dfrac{\psi(a)}{\varphi(a)}$. Alors, pour tout $x \in E$ que nous écrivons $x = h + ka$ avec $k \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \psi(h + ka) \\
&= \psi(h) + k\psi(a) \\
&= k\psi(a) \\
&= k \times \lambda\varphi(a) \\
&= \varphi(h) + k \times \lambda\varphi(a) \\
&= \lambda\varphi(h) + k \times \lambda\varphi(a) \\
&= \lambda(\varphi(h) + k\varphi(a)) \\
&= \lambda\varphi(h + ka) = \lambda\varphi(x)
\end{aligned}$$

De $\psi(x) = \lambda\varphi(x)$ pour tout $x \in E$, nous déduisons que $\psi = \lambda\varphi$

3.8.7 Equation d'un hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
Si H est un hyperplan de E tel que $H = \ker\varphi$ où $\varphi \in E^*$ et φ non nulle, l'équation $\varphi(x) = 0$ est l'équation de l'hyperplan H

Remarque 30 :

Cette définition est valable pour tous les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

3.9 Transposition

3.9.1 Définition de forme bilinéaire

Soit E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels .
On appelle **forme bilinéaire** sur $E \times F$ toute application $\Psi : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Psi : E \times F & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u, v) & \longmapsto & \Psi((u, v)) \end{array} \right.$$

qui vérifie :

$\Rightarrow$ Pour tout $u_1 \in E$ tout $u_2 \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $\mu \in \mathbb{K}$ et tout $v \in F$:

$$\Psi((\lambda u_1 + \mu u_2, v)) = \lambda \Psi((u_1, v)) + \mu \Psi((u_2, v))$$

$\Rightarrow$ Pour tout $v_1 \in F$ tout $v_2 \in F$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $\mu \in \mathbb{K}$ et tout $u \in E$:

$$\Psi((u, \lambda v_1 + \mu v_2)) = \lambda \Psi((u, v_1)) + \mu \Psi((u, v_2))$$

Remarque 31 :

On dit, parfois, que Ψ est linéaire en chacune des variables

3.9.2 Définition et théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E^* son espace dual.
On définit une application $\Psi : E \times e^* \longrightarrow \mathbb{K}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Psi : E \times E^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, f) & \longmapsto & \Psi((x, f)) = \langle x/f \rangle = f(x) \end{array} \right.$$

Alors, cette application Ψ est une forme bilinéaire. Elle est appelée **forme bilinéaire canonique** définie sur $E \times E^*$.
L'expression $\langle x/f \rangle$ est appelée **crochet de dualité**

Démonstration

La démonstration est simple et liée, d'une part à la linéarité des formes linéaires et à la définition des opérations sur les applications linéaires

1. Soient $x \in E$, $y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{K}$ et $f \in E^*$; alors :

$$\langle \lambda x + \mu y / f \rangle = f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda \langle x/f \rangle + \mu \langle y/f \rangle$$

2. Soient $f \in E^*$, $g \in E^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{K}$ et $x \in E$; alors :

$$\langle x / \lambda f + \mu g \rangle = (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \langle x/f \rangle + \mu \langle x/g \rangle$$

Voilà, c'est tout !!

Remarque 32 :

A partir de ce crochet de dualité, il est possible de donner d'autres définitions et d'explorer les espaces créés par ces définitions.

1. Soit $x \in E$; on note $\tilde{x}$ l'application $\tilde{x} : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$, définie par :

$$\begin{cases} \tilde{x} : E^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \quad f & \longmapsto & \tilde{x}(f) = \langle x/f \rangle = f(x) \end{cases}$$

   (a) $\tilde{x}$ est linéaire ; c'est une forme linéaire sur E^* et donc $\tilde{x}$ est un élément du dual de E^* ; donc $\tilde{x} \in (E^*)^*$

   (b) Considérons $\Psi : E^* \times (E^*)^* \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\begin{cases} \Psi : E^* \times (E^*)^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \quad (f, \tilde{x}) & \longmapsto & \Psi[(f, \tilde{x})] = \tilde{x}(f) = \langle f/\tilde{x} \rangle \end{cases}$$

   C'est la forme bilinéaire canonique définie sur $E^* \times (E^*)^*$, et nous avons, pour tout $x \in E$ et tout $f \in E^*$:

$$\langle f/\tilde{x} \rangle = \tilde{x}(f) = f(x) = \langle x/f \rangle$$

   Et donc, $\langle f/\tilde{x} \rangle = \langle x/f \rangle$

   (c) L'application $F : E \longrightarrow (E^*)^*$ définie pour tout $x \in E$ par $F(x) = \tilde{x}$ est linéaire

2. On dit que $x \in E$ et $y^* \in E^*$ sont <u>orthogonaux</u>[2] si $\langle x/y^* \rangle = y^*(x) = 0$

   (a) Si $y^* \in E^*$ est fixé dans E^*, l'orhtogonal de y^*, noté $(y^*)^\circ$ est l'ensemble

$$(y^*)^\circ = \{x \in E \text{ tel que } \langle x/y^* \rangle = 0\}$$

   C'est, en fait, le noyau de y^*. Nous avons donc $(y^*)^\circ = \ker y^*$; c'est un sous-espace vectoriel de E ; c'est même un hyperplan de E

   (b) Pour $x \in E$, l'orthogonal de x noté $(\{x\})^\circ$ est défini par :

$$(\{x\})^\circ = \{y^* \in E^* \text{ tel que } \langle x/y^* \rangle = 0\}$$

   Nous avons $(\{x\})^\circ \subset E^*$; c'est même un sous-espace vectoriel de E^*

   (c) Plus généralement, si $X \subset E$, l'orthogonal de X noté $(X)^\circ$ est défini par :

$$(X)^\circ = \{y^* \in E^* \text{ tel que pour tout } x \in X \text{ nous avons } \langle x/y^* \rangle = 0\}$$

   Nous avons $(X)^\circ \subset E^*$; c'est même un sous-espace vectoriel de E^*

Exercice 35 :

1. Démontrer que, pour tout $x \in E$, $\tilde{x}$ est linéaire, que $\Psi : E^* \times (E^*)^* \longrightarrow \mathbb{K}$ est bilinéaire et que $F : E \longrightarrow (E^*)^*$ est linéaire
2. Démontrer que si $X \subset E$, alors $(X)^\circ$ est un sous-espace vectoriel de E^*

3.9.3 Théorème et définition de transposée

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire ($f \in \mathcal{L}(E, F)$)
L'application ${}^t f : F^* \longrightarrow E^*$ définie par :

$$\begin{cases} {}^t f : F^* & \longrightarrow & E^* \\ \quad y^* & \longmapsto & {}^t f(y^*) = y^* \circ f \end{cases}$$

est une application linéaire . ${}^t f$ est appelée <u>transposée</u> de f et nous avons ${}^t f \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$
Pour tout $x \in E$ et tout $y^* \in F^*$, nous avons :

$$\langle x/{}^t f(y^*) \rangle = \langle f(x)/y^* \rangle$$

2. Ne pas confondre avec l'orthogonalité du produit scalaire, même si nous pouvons y trouver des liens

Démonstration

1. La transposée existe

   $\Rightarrow$ Soient donc E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels , et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire .
   Soit $y^* \in F^*$; alors $y^* \circ f : E \longrightarrow \mathbb{K}$, est linéaire comme composée de 2 applications linéaires, et est donc une forme linéaire sur E, et donc $y^* \circ f \in E^*$

   $\Rightarrow$ Appelons $x^* = y^* \circ f$. Nous avons alors le diagramme ci-après :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "x^*"'] & F \arrow[d, "y^*"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

   Ainsi, à toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$ et à toute forme linéaire $y^* \in F^*$, nous pouvons faire correspondre une forme linéaire $x^* \in E^*$ définie par $x^* = y^* \circ f$

   $\Rightarrow$ Ainsi, l'application :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} {}^t f : F^* & \longrightarrow & E^* \\ y^* & \longmapsto & {}^t f\left(y^*\right) = y^* \circ f \end{array} \right.$$

   existe bien, et pour tout $x \in E$, nous avons :

$$\left\langle x / {}^t f\left(y^*\right)\right\rangle = {}^t f\left(y^*\right)(x) = y^* \circ f(x) = \left\langle f(x) / y^* \right\rangle$$

   Et donc, nous avons, pour tout $x \in E$ et tout $y^* \in F^*$, $\left\langle x / {}^t f\left(y^*\right)\right\rangle = \left\langle f(x) / y^* \right\rangle$

2. La transposée est une application linéaire

   Que ${}^t f$ soit une application linéaire veut dire que ${}^t f \in \mathcal{L}\left(F^*, E^*\right)$

   $\Rightarrow$ Soient $y_1^* \in F^*$ et $y_2^* \in F^*$. Il nous faut donc montrer que ${}^t f\left(y_1^* + y_2^*\right) = tf\left(y_1^*\right) + tf\left(y_2^*\right)$.
   Pour tout $x \in E$, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} {}^t f\left(y_1^* + y_2^*\right)(x) = & \left\langle x / {}^t f\left(y_1^* + y_2^*\right)\right\rangle = \left\langle f(x) / y_1^* + y_2^* \right\rangle \\ = & \left\langle f(x) / y_1^* \right\rangle + \left\langle f(x) / y_2^* \right\rangle \text{ d'après 3.9.2} \\ = & \left\langle x / {}^t f\left(y_1^*\right)\right\rangle + \left\langle x / {}^t f\left(y_2^*\right)\right\rangle \\ = & {}^t f\left(y_1^*\right)(x) + {}^t f\left(y_2^*\right)(x) \\ = & \left({}^t f\left(y_1^*\right) + {}^t f\left(y_2^*\right)\right)(x) \end{array}$$

   Ainsi, pour tout $x \in E$, nous avons

$${}^t f\left(y_1^* + y_2^*\right)(x) = \left({}^t f\left(y_1^*\right) + {}^t f\left(y_2^*\right)\right)(x)$$

   Et donc

$${}^t f\left(y_1^* + y_2^*\right) = tf\left(y_1^*\right) + tf\left(y_2^*\right)$$

   Ce que nous voulions

   $\Rightarrow$ Maintenant, soient $y^* \in F^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il nous faut donc montrer que ${}^t f\left(\lambda y^*\right) = \lambda {}^t f\left(y^*\right)$.
   Pour tout $x \in E$, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} {}^t f\left(\lambda y^*\right)(x) = & \left\langle x / {}^t f\left(\lambda y^*\right)\right\rangle \\ = & \left\langle f(x) / \lambda y^* \right\rangle \\ = & \lambda \left\langle f(x) / y^* \right\rangle \\ = & \lambda \left\langle x / {}^t f\left(y^*\right)\right\rangle \\ = & \lambda {}^t f\left(y^*\right)(x) \\ = & \left(\lambda {}^t f\left(y^*\right)\right)(x) \end{array}$$

   Ainsi, pour tout $x \in E$, nous avons ${}^t f\left(\lambda y^*\right)(x) = \left(\lambda {}^t f\left(y^*\right)\right)(x)$, ce qui montre que

$${}^t f\left(\lambda y^*\right) = \lambda {}^t f\left(y^*\right)$$

   Ce que nous voulions

   Ainsi, ${}^t f$ soit une application linéaire et donc ${}^t f \in \mathcal{L}\left(F^*, E^*\right)$

Exemple 14 :

En supposant $E = F$ et $f = \mathrm{Id}_E$, alors, pour tout $x \in E$, et tout $y^* \in E^*$ nous avons :

$$\left\langle x/^t\left(\mathrm{Id}_E\right)\left(y^*\right)\right\rangle = \left\langle \mathrm{Id}_E\left(x\right)/y^*\right\rangle = \left\langle x/y^*\right\rangle$$

C'est à dire que nous avons, pour tout $x \in E$, ${}^t\left(\mathrm{Id}_E\right)\left(y^*\right)\left(x\right) = y^*\left(x\right)$, c'est à dire ${}^t\left(\mathrm{Id}_E\right)\left(y^*\right) = y^*$. De là, nous concluons que ${}^t\left(\mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Id}_{E^*}$

Remarque 33 :

Remarque importante : si f est une application linéaire de E dans F, c'est à dire si $f \in \mathcal{L}\left(E, F\right)$, sa transposée ${}^tf$ est une application linéaire , certes, mais de F^* dans E^*, c'est à dire ${}^tf \in \mathcal{L}\left(F^*, E^*\right)$ qui est d'une toute autre nature ! Le théorème 3.9.3 fait le lien entre ces deux applications linéaires

3.9.4 Propriétés des la transposée

1. Soit E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de duals respectifs E^* et F^*. On considère l'application $\mathcal{A}$ suivante :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{A} : \mathcal{L}\left(E, F\right) & \longrightarrow & \mathcal{L}\left(F^*, E^*\right) \\ f & \longmapsto & \mathcal{A}\left(f\right) =^t f \end{array}\right.$$
Alors, $\mathcal{A}$ est linéaire, c'est à dire que, pour tout $f \in \mathcal{L}\left(E, F\right)$, tout $g \in \mathcal{L}\left(E, F\right)$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:
$${}^t\left(f + g\right) =^t f +^t g \text{ et } {}^t\left(\lambda f\right) = \lambda^t f$$
2. Soit E, F et G 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de duals respectifs E^*, F^* et G^*.
Soient $f \in \mathcal{L}\left(E, F\right)$ et $g \in \mathcal{L}\left(F, G\right)$. Alors
$${}^t\left(g \circ f\right) =^t f \circ^t g$$
3. Soit E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de duals respectifs E^* et F^* et $f \in \mathcal{L}\left(E, F\right)$
Si f est bijective, il en est de même de ${}^tf$ et, mieux, ${}^t\left(f^{-1}\right) = \left({}^tf\right)^{-1}$

Démonstration

1. Montrons que $\mathcal{A}$ est une application linéaire
   ⇒ Soient $f \in \mathcal{L}\left(E, F\right)$, tout $g \in \mathcal{L}\left(E, F\right)$ et ${}^tf \in \mathcal{L}\left(F^*, E^*\right)$, tout ${}^tg \in \mathcal{L}\left(F^*, E^*\right)$ les transposées respectives.
   Alors, pour tout $x \in E$ et tout $y^* \in F^*$, nous avons :
$$\begin{array}{rcl} \left\langle x/^t\left(f + g\right)\left(y^*\right)\right\rangle = & & \left\langle\left(f + g\right)\left(x\right)/y^*\right\rangle \\ & = & \left\langle f\left(x\right) + g\left(x\right)/y^*\right\rangle = \left\langle f\left(x\right)/y^*\right\rangle + \left\langle g\left(x\right)/y^*\right\rangle \\ & = & \left\langle x/^tf\left(y^*\right)\right\rangle + \left\langle x/^tg\left(y^*\right)\right\rangle \\ & = & \left\langle x/^tf\left(y^*\right) +^t g\left(y^*\right)\right\rangle \\ & = & \left\langle x/\left({}^tf +^t g\right)\left(y^*\right)\right\rangle \end{array}$$
   Et nous avons donc ${}^t\left(f + g\right) =^t f +^t g$, c'est à dire $\mathcal{A}\left(f + g\right) = \mathcal{A}\left(f\right) + \mathcal{A}\left(g\right)$
   ⇒ Soient, maintenant $f \in \mathcal{L}\left(E, F\right)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{K}$ et tout $y^* \in F^*$, nous avons :
$$\begin{array}{rcl} \left\langle x/^t\left(\lambda f\right)\left(y^*\right)\right\rangle = & & \left\langle\left(\lambda f\right)\left(x\right)/y^*\right\rangle \\ & = & \left\langle\lambda f\left(x\right)/y^*\right\rangle = \lambda\left\langle f\left(x\right)/y^*\right\rangle \\ & = & \lambda\left\langle x/^tf\left(y^*\right)\right\rangle \\ & = & \left\langle x/\lambda^tf\left(y^*\right)\right\rangle \end{array}$$
   Et nous avons donc ${}^t\left(\lambda\right) = \lambda^tf$, c'est à dire $\mathcal{A}\left(\lambda f\right) = \lambda\mathcal{A}\left(f\right)$
   $\mathcal{A}$ est donc une application linéaire

2. Démontrons que ${}^t(g\circ f) = {}^t f \circ {}^t g$

   C'est à dire que nous avons les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & F \arrow[d, "g"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G^* \arrow[r, "{}^t g"] \arrow[dr, "{}^t f\circ {}^t g"'] & F^* \arrow[d, "{}^t f"] \\ & E^* \end{tikzcd}$$

   Soit $x \in E$ et $z^* \in G^*$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle x / {}^t(g\circ f)(z^*)\rangle &= \langle (g\circ f)(x) / z^*\rangle \\ &= \langle g[f(x)] / z^*\rangle \\ &= \langle f(x) / {}^t g(z^*)\rangle \\ &= \langle x / {}^t f[{}^t g(z^*)]\rangle \\ &= \langle x / {}^t f \circ {}^t g(z^*)\rangle \end{aligned}$$

   Et donc, nous avons ${}^t(g\circ f) = {}^t f \circ {}^t g$

3. Montrons que si f est bijective, alors ${}^t f$ l'est aussi et que ${}^t\left(f^{-1}\right) = \left({}^t f\right)^{-1}$

   $f : E \longrightarrow F$ étant bijective, $f^{-1} : F \longrightarrow E$ l'est aussi et nous avons donc :

$$f\circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \text{ et } f^{-1}\circ f = \mathrm{Id}_E$$

   En passant à la transposée, nous avons :

$${}^t\left(f\circ f^{-1}\right) = {}^t(\mathrm{Id}_F) \Longleftrightarrow {}^t\left(f^{-1}\right)\circ {}^t f = \mathrm{Id}_{F^*}$$

   Et

$${}^t\left(f^{-1}\circ f\right) = {}^t(\mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow {}^t f\circ {}^t\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Id}_{E^*}$$

   Ce qui montre que ${}^t f$ est inversible et que $\left({}^t f\right)^{-1} = {}^t\left(f^{-1}\right)$

3.10 Formes linéaires en dimension finie

3.10.1 Définition analytique d'une forme linéaire dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E
Soit $\varphi \in E^*$ une forme linéaire. Pour tout vecteur $x \in E$, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi(x)$ s'écrit :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \text{ où } (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$$

Démonstration

1. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur de E ; alors

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$

   où nous avons posé $a_i = \varphi(e_i)$

2. Réciproquement, si φ est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi : E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \text{ où } (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \end{array} \right.$$

   φ est bien entendu une forme linéaire

Remarque 34 :

1. Les scalaires $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ sont caractéristiques de la forme linéaire φ et toutes les formes linéaires $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ s'expriment donc de cette manière
2. L'identité $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ peut aussi s'écrire $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*(x)$, c'est à dire que $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*$ et les scalaires $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ sont donc les coordonnées de φ dans la base duale de E^* $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$
3. Si H est un hyperplan de E , et si $H = \ker \varphi$ où φ est une forme linéaire non nulle sur E, H est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i a_i = 0$ *(où les a_i sont des scalaires non tous nuls, ce sont les images des vecteurs de la base B par φ).*

   L'équation $\sum_{i=1}^{n} x_i a_i = 0$ s'appelle alors une équation de H dans la base B.

3.10.2 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E
On considère H et H', 2 hyperplans d'équations respectives :

$$H : \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = 0 \quad \text{et} \quad H' : \sum_{i=1}^{n} x_i b_i = 0$$

Alors, $H = H'$ si et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $b_i = \lambda a_i$

Démonstration

Supposons $H = \ker \varphi$ et $H' = \ker \psi$ où $\varphi \in E^*$ et $\psi \in E^*$ sont des formes linéaires non nulles.
Alors, $H = H' \Longleftrightarrow \ker \varphi = \ker \psi$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$, ce qui veut dire que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, nous avons : $\psi(e_i) = \lambda\varphi(e_i)$ et donc $b_i = \lambda a_i$
Ce que nous voulions.

Exemple 15 :

En dimension 2 et en dimension 3

1. Dans $\mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique $\{e_1, e_2\}$, l'ensemble des couples (x, y) qui vérifient une équation de la forme $ax + by = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est une droite : c'est le noyau de la forme linéaire non nulle φ telle que $\varphi((x, y)) = ax + by$ vérifiant $\varphi(e_1) = a$ et $\varphi(e_2) = b$

   Un vecteur de base de cette droite, est le vecteur $v = (-b, a)$

   Si $a_1x + b_1y = 0$ est une autre équation de cette droite, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $a_1 = \lambda a$ et $b_1 = \lambda b$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$, l'ensemble des triplets (x, y, z) qui vérifient une équation de la forme $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b,) \neq (0, 0, 0)$ est un plan : c'est le noyau de la forme linéaire $\varphi((x, y, z)) = ax + by + cz$ telle que $\varphi(e_1) = a$, $\varphi(e_2) = b$ et $\varphi(e_3) = c$

   Si $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ est une autre équation de ce plan, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$ et $c_1 = \lambda c$

3.10.3 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n
L'intersection de m hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de dimension p où $p \geqslant n - m$.

Démonstration

Soient $H_1, H_2, \cdots, H_m$ m hyperplans de E et $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*$, m formes linéaires de E^* telles que, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant m$, nous ayions $H_i = \ker u_i^*$
On considère l'application $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{K}^m$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : E & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ x & \longmapsto & \Phi(x) = (u_1^*(x), u_2^*(x), \ldots, u_m^*(x)) \end{array} \right.$$

1. **Φ est linéaire**
   La démonstration n'est pas difficile.
   Soient $x \in E$, $y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$; alors :

$$\begin{array}{rcl} \Phi(\lambda x + \mu y) = & & (u_1^*(\lambda x + \mu y), u_2^*(\lambda x + \mu y), \ldots, u_m^*(\lambda x + \mu y)) \\ & = & (\lambda u_1^*(x) + \mu u_1^*(y), \lambda u_2^*(x) + \mu u_2^*(y), \ldots, \lambda u_m^*(x) + \mu u_m^*(y)) \text{ par linéarité des } u_i^* \\ & = & \lambda (u_1^*(x), u_2^*(x), \ldots, u_m^*(x)) + \mu (u_1^*(y), u_2^*(y), \ldots, u_m^*(y)) \\ & = & \lambda \Phi(x) + \mu \Phi(y) \end{array}$$

   Φ est donc linéaire
2. **Recherche de $\ker \Phi$**
   Soit $x \in \ker \Phi$. Alors, nous pouvons écrire :

$$\begin{array}{rcl} x \in \ker \Phi & \Longleftrightarrow & \Phi(x) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (u_1^*(x), u_2^*(x), \ldots, u_m^*(x)) = (0, 0, \ldots, 0) \\ & \Longleftrightarrow & u_i^*(x) = 0 \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant m \\ & \Longleftrightarrow & x \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} \ker u_i^* \\ & \Longleftrightarrow & x \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i \end{array}$$

   Ainsi $\ker \Phi = \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i$
3. **$\dim \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i = p$ où $p \geqslant n - m$**
   D'après le théorème du rang, nous avons $\dim \ker \Phi + \dim \operatorname{Im}\phi = \dim E \Longleftrightarrow \dim \ker \Phi + \dim \operatorname{Im}\phi = n \Longleftrightarrow \dim \ker \Phi = n - \dim \operatorname{Im}\phi$.
   Or, comme $\operatorname{Im}\phi \subset \mathbb{K}^m$, nous avons $\dim \operatorname{Im}\phi \leqslant m$ et donc $n - \dim \operatorname{Im}\phi \geqslant n - m$.
   Donc $\dim \ker \Phi \geqslant n - m \Longleftrightarrow \dim \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i \geqslant n - m$

Remarque 35 :

Nous démontrerons en 7.1.1 que, si $H_1, H_2, \cdots, H_m$ *(avec $m \leqslant n$)* sont m hyperplans de E définis par m formes linéaires $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*$ de E^* **linéairement indépendantes**, alors $\dim \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i = n - m$

Exercice 36 :

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, si $x \neq y$ alors, il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$

3.11 Introduction aux équations linéaires

Cette section est une introduction au chapitre 7

3.11.1 Définition

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel
On apelle **équation linéaire** toute équation du type

$$u(X) = Y \tag{3.1}$$

Où $Y \in F$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ sont des données du problème.
Résoudre l'équation 3.1, c'est trouver tous les vecteurs $X \in E$ qui ont $Y \in F$ pour image par u.

Remarque 36 :

Une autre façon de voir les choses, est de dire que résoudre l'équation 3.1, c'est déterminer l'ensemble $u^{-1}(\{Y\})$

Exemple 16 :

Commençons par des exemples

1. Dans $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1, l'équation $aX = b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ est une équation linéaire.
2. Si $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$, le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz = & \alpha \\ a_1x + b_1y + c_1z = & \beta \end{cases}$$

peut s'interpréter comme une équation linéaire.

En effet, soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\begin{cases} u : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & u[(x, y, z)] = (ax + by + cz, a_1x + b_1y + c_1z) \end{cases}$$

u est linéaire et le système est donc équivalent à $u[(x, y, z)] = (\alpha, \beta)$

Résoudre cette équation, c'est bien rechercher les antécédents du couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

3. Soient E l'ensemble $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continuement dérivables sur $\mathbb{R}$ et $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensmble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
Si $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction continue donnée, trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f' = g$, c'est résoudre une équation linéaire.
4. Dons $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, trouver toutes les fonctions numériques $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x + 1) - f(x) = 1 \tag{3.2}$$

c'est résoudre une équation linéaire

En effet, si nous considérons $\Delta : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par :

$\begin{cases} \Delta : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \Delta(f) \end{cases}$ où, pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons $\Delta(f)(x) = f(x + 1) - f(x)$

Δ est bien une application linéaire [3] et résoudre l'équation $f(x + 1) - f(x) = 1$, c'est résoudre l'équation $\Delta(f) = 1$ où 1 est la fonction constante égale à 1

3. Pourquoi ne pas le démontrer ?

3.11.2 Proposition

On se met, dans cette proposition, dans les conditions de la définition 3.11.1

1. Si u est une application linéaire bijective, alors l'équation 3.1 admet une unique solution $X_0 = u^{-1}(Y)$
2. Si u n'est pas une application linéaire bijective,
   (a) Si $Y \notin \operatorname{Im} u$, alors, l'équation 3.1 n'a pas de solution.
   (b) Si $Y \in \operatorname{Im} u$, alors, l'équation 3.1 admet au moins une solution.
   Toutes les solutions de l'équation 3.1 sont obtenues en ajoutant à tous les élément du noyau $\ker u$ une solution particulière de l'équation 3.1

Démonstration

- ▷ La démonstration des points 1 et 2-(a) ne pose pas de difficultés
- ▷ Supposons maintenant que $Y \in \operatorname{Im} u$
  - ⋆ Supposons que X_0 soit une solution particulière de l'équation 3.1 ; alors, bien entendu, $u(X_0) = Y$.
    Soit $Z \in \ker u$; alors $u(X_0 + Z) = u(X_0) + u(Z) = Y + 0 = Y$.
    Donc, $X_0 + Z$ est donc solution de l'équation 3.1
  - ⋆ Réciproquement, si X_0 et X_1 sont solutions de l'équation 3.1, posons $Z = X_0 - X_1$.
    Alors, $u(X_0 - X_1) = u(X_0) - u(X_1) = Y - Y = 0$, ce qui veut dire $Z \in \ker u$ et donc que $X_0 = X_1 + Z$

Remarque 37 :

1. Lorsque u est une application linéaire bijective, la résolution est simple si u^{-1} s'exprime simplement.
2. Le cas où $Y \in \operatorname{Im} u$ est des plus classiques et on le retrouve dans les équations différentielles linéaires (voir le théorème 15.3.4).
   Nous sommes alors ramenés à résoudre les équations suivantes :
   → Trouver une solution particulière de 3.1
   → Rechercher le noyau de u, c'est à dire $\ker u$ en trouvant **toutes** les solutions de $u(X) = 0$
   → L'équation $u(X) = 0$ est l'équation linéaire homogène associée de l'équation 3.1

Exemple 17 :

Cherchons à résoudre l'équation 3.2 : $f(x+1) - f(x) = 1$

1. Une solution particulère de l'équation 3.2 est $f_0(x) = x$ puisque :
$$f_0(x+1) - f_0(x) = x + 1 - x = 1$$
2. Toutes les solutions de l'équation linéaire homogène associée $f(x+1) - f(x) = 0$ sont les fonctions périodiques et de période 1
3. Donc toutes les fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient l'équation 3.2 sont du type $f(x) = x + \varphi(x)$ où φ est une fonction numérique de période 1

3.11.3 Proposition

Une nouvelle fois, nous nous mettons, dans cette proposition, dans les conditions de la définition 3.11.1

On suppose que $Y \in F$ s'écrive $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$

Alors, nous obtenons une solution de l'équation linéaire 3.1 $u(X) = Y$ en cherchant une solution de chacune des équations $u(X) = Y_i$ pour $i = 1, \cdots, n$ et en ajoutant ces solutions

Démonstration

La démonstration est très simple et laissée au lecteur

Exemple 18 :

Recherchons les solutions de l'équation :

$$f(x+1) - f(x) = 1 + \cos 2\pi x \tag{3.3}$$

Il suffit, puisque nous avons déjà résolu l'équation 3.2 de trouver une solution particulière à l'équation

$$f(x+1) - f(x) = \cos 2\pi x$$

On peut remarquer que la fonction $f_1(x) = x\cos 2\pi x$ vérifie l'équation ci-dessus. En effet :

- ⋆ $f_1(x+1) = (x+1)\cos 2\pi(x+1) = (x+1)\cos(2\pi x + 2\pi) = (x+1)\cos 2\pi x$
- ⋆ Et donc $f_1(x+1) - f_1(x) = (x+1)\cos 2\pi x - x\cos 2\pi x = \cos 2\pi x$

Donc, les fonctions qui vérifient l'équation 3.3 sont du type $f(x) = x + x\cos 2\pi x + \varphi(x)$ où φ est une fonction numérique de période 1

3.12 Exercices complémentaires

3.12.1 Sur les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et les sous-espaces vectoriels

Exercice 37 :

1. Soit $E = \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$. On définit sur E 2 opération :
   - **Une loi interne :** $(a,b) \star (c,d) = (ac, b+d)$
   - **Une loi externe :** $\lambda \bullet (a,b) = \left(a^{\lambda}, \lambda b\right)$

   Est-ce que E muni de ces deux lois est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On munit $\mathbb{K}^2$:
   - **De l'addition habituelle :** $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
   - **D'une loi externe :** $\lambda \bullet (a,b) = (\lambda a, 0)$

   Pourquoi n'obtenons nous pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ?

Exercice 38 :

1. Montrer que l'ensemble

   $$\mathfrak{B} = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ telles que } \left(\exists A_f \in \mathbb{R}^+\right)(\forall x \in \mathbb{R})\left(|f(x)| \leqslant A_f |x|\right) \right\}$$

   est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour les lois usuelles dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
2. Montrer que l'ensemble

   $$\mathfrak{A} = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ telles que } \left(\exists A_f \in \mathbb{R}^+\right)\left(\exists a \in \mathbb{R}^+\right)\left((\forall x \in \mathbb{R})(|x| \geqslant a) \Longleftrightarrow |f(x)| \leqslant A_f |x|\right) \right\}$$

   est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour les lois usuelles dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Exercice 39 :

Démontrer que l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telles que $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \left(|u_n|\right)^{\frac{1}{n}} < +\infty$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

3.12.2 Indépendance, bases

Exercice 40 :

On considère $\mathbb{R}_4[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 4. Dans $\mathbb{R}_4[X]$, on considère les ensembles suivants :

→ $F_1 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \text{ tel que } P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$
→ $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \text{ tel que } P(1) = P'(2) = 0\}$

1. Vérifier que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_4[X]$
2. Donner une base de F_1 et de F_2
3. Avons nous $\mathbb{R}_4[X] = F_1 \oplus F_2$?

Exercice 41 :

$\mathbb{C}_n[X]$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n *(avec $n \geqslant 2$)*. Soit $x_1 \in \mathbb{C}$ et $x_2 \in \mathbb{C}$
E_1 est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ qui s'annulent en x_1 et E_1, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ qui s'annulent en x_2

1. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_n[X]$
2. Démontrer que $\mathbb{C}_n[X] = E_1 + E_2$
3. Avons-nous $\mathbb{C}_n[X] = E_1 \oplus E_2$?

Exercice 42 :

Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère le sous-ensemble E défini par :

$$E = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \text{ tels que } \int_0^1 xP(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$$

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $B_1(x) = x$. Démontrer que E et $\operatorname{Vect}(B_1)$ sont en somme directe.

Exercice 43 :

Dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les fonctions f_k définies pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_k : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_k(x) = \sin kx \end{array} \right.$$

On appelle $\delta_p(q)$ le symbole de Kronecker défini par : $\delta_p(q) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } p = q \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x = \delta_p(q)\,\pi$
2. En déduire que la famille $F = \{f_k; k \in \mathbb{N}\}$ est libre.

3.12.3 Applications linéaires

Exercice 44 :

$\mathbb{K}[X]$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Nous considérons l'application $u : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & u[P] \end{array} \right. \text{ où } u[P](X) = P(\alpha)X + P(\beta) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } \beta \in \mathbb{K} \text{ et } \alpha \neq \beta$$

1. Démontrer que u est une application linéaire
2. Déterminer $\ker u$ le noyau de u et $\mathrm{Im}u$, l'image de u

Exercice 45 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p_1 et p_2 deux projecteurs de E tels que $p_1 \circ p_2 = \mathcal{O}_E$ et $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$. Montrer que q est un projecteur et trouver son noyau et son image.

Exercice 46 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $f \in \mathcal{L}(E)$, $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$ deux scalaires tels que $a \neq b$. On suppose que $(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = \mathcal{O}_E$

1. Etablir l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$ non nuls tels que $\lambda(f - a\mathrm{Id}_E)$ et $\mu(f - a\mathrm{Id}_E)$ soient des projecteurs.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - b\mathrm{Id}_E) = \ker(f - a\mathrm{Id}_E)$.
3. Calculer f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Si $ab \neq 0$, montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$.

Exercice 47 :

Cet exercice vient en complément de l'exercice sur les homothéties. Les différentes questions de cet exercice ne sont pas indépendantes

Dans tout l'exercice $\mathbb{K}$ est un corps commutatif

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, la famille $\{x, f(x)\}$ soit une famille liée. Il faut montrer que f est une homothétie.
2. Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels .
   Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$ 2 applications linéaires .
   On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe un nombre $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $g(x) = \lambda_x f(x)$.
   Il faut montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $g = \lambda f$
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_0 un sous-espace vectoriel de E, strictement inclus dans E *(C'est à dire $E_0 \neq E$ et $E_0 \nsubseteq E$)*. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
   On suppose que pour tout $x \in E \setminus E_0$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Il faut monter que f est une homothétie

3.12.4 Sur les formes linéaires

Cet exercice est la juxtaposition de 2 types de questions très en lien entre elles. On retrouve ce type de problème dans les questions d'approximation en analyse numérique

Exercice 48 :

1. $\mathbb{K}[X]$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on définit l'application $\Phi_x : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}$ par :
$$\begin{cases} \Phi_x : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \qquad P & \longmapsto & \Phi_x(P) = P(x) \end{cases}$$
   (a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{K}$, Φ_x est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$
   (b) Démontrer que la famille $(\Phi_x)_{x\in\mathbb{K}}$ est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X], \mathbb{K}) = (\mathbb{K}[X])^*$
2. On se place, maintenant dans $\mathbb{K}_n[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n.
   (a) Soient $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, $n+1$ scalaires du corps $\mathbb{K}$ 2 à 2 distincts. D'après la question précédente, la famille $\{\Phi_{x_0}, \Phi_{x_1}, \cdots, \Phi_{x_n}\}$ forme une base de $(\mathbb{K}_n[X])^*$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathbb{K}_n[X]$.
   En chercher la base duale sur $\mathbb{K}_n[X]$
   (b) Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer qu'il existe des réels $\lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, uniques, tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$
$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

3.12.5 Miscelleanous

Exercice 49 :

Cet exercice s'intéresse au complexifié d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
Nous commençons par quelques définitions qui sont, quelque part, des redites du cours

1. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$
   Une application $f : E \longrightarrow V$ est dite $\mathbb{R}$-linéaire si, pour tout $x \in E$, tout $y \in E$ **et tout** $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons : $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$
2. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et F un $\mathbb{C}$-espace vectoriel .
   Une application $f : F \longrightarrow V$ est dite $\mathbb{C}$-linéaire si, pour tout $x \in F$, tout $y \in F$ **et tout** $\lambda \in \mathbb{C}$, nous avons : $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Dans le point 1, si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel , la définition d'application $\mathbb{R}$-linéaire se confond avec celle d'application linéaire , puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Le point 2 est la définition d'application linéaire entre 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

1. Soient A et B 2 $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et $f : A \longrightarrow B$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Il faut démontrer que f est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si, pour tout $x \in A$, $f(ix) = if(x)$
2. Soit, maintenant, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On considère le produit cartésien $E \times E$ dans lequel, nous définissons :
   — **Une addition interne** :
   Pour tout $(x, y) \in E \times E$ et $(x', y') \in E \times E$ $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
   — **Une loi externe**
   Pour tout $(x, y) \in E \times E$ et tout $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\alpha = a + ib$, $\alpha(x, y) = (ax - by, bx + ay)$

   Montrer que $E \times E$ muni de ces deux lois est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel que nous noterons $E_{\mathbb{C}}$
3. Soit $J : E \longrightarrow E_{\mathbb{C}}$ une application définie par :
$$\begin{cases} J : E & \longrightarrow & E_{\mathbb{C}} \\ \quad x & \longmapsto & J(x) = (x, 0) \end{cases}$$
   (a) Montrer que J est $\mathbb{R}$-linéaire
   (b) Montrer que J est injective
   (c) Montrer que, pour tout $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$, nous avons $(x, y) = J(x) + iJ(y)$
4. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel quelconque et $f : E \longrightarrow V$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Montrer qu'il existe une application $\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$, $\mathbb{C}$-linéaire telle que $f = \tilde{f} \circ J$

3.13 Quelques exercices corrigés

Dans cette partie, nous ne corrigeons pas tous les exercices. Les plus faciles sont laissés à la sagacité du lecteur

Exercice 3 :

Prouver que l'ensemble des suites réelles presque nulles (c'est à dire qui s'annulent à partir d'un certain rang) *est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel .*

Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui s'annulent àpartir d'un certain rang, peuvent être considérées comme des suites finies. Formellement, elles peuvent se définir ainsi :

$$\text{Il existe } N_x \in \mathbb{N} \text{ tel que pour } n \geqslant N_x \text{ alors } x_n = 0$$

Appelons $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des suites qui s'annulent à partir d'un certain rang. Nous annons démontrer que $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

→ Bien ententendu, la suite nulle est un élément de $\mathcal{S}_0$

→ Soient $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites de $\mathcal{S}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$. Nous allons montrer que $\lambda U + \mu V \in \mathcal{S}_0$
Il existe donc $N_U \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N_U$ alors $u_n = 0$. On peut alors remarquer que pour tout $n \geqslant N_U$, nous avons $\lambda u_n = 0$
De même, il existe $N_V \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N_V$ alors $v_n = 0$, et pour tout $n \geqslant N_V$, nous avons $\mu v_n = 0$
Ainsi, si $N_0 \geqslant \max\{N_U, N_V\}$, pour $n \geqslant N_0$, alors $\lambda u_n = 0$ et $\mu v_n = 0$ et donc la suite $\lambda U + \mu V$ est nulle à partir d'un certain rang. et donc $\lambda U + \mu V \in \mathcal{S}_0$

Ainsi, $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Exercice 4 :

On considère $\mathbb{R}^2$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On appelle $F_1 = \text{vect}\left(\{(2,3)\}\right)$ et $F_2 = \text{vect}\left(\{(-2,3)\}\right)$

1. *Est-ce que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?*

   Il est évident que $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Il suffit, pour cela de prendre un contre exemple.
   Soient $u = (2,3)$ et $v = (-2,3)$ 2 vecteurs de $F_1 \cup F_2$ puisque $u \in F_1$ et $v \in F_2$.
   Or, $u + v = (0,6)$ et $u + v \notin F_1 \cup F_2$ et $F_1 \cup F_2$ ne peut être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.*

   ⇒ **Supposons que $F \subset G$ ou $G \subset F$**
   Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ et nous avons bien $F \cup G$ qui est un sous-espace vectoriel de E. La résolution est la même si $G \subset F$

   ⇒ **Supposons, maintenant que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E**
   Montrons que $F \subset G$ ou $G \subset F$.
   Pour le démontrer, supposons le contraire, c'est à dire $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$ et soient donc $a \in F$ tel que $a \notin G$ et $b \in G$ tel que $b \notin F$.
   Nous avons $a \in F \cup G$ et $b \in F \cup G$. $F \cup G$ étant un sous-espace vectoriel de E, nous avons $c = a + b \in F \cup G$.
   - ⋆ Si $c \in F$, alors $b = c - a$ et comme F est un sous-espace vectoriel , $c - a \in F$ et donc $b \in F$, ce qui est impossible
   - ⋆ Nous arrivons à la même contradiction si $c \in G$

   Donc nous avons $F \subset G$ ou $G \subset F$

   L'équivalence est démontrée

Exercice 5 :

$\mathbb{R}^3$ est muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel .Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. On fournira, dans chaque cas, sa partie génératrice

1. $F_1 = \{(x+y, 2y, x-y)$ *où* $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}\}$

   Si $u \in F_1$, nous avons $u = (x+y, 2y, x-y) = x\,(1,0,1) + y\,(1,2,-1)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Nous avons donc : $F_1 = \text{Vect}\left(\{(1,0,1)\,;(1,2,-1)\}\right)$

   F_1 est un plan vectoriel

2. $F_3 = \{(x-y, 2y, x+y)$ *où* $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}\}$

   De la même manière : $F_3 = \text{Vect}\left(\{(1,0,1)\,;(-1,2,1)\}\right)$

   F_3 est un plan vectoriel

3. $F_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ où } x - y + z = 0\right\}$

   Alors, cette fois ci, c'est plus difficile *(quoique !!)*

   De $x - y + z = 0$, on tire que $y = x + z$ et donc, si $u \in F_4$, nous avons

   $$u = (x, x+z, z) = x\,(1,1,0) + z\,(0,1,1)$$

   Avec $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$.

   Donc, $F_4 = \text{Vect}\left(\{(1,1,0)\,;(0,1,1)\}\right)$

   F_4 est un plan vectoriel

4. $F_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ où } x - y + z = 0 \text{ et } 2x + 5y + z = 0\right\}$

   Bon, ce n'est pas plus difficile !!

   Nous devons jouer avec $x - y + z = 0$ et $2x + 5y + z = 0$. C'est donc, en fait un système où la variable $z \in \mathbb{R}$ jouera le rôle de paramètre.

   $$\left\{\begin{array}{rl} x - y + z = & 0 \\ 2x + 5y + z = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x - y = & -z \\ 2x + 5y = & -z \end{array}\right. \iff x = \frac{-6}{7}z \text{ et } y = \frac{1}{7}z \text{ avec } z \in \mathbb{R}$$

   Ainsi, si $u = (x,y,z) \in F_5$, nous avons $u = \left(\frac{-6}{7}z, \frac{1}{7}z, z\right) = z\left(\frac{-6}{7}, \frac{1}{7}, 1\right)$ avec $z \in \mathbb{R}$

   D'où nous tirons $F_5 = \text{Vect}\left(\left\{\left(\frac{-6}{7}, \frac{1}{7}, 1\right)\right\}\right)$

   F_5 est une droite vectorielle

   Remarquez que nous avons aussi $F_5 = \text{Vect}\left(\{(-6,1,7)\}\right)$

Exercice 6 :

$\mathbb{R}^3$ est muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
Soient $u = (1,1,3)$, $v = (1,0,1)$ et $w = (2,1,0)$
Il faut montrer que l'ensemble $\{u, v, w\}$ est générateur de $\mathbb{R}^3$.

Autrement dit, il faut montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\left(\{u, v, w\}\right)$
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$; il faut donc trouver $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x,y,z) = \alpha u + \beta v + \gamma w \iff (x,y,z) = \alpha\,(1,1,3) + \beta\,(1,0,1) + \gamma\,(2,1,0)$$

C'est à dire que $(x, y, z) = (\alpha + \beta + 2\gamma, \alpha + \gamma, 3\alpha + \beta)$. Nous obtenons alors le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = & x \\ \alpha + \gamma = & y \\ 3\alpha + \beta = & z \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = & x \\ \gamma = & y - \alpha \\ \beta = & z - 3\alpha \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} \alpha + z - 3\alpha + 2y - 2\alpha = & x \\ \gamma = & y - \alpha \\ \beta = & z - 3\alpha \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} -4\alpha = & x - 2y - z \\ \gamma = & y - \alpha \\ \beta = & z - 3\alpha \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} \alpha = & \dfrac{-x}{4} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{4} \\ \gamma = & \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{4} \\ \beta = & \dfrac{3x}{4} - \dfrac{3y}{2} + \dfrac{z}{4} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y, z) = \alpha u + \beta v + \gamma w$
Nous venons de démontrer que l'ensemble $\{u, v, w\}$ est générateur de $\mathbb{R}^3$

Exercice 7 :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère les ensembles suivants :

1. $F = \{(x, 0, 0)$ *avec* $x \in \mathbb{R}\}$
2. $G = \{(y, y, 0)$ *avec* $y \in \mathbb{R}\}$

Il faut montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $F + G$

F et G sont des sous-espaces vectoriels *(démonstration facile)* et nous avons $F = \text{Vect}(\{(1, 0, 0)\})$, comme nous avons $G = \text{Vect}(\{(1, 1, 0)\})$
Et donc $F + G = \text{Vect}(\{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\})$

Exercice 8 :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère les ensembles suivants :

1. $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } x + y + z = 0\right\}$
2. $G = \{(y, y, y)$ *avec* $y \in \mathbb{R}\}$

Il faut montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Nous allons procéder très classiquement : nous allons démontrer que $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$, et que tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

- **Tout d'abord, comment sont les éléments de F ?**
  Si $(x, y, z) \in F$, alors $z = -x - y$ et nous pouvons écrire : $F = \left\{(x, y, -x - y) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\right\}$ et nous pouvons donc écrire que :
  $$F = \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\{(1, 0, -1); (0, 1, -1)\})$$
- **De la même manière,** nous avons $G = \text{Vect}(\{(1, 1, 1)\})$

- **Recherchons $F \cap G$**
  Si $u \in F \cap G$, alors $u = (x, y, -x-y) = (x, x, x)$, et nous avons alors $x = y$, $x = -x-y$. Or
  $$x = -x-y \Longleftrightarrow y = -2y \Longleftrightarrow y = x = 0$$
  et donc $u = (0, 0, 0)$
  D'où $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$
- **Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, quelconque**
  Il nous faut montrer que (x, y, z) peut être décomposé en une somme d'un élément de F et d'un élément de G
  Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et recherchons $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que :
  $$(x, y, z) = \alpha\,(1, 0, -1) + \beta\,(0, 1, -1) + \gamma\,(1, 1, 1) = (\alpha + \gamma, \beta + \gamma, -\alpha - \beta + \gamma)$$
  Nous obtenons donc le système d'équations :
  $$\left\{\begin{aligned} \alpha + \gamma &= x \\ \beta + \gamma &= y \\ -\alpha - \beta + \gamma &= z \end{aligned}\right.$$
  $$\Longleftrightarrow$$
  $$\left\{\begin{aligned} -\alpha - \beta + \gamma &= z \\ \alpha + \gamma &= x \\ \beta + \gamma &= y \end{aligned}\right.$$
  $$\Longleftrightarrow$$
  $$\left\{\begin{aligned} -\alpha - \beta + \gamma &= z \\ -\beta + 2\gamma &= x + z \\ \beta + \gamma &= y \end{aligned}\right.$$
  $$\Longleftrightarrow$$
  $$\left\{\begin{aligned} -\alpha - \beta + \gamma &= z \\ -\beta + 2\gamma &= x + z \\ 3\gamma &= x + y + z \end{aligned}\right.$$
  D'où nous tirons $\gamma = \dfrac{1}{3}(x + y + z)$, $\beta = \dfrac{1}{3}(-x + 2y - z)$ et $\alpha = \dfrac{1}{3}(2x - y - z)$. D'où, nous avons bien :
  $$(x, y, z) = \underbrace{\frac{1}{3}(2x - y - z)(1, 0, -1) + \frac{1}{3}(-x + 2y - z)(0, 1, -1)}_{\in F} + \underbrace{\frac{1}{3}(x + y + z)(1, 1, 1)}_{\in G}$$

Ainsi, F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$

Exercice 9 :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F = \mathrm{Vect}\,(\{(2, 1, 0)\,;(0, 1, 2)\})$
2. $G = \mathrm{Vect}\,(\{(0, 1, 0)\,;(1, 0, 2)\})$

F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$?

Ces 2 sous-espaces vectoriels ne sont pas supplémentaires puisque $F \cap G \neq (0, 0, 0)$.
En effet, soit $u \in F \cap G$. Alors :
$$u = \alpha\,(2, 1, 0) + \beta\,(0, 1, 2) = x\,(0, 1, 0) + y\,(1, 0, 2) \Longleftrightarrow (2\alpha, \alpha + \beta, 2\beta) = (y, x, 2y)$$
Nous arrivons donc au système :
$$\left\{\begin{aligned} 2\alpha &= y \\ \alpha + \beta &= x \\ 2\beta &= 2y \end{aligned}\right. \Longleftrightarrow \alpha = \frac{y}{2} \qquad \beta = y \qquad x = \frac{3y}{2}$$
Ainsi, $u = (2y, 3y, 4y)$ avec $y \in \mathbb{R}$ et donc $F \cap G = \{y\,(2, 3, 4)\ \text{ avec } y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,(\{(2, 3, 4)\})$.
Ainsi $F \cap G \neq (0, 0, 0)$ et F et G ne sont pas 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 10 :

Soit $\mathbb{C}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 3.
Soient E_1, E_2 et E_3 les sous-ensembles de $\mathbb{C}_3[X]$ formés des polynômes multiples respectivement de $(X-1)$, $\left(X^2+1\right)$ et $\left(X^3+1\right)$.

1. *Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_3[X]$*

   Nous allons aller un peu plus loin que la question posée et généraliser le propos.
   Nous allons démontrer que dans tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel de polynômes $\mathbb{C}_n[X]$ de degré inférieur ou égal à n tous les ensembles de multiples d'un polynôme $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$
   Soit donc $I = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \text{ tel que } P = RQ \text{ où } \deg R + \deg Q \leqslant n\}$
   $\longrightarrow$ Tout d'abord, $I \neq \emptyset$ puisque le polynôme nul est un multiple évident de Q.
   Il n' y a d'ailleurs pas que le polynôme nul qui soit dans I, il y a aussi, bien entendu Q lui même
   $\longrightarrow$ Soient $P_1 \in I$ et $P_2 \in I$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$
   - ⋆ Il existe $R_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $P_1 = R_1 Q$ et $\deg R_1 \leqslant n - \deg Q$; de même, il existe $R_2 \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $P_2 = R_2 Q$ et $\deg R_2 \leqslant n - \deg Q$
   - ⋆ $\lambda P_1 + \mu P_2 = (\lambda R_1 + \mu R_2)\, Q$, et $\lambda P_1 + \mu P_2$ apparaît donc comme un multiple du polynôme Q
   - ⋆ De plus, $\deg(\lambda R_1 + \mu R_2) \leqslant \max(\deg R_1, \deg R_2) \leqslant n - \deg Q$

   Ainsi $\lambda P_1 + \mu P_2 \in I$
   Et donc I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$
   Les cas de E_1, E_2 et E_3 sont donc des cas particuliers de ces ensembles de multiples dans $\mathbb{C}_3[X]$ qui sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_3[X]$

2. *Avons nous :*

   (a) $\mathbb{C}_3[X] = E_1 \bigoplus E_2$

   Pour commencer, comme $E_1 \subset \mathbb{C}_3[X]$, nous avons

   $$E_1 = \left\{P \in \mathbb{C}_3[X] \text{ tel que } P(X) = \left(aX^2 + bX + C\right)(X-1) \text{ où } a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}\right\}$$

   Et, de la même manière, $E_2 = \left\{P \in \mathbb{C}_3[X] \text{ tel que } P(X) = (aX+b)\left(X^2+1\right) \text{ où } a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}\right\}$
   Le polynôme $P(X) = (X-1)\left(X^2+1\right)$ est à la fois un multiple de $(X-1)$ et de $\left(X^2+1\right)$ et donc $P \in E_1 \cap E_2$
   L'intersection $E_1 \cap E_2$ n'est pas vide. Donc, E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe

   (b) $\mathbb{C}_3[X] = E_1 \bigoplus E_3$

   $\longrightarrow$ **Nous allons tout d'abord étudier l'intersection $E_1 \cap E_3$**
   Soit donc $P \in E_1 \cap E_3$, alors, nous avons $P(X) = \left(\alpha X^2 + \beta X + \gamma\right)(X-1)$ puisque $P \in E_1$. Mais, comme $P \in E_3$, nous avons aussi $P(X) = \lambda\left(X^3+1\right)$. En effectuant, nous avons donc :

   $$P(X)\, \alpha X^3 + (\beta - \alpha) X^2 + (\gamma - \beta) X - \gamma = \lambda X^3 + \lambda$$

   En identifiant, nous obtenons :

   $$\alpha = \lambda \quad -\alpha + \beta = 0 \quad -\beta + \gamma = 0 \quad \gamma = -\lambda$$

   D'où nous tirons $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$.
   Ainsi, $E_1 \cap E_3$ contient le seul polynôme nul.
   $\longrightarrow$ **Il faut, maintenant, démontrer que tout polynôme de $\mathbb{C}_3[X]$ se décompose en un polynôme de E_1 et un polynôme de E_3**
   Soit donc $aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme de $\mathbb{C}_3[X]$; il faut donc trouver $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :

   $$aX^3 + bX^2 + cX + d = \left(\alpha X^2 + \beta X + \gamma\right)(X-1) + \lambda\left(X^3+1\right)$$

En développant et en identifiant, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \alpha + \lambda = & a \\ \beta - \alpha = & b \\ -\beta + \gamma = & c \\ -\gamma + \lambda = & d \end{cases}$$

D'où nous tirons, par élimination et substitution :

$$\lambda = \frac{a+b+c+d}{2} \quad \gamma = \frac{a+b+c-d}{2} \quad \beta = \frac{a+b-c-d}{2} \quad \alpha = \frac{a-b-c-d}{2}$$

Ainsi, pour tout polynôme $aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}_3[X]$:

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = \underbrace{\left(\left(\frac{a-b-c-d}{2}\right)X^2 + \left(\frac{a+b-c-d}{2}\right)X + \left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)\right)(X-1)}_{\in E_1} + \underbrace{\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)\left(X^3+1\right)}_{\in E_3}$$

Nous avons donc $\mathbb{C}_3[X] = E_1 \bigoplus E_3$

(c) $\mathbb{C}_3[X] = E_2 \bigoplus E_3$

La technique de démonstration sera semblable à celle de la question précédente.

$\longrightarrow$ **Nous allons tout d'abord étudier l'intersection $E_2 \cap E_3$**

Soit donc $P \in E_2 \cap E_3$, alors, nous avons $P(X) = (\alpha X + \beta)\left(X^2+1\right)$ puisque $P \in E_2$. Mais, comme $P \in E_3$, nous avons aussi $P(X) = \lambda\left(X^3+1\right)$. En effectuant, nous avons donc :

$$P(X) = \alpha X^3 + \beta X^2 + \alpha X + \beta = \lambda X^3 + \lambda$$

En identifiant, nous obtenons :

$$\alpha = \lambda \quad \beta = 0 \quad \alpha = 0 \quad \beta = \lambda$$

D'où nous tirons $\alpha = \beta = \lambda = 0$.

Ainsi, $E_1 \cap E_3$ contient le seul polynôme nul.

Il faut, maintenant, démontrer que tout polynôme de $\mathbb{C}_3[X]$ se décompose en un polynôme de E_2 et un polynôme de E_3

Soit donc $aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme de $\mathbb{C}_3[X]$; il faut donc trouver $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = (\alpha X + \beta)\left(X^2+1\right) + \lambda\left(X^3+1\right)$$

En développant et en identifiant, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \alpha + \lambda = & a \\ \beta = & b \\ \alpha = & c \\ \beta + \lambda = & d \end{cases}$$

D'où nous tirons, par élimination et substitution :

$$\beta = b \quad \alpha = c \quad \lambda = d - b \text{ et } \lambda = a - c$$

Ce qui est impossible

E_2 etE_3 ne sont donc pas en somme directe

Exercice 11 :

On considère $\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de l'intervalle $[-1;+1]$ dans $\mathbb{C}$. Soient

- $F = \{f \in \mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})$ *telle que* f *est constante*$\}$
- $G = \left\{f \in \mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C}) \text{ telle que } \int_{-1}^{+1} f(t)\, \mathrm{d}t = 0\right\}$

Il faut montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})$

Ce n'est pas un exercice très compliqué !!

$\longrightarrow$ **Nous montrons que $\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C}) = F + G$**

Soit $f \in \mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})$, alors, nous pouvons écrire :

$$f = \left(f - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(t)\, \mathrm{d}t\right) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(t)\, \mathrm{d}t$$

$\star$ En posant, pour tout $x \in [-1;+1]$ $\Psi(x) = f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(t)\, \mathrm{d}t$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \Psi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{+1} \left(f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(t)\, \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{+1} f(x)\, \mathrm{d}x - \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(t)\, \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{+1} f(x)\, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{+1} f(t)\, \mathrm{d}t\right)\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{+1} f(x)\, \mathrm{d}x - 2 \times \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{+1} f(t)\, \mathrm{d}t\right) \\ &= \int_{-1}^{+1} f(x)\, \mathrm{d}x - \int_{-1}^{+1} f(t)\, \mathrm{d}t \\ &= 0\end{aligned}$$

Nous avons donc $\int_{-1}^{+1} \Psi(x)\, \mathrm{d}x = 0$ et donc $\Psi \in G$

$\star$ Posons, maintenant, pour tout $x \in [-1;+1]$ $\Phi(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(t)\, \mathrm{d}t$. Φ est bien une fonction constante et donc $\Phi \in F$

En résumé, toute fonction $f \in \mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})$ s'écrit $f = \Phi + \Psi$ où $\Phi \in F$ et $\Psi \in G$ et donc, nous avons, effectivement :

$$\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C}) = F + G$$

$\longrightarrow$ **Nous montrons, maintenant, que $F \cap G = \{\mathcal{O}\}$ où $\mathcal{O}$ est la fonction nulle**

Soit donc $f \in F \cap G$.

Alors, $\int_{-1}^{+1} f(x)\, \mathrm{d}x = 0$ et, pour tout $x \in [-1;+1]$, $f(x) = k$ où $k \in \mathbb{C}$. Or :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{+1} k\, \mathrm{d}x = 2k = 0$$

Et donc, $k = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in [-1;+1]$, $f(x) = 0$ et f est donc la fonction nulle.

Donc, $F \cap G = \{\mathcal{O}\}$

Et donc $\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C}) = F \oplus G$

Pour aller plus loin

Nous faisons référence au point 3.8.1 qui définit les formes linéaires et au point 3.8.7 qui définit ce qu'est un hyperplan.

L'application $\Phi : \mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Phi : \mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \Phi(f) = \int_{-1}^{+1} f(t)\, \mathrm{d}t\end{array}\right.$$

est une forme linéaire dont le noyau $\ker \Phi$ est G lequel est un hyperplan de $\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})$

Exercice 12 :

Soit $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ non nul et F l'ensemble des multiples de P_0 dans $\mathbb{R}[X]$, c'est à dire :

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P = P_0 \times Q \text{ où } Q \in \mathbb{R}[X]\}$$

Déterminer un supplémentaire de F.

Soit P un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$.
Effectuons la division euclidienne de P par P_0. Nous avons donc :

$$P = P_0 \times Q + R \text{ où } \deg R < \deg P_0$$

Ainsi, si $\mathcal{R}_{P_0} = \{R \in \mathbb{R}[X] \text{ tels que } \deg R < \deg P_0\}$, alors, tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit comme la somme d'un polynôme de F et d'un polynôme de $\mathcal{R}_{P_0}$.
Nous avons donc $\mathbb{R}[X] = F + \mathcal{R}_{P_0}$
Soit $\Delta \in F \cap \mathcal{R}_{P_0}$.
Alors, comme $\Delta \in F$, alors, Δ est un multiple de P_0 et donc $\deg\Delta \geqslant \deg P_0$, et comme $\Delta \in \mathcal{R}_{P_0}$, alors $\deg\Delta < \deg P_0$, ce qui est impossible, sauf si Δ est le polynôme nul.
Et donc $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathcal{R}_{P_0}$

Exercice 15 :

$\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis des opérations usuelles de la structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & f[(x,y)] = (x-y, x+2y, -y) \end{cases}$$

Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$. f est-elle injective ? surjective ?

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que f est une application linéaire .

$\longrightarrow$ **Recherche de $\ker f$**

Il faut donc trouver $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f[(x,y)] = (x-y, x+2y, -y) = (0,0,0)$. C'est à dire que nous devons avoir :

$$x - y = 0 \qquad x + 2y = 0 \qquad y = 0$$

Et nous concluons que $x = y = 0$
D'où $\ker f = \{(0,0)\}$, et nous concluons donc que f est injective

$\longrightarrow$ **Recherche de $\operatorname{Im} f$**

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, nous avons :

$$f[(x,y)] = (x-y, x+2y, -y) = x(1,1,0) + y(-1,2,-1)$$

De telle sorte que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(\{(1,1,0);(-1,2,-1)\})$
f ne peut pas être surjective puisque, par exemple, le triplet $(0,1,0) \in \mathbb{R}^3$ n'a pas d'antécédent par f. En effet, s'il existait $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f[(x,y)] = (0,1,0)$, nous devrions avoir le système :

$$\begin{cases} x - y = & 0 \\ x + 2y = & 1 \\ y = & 0 \end{cases}$$

Système qui est impossible.
Si nous nous intéressons aux dimensions, nous avons $\dim \operatorname{Im} f = 2$ et donc, comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\operatorname{Im} f$ est strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$.
Nous pouvons vérifier, ici, l'égalité $\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

Exercice 16 :

$\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; soit $a \in \mathbb{C}^*$. Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) = z + a\overline{z} \end{array} \right.$$

Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire et déterminer son noyau et son image

$\Rightarrow$ Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$; alors :

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda z_1 + \mu z_2) & = & (\lambda z_1 + \mu z_2) + a\overline{(\lambda z_1 + \mu z_2)} \\ & = & \lambda z_1 + \mu z_2 + a\lambda \overline{z_1} + a\mu \overline{z_2} \\ & = & \lambda z_1 + a\lambda \overline{z_1} + \mu z_2 + a\mu \overline{z_2} \\ & = & \lambda (z_1 + a\overline{z_1}) + \mu (z_2 + a\overline{z_2}) \\ & = & \lambda f(z_1) + \mu f(z_2) \end{array}$$

f est donc une application linéaire .

$\Rightarrow$ Recherchons $\ker f$, le noyau de f
Nous avons $z \in \ker f \iff f(z) = 0$.
Soit donc $z \in \ker f$; alors $z + a\overline{z} = 0$

$\star$ Nous posons $z = x + iy$ et $a = \alpha + i\beta$ avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} z + a\overline{z} = 0 & \iff & (x + iy) + (\alpha + i\beta)(x - iy) = 0 \\ & \iff & (x + iy) + (\alpha x - i\alpha y + i\beta x + \beta y) = 0 \\ & \iff & (x + \alpha x + \beta y) + i(y - \alpha y + \beta x) = 0 \end{array}$$

Donc :

$$z + a\overline{z} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rl} (1+\alpha)x + \beta y = & 0 \\ \beta x + (1-\alpha)y = & 0 \end{array} \right.$$

$\star$ Calculons le déterminant δ du système :

$$\delta = \begin{vmatrix} (1+\alpha) & \beta \\ \beta & (1-\alpha) \end{vmatrix} = 1 - \alpha^2 - \beta^2$$

$\Rightarrow$ Ainsi, si $\alpha^2 + \beta^2 = |a|^2 \neq 1$, alors $\delta \neq 0$ et le seul couple solution du système est $(0,0)$, c'est à dire $\ker f = \{0\}$ et $\operatorname{Im} f = \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Supposons, maintenant, que $\delta = 0$, c'est à dire $\alpha^2 + \beta^2 = |a|^2 = 1$.

$\star$ Nous posons alors $a = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, c'est à dire que $\theta = \arg(z)$; alors :

$$z + a\overline{z} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rl} (1+\cos\theta)x + \sin\theta y = & 0 \\ \sin\theta x + (1-\cos\theta)y = & 0 \end{array} \right.$$

En utilisant les formules trigonométriques classiques :

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\tfrac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \text{ et } \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{rl} (1+\cos\theta)x + \sin\theta y = & 0 \\ \sin\theta x + (1-\cos\theta)y = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff$$
$$\left\{ \begin{array}{rl} 2\cos^2\frac{\theta}{2}x + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}y = & 0 \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}x + 2\sin^2\frac{\theta}{2}y = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff$$
$$\left\{ \begin{array}{rl} 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}x + \sin\frac{\theta}{2}y\right) = & 0 \\ 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}x + \sin\frac{\theta}{2}y\right) = & 0 \end{array} \right.$$

⋆ Si $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$ alors $a = -1$, et le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\cos\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}x+\sin\frac{\pi}{2}y\right) &=& 0 \\ 2\sin\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}x+\sin\frac{\pi}{2}y\right) &=& 0 \end{array}\right. \iff y = 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $z = x$ et donc $z \in \mathbb{R}$; nous avons donc $\ker f = \mathbb{R}$.
Avec $a = -1$, nous avons $f(z) = z - \overline{z}$ et $f(z)$ est imaginaire pur. Donc, $\mathrm{Im} f$ est l'ensemble des imaginaires purs[4].

⋆ Si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$ alors $a = 1$, et, par un calcul semblable, on démontre que le système admet pour solution $x = 0$ et $y \in \mathbb{R}$.
Donc, $\ker f$ est l'ensemble des imaginaires purs et, comme $f(z) = z + \overline{z}$, $f(z) \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$

⋆ Supposons, maintenant, que $\theta \neq 0\,[2\pi]$ et $\theta \neq \pi\,[2\pi]$
Alors le système se réduit à une seule équation $\cos\frac{\theta}{2}x + \sin\frac{\theta}{2}y = 0$.
Nous avons alors $x = -\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}y$ et $z = -\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}y + iy = y\left(-\tan\frac{\theta}{2} + i\right)$
Donc, $\ker f = \left\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z = y\left(-\tan\frac{\theta}{2} + i\right) \text{ avec } y \in \mathbb{R}\right\}$
Recherchons, maintenant $\mathrm{Im} f$.
Cette fois-ci, nous avons $f(z) = z + e^{i\theta}\overline{z}$. En écrivant $z = x + iy$, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} f(z) = z + e^{i\theta}\overline{z} = & & (x+iy) + e^{i\theta}(x - iy) \\ & = & x\left(1+e^{i\theta}\right) + iy\left(1 - e^{i\theta}\right) \\ & = & \left(1+e^{i\theta}\right)\left[x + iy\left(\frac{\left(1-e^{i\theta}\right)}{\left(1+e^{i\theta}\right)}\right)\right] \end{array}$$

Regardons, de manière plus proche $\frac{\left(1-e^{i\theta}\right)}{\left(1+e^{i\theta}\right)}$

$$\begin{array}{rcl} \frac{\left(1-e^{i\theta}\right)}{\left(1+e^{i\theta}\right)} & = & \frac{\left(1-e^{i\theta}\right)\left(1+e^{-i\theta}\right)}{\left(1+e^{i\theta}\right)\left(1+e^{-i\theta}\right)} \\ & = & \frac{1+e^{-i\theta}-e^{i\theta}-1}{\left|1+e^{i\theta}\right|^2} \\ & = & \frac{-2i\sin\theta}{\left|1+e^{i\theta}\right|^2} \end{array}$$

D'où $\left[x + iy\left(\frac{\left(1-e^{i\theta}\right)}{\left(1+e^{i\theta}\right)}\right)\right] = x + iy \times \left(\frac{-2i\sin\theta}{\left|1+e^{i\theta}\right|^2}\right) = x + \frac{2y\sin\theta}{\left|1+e^{i\theta}\right|^2}$.
Or, $x + \frac{2y\sin\theta}{\left|1+e^{i\theta}\right|^2} \in \mathbb{R}$, et donc $f(z) = \left(1+e^{i\theta}\right)\left(x + \frac{2y\sin\theta}{\left|1+e^{i\theta}\right|^2}\right)$
Ainsi, $\mathrm{Im} f = \left\{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } z = \lambda\left(1+e^{i\theta}\right) \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice 17 :

Nous considérons 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F, G et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, une application linéaire surjective et $g : F \longrightarrow G$, une application quelconque.
On suppose que $f \circ g : E \longrightarrow G$ est une application linéaire . Il faut montrer que g est linéaire

Soient $y_1 \in F$, $y_2 \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$.
Il nous faut donc montrer que $g(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda g(y_1) + \mu g(y_2)$
f étant surjective, il existe $x_1 \in E$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $x_2 \in E$ tel que $y_2 = f(x_2)$. Alors, $\lambda g(y_1) + \mu g(y_2)$ devient :

$$\lambda g(y_1) + \mu g(y_2) = \lambda g \circ f(x_1) + \mu g \circ f(x_2)$$

4. Les imaginaires purs peuvent être notés $i\mathbb{R}$

De la linéarité de $g \circ f$, nous tirons :

$$\begin{array}{rcl} \lambda g(y_1) + \mu g(y_2) & = & \lambda g \circ f(x_1) + \mu g \circ f(x_2) \\ & = & g \circ f(\lambda x_1 + \mu x_2) \\ & = & g[f(\lambda x_1 + \mu x_2)] \\ & = & g[\lambda f(x_1) + \mu f(x_2)] \text{ par linéarité de } f \\ & = & g(\lambda y_1 + \mu y_2) \end{array}$$

g est bien linéaire

Exercice 19 :

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On construit $\Phi : E \times F \longrightarrow E \times F$ par :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \Phi : E \times F & \longrightarrow & E \times F \\ (x, y) & \longmapsto & \Phi[(x, y)] = (x, y - f(x)) \end{array} \right.$$

Il faut montrer que Φ est linéaire et bijective, donc $\Phi \in \mathrm{GL}(E \times F)$

⇒ **Montrons que Φ est linéaire**

⋆ Soient $(x, y) \in E \times F$ et $(x_1, y_1) \in E \times F$; alors :

$$\begin{array}{rcl} \Phi[(x, y) + (x_1, y_1)] & = & \Phi[(x + x_1, y + y_1) + (x_1, y_1)] \\ & = & (x + x_1, y + y_1 - f(x + x_1)) \\ & = & (x + x_1, y + y_1 - f(x) - f(x_1)) \text{ par linéarité de } f \\ & = & (x, y - f(x)) + (x_1, y_1 - f(x_1)) \\ & = & \Phi[(x, y)] + \Phi[(x_1, y_1)] \end{array}$$

Nous avons donc $\Phi[(x, y) + (x_1, y_1)] = \Phi[(x, y)] + \Phi[(x_1, y_1)]$

⋆ Soient $(x, y) \in E \times F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$; alors :

$$\begin{array}{rcl} \Phi[\lambda(x, y)] & = & \Phi[(\lambda x, \lambda y)] \\ & = & (\lambda x, \lambda y - f(\lambda x)) \\ & = & (\lambda x, \lambda y - \lambda f(x)) \text{ par linéarité de } f \\ & = & \lambda(x, y - f(x)) \\ & = & \lambda \Phi[(x, y)] \end{array}$$

Nous avons donc $\Phi[\lambda(x, y)] = \lambda \Phi[(x, y)]$

⇒ **Montrons que Φ est bijective**

Point difficile.

Considérons Ψ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \Psi : E \times F & \longrightarrow & E \times F \\ (x, y) & \longmapsto & \Phi[(x, y)] = (x, y + f(x)) \end{array} \right.$$

On montre, facilement, que $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{E \times F}$, et donc que $\Psi = \Phi^{-1}$

Φ est donc bijective et $\Phi \in \mathrm{GL}(E \times F)$

Exercice 21 :

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{C}$-espace vectoriel , On considère les fonctions $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$ et $f_3(x) = \cos 2x$. La famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ forme-t-elle une famille libre ou liée ?

Cet exercice est corrigé pour donner une méthode générale dans les espaces de fonctions.

Soient $a_1 \in \mathbb{C}$, $a_2 \in \mathbb{C}$ et $a_3 \in \mathbb{C}$ tels que $a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = \mathcal{O}$, ce qui veut dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) = \mathcal{O}(x) = 0 \Longleftrightarrow a_1 \cos x + a_2 \sin x + a_3 \cos 2x = \mathcal{O}(x) = 0$$

Cette égalité est vraie pour $x = 0$, et nous avons donc : $a_1 + a_3 = 0$

Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, $a_2 - a_3 = 0$
Pour $x = \pi$, $-a_1 + a_3 = 0$
Nous obtenons donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} a_1 + a_3 = & 0 \\ a_2 - a_3 = & 0 \\ -a_1 + a_3 = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

La famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est donc une famille libre.

Exercice 22 :

1. *Prouver que la famille de polynômes $\left\{X^k\left(1-X^n\right); k \in \mathbb{N}\right\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.*

   Appellons $E_k^n(X) = X^k\left(1-X^n\right) = -X^{n+k} + X^k$.
   L'objet de cette question est de montrer que la famille $\{E_k^n; k \in \mathbb{N}\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
   Dans l'exemple 10 page 86, nous démontrons qu'une famille de polynômes de degrés différents forme une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
   Ainsi, pour n fixé, $\deg E_k^n = n + k$ et donc, si $k \neq k'$, alors $\deg E_k^n \neq \deg E_{k'}^n$, et la famille $\{E_k^n; k \in \mathbb{N}\}$ forme donc une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

2. *Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha \neq \beta$ et $n \in \mathbb{N}$*
   Montrer que la famille de polynômes $\left\{(X-\alpha)^k(X-\beta)^{n-k}; 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

   Cette démonstration est toujours un peu délicate.
   Appelons, pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $F_k(X) = (X-\alpha)^k(X-\beta)^{n-k}$; nous devons donc montrer que la famille $\{F_k; 0 \leqslant k \leqslant n\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.
   Soient donc $\lambda_0 \in \mathbb{K}, \lambda_1 \in \mathbb{K}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $n+1$ scalaires tels que $\lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_n F_n = \mathcal{O}$, alors :

   $$\begin{gathered} \lambda_0 F_0(X) + \lambda_1 F_1(X) + \cdots + \lambda_n F_n(X) = \mathcal{O}(X) = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ \lambda_0 (X-\beta)^n + \lambda_1 (X-\alpha)(X-\beta)^{n-1} + \cdots + \lambda_n (X-\alpha)^n = 0 \end{gathered}$$

   $\Rightarrow$ En posant, $Q(X) = \lambda_0(X-\beta)^n + \lambda_1(X-\alpha)(X-\beta)^{n-1} + \cdots + \lambda_n(X-\alpha)^n$, en remplaçant X par α, nous obtenons $Q(\alpha) = \lambda_0(\alpha-\beta)^n = 0$, et comme $\alpha \neq \beta$, $\lambda_0 = 0$.
   Nous avons donc :

   $$Q(X) = \lambda_1(X-\alpha)(X-\beta)^{n-1} + \cdots + \lambda_n(X-\alpha)^n$$

   $\Rightarrow$ En factorisant par $(X-\alpha)$, nous avons $Q(X) = (X-\alpha)Q_1(X)$ où

   $$Q_1(X) = \lambda_1(X-\beta)^{n-1} + \lambda_2(X-\alpha)(X-\beta)^{n-2} + \cdots + \lambda_n(X-\alpha)^{n-1}$$

   Comme $Q(X) = 0$ et que $(X-\alpha)$ n'est pas le polynôme nul, nous avons $Q_1(X) = 0$.
   Comme tout à l'heure $Q_1(\alpha) = \lambda_1(\alpha-\beta)^{n-1} = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$
   $\Rightarrow$ Arrivé au rang k, nous avons

   $$Q_k(X) = \lambda_k(X-\beta)^{n-k} + \lambda_{k+1}(X-\alpha)(X-\beta)^{n-k-1} + \cdots + \lambda_n(X-\alpha)^{n-k}$$

   Et nous avons donc $Q_k(\alpha) = \lambda_k(\alpha-\beta)^{n-k} = 0$ et donc $\lambda_k = 0$
   $\Rightarrow$ Au rang n, nous avons $Q_n(X) = \lambda_n = 0$
   Nous avons donc démontré que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \cdots = \lambda_n = 0$.
   La famille $\{F_k; 0 \leqslant k \leqslant n\}$ est donc une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 26 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ une famille libre de E. On pose :

$$b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \ldots, b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Montrer que la famille $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ est une famille libre de E

Voilà un exercice qui n'est pas difficile du tout, mais qui est, néanmoins, intéressant.

Une autre façon de présenter la famille $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ est de la présenter sous forme de tableau. On remarquera que ce tableau est triangulaire :

$$\begin{cases} b_1 = & a_1 \\ b_2 = & a_1 + a_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_k = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k \\ \vdots & \vdots \\ b_n = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots + a_n \end{cases}$$

Soient donc $\lambda_1 \in \mathbb{K}, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n = 0$.
Alors, nous avons :

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 (a_1 + a_2) + \lambda_3 (a_1 + a_2 + a_3) + \cdots + \lambda_k (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + \cdots + \lambda_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 0$$

En regroupant, nous obtenons :

$$\lambda_n a_n + (\lambda_n + \lambda_{n-1}) a_{n-1} + \cdots + (\lambda_n + \lambda_{n-1} + \cdots + \lambda_k) a_k + \cdots + (\lambda_n + \lambda_{n-1} + \cdots + \lambda_1) a_1 = 0$$

La famille $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ étant une famille libre de E, nous avons :

$$\lambda_n = (\lambda_n + \lambda_{n-1}) = \cdots = (\lambda_n + \lambda_{n-1} + \cdots + \lambda_k) = \cdots = (\lambda_n + \lambda_{n-1} + \cdots + \lambda_1) = 0$$

Nous obtenons donc un système triangulaire :

$$\begin{array}{rl} \lambda_n = & 0 \\ \lambda_n + \lambda_{n-1} = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n + \lambda_{n-1} + \cdots + \lambda_k = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n + \lambda_{n-1} + \cdots + \lambda_1 & = 0 \end{array}$$

Ce qui nous donne, facilement, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \ldots = \lambda_n = 0$, et donc la famille $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ est une famille libre de E

Exercice 27 :

1. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$, alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$*

   Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ et supposons que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$.

   Alors, $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$ avec $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$. Nous avons alors $n = \dfrac{p^2}{q^2} \Longleftrightarrow p^2 = q^2 n$.

   Considérons la décomposition de n en un produit de facteurs alors $n = x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}$.
   Il existe alors un exposant α_i qui est impair car, sinon, $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
   C'est l'égalité $p^2 = q^2 n$ qui va nous donner la solution : si tous les exposants de p^2 et q^2 sont pairs, alors que les exposants dans la décomposition de n et donc de nq^2 ne le sont pas tous, c'est impossible ; il y a donc contradiction.
   Et donc $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$

Une autre façon de démontrer est d'utiliser le lemme de Gauss
En effet, si $\text{pgcd}\,(p,q)=1$, alors $\text{pgcd}\left(p^2,q^2\right)=1$. De l'égalité $p^2=q^2n$, on déduit que q^2 divise p^2 et comme q^2 est premier avec p^2, d'après le lemme de Gauss, q^2 divise 1, c'est à dire que $q=1$ et donc $\sqrt{n}=p$ et $\sqrt{n}\in\mathbb{N}$; il y a donc contradiction et nous concluons que $\sqrt{n}\notin\mathbb{Q}$

2. *Démontrer que, pour tout $\alpha\in\mathbb{Q}$, tout $\beta\in\mathbb{Q}$ et tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n}\notin\mathbb{Q}$, nous avons l'implication :*

$$\alpha+\beta\sqrt{n}=0\Longrightarrow\alpha=\beta=0$$

Voilà une question peu difficile ; en effet, soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n}\notin\mathbb{Q}$, $\alpha\in\mathbb{Q}$ et $\beta\in\mathbb{Q}$ tels que $\alpha+\beta\sqrt{n}=0$.
⋆ Si $\alpha=\beta=0$, la question est résolue.
⋆ Supposons $\beta\neq0$, alors $\sqrt{n}=\dfrac{-\alpha}{\beta}$.
Comme $\alpha\in\mathbb{Q}$ et $\beta\in\mathbb{Q}$ alors $\dfrac{-\alpha}{\beta}\in\mathbb{Q}$, ce qui est contradictoire avec le fait que $\sqrt{n}\notin\mathbb{Q}$.
Donc, $\beta=0$ et donc $\alpha=0$

3. *Démontrer que la famille $\left\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\right\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$*

Cette question est plus subtile !!
Soient donc $a\in\mathbb{Q}$, $b\in\mathbb{Q}$ et $c\in\mathbb{Q}$ tels que $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$
Nous avons, $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0\Longleftrightarrow c\sqrt{3}=-a-b\sqrt{2}$.
En élevant au carré, nous obtenons $3c^2=a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}\Longleftrightarrow a^2+2b^2-3c^2+2ab\sqrt{2}=0$
⋆ D'après la question précédente, nous avons $a^2+2b^2-3c^2+2ab\sqrt{2}=0\Longleftrightarrow a^2+2b^2-3c^2=0$ et $ab=0$
⋆ Supposons $a=0$, alors $2b^2-3c^2=0$ et donc $\left(b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\right)\left(b\sqrt{2}-c\sqrt{3}\right)=0$
⇒ Donc, de $b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$, toujours d'après la question précédente $b=c=0$
⇒ Et, de $b\sqrt{2}-c\sqrt{3}=0$, on tire aussi $b=c=0$
⋆ Supposons $b=0$, alors $a^2-3c^2=0$ et donc $\left(a+c\sqrt{3}\right)\left(a-c\sqrt{3}\right)=0$
⇒ Donc, de $a+c\sqrt{3}=0$, toujours d'après la question précédente $a=c=0$
⇒ Et, de $a-c\sqrt{3}=0$, on tire aussi $a=c=0$
Nous avons donc démontré que si $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$ avec $a\in\mathbb{Q}$, $b\in\mathbb{Q}$ et $c\in\mathbb{Q}$, alors $a=b=c=0$

Pour aller plus loin
Ceci montre que $\mathbb{R}$, considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel n'est pas de dimension finie. Nous nous sommes intéressés aux entiers $n\in\mathbb{N}$ tels que $\sqrt{n}\notin\mathbb{Q}$, mais, lorsque nous considérons π, e que devient la dimension de $\mathbb{R}$?

Exercice 28 :

1. *On considère $\mathbb{C}^3$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3, muni de sa base canonique. Déterminer, suivant les valeurs de $\alpha\in\mathbb{C}$ le rang de la famille $\mathcal{F}=\{a,b,c\}$ où*

$$a=(1,1,\alpha)\quad b=(1,\alpha,1)\quad c=(\alpha,1,1)$$

C'est un exercice des plus classiques !!
⋆ Il est clair que si $\alpha=1$, alors $a=b=c$ et le système est de rang 1.
⋆ Supposons $\alpha\neq1$ et soient $x\in\mathbb{C}$, $y\in\mathbb{C}$ et $z\in\mathbb{C}$ tels que $xa+yb+zc=0$. Ceci se traduit par :

$$x\,(1,1,\alpha)+y\,(1,\alpha,1)+z\,(\alpha,1,1)=(0,0,0)$$

Nous obtenons alors le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+\alpha z= & 0 & (L_1)\\ x+\alpha y+z= & 0 & (L_2)\\ \alpha x+y+z= & 0 & (L_3)\end{array}\right.$$

Nous allons jouer sur les combinaisons linéaires de lignes *(Méthode de Gauss)*

- ▷ Nous commençons par écrire $(L_1') = (L_1)$, $(L_2') = (L_2) - (L_1)$ et $(L_3') = (L_3) - \alpha (L_1)$. Nous avons donc le système :

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = & 0 & (L_1') \\ (\alpha - 1) y + (1 - \alpha) z = & 0 & (L_2') \\ (1 - \alpha) y + \left(1 - \alpha^2\right) z = & 0 & (L_3') \end{cases}$$

Comme $\alpha \neq 1$, nous pouvons simplifier par $1 - \alpha$, et nous obtenons le nouveau système :

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = & 0 & (L_1') \\ -y + z = & 0 & (L_2') \\ y + (1 + \alpha) z = & 0 & (L_3') \end{cases}$$

- ▷ Nous faisons une seconde combinaison linéaire $(L_1'') = (L_1')$, $(L_2'') = (L_2')$ et $(L_3'') = (L_3') + (L_2')$. Nous avons donc le système :

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = & 0 & (L_1') \\ -y + z = & 0 & (L_2') \\ (2 + \alpha) z = & 0 & (L_3') \end{cases}$$

- ▷ Si $2 + \alpha \neq 0 \iff \alpha \neq -2$, alors, $z = 0$ et, en remontant, $x = y = z = 0$; la famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{a, b, c\}$ est de rang 3.
- ▷ Si $\alpha = -2$, $z \in \mathbb{C}$, $y = z$ et la première ligne devient $x + z - 2z = 0 \iff x = z$. Nous avons alors :

$$z\left[(1, 1, -2) + (1, -2, 1) + (-2, 1, 1)\right] = (0, 0, 0)$$

Et la famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{a, b, c\}$ est de rang 1

En conclusion, la famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{a, b, c\}$ est de rang 3, sauf pour $\alpha = 1$ ou $\alpha = -2$ où elle est de rang 1.

2. *Même question, pour le même système considéré comme famille de vecteurs de l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*

Première remarque, c'est que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ n'a que 8 éléments et que α ne peut prendre que 2 valeurs, 0 ou 1.

- ⊵ Si $\alpha = 1$, nous avons, une nouvelle fois $a = b = c$ et la famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{a, b, c\}$ est de rang 1.
- ⊵ Si $\alpha = 0$, alors :

$$a = (1, 1, 0) \quad b = (1, 0, 1) \quad c = (0, 1, 1)$$

La famille $\{a, b\}$ est une famille indépendante, mais nous avons $a + b = c$, et donc le système est de rang 2.

Exercice 29 :

$\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$

1. *Soient $a_1 \in \mathbb{C}$ et $a_2 \in \mathbb{C}$ 2 scalaires complexes. Nous appelons F le sous-ensemble $F \subset \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ défini par :*

$$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \text{ telles que pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ nous avons } f(n) + a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) = 0\}$$

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

- ▷ Montrons que $F \neq \emptyset$.
La fonction nulle $\mathcal{O} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un élément de F puisque :

$$\mathcal{O}(n) + a_1 \mathcal{O}(n-1) + a_2 \mathcal{O}(n-2) = 0 + a_1 \times 0 + a_2 \times 0 = 0$$

- ▷ Soient $f \in F$ et $g \in G$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$; il faut que nous montrions que $\lambda f + \mu g \in F$.
  Soit donc $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
&(\lambda f + \mu g)(n) + a_1 (\lambda f + \mu g)(n-1) + a_2 (\lambda f + \mu g)(n-1) = \\
&\lambda f(n) + \mu g(n) + a_1 \lambda f(n-1) + a_1 \mu g(n-1) + a_2 \lambda f(n-2) + a_2 \mu g(n-2) \\
&= \lambda f(n) + a_1 \lambda f(n-1) + a_2 \lambda f(n-2) + \mu g(n) + a_1 \mu g(n-1) + a_2 \mu g(n-2) \\
&= \lambda (f(n) + a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2)) + \mu (g(n) + a_1 g(n-1) + a_2 g(n-2)) \\
&= \lambda \times 0 + \mu \times 0 \text{ puisque } f \in F \text{ et } g \in F \\
&= 0
\end{aligned}$$

  Donc $\lambda f + \mu g \in F$

Et F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$

2. *Soit Φ une application de F dans $\mathbb{C}^2$ ainsi définie :*

$$\begin{cases} \Phi : F & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \quad f & \longmapsto & \Phi(f) = (f(0), f(1)) \end{cases}$$

Démontrer que Φ est un isomorphisme de F vers $\mathbb{C}^2$
Quelle est la dimension de F ?

⇒ Nous commençons par vérifier que Φ est une application linéaire.
Soient $f \in E$ et $g \in E$
Alors

$$\begin{aligned}
\Phi(f+g) &= ((f+g)(0), (f+g)(1)) \\
&= (f(0) + g(0), f(1) + g(1)) \\
&= (f(0), f(1)) + (g(0), g(1)) \\
&= \Phi(f) + \Phi(g)
\end{aligned}$$

De plus, soit $\lambda \in \mathbb{C}$
Alors

$$\Phi[\lambda f] = ((\lambda f)(0), (\lambda f)(1)) = (\lambda f(0); \lambda f(1)) = \lambda (f(0); f(1)) = \lambda \Phi(f)$$

⇒ Vérifions maintenant que Φ est injective.
Recherchons les éléments du noyau de Φ

$$\ker \Phi = \{f \in E \text{ tels que } \Phi(f) = ((f(0), f(1))) = (0; 0)\}$$

On peut démontrer facilement par récurrence qu'il ne peut s'agir que de la suite nulle.

Il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 0$

- ⋆ C'est donc vrai pour $n = 0$ et $n = 1$
- ⋆ Supposons que pour $p \leqslant n$, $f(p) = 0$
- ⋆ Alors, de l'identité $f(n+1) + a_1 f(n) + a_2 f(n-1) = 0$, nous déduisons, d'après l'hypothèse de récurrence que nous avons $f(n+1) = 0$

Et donc f est l'application nulle

Donc $\ker \Phi = \{\mathcal{O}\}$ et donc Φ est injective.

⇒ Vérifions maintenant que Φ est surjective.
Soit $a = (x; y) \in \mathbb{C}^2$
Alors en prenant la fonction $f \in E$ telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$ on a bien $\Phi(f) = (x; y) = a$
Donc $\forall a \in \mathbb{C}^2, \exists f \in E,$ telle que $\Phi(f) = a$
Donc Φ est surjective.

⇒ Φ, linéaire et bijective, est donc bien un isomorphisme

⇒ Ainsi, d'après le théorème du rang, E et $\mathbb{C}^2$ sont de même dimension.
Or, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$, et donc $\dim_{\mathbb{C}} F = 2$

3. *Touver tous les éléments $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par $f(n) = \alpha^n$ soit dans F.*

Si la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par $f(n) = \alpha^n$ est dans F, alors, nous avons :

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} = 0 \Longleftrightarrow \alpha^{n-2} \left(\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2\right) = 0$$

⇒ Une première solution, évidente, est $\alpha = 0$; c'est, en fait, la fonction nulle.
⇒ Sinon, si $\alpha \neq 0$, nous devons avoir $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$
C'est une équation du second degré dont le discriminant Δ est $\Delta = a_1^2 - 4a_2$
⋆ Si $\Delta > 0$ il y a 2 solutions ; en posant ω une racine carrée de Δ, nous avons comme solution :

$$\alpha_1 = \frac{-a_1 + \omega}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{-a_1 - \omega}{2}$$

⋆ Si $\Delta = 0$ il n'y a qu'une seule solution $\alpha = \dfrac{-a_1}{2}$

4. *Trouver une base de F lorsque $a_1^2 \neq 4a_2$.*

Si $a_1^2 \neq 4a_2$, alors $\Delta \neq 0$ et il y a 2 solutions à l'équation $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$. Nous avons donc 2 fonctions $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ éléments de F qui vérifient donc $f_1(n) = \alpha_1^n$ et $f_2(n) = \alpha_2^n$. Les éléments de F étant complètement déterminés par la donnée de leur 2 premiers termes, f_1 est donc entièrement déterminée par $(f_1(0), f_1(1))$ et f_2 par $(f_2(0), f_2(1))$.
Si la famille $\{f_1, f_2\}$ est linéairement indépendante, alors elle forme une base de F, et tous les éléments de F s'expriment comme combinaison linéaire de f_1 et de f_2.
Or, $(f_1(0), f_1(1)) = (1, \alpha_1)$ et $(f_2(0), f_2(1)) = (1, \alpha_2)$ qui ne sont pas colinéaires. Ainsi, si $a_1^2 \neq 4a_2$, les éléments de F sont de la forme $g = \lambda f_1 + \mu f_2$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$ c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$g(n) = \lambda\alpha_1^n + \mu\alpha_2^n$$

Il était aussi tout à fait possible d'utiliser les déterminants d'ordre 2. En effet :

$$\det(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{-a_1 + \omega}{2} & \dfrac{-a_1 - \omega}{2} \end{vmatrix} = -\omega$$

Comme $\omega \neq 0$, $\det(f_1, f_2) \neq 0$ et les deux « vecteurs » f_1 et f_2 sont indépendants et forment une base de F

5. *On suppose que $a_1^2 = 4a_2$. Montrer que si $\gamma \in \mathbb{C}$ vérifie $\gamma^2 + a_1\gamma + a_2 = 0$, alors, la fonction $h \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $h(n) = n\gamma^n$ est dans F. Trouver une base de F*

Si $a_1^2 = 4a_2$, alors $\Delta = 0$, et l'équation $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$ admet une racine double $\gamma = \dfrac{-a_1}{2}$, ce qui nous permet de dire que la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = \gamma^n$ est bien un élément de F.
Montrons aussi que si $a_1^2 = 4a_2$, alors la fonction $h \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $h(n) = n\gamma^n$ est dans F.

$$\begin{aligned}
h(n) + a_1 h(n-1) + a_2 h(n-2) &= n\gamma^n + a_1(n-1)\gamma^{n-1} + a_2(n-2)\gamma^{n-2} \\
&= \gamma^{n-2}\left[n\gamma^2 + a_1(n-1)\gamma + a_2(n-2)\right] \\
&= \gamma^{n-2}\left[(n-1)\gamma^2 + \gamma^2 + a_1(n-1)\gamma + a_2(n-1) - a_2\right] \\
&= \gamma^{n-2}\left[(n-1)\left(\gamma^2 + a_1\gamma + a_2\right) - a_2 + \gamma^2\right] \\
&= \gamma^{n-2}\left[(n-1)\left(\underbrace{\gamma^2 + a_1\gamma + a_2}_{=0}\right) - a_2 + \gamma^2\right] \\
&= \gamma^{n-2}\left[-a_2 + \gamma^2\right] \\
&= \gamma^{n-2}\left[-a_2 + \frac{a_1^2}{4}\right] \quad \text{puisque } \gamma = \frac{-a_1}{2} \\
&= \gamma^{n-2}\left[\frac{a_1^2 - 4a_2}{4}\right] \\
&= 0 \text{ car } a_1^2 = 4a_2
\end{aligned}$$

Ainsi, si $a_1^2 = 4a_2$, la fonction $h(n) = n\gamma^n$ où $\gamma = \dfrac{-a_1}{2}$ est bien une fonction de F
Les éléments de F étant complètement déterminés par la donnée de leur 2 premiers termes, f est donc entièrement déterminée par $(f(0), f(1))$ et h par $(h(0), h(1))$.

Si la famille $\{f,h\}$ est linéairement indépendante, alors elle forme une base de F, et tous les éléments de F s'expriment comme combinaison linéaire de f et de h.
Or, $(f(0), f(1)) = (1,\gamma)$ et $(h(0), h(1)) = (0,\gamma)$ qui ne sont pas colinéaires. Ainsi, si $a_1^2 = 4a_2$, les éléments de F sont de la forme $g = \lambda f + \mu$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$ c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$g(n) = \lambda\gamma^n + \mu n\gamma^n = \gamma^n(\mu n + \lambda)$$

Pour aller plus loin

1. Le problème s'intéresse aux suites définies par une récurrence linéaire, ici une récurrence linéaire d'ordre 2 du type $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$. Nous venons de traiter les suites numériques complexes, c'est à dire des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ où $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. Il y a deux choses importantes à retenir dans ces cas :
   (a) La première question clef est la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence ; dans le cas des récurrences linéaires, ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel est de dimension 2
   (b) La seconde question clef est la résolution de l'équation du second degré $r^2 - ar - b = 0$ qui est appelée **équation caractéristique** de cette relation de récurrence

   Dans le cas du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 2, la question a été totalement résolue
2. **Intéressons nous maintenant au cas réel**
   Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

   $$(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})\,(u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n)$$

   L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée **équation caractéristique**
   - Si l'équation caractéristique admet 2 solutions distinctes $r_1 \in \mathbb{R}$ et $r_2 \in \mathbb{R}$, alors :

     $$(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

     avec λ et μ uniques
   - Si l'équation caractéristique admet 1 racine double $r \in \mathbb{R}$, alors :

     $$(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n = \lambda r^n + \mu n r^n = r^n(\lambda + n\mu)) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

     avec λ et μ uniques
   - Si l'équation caractéristique admet 2 racines complexes conjuguées $r_1 = re^{i\theta}$ et $r_1 = re^{-i\theta}$ (avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$), alors :

     $$(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n = r^n(\lambda\cos n\theta + \mu\sin n\theta)) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

     avec λ et μ uniques

   Preuve
   ⋆ Les deux premiers points ont déjà été démontrés dans le problème
   ⋆ Si l'équation caractéristique admet 2 racines complexes conjuguées, ceci veut que le discriminant est négatif *(c'est à dire $a^2 + 4b = 0$)*
   Si nous « plongeons » l'ensemble dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, d'après les résultats que nous avons établis dans le probème, nous anons :

   $$u_n = Ar^n e^{in\theta} + Br^n e^{-in\theta} \text{ avec } A \in \mathbb{C} \text{ et } B \in \mathbb{C}$$

   Nous allons démontrer que $B = \overline{A}$
   Nous avons :

   $$\begin{cases} u_0 = & A + B \\ u_1 = & Are^{i\theta} + Bre^{-i\theta} \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = & A + B \\ u_1 - u_0re^{i\theta} = & Bre^{-i\theta} - Bre^{i\theta} \end{cases}$$

   Et donc $B = \dfrac{u_0re^{i\theta} - u_1}{2i\sin\theta}$ et, en faisant le même calcul, $A = \dfrac{u_1 - u_0re^{-i\theta}}{2i\sin\theta}$.

$$\overline{A} = \frac{u_1 - u_0 re^{i\theta}}{-2i\sin\theta} = \frac{u_0 re^{i\theta} - u_1}{2i\sin\theta} = B$$

Et nous avons donc, en posant $A = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in_R$

$$\begin{array}{rl} u_n = & Ar^n e^{in\theta} + \overline{A}r^n e^{-in\theta} \\ = & (x+iy)\left(r^n\cos n\theta + ir^n\sin n\theta\right) + (x-iy)\left(r^n\cos n\theta - ir^n\sin n\theta\right) \\ = & (xr^n\cos n\theta - yr^n\sin n\theta) + i\left(xr^n\sin n\theta + yr^n\cos n\theta\right) + \cdots \\ & \quad \cdots (xr^n\cos n\theta - yr^n\sin n\theta) - i\left(xr^n\sin n\theta + yr^n\cos n\theta\right) \\ = & 2xr^n\cos n\theta - 2yr^n\sin n\theta \end{array}$$

Ce que nous voulions

3. **Etude d'un exemple : la suite de Fibonacci**

La suite de Fibonacci est ainsi définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ et } F_0 = F_1 = 1$$

$\Rightarrow$ L'équation caractéristique de cette suite est donc $r^2 - r - 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 5$. Nons obtenons 2 racines :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Remarquons que φ est le nombre d'or et que $\overline{\varphi} = -\dfrac{1}{\varphi}$

$\Rightarrow$ Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $F_n = \lambda\varphi^n + \mu\overline{\varphi}^n$

$\Rightarrow$ Déterminons λ et μ.

- $\star$ Pour $n = 0$, nous avons $\lambda + \mu = 1$
- $\star$ Pour $n = 1$, nous avons $\lambda\varphi + \mu\overline{\varphi} = 1$
- $\star$ D'où la résolution du système :

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda + \mu = & 1 \\ \lambda\varphi + \mu\overline{\varphi} & = 1 \end{array}\right.$$

nous donne $\lambda = \dfrac{\varphi}{\sqrt{5}}$ et $\mu = -\dfrac{\overline{\varphi}}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow$ l'expression générale de F_n est donc donnée par :

$$F_n = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \times \varphi^n - \frac{\overline{\varphi}}{\sqrt{5}} \times \overline{\varphi}^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}\right)$$

$\Rightarrow$ Il peut être intéressant de s'intéresser au comportement de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.

$\rightarrow$ Tout d'abord, $|\varphi| = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ et donc $|\overline{\varphi}| = \left|-\dfrac{1}{\varphi}\right| < 1$, et donc, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} F_n = +\infty$$

$\rightarrow$ Il est possible de donner un équivalent de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$. En effet, nous avons :

$$F_n \underset{+\infty}{\approx} \frac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

puisque

$$\frac{F_n}{\dfrac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}F_n}{\varphi^{n+1}} = 1 - \frac{\overline{\varphi}^{n+1}}{\varphi^{n+1}}$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\overline{\varphi}^{n+1}}{\varphi^{n+1}} = 0$, et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{5}F_n}{\varphi^{n+1}} = 1$

Ce que nous voulions

Exercice 30 :

Voici un exercice très classique sur les projecteurs. On retrouve ce type de problèmes explicitement dans des résultats du cours (théorèmes oup propositions) ou encore dans des questions d'examens de fin de première année (c'est du vécu !!)

E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , on appelle projecteur tout endomorphisme p de E, tel que $p^2 = p \circ p = p$. On désigne par Id_E l'identité de E.

1. *Démontrer que p est un projecteur si et seulement si $(\mathrm{Id}_E - p)$ en est un.*

   ⋆ Supposons que p est un projecteur
   C'est à dire que $p \circ p = p$. Alors,

   $$(\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Id}_E - p - p + p \circ p = \mathrm{Id}_E - p - p + p = \mathrm{Id}_E - p$$

   Et ainsi, $(\mathrm{Id}_E - p)$ eest un projecteur
   ⋆ Supposons que $(\mathrm{Id}_E - p)$ est un projecteur
   Alors $(\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - p) = (\mathrm{Id}_E - p)$. Donc :

   $$(\mathrm{Id}_E - p) = (\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Id}_E - p - p + p \circ p$$

   Donc, de $\mathrm{Id}_E - p = \mathrm{Id}_E - p - p + p \circ p$, nous tirons $-p + p \circ p = \mathcal{O}_E \iff p \circ p = p$
   p est donc un projecteur.

   D'où p est un projecteur si et seulement si $(\mathrm{Id}_E - p)$ en est un
2. *Montrer que si p est un projecteur, alors les relations suivantes sont vérifiées :*

   $\rightarrow$ $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p) = \ker p$ $\rightarrow$ $\ker\,(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im}p$

   (a) **Montrons que** $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p) = \ker p$
   ⋆ Montrons que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p) \subset \ker p$
   Soit donc $y \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p)$.
   Il existe donc $x \in E$ tel que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p)\,(x) = y$. Or :

   $$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p)\,(x) = y &\iff x - p\,(x) = y \\ &\iff p\,(x) - p \circ p\,(x) = p\,(y) \\ &\iff p\,(x) - p\,(x) = p\,(y) \\ &\iff p\,(y) = 0_E \end{aligned}$$

   Et donc $y \in \ker p$
   D'où $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p) \subset \ker p$
   ⋆ Montrons que $\ker p \subset \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p)$
   Soit $x \in \ker p$
   Alors $p\,(x) = 0_E$ et donc $(\mathrm{Id}_E - p)\,(x) = x - p\,(x) = x$, ce qui veut dire que x est un point fixe de l'application linéaire $(\mathrm{Id}_E - p)$ et donc, que $x \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p)$.
   En conclusion $\ker p \subset \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p)$
   Et donc, $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p) = \ker p$

   (b) **Montrons que** $\ker\,(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im}p$
   ⋆ Montrons que $\ker\,(\mathrm{Id}_E - p) \subset \mathrm{Im}p$
   Soit $x \in \ker\,(\mathrm{Id}_E - p)$; alors :

   $$x \in \ker\,(\mathrm{Id}_E - p) \iff (\mathrm{Id}_E - p)\,(x) = 0_E \iff x = p\,(x)$$

   x apparaît donc comme un point fixe de p, et donc, comme tout à l'heure, $x \in \mathrm{Im}p$
   ⋆ Montrons que $\mathrm{Im}p \subset \ker\,(\mathrm{Id}_E - p)$
   Soit $y \in \mathrm{Im}p$; il existe alors $x \in E$ tel que $y = p\,(x)$ et donc

   $$(\mathrm{Id}_E - p)\,(y) = y - p\,(y) = p\,(x) - p \circ p\,(x) = p\,(x) - p\,(x) = 0_E$$

   Donc $y \in \ker\,(\mathrm{Id}_E - p)$ et $\mathrm{Im}p \subset \ker\,(\mathrm{Id}_E - p)$

En conclusion, $\ker(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im}p$

La relation $\ker(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im}p$, nous permet d'écrire :

$$x \in \mathrm{Im}p \Longleftrightarrow x \in \ker(\mathrm{Id}_E - p) \Longleftrightarrow x - p(x) = 0_E \Longleftrightarrow p(x) = x$$

C'est à dire que les éléments de $\mathrm{Im}p$ sont invariants par p

3. *Démontrer que si p est un projecteur, alors $E = \mathrm{Im}p \oplus \ker p$*

◇ **Montrons que** $E = \mathrm{Im}p + \ker p$
Soit $x \in E$, alors :

$$x = p(x) + (x - p(x))$$

Or, $p(x) \in \mathrm{Im}p$ et $(x - p(x)) \in \ker p$.
Tout vecteur $x \in E$ s'écrit bien comme somme d'un vecteur de $\ker p$ et d'un vecteur de $\mathrm{Im}p$.
Nous avons donc bien $E = \mathrm{Im}p + \ker p$

◇ **Montrons que** $\mathrm{Im}p \cap \ker p = \{0_E\}$
Soit donc $y \in \mathrm{Im}p \cap \ker p$. Alors de $y \in \ker P$, on tire que $p(y) = 0_E$
Nous venons de démontrer que $\ker(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im}p$; alors, de $y \in \mathrm{Im}p$, on tire que $y \in \ker(\mathrm{Id}_E - p)$ et que donc $(\mathrm{Id}_E - p)(y) = 0_E$. Or :

$$(\mathrm{Id}_E - p)(y) = 0_E \Longleftrightarrow y - p(y) = 0_E \Longleftrightarrow y = 0_E$$

Donc $\mathrm{Im}p \cap \ker p = \{0_E\}$

En conclusion, $E = \mathrm{Im}p \oplus \ker p$

4. *Démontrer qu'un projecteur p commute avec un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si son noyau et son image sont stables par u.*

Une autre façon d'écrire l'énoncé est de démontrer l'équivalence suivante, pour tout projecteur p et tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$p \circ u = u \circ p \Longleftrightarrow u(\ker p) \subset \ker p \text{ et } u(\mathrm{Im}p) \subset \mathrm{Im}p$$

(a) **Supposons que** $p \circ u = u \circ p$
Il nous faut donc montrer que $u(\ker p) \subset \ker p$ et $u(\mathrm{Im}p) \subset \mathrm{Im}p$

→ On démontre que $u(\ker p) \subset \ker p$
Soit donc $y \in u(\ker p)$.
Il existe alors $x \in \ker p$ tel que $y = u(x)$. Alors :

$$p(y) = p \circ u(x) = u \circ p(x) = u(0_E) = 0_E$$

Et donc $y \in \ker p$, et donc $u(\ker p) \subset \ker p$

→ Montrons que $u(\mathrm{Im}p) \subset \mathrm{Im}p$
Soit $y \in u(\mathrm{Im}p)$.
Il existe donc $z \in \mathrm{Im}p$ tel que $y = u(z)$; et comme $z \in \mathrm{Im}p$, il existe $x \in E$ tel que $z = p(x)$. Ainsi :

$$y = u(z) = u \circ p(x) = p \circ u(x)$$

Et donc, $y \in \mathrm{Im}p$.
Nous avons bien $u(\mathrm{Im}p) \subset \mathrm{Im}p$

(b) **Supposons, maintenant, que** $u(\ker p) \subset \ker p$ **et** $u(\mathrm{Im}p) \subset \mathrm{Im}p$
Nous devons donc montrer que $p \circ u = u \circ p$
Soit $x \in E$.
Il existe donc $x_1 \in \ker p$ et $x_2 \in \mathrm{Im}p$, uniques, tels que $x = x_1 + x_2$.
Alors, $p(x) = p(x_1 + x_2) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_2) = x_2$

- Et donc $u \circ p(x) = u(x_2)$
- Maintenant, $p \circ u(x) = p \circ u(x_1 + x_2) = p \circ u(x_1) + p \circ u(x_2)$
  - ⋆ Comme $u(\ker p) \subset \ker p$, de $x_1 \in \ker p$, nous déduisons $u(x_1) \in \ker p$ et donc $p \circ u(x_1) = 0_E$, et donc $p \circ u(x) = p \circ u(x_2)$

- ⋆ De même, comme $u(\mathrm{Im}p) \subset \mathrm{Im}p$, de $x_2 \in \mathrm{Im}p$, nous déduisons $u(x_2) \in \mathrm{Im}p$. Il existe donc $y \in E$ tel que $u(x_2) = p(y)$. Ainsi :
$$p \circ u(x) = p \circ u(x_2) = p \circ p(y) = p(y) = u(x_2)$$

- Nous venons de voir que, pour tout $x \in E$:
$$u \circ p(x) = u(x_2) = p \circ u(x)$$

Ainsi, $p \circ u = u \circ p$

Exercice 31 :

E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n où $n \geqslant 2$, on désigne par f un endomorphisme non nul de E ($f \in \mathcal{L}(E)$) commutant avec tout automorphisme de E.

1. *Montrer que si x et y sont deux éléments linéairement indépendants de E, il existe un automorphisme $u \in \mathrm{GL}(E)$ de E tel que $u(x) = x$ et $u(y) = x + y$*

   Soit donc E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et x et y, deux éléments linéairement indépendants de E.
   D'après le théorème de la base incomplète 3.6.5, il existe des vecteurs $\{e_3, \cdots, e_n\}$ tels que la famille $\mathcal{B} = \{x, y, e_3, \cdots, e_n\}$ forme une base de E.
   Soit $\mathcal{B}' = \{x, x + y, e_3, \cdots, e_n\}$ une famille de vecteurs de E. Cette famille est libre et forme donc une base de E.
   En effet, si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont n scalaires tels que $\lambda_1 x + \lambda_2(x + y) + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$. Nous avons :
$$\lambda_1 x + \lambda_2(x + y) + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E \Longleftrightarrow \lambda_1 x + (\lambda_1 + \lambda_2)y + \lambda_3 e_3 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$$
   De l'indépendance de la famille $\mathcal{B} = \{x, y, e_3, \cdots, e_n\}$, nous déduisons que :
$$\lambda_1 = (\lambda_1 + \lambda_2) = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$$
   Et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$.
   La famille $\mathcal{B}' = \{x, x + y, e_3, \cdots, e_n\}$ est donc une famille libre et forme donc une base de E.
   D'après le théorème 3.5.7, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que :
$$u(x) = x \qquad u(y) = x + y \qquad \text{et pour } i = 3, \ldots, n \quad u(e_i) = e_i$$
   Par le même théorème 3.5.7, cette application linéaire u est une bijection et donc $u \in \mathrm{GL}(E)$

2. *Soit $a \in E$ un élément de E n'appartenant pas à $\ker f$. Démontrer que les vecteurs a et $b = f(a)$ sont liés. En déduire l'existence d'un élément $\lambda(a)$ de $\mathbb{K}$ tel que $f(a) = \lambda(a)a$*

   Soit $a \in E$ tel que $a \notin \ker f$; alors $a \neq 0_E$ et $f(a) \neq 0_E$.
   Nous devons démontrer que a et $f(a)$ sont liés.
   Supposons le contraire, c'est à dire que a et $f(a)$ sont indépendants.
   Il existe alors $u \in \mathrm{GL}(E)$ de E tel que $u(a) = a$ et $u(f(a)) = a + f(a)$
   Comme f commute avec toute application linéaire de E, nous devrions avoir :
$$f(a) = f \circ u(a) = u(f(a)) = a + f(a)$$
   Comme a et $f(a)$ sont supposés indépendants, il est impossible d'avoir $f(a) = a + f(a)$
   Donc, a et $f(a)$ sont liés.
   Il existe donc $\lambda(a) \in \mathbb{K}$ tel que $f(a) = \lambda(a)a$.

3. *Démontrer que $\lambda(a)$ ne dépend pas de a.*

   Soient $a_1 \in E$, $a_2 \in E$, 2 vecteurs tels que $a_1 \neq a_2$, $a_1 \neq 0_E$ et $a_2 \neq 0_E$.
   Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que $v(a_1) = a_2$. Alors :
   - ⋆ $f \circ v(a_1) = f(a_2) = \lambda(a_2)a_2$

$\star$ $v \circ f(a_1) = v(\lambda(a_1)a_1) = \lambda(a_1)v(a_1) = \lambda(a_1)a_2$
Comme f commute avec v, nous avons $f \circ v(a_1) = v \circ f(a_1)$, et donc :

$$f \circ v(a_1) = v \circ f(a_1) \iff \lambda(a_2)a_2 = \lambda(a_1)a_2 \iff (\lambda(a_2) - \lambda(a_1))a_2 = 0_E$$

Comme $a_2 \neq 0_E$, nous avons $\lambda(a_2) - \lambda(a_1) = 0$, c'est à dire $\lambda(a_2) = \lambda(a_1)$
Ainsi, si f commute avec tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, alors f est telle que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$

4. *Quel est le centre de l'anneau $\mathcal{L}(E)$?*

   Réciproquement, une homothétie h définie pour tout $x \in E$ par $h(x) = \mu x$ où $\mu \in \mathbb{K}$ commute avec tout endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. En effet :

$$\varphi \circ h(x) = \varphi[h(x)] = \varphi(\mu x) = \mu\varphi(x) = h[\varphi(x)] = h \circ \varphi(x)$$

   Ainsi, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

   Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** n où $n \geqslant 2$
   Les homothéties sont les seuls endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent avec tous les endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$
   Autrement dit :
   Le centre de l'anneau $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des homothéties de E

Exercice 32 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On pose :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \quad f^k = f^{k-1} \circ f(k \geqslant 1) \quad N_k = \ker f^k \quad I_k = \mathrm{Im} f^k$$

1. *Démontrer que pour tout entier naturel k, on a :*

$$N_k \subset N_{k+1} \text{ et } I_{k+1} \subset I_k$$

   $\Rightarrow$ **On démontre que** $N_k \subset N_{k+1}$
   Soit $x \in N_k$.
   Alors, $f^k(x) = 0_E$, et donc $f^{k+1}(x) = f\left[f^k(x)\right] = f[0_E] = 0_E$, et donc $x \in N_{k+1}$
   D'où $N_k \subset N_{k+1}$

   $\Rightarrow$ **On démontre que** $I_{k+1} \subset I_k$
   Soit $z \in I_{k+1} = \mathrm{Im} f^{k+1}$.
   Il existe donc $y \in E$ tel que $z = f^{k+1}(y) = f^k[f(y)]$.
   Il existe donc $z' \in E$, et $z' = f(y)$ tel que $f^k[z'] = z$ et donc $z \in \mathrm{Im} f^k = I_k$
   Nous avons donc $I_{k+1} \subset I_k$

2. *Démontrer qu'il existe un entier naturel r_0 tel que pour $k < r_0$ on ait $N_k \neq N_{k+1}$, et pour $k \geqslant r_0$, $N_k = N_{k+1}$*

   Pour commencer, nous construisons une suite d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par $n_k = \dim N_k$

   (a) Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons $N_k \subset E$, et que $\dim E = n$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\dim N_k \leqslant \dim E$, c'est à dire $n_k \leqslant n$

   (b) D'autre part, comme $N_k \subset N_{k+1}$, nous avons $\dim N_k \leqslant \dim N_{k+1}$, c'est à dire $n_k \leqslant n_{k+1}$

   (c) La suite d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante et majorée par n, elle est donc stationnaire. Il existe donc $r \in \mathbb{N}^*$ tel que si $k \geqslant r$, alors $n_{k+1} = n_k = n_r$
   Nous appelons r_0 le plus petit entier tel que $k \geqslant r_0$, alors $n_{k+1} = n_k = n_{r_0}$

   (d) Pour $k \geqslant r_0$, de $N_k \subset N_{k+1}$ et de $n_{k+1} = n_k = n_{r_0} \iff \dim N_{k+1} = \dim N_k = \dim N_{r_0}$ nous déduisons que $N_k = N_{k+1} = N_{r_0}$

(e) Démontrons que si $k < r_0$, alors $N_k \neq N_{k+1}$
Supposons le contraire, c'est à dire $N_k = N_{k+1}$ lorsque $k < r_0$, alors $\dim N_k = \dim N_{k+1} \Longleftrightarrow n_k = n_{k+1}$ et il y a contradiction avec le fait que r_0 soit le plus petit entier tel que si $k \geqslant r_0$, $n_{k+1} = n_k = n_r$
Donc, si $k < r_0$, alors $N_k \neq N_{k+1}$

3. *Démontrer que pour $k \leqslant r_0$,$I_k \neq I_{k+1}$ et pour $k > r_0$, $I_k = I_{k+1}$*

Cette question est un corollaire de la question précédente.
Nous avons, d'après le théorème du rang 3.6.13, $\dim N_k + \dim I_k = \dim E = n$, de telle sorte que la suite $(m_k)_{k\geqslant 1}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par $m_k = n - n_k$ est une suite décroissante et bornée, stationnaire à partir du rang r_0, c'est à dire que si $k \geqslant r_0$, alors $m_k = m_{k+1}$.
Donc, par le même raisonnement que ci-dessus ($I_{k+1} \subset I_k$ et $\dim I_k = \dim I_{k+1}$), si $k \geqslant r_0$, alors $I_{k+1} = I_k$.
De la même manière, si $k < r_0$, alors $I_{k+1} \neq I_k$

4. *Démontrer que $E = I_{r_0} \oplus N_{r_0}$*

C'est une question plus difficile !!

(a) **Démontrons que** $I_{r_0} \cap N_{r_0} = \{0_E\}$
Soit donc $y \in I_{r_0} \cap N_{r_0}$.
Comme $y \in N_{r_0}$ alors $f^{r_0}(y) = 0_E$.
De même, comme $y \in I_{r_0}$ alors, il existe $x \in E$ tel que $f^{r_0}(x) = y$
Alors, $f^{r_0}(y) = f^{2r_0}(x) = 0_E$, et donc $x \in N_{2r_0}$.
Comme $2r_0 \geqslant r_0$, nous avons $N_{2r_0} = N_{r_0}$ et donc $x \in N_{r_0}$, d'où $f^{r_0}(x) = 0_E$, c'est à dire, comme $f^{r_0}(x) = y$, $y = 0_E$
D'où $I_{r_0} \cap N_{r_0} = \{0_E\}$

(b) **Démontrons que** $E = I_{r_0} + N_{r_0}$
Soit $x \in E$; il faut donc écrire x comme somme d'un élément de I_{r_0} et d'un autre de N_{r_0}
Nous avons $f^{r_0}(x) \in I_{r_0}$. Comme $2r_0 \geqslant r_0$, nous avons $I_{r_0} = I_{2r_0}$ et donc $f^{r_0}(x) \in I_{2r_0}$. Il existe donc $y \in E$ tel que $f^{2r_0}(y) = f^{r_0}(x)$, et nous avons :

$$f^{2r_0}(y) = f^{r_0}(x) \Longleftrightarrow f^{2r_0}(y) - f^{r_0}(x) = 0_E \Longleftrightarrow f^{r_0}[f^{r_0}(y) - x] = 0_E$$

De là, nous tirons que $f^{r_0}(y) - x \in \ker f^{r_0} = N_{r_0}$.
En écrivant $x = (x - f^{r_0}(y)) + f^{r_0}(y)$, nous répondons à la question.

Donc $E = I_{r_0} \oplus N_{r_0}$

5. *Démontrer que la restriction de f à I_{r_0} induit une fonction de I_{r_0} dans I_{r_0} qui est un automorphisme de I_{r_0}*

(a) **La restriction de f à I_{r_0} est un endomorphisme de I_{r_0}**
⋆ Tout d'abord, nous avons $f(I_{r_0}) \subset I_{r_0+1}$
En effet, soit $y \in f(I_{r_0})$; il existe donc $x \in I_{r_0}$ tel que $y = f(x)$.
Et comme $x \in I_{r_0}$, il existe $z \in E$ tel que $x = f^{r_0}(z)$ et alors :

$$y = f(x) = f[f^{r_0}(z)] = f^{r_0+1}(z)$$

Et donc, $y \in I_{r_0+1}$
Nous avons donc $f(I_{r_0}) \subset I_{r_0+1}$
⋆ Comme $r_0 + 1 \geqslant r_0$, nous avons $I_{r_0} = I_{r_0+1}$ et la restriction de f à I_{r_0} induit donc un endomorphisme de I_{r_0}

(b) **On démontre que f est bijective de I_{r_0} dans I_{r_0}**
⋆ On montre que $f : I_{r_0} \longrightarrow I_{r_0}$ est injective.
Comme I_{r_0} est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, on pourra déduire que $f : I_{r_0} \longrightarrow I_{r_0}$ est bijective.
⋆ Soit donc $y \in I_{r_0}$ tel que $f(y) = 0_E$

- ⋆ Comme $y \in I_{r_0}$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{r_0}(x)$
- ⋆ Alors, $f(y) = f[f^{r_0}(x)] = f^{r_0+1}(x) = 0_E$, et donc $x \in N_{r_0+1}$
- ⋆ Comme $N_{r_0+1} = N_{r_0}$, nous avons alors $x \in N_{r_0}$ et donc $f^{r_0}(x) = 0_E$
- ⋆ Et donc $y = 0_E$

Donc f induit donc un endomorphisme bijectif de I_{r_0}, c'est à dire un automorphisme de I_{r_0}

Exercice 33 :

On considère $\mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique classique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.
On considère, maintenant, la base duale de $(\mathbb{R}^4)^\star = \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*\}$ et les formes linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4 de coordonnées, dans les bases duales :

$$f_1 = (1, 0, -\lambda, 0) \quad f_2 = \left(0, 1, 0, \frac{-1}{\lambda}\right) \quad f_3 = (1, 0, 0, -\mu) \quad f_4 = \left(0, 1, 0, \frac{-1}{\mu}\right)$$

Avec $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$
Etudier l'indépendance de ces formes linéaires, et trouver, lorsqu'elles sont indépendantes, la base de $\mathbb{R}^4$, duale de $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

▷ **Introduction**

Nous allons faire un petit exposé dans $\mathbb{R}^4$ *(c'est le cadre de l'exercice)* mais il est très facilement extensible à $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

Si $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*\}$ est la base duale de $(\mathbb{R}^4)^\star$, alors toute forme linéaire f de coordonnées $f = (a, b, c, d)$ peut donc s'écrire $f = ae_1^* + be_2^* + ce_3^* + de_4^*$ et pour tout quadruplet $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, nous avons :

$$f(x, y, z, t) = ae_1^*(x, y, z, t) + be_2^*(x, y, z, t) + ce_3^*(x, y, z, t) + de_4^*(x, y, z, t) = ax + by + cz + dt$$

C'est l'expression générale de toute forme linéaire.
Par exemple, si $f_1 = (1, 0, -\lambda, 0)$ comme dans l'énoncé, nous avons $f_1(x, y, z, t) = x - \lambda t$

▷ **Résolution de l'exercice**

⇒ <u>Etude de l'indépendance des formes linéaires $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$</u>

Soient $a \in \mathbb{K}$, $b \in \mathbb{K}$, $c \in \mathbb{K}$ et $d \in \mathbb{K}$ quatre scalaires tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_2 = \mathcal{O}_{(\mathbb{R}^4)^\star}$. Alors :

$$\begin{aligned} af_1 + bf_2 + cf_3 + df_2 = \mathcal{O}_{(\mathbb{R}^4)^\star} \iff & \ a(1, 0, -\lambda, 0) + b\left(0, 1, 0, \frac{-1}{\lambda}\right) + \\ & c(1, 0, 0, -\mu) + d\left(0, 1, 0, \frac{-1}{\mu}\right) = (0, 0, 0, 0) \\ \iff & \left(a + c, b + d, -c\lambda, \frac{-b}{\lambda} - c\mu - \frac{d}{\mu}\right) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

D'où nous obtenons le système :

$$\begin{cases} a + c = & 0 \quad (1) \\ b + d = & 0 \quad (2) \\ -c\lambda = & 0 \quad (3) \\ \dfrac{-b}{\lambda} - c\mu - \dfrac{d}{\mu} = & 0 \quad (4) \end{cases}$$

Les équations (1) et (3) donnent :$a = c = 0$. Alors, les équations (2) et (4) deviennent :

$$\begin{cases} b + d = & 0 \\ \dfrac{-b}{\lambda} - c\mu - \dfrac{d}{\mu} = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b + d = & 0 \\ \dfrac{b}{\lambda} + \dfrac{d}{\mu} = & 0 \end{cases}$$

- ⋆ Si $\lambda \neq \mu$ alors $b = d = 0$
- ⋆ Si $\lambda = \mu$ alors $b = -d$, avec $b \in \mathbb{K}$ et le système $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un système lié dans $(\mathbb{R}^4)^\star$

La famille $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un système libre dans $\left(\mathbb{R}^4\right)^\star$, et donc une base de $\left(\mathbb{R}^4\right)^\star$, si et seulement si $\lambda \neq \mu$

$\Rightarrow$ Recherche de la base duale de $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$
Bien sûr, dans ce cas, on suppose $\lambda \neq \mu$.
On appelle $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ la base de $\mathbb{R}^4$ duale de $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.
Pour tout i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant 4$ et $1 \leqslant j \leqslant 4$, nous avons $f_i\left(\varphi_j\right) = \delta_{i,j}$.

Soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Nous posons $\varphi_i = \sum_{k=0}^{4} x_k^i e_k$

$\star$ Commençons par φ_1. Nous avons :

$$\begin{aligned} f_1\left(\varphi_1\right) = & \quad 1 & = x_1^1 - \lambda x_3^1 \\ f_2\left(\varphi_1\right) = & \quad 0 & = x_2^1 - \frac{1}{\lambda} x_4^1 \\ f_3\left(\varphi_1\right) = & \quad 0 & = x_1^1 - \mu x_4^1 \\ f_4\left(\varphi_1\right) = & \quad 0 & = x_2^1 - \frac{1}{\mu} x_4^1 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc un système d'équations d'inconnues $x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1$:

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_1^1 - \lambda x_3^1 = & 1 \\ x_2^1 - \frac{1}{\lambda} x_4^1 = & 0 \\ x_1^1 - \mu x_4^1 = & 0 \\ x_2^1 - \frac{1}{\mu} x_4^1 = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x_2^1 - \frac{1}{\lambda} x_4^1 = & 0 \\ x_2^1 - \frac{1}{\mu} x_4^1 = & 0 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{rl} x_1^1 - \lambda x_3^1 = & 1 \\ x_1^1 - \mu x_4^1 = & 0 \end{array} \right.$$

D'où nous tirons $x_2^1 = x_4^1 = 0$, puis $x_1^1 = 0$ et $x_3^1 = \dfrac{-1}{\lambda}$. Donc :

$$\varphi_1 = \left(0, 0, \frac{-1}{\lambda}, 0\right)$$

$\star$ Continuons par φ_2. Nous avons :

$$\begin{aligned} f_1\left(\varphi_2\right) = & \quad 0 & = x_1^2 - \lambda x_3^2 \\ f_2\left(\varphi_2\right) = & \quad 1 & = x_2^2 - \frac{1}{\lambda} x_4^2 \\ f_3\left(\varphi_2\right) = & \quad 0 & = x_1^2 - \mu x_4^2 \\ f_4\left(\varphi_2\right) = & \quad 0 & = x_2^2 - \frac{1}{\mu} x_4^2 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc un système d'équations d'inconnues $x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1$:

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_1^2 - \lambda x_3^2 = & 0 \\ x_2^2 - \frac{1}{\lambda} x_4^2 = & 1 \\ x_1^2 - \mu x_4^2 = & 0 \\ x_2^2 - \frac{1}{\mu} x_4^2 = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x_2^2 - \frac{1}{\lambda} x_4^2 = & 1 \\ x_2^2 - \frac{1}{\mu} x_4^2 = & 0 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{rl} x_1^2 - \lambda x_3^2 = & 0 \\ x_1^2 - \mu x_4^2 = & 0 \end{array} \right.$$

D'où nous tirons $x_2^2 = \dfrac{\lambda}{\lambda - \mu}$, $x_4^2 = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda - \mu}$, puis $x_1^2 = \dfrac{\lambda\mu^2}{\lambda - \mu}$ et $x_3^2 = \dfrac{\mu^2}{\lambda - \mu}$. Donc :

$$\varphi_2 = \left(\frac{\lambda\mu^2}{\lambda - \mu}, \frac{\lambda}{\lambda - \mu}, \frac{\mu^2}{\lambda - \mu}, \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu}\right)$$

$\star$ Pour conclure, en utilisant la même méthode, nous avons :

$$\varphi_3 = \left(1, 0, \frac{1}{\lambda}, 0\right)$$

Et

$$\varphi_4 = \left(\frac{\lambda\mu^2}{\mu - \lambda}, \frac{\mu}{\mu - \lambda}, \frac{\mu^2}{\mu - \lambda}, \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda}\right)$$

Exercice 34 :

$\mathbb{K}_2[X]$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à 2. On considère les formes linéaires Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3 définies par :

$$\begin{cases} \Psi_1 : \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \qquad P & \longmapsto & \Psi_1(P) = P(1) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Psi_2 : \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \qquad P & \longmapsto & \Psi_2(P) = P'(1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Psi_3 : \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \qquad P & \longmapsto & \Psi_3(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

1. *Démontrer que la famille $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ est une base de $(\mathbb{K}_2[X])^*$*

   Nous allons appeler $\{e_0, e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$, c'est à dire :

   $$e_0(X) = 1 \quad e_1(X) = X \quad e_2(X) = X^2$$

   Et donc, tout $P \in \mathbb{K}_2[X]$ s'écrit $P = ae_2 + be_1 + ce_0$ avec $a \in \mathbb{K}$, $b \in \mathbb{K}$ et $c \in \mathbb{K}$
   Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{K}_2[X]$:
   ⋆ $\Psi_1(P) = P(1) = a + b + c$
   ⋆ $\Psi_2(P) = P'(1) = 2a + b$
   ⋆ $\Psi_3(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 at^2 + bt + c\,\mathrm{d}t = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$
   En appellant $\{e_0^*, e_1^*, e_2^*\}$ la base de $(\mathbb{K}_2[X])^*$, duale de la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$, les coordonnées de Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3, dans cette base duale sont :

   $$\Psi_1 = (1, 1, 1) \quad \Psi_2 = (0, 1, 2) \quad \Psi_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

   Si nous réussissons à démontrer que la famille $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ est libre, nous aurons aussi démontré que c'est une base de $(\mathbb{K}_2[X])^*$, puisque $\dim(\mathbb{K}_2[X])^* = 3$
   Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $\beta \in \mathbb{K}$ et $\gamma \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2 + \gamma\Psi_3 = \mathcal{O}_{(\mathbb{K}_2[X])^*}$. Nous obtenons alors le système d'équations :

   $$\begin{cases} \alpha + \gamma = & 0 \\ \alpha + \beta + \dfrac{\gamma}{2} = & 0 \\ \alpha + 2\beta + \dfrac{\gamma}{3} = & 0 \end{cases} \iff \alpha = -\gamma \text{ et } \begin{cases} 2\beta - \dfrac{2\gamma}{3} = & 0 \\ \beta - \dfrac{\gamma}{2} = & 0 \end{cases} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$$

   La famille $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ est donc une famille libre et forme une base de $(\mathbb{K}_2[X])^*$

2. *En déterminer la base duale dans $\mathbb{K}_2[X]$*

   Nous appellerons $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ la base de $\mathbb{K}_2[X]$ duale de $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$.
   Nous avons donc, pour tout i et j tels que $0 \leqslant i \leqslant 2$ et $0 \leqslant j \leqslant 2$, $\Psi_i(\psi_j) = \delta_{i,j}$.
   Posons $\psi_j = c_je_0 + b_je_1 + a_je_2$.
   $\Rightarrow$ Détermination de ψ_1
   Par construction, nous avons

   $$\begin{aligned} \psi_1 = c_1e_0 + b_1e_1 + a_1e_2 &\iff \psi_1(X) = c_1e_0(X) + b_1e_1(X) + a_1e_2(X) \\ &\iff \psi_1(X) = a_1X^2 + b_1X + c_1 \end{aligned}$$

   Donc :
   ⋆ $\Psi_1(\psi_1) = 1 = a_1 + b_1 + c_1$
   ⋆ $\Psi_2(\psi_1) = 0 = 2a_1 + b_1$
   ⋆ $\Psi_3(\psi_1) = 0 = \dfrac{a_1}{3} + \dfrac{b_1}{2} + c_1$

Nous obtenons donc le système :

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 = & 1 \\ 2a_1 + b_1 = & 0 \\ \dfrac{a_1}{3} + \dfrac{b_1}{2} + c_1 = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow b_1 = -2a_1 \text{ et } \begin{cases} -a_1 + c_1 = & 1 \\ -\dfrac{2a_1}{3} + c_1 = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow a_1 = -3 \quad b_1 = 6 \quad c_1 = -2$$

Nous avons donc $\psi_1(X) = -3X^2 + 6X - 2$

$\Rightarrow$ Par le même type de calcul *(que nous laissons au lecteur le soin de réaliser)* nous trouvons :

$$\psi_2(X) = \frac{3}{2}X^2 - 2X + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \psi_3(X) = 3X^2 - 6X + 3$$

Exercice 36 :

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n Montrer que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, si $x \neq y$ alors, il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$

Soient $x \in E$ et $y \in E$ tels que $x \neq y$. On considère la droite vectorielle $\mathbb{K}(x-y)$ et H un hyperplan tel que $E = H \oplus \mathbb{K}(x-y)$. Appelons $\varphi \in E^*$ la forme linéaire non nulle dont H est le noyau. *(On pourrait aussi dire que l'hyperplan H a pour équation $\varphi(u) = 0$)*

Alors $\varphi(x-y) \neq 0$ et donc $\varphi(x) \neq \varphi(y)$

Remarque

Cette forme linéaire $\varphi \in E^*$ n'est donc pas unique puisque le supplémentaire H à $\mathbb{K}(x-y)$ n'est pas non plus unique.

Exercice 37 :

1. *Soit $E = \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$. On définit sur E 2 opération :*
   - **Une loi interne :** $(a,b) \star (c,d) = (ac, b+d)$
   - **Une loi externe :** $\lambda \bullet (a,b) = (a^\lambda, \lambda b)$

   Est-ce que E muni de ces deux lois est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

   $\Rightarrow$ Tout d'abord $(E, \star)$ est un groupe abélien comme produit direct des groupes commutatifs $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ et $(\mathbb{R}, +)$

   $\Rightarrow$ Vérifions que la loi externe $\bullet$ vérifie les axiômes de $\mathbb{R}$-espace vectoriel

   $\triangleright$ **Soit** $(a,b) \in E$**,** $\lambda \in \mathbb{R}$ **et** $\mu \in \mathbb{R}$**. Montrons que** $\lambda \bullet (\mu \bullet (a,b)) = (\lambda\mu) \bullet (a,b)$

$$\begin{aligned} \lambda \bullet (\mu \bullet (a,b)) = & \ \lambda \bullet (a^\mu, \mu b) \\ = & \ \left((a^\mu)^\lambda, \lambda\mu b\right) \\ = & \ \left(a^{\mu\lambda}, \lambda\mu b\right) \\ = & \ (\lambda\mu) \bullet (a,b) \end{aligned}$$

   Nous avons donc $\lambda \bullet (\mu \bullet (a,b)) = (\lambda\mu) \bullet (a,b)$

   $\triangleright$ **Soit** $\lambda \in \mathbb{R}$**,** $\mu \in \mathbb{R}$**, montrons que** $(\lambda + \mu) \bullet (a,b) = \lambda \bullet (a,b) + \mu \bullet (a,b)$

$$\begin{aligned} (\lambda+\mu) \bullet (a,b) = & \ \left(a^{\lambda+\mu}, (\lambda+\mu) b\right) \\ \lambda \bullet (a,b) + \mu \bullet (a,b) = & \ \left(a^\lambda, \lambda b\right) + \left(a^\mu, \mu b\right) = \left(a^\lambda a^\mu, (\lambda+\mu) b\right) \\ = & \ \left(a^{\lambda+\mu}, (\lambda+\mu) b\right) \end{aligned}$$

   Nous avons, donc $(\lambda + \mu) \bullet (a,b) = \lambda \bullet (a,b) + \mu \bullet (a,b)$

   $\triangleright$ **Soit** $\lambda \in \mathbb{R}$**,** $(a,b) \in E$ **et** $(c,d) \in E$**, montrons que** $\lambda \bullet ((a,b) + (c,d)) = \lambda \bullet (a,b) + \lambda \bullet (c,d)$

$$\begin{aligned} \lambda \bullet ((a,b) + (c,d)) = & \ \lambda \bullet (ac, b+d) \\ = & \ \left((ac)^\lambda, \lambda(b+d)\right) \\ \lambda \bullet (a,b) + \lambda \bullet (c,d) = & \ \left(a^\lambda, \lambda b\right) + \left(c^\lambda, \lambda d\right) \\ = & \ \left(a^\lambda c^\lambda, \lambda(b+d)\right) \end{aligned}$$

   Et donc, nous avons $\lambda \bullet ((a,b) + (c,d)) = \lambda \bullet (a,b) + \lambda \bullet (c,d)$

▷ **Montrons que pour tout** $(a,b) \in E$**, nous avons** $1 \bullet (a,b) = (a,b)$

$$1 \bullet (a,b) = \left(a^1, 1 \times b\right) = (a,b)$$

E muni de ces deux lois est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

2. *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps commutatif. On munit* $\mathbb{K}^2$ *:*
   - **De l'addition habituelle :** $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$
   - **D'une loi externe :** $\lambda \bullet (a,b) = (\lambda a, 0)$

   Pourquoi n'obtenons nous pas un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel ?*

   ⇒ Tout d'abord $\left(\mathbb{K}^2, +\right)$ est un groupe abélien comme produit direct des groupes commutatifs $(\mathbb{K},+)$ et $(\mathbb{K},+)$

   ⇒ Par contre, nous n'avons pas $1 \bullet (a,b) = (a,b)$
   En effet, $1 \bullet (a,b) = (1 \times a, 0) = (a,0) \neq (a,b)$

   Donc, $\mathbb{K}^2$, muni de ces 2 lois, n'est pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Exercice 38 :

Montrer que l'ensemble

$$\mathfrak{A} = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \text{ telles que } \left(\exists A_f \in \mathbb{R}^+\right)\left(\exists a \in \mathbb{R}^+\right)\left((\forall x \in \mathbb{R})\left(|x| \geqslant a\right) \Longleftrightarrow |f(x)| \leqslant A_f |x|\right)\right\}$$

est un $\mathbb{C}$*-espace vectoriel pour les lois usuelles dans* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

Nous allons démontrer que $\mathfrak{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

⇒ Tout d'abord, $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ puisque la fonction nulle $\mathcal{O} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est trivialement un élément de $\mathfrak{A}$

⇒ Soit $f \in \mathfrak{A}$ et $g \in \mathfrak{A}$.
  - ⋆ Il existe donc $A_f \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| \geqslant a$, alors $|f(x)| \leqslant A_f |x|$
  - ⋆ De même, il existe donc $A_g \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| \geqslant b$, alors $|g(x)| \leqslant A_g |x|$

  Soit $c \geqslant \max(a,b)$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geqslant c$. Alors $|x| \geqslant a$ et $|x| \geqslant b$ et donc :

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant (A_f + A_g)|x|$$

  Et donc $f+g \in \mathfrak{A}$

⇒ Soit $f \in \mathfrak{A}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Il existe donc $A_f \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| \geqslant a$, alors $|f(x)| \leqslant A_f |x|$
  Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geqslant a$. Alors :

$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda f(x)| \leqslant |\lambda|\,|f(x)| \leqslant (|\lambda|\, A_f +)|x|$$

  Et donc $\lambda f \in \mathfrak{A}$

$\mathfrak{A}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

Exercice 39 :

Démontrer que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ *telles que* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(|u_n|\right)^{\frac{1}{n}} < +\infty$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel*

Pour nous simplifier la vie, nous posons $\mathcal{E}$ cet ensemble.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$, alors $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(|u_n|\right)^{\frac{1}{n}} < +\infty$. Appelons $M_u = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(|u_n|\right)^{\frac{1}{n}}$. Remarquons que $M_u \geqslant 0$
Nous avons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(|u_n|\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M_u$, ce qui est équivalent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leqslant M_u^n$.

⇒ **Soient** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$ **et** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$ **; montrons que** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$
  Nous avons alors :

$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant M_u^n + M_v^n \leqslant (M_u + M_v)^n$$

  Et donc : $\left(|u_n+v_n|\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M_u + M_v$, et ce, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; en particulier $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(|u_n+v_n|\right)^{\frac{1}{n}} < +\infty$

  Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$

Remarque 1

Pour affirmer que $M_u^n + M_v^n \leqslant (M_u + M_v)^n$, nous avons utilisé le fait que pour tout $a \geqslant 0$ et tout $b \geqslant 0$, nous avons $a^n + b^n \leqslant (a+b)^n$.
On démontre cette inégalité à l'aide de la formule du binôme de Newton. En effet :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a^n + b^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Comme $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \geqslant 0$, nous avons $(a+b)^n \geqslant a^n + b^n$

$\Rightarrow$ **Soient** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$ **et** $\lambda \in \mathbb{K}$ **; montrons que** $\lambda (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$
Nous avons :

$$|\lambda u_n| = |\lambda| \, |u_n| \leqslant |\lambda| \, M_u^n \Longleftrightarrow (|\lambda u_n|)^{\frac{1}{n}} \leqslant \max(\{1, |\lambda|\}) \, M_u$$

Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$

Remarque 2

Dans la question précédente, nous avons

$$(|\lambda u_n|)^{\frac{1}{n}} \leqslant |\lambda|^{\frac{1}{n}} \, M_u^n \leqslant \max(\{1, |\lambda|\}) \, M_u$$

C'est à dire que nous avons utilisé le fait que pour $a \geqslant 0$, nous avons $a^{\frac{1}{n}} \leqslant \max(\{1, a\})$

- $\star$ C'est totalement vrai pour $a = 0$, ainsi que pour $a = 1$
- $\star$ Supposons $a > 0$ et $a \neq 1$. Nous allons étudier la fonction $f(x) = a^{\frac{1}{x}}$ pour $x \geqslant 1$.
  - $\triangleright$ Nous avons $f(x) = e^{\frac{\ln a}{x}}$ et la dérivée $f'(x) = -\dfrac{\ln a}{x^2} e^{\frac{\ln a}{x}}$.
  - $\triangleright$ Ainsi, si $0 < a < 1$, nous avons $f'(x) > 0$ et la fonction est toujours croissante.
    Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln a}{x}} = 1$ et donc, pour tout $x \geqslant 1$, nous avons $f(x) = a^{\frac{1}{x}} \leqslant 1$
  - $\triangleright$ Si $a > 1$, alors $f'(x) < 0$ et la fonction est toujours décroissante et donc pour tout $x \geqslant 1$,nous avons $f(x) = a^{\frac{1}{x}} \leqslant f(1) = a$
- $\star$ Ainsi, en restreignant la fonction $f(x) = a^{\frac{1}{x}}$ pour $x \geqslant 1$ à $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :
  - $\triangleright$ Si $a = 0$, alors $\max(\{1, a\}) = 1$ et $0^{\frac{1}{n}} = 0 \leqslant \max(\{1, 0\}) = 1$
  - $\triangleright$ Si $a = 1$, alors $\max(\{1, a\}) = 1$ et $1^{\frac{1}{n}} = 1 \leqslant \max(\{1, 1\}) = 1$
  - $\triangleright$ Si $0 < a < 1$, alors $\max(\{1, a\}) = 1$ et comme $a^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$, nous avons $a^{\frac{1}{n}} \leqslant \max(\{1, a\})$
  - $\triangleright$ Si $a > 1$, alors $\max(\{1, a\}) = a$ et comme $a^{\frac{1}{n}} \leqslant a$, nous avons $a^{\frac{1}{n}} \leqslant \max(\{1, a\})$

Ainsi, dans tous les cas, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \geqslant 0$, nous avons $a^{\frac{1}{n}} \leqslant \max(\{1, a\})$

Exercice 40 :

On considère $\mathbb{R}_4[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 4. Dans $\mathbb{R}_4[X]$, on considère les ensembles suivants :

- $\to$ $F_1 = \{P \in \mathbb{R}_4[X]$ *tel que* $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$
- $\to$ $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_4[X]$ *tel que* $P(1) = P'(2) = 0\}$

Il est facile de démontrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_4[X]$

1. *Donner une base de F_1 et de F_2*

Nous allons utiliser le fait que, pour $a \in \mathbb{R}$, la famille $\left\{ \dfrac{(X-a)^k}{k!} \text{ où } 0 \leqslant k \leqslant 5 \right\}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$ et utiliser la **formule de Taylor pour les polynômes :**

$$P(X) = P(a) + (X-a) P'(a) + \frac{(X-a)^2}{2!} P''(a) + \frac{(X-a)^3}{3!} P^{(3)}(a) + \frac{(X-a)^4}{4!} P^{(4)}(a)$$

$\Rightarrow$ **Etudions d'abord** F_1

De la remarque ci-dessus, tout polynôme de F_1 peut s'écrire :

$$P(X) = P(1) + (X-1)P'(1) + \frac{(X-1)^2}{2!}P''(1) + \frac{(X-1)^3}{3!}P^{(3)}(1) + \frac{(X-1)^4}{4!}P^{(4)}(1)$$

Comme $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$, tout polynôme de F_1 s'écrit :

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{(X-1)^3}{3!}P^{(3)}(1) + \frac{(X-1)^4}{4!}P^{(4)}(1) \\ &= \frac{(X-1)^3}{3!}\left(P^{(3)}(1) + \frac{(X-1)}{4}P^{(4)}(1)\right) \end{aligned}$$

Ce qui montre, tout de suite, que tout polynôme $P \in F_1$ est un multiple, dans $\mathbb{R}_4[X]$, de $(X-1)^3$ En posant $P_1(X) = \frac{(X-1)^3}{3!}$ et $P_2(X) = \frac{(X-1)^4}{4!}$, la famille $\{P_1, P_2\}$ engendre F_1, et comme $\deg P_1 = 3$ et $\deg P_2 = 4$, les polynômes P_1 et P_2 sont de degrés différents et forment une famille libre.
$\{P_1, P_2\}$ est donc une base de F_1

$\Rightarrow$ **Etudions maintenant F_2**
De la même manière, tout polynôme de F_2 peut s'écrire :

$$P(X) = P(2) + (X-2)P'(2) + \frac{(X-2)^2}{2!}P''(2) + \frac{(X-2)^3}{3!}P^{(3)}(2) + \frac{(X-2)^4}{4!}P^{(4)}(2)$$

Comme $P'(2) = 0$, tout polynôme de F_2 s'écrit :

$$P(X) = P(2) + \frac{(X-2)^2}{2!}P''(2) + \frac{(X-2)^3}{3!}P^{(3)}(2) + \frac{(X-2)^4}{4!}P^{(4)}(2)$$

Comme $P(1) = 0$, nous avons :

$$0 = P(2) + \frac{P''(2)}{2!} - \frac{P^{(3)}(2)}{3!} + \frac{P^{(4)}(2)}{4!}$$

Et donc, en remplaçant $P(2)$ par $P(2) = -\frac{P''(2)}{2!} + \frac{P^{(3)}(2)}{3!} - \frac{P^{(4)}(2)}{4!}$, nous obtenons :

$$P(X) = \frac{\left[(X-2)^2 - 1\right]}{2!}P''(2) + \frac{\left[(X-2)^3 + 1\right]}{3!}P^{(3)}(2) + \frac{\left[(X-2)^4 - 1\right]}{4!}P^{(4)}(2)$$

En posant $Q_1(X) = \frac{\left[(X-2)^2 - 1\right]}{2!}$, $Q_2(X) = \frac{\left[(X-2)^3 - 1\right]}{3!}$ et $Q_3(X) = \frac{\left[(X-2)^4 - 1\right]}{4!}$, la famille $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ engendre F_2, et comme $\deg Q_1 = 2$, $\deg Q_2 = 3$, et $\deg Q_3 = 4$, les polynômes Q_1, Q_2 et Q_2 sont de degrés différents et forment une famille libre.
La famille $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ est donc une base de F_2

2. *Avons nous $\mathbb{R}_4[X] = F_1 \oplus F_2$?*

La réponse est **non**

$\Rightarrow$ Nous pourrions le penser, puisque $\dim F_1 = 2$, $\dim F_2 = 3$ et $\dim \mathbb{R}_4[X] = 5$, mais c'est insuffisant

$\Rightarrow$ Soit $P \in F_1 \cap F_2$

- $\star$ Tout d'abord $P \in F_1$, et donc P est, dans $\mathbb{R}_4[X]$, un multiple de $(X-1)^3$, c'est à dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ et $D \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P(X) = (X-1)^3(CX + D)$$

- $\star$ Puis, P est aussi un élément de F_2. Le fait que $P(1) = 0$ ne nous apporte rien de plus. Utilisons la seconde condition d'appartenance à F_2, c'est à dire $P'(2) = 0$ et calculons, pour ce faire, $P'(X)$:

$$\begin{aligned} P'(X) &= 3(X-1)^2(CX+D) + C(X-1)^3 \\ &= (X-1)^2(3CX + 3D + C(X-1)) \\ &= (X-1)^2(4CX + 3D - C) \end{aligned}$$

Donc, $P'(2) = 7C + 3D$ et $P'(2) = 0 \Longleftrightarrow C = -\frac{3}{7}D$
Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X) = & (X-1)^3\left(-\frac{3}{7}DX + D\right) \\ = & \frac{D}{7}(X-1)^3(-3X+7) \\ = & \lambda(X-1)^3(-3X+7) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi $F_1 \cap F_2 \neq \{\mathcal{O}\}$. $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ de dimension 1 et de base le polynôme $(X-1)^3(-3X+7)$

Exercice 41 :

$\mathbb{C}_n[X]$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n (avec $n \geqslant 2$). Soit $x_1 \in \mathbb{C}$ et $x_2 \in \mathbb{C}$
E_1 est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ qui s'annulent en x_1 et E_1, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ qui s'annulent en x_2

1. *Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_n[X]$*
2. *Démontrer que $\mathbb{C}_n[X] = E_1 + E_2$*
3. *Avons-nous $\mathbb{C}_n[X] = E_1 \oplus E_2$?*

Nous allons faire une correction globale de cet exercice.

1. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on appelle $\Phi_\alpha : \mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C}$, la fonction définie par :
$$\begin{cases} \Phi_\alpha : \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \qquad\qquad P & \longmapsto & \Phi_\alpha(P) = P(\alpha) \end{cases}$$
En fait Φ_α est une forme linéaire sur $\mathbb{C}_n[X]$
Donc, $E_1 = \ker \Phi_{x_1}$ et $E_2 = \ker \Phi_{x_2}$ sont des hyperplans de $\mathbb{C}_n[X]$ nous avons donc $\dim E_1 = \dim E_2 = n$, et nous n'avons certainement pas $\mathbb{C}_n[X] = E_1 \oplus E_2$
D'autre part :
$$E_1 = \left\{P \in \mathbb{C}_n[X] \text{ tels que } P(X) = (X - x_1)\left(a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0\right)\right\}$$
$$E_2 = \left\{P \in \mathbb{C}_n[X] \text{ tels que } P(X) = (X - x_2)\left(b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0\right)\right\}$$
Et
$$E_1 \cap E_2 = \left\{P \in \mathbb{C}_n[X] \text{ tels que } P(X) = (X - x_1)(X - x_2)\left(c_{n-2}X^{n-2} + \cdots + c_1X + c_0\right)\right\}$$
L'intersection est donc très loin d'être réduite au seul polynôme nul.
2. Tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ peut cependant s'écrire comme somme d'un polynôme de E_1 et d'un polynôme de E_2.
En effet, soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ avec $P(X) = c_nX^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1X + c_0$. Il faut trouver un polynôme $P_1 \in E_1$ et un polynôme $P_2 \in E_2$ tels que $P = P_1 + P_2$.
En fait, il faut trouver $2n$ nombres complexes $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0$ tels que :
$$\begin{aligned} c_nX^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1X + c_0 = & (X - x_1)\left(a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0\right) + \\ & (X - x_2)\left(b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0\right) \end{aligned}$$
En développant la partie de droite, nous obtenons un système linéaire de n équations à $2n$ inconnues :
$$\begin{aligned} a_{n-1} + b_{n-1} = & \; c_n \\ -a_{n-1}x_1 + a_{n-2} + b_{n-2} - x_2b_{n-1} = & \; c_{n-1} \\ \vdots \quad & \; \vdots \\ x_1a_0 - x_2b_0 = & \; c_0 \end{aligned}$$
qui nous donne, par substitutions successives, une infinité de solutions [5]

5. J'aurais voulu une solution plus subtile à cette question. Je n'ai donc trouvé qu'une méthode d'équations linéaires qui nous offre une infinité de solutions, ce qui est conforme aux structures même de E_1 et de E_2

Exercice 42 :

Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère le sous-ensemble E défini par :

$$E = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \text{ tels que } \int_0^1 xP(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$$

1. *Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$*

   ⇛ Tout d'abord, $E \neq \emptyset$, puisque le polynôme nul $\mathcal{O}$ est évidemment dans E

   ⇛ Soient $P \in E$ et $Q \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$

   Alors, $\displaystyle\int_0^1 xP(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 xQ(x)\,\mathrm{d}x = 0$

   Avons-nous $\lambda P + \mu Q \in E$? Démontrons le.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x(\lambda P + \mu Q)(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x(\lambda P(x) + \mu Q(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\lambda P(x) + x\mu Q(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\lambda P(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\mu Q(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda \int_0^1 xP(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_0^1 xQ(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

   Et donc $\lambda P + \mu Q \in E$

   Et donc, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$

2. *Soit $B_1(x) = x$. Démontrer que E et $\mathrm{Vect}(B_1)$ sont en somme directe.*

   Soit $P \in E \cap \mathrm{Vect}(B_1)$.

   Alors, $P = aB_1$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_0^1 xaB_1(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Nous avons :

$$\int_0^1 xaB_1(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Longleftrightarrow \int_0^1 ax^2\,\mathrm{d}x = 0 \Longleftrightarrow a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 0 \Longleftrightarrow \frac{a}{3} = 0 \Longleftrightarrow a = 0$$

   Ainsi $P = \mathcal{O}$ et $E \cap \mathrm{Vect}(B_1) = \{\mathcal{O}\}$

   E et $\mathrm{Vect}(B_1)$ sont donc en somme directe.

   POUR ALLER PLUS LOIN

   1. Il ne faut pas confondre « Etre en somme directe » et « Etre supplémentaire »
      - ⋆ **Etre en somme directe** veut dire que si $F = E + \mathrm{Vect}(B_1)$, comme $E \cap \mathrm{Vect}(B_1) = \{\mathcal{O}\}$, alors $F = E \oplus \mathrm{Vect}(B_1)$, mais nous n'avons pas $\mathbb{R}[X] = E \oplus \mathrm{Vect}(B_1)$
      - ⋆ **Etre supplémentaire** veut dire que $\mathbb{R}[X] = E \oplus \mathrm{Vect}(B_1)$, ce que nous n'avons pas ici.
   2. Un autre point de vue pour résoudre l'exercice, est un point de vue de **produit scalaire** dans $\mathbb{R}[X]$.

      Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, la forme bilinéaire B définie par :

$$B(P,Q) = \int_0^1 P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x$$

      est un produit scalaire.

      De ce point de vue, E est l'ensemble des polynômes orthogonaux à $\mathrm{Vect}(B_1)$, et alors, bien entendu, $E \cap \mathrm{Vect}(B_1) = \{\mathcal{O}\}$

3. Un autre point de vue consiste à considérer $\Phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \Phi(P) = \displaystyle\int_0^1 xP(x)\,\mathrm{d}x \end{array}\right.$$

Φ est une forme linéaire dont E est le noyau, et comme $\Phi(B_1) = \dfrac{1}{3}$, nous avons encore $E \cap \operatorname{Vect}(B_1) = \{\mathcal{O}\}$

D'autre part, si n est le degré du polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, nous avons $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ et comme $XP(X) = a_nX^{n+1} + a_{n-1}X^n + \cdots + a_1X^2 + a_0X$, nous avons :

$$\Phi(P) = \frac{a_n}{n+2} + \frac{a_{n-1}}{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{3} + \frac{a_0}{2}$$

et donc si, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$,nous avons $a_k > 0$, alors $\Phi(P) > 0$ et donc $P \notin E$.

Ainsi, si $P \in E$, alors il existe i_0, avec $0 \leqslant i_0 \leqslant n$ tel que $a_{i_0} \leqslant 0$

Exercice 43 :

Dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les fonctions f_k définies pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_k : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_k(x) = \sin kx \end{array}\right.$$

On appelle $\delta_p(q)$ le symbole de Kronecker défini par : $\delta_p(q) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } p = q \\ 0 \text{ sinon} \end{array}\right.$

1. *Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$,* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x = \delta_p(q)\,\pi$

   Dans la résolution, nous utiliserons beaucoup de formules trigonométriques

   $\Rightarrow$ Si $p = q$, alors $\sin(px)\sin(qx) = \sin^2(px) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2px))$, de telle sorte que :

$$\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin^2(px)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2px)\,\mathrm{d}x$$

   Or :

   $\star$ $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x = \pi$

   $\star$ Et $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2px)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin 2px}{2p}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{1}{2}(\sin 4p\pi - \sin 0) = 0$

   Et donc, pour conclure, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(px)\,\mathrm{d}x = \pi$

   $\Rightarrow$ Si $p \neq q$, alors, $\sin(px)\sin(qx) = \dfrac{1}{2}(\cos(p-q)x - \cos(p+q)x)$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \cos(p-q)x - \cos(p+q)x\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\sin(p-q)x}{p-q} - \frac{\sin(p+q)x}{p+q}\right]_0^{2\pi}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   En conclusion, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x = \delta_p(q)\,\pi$

2. *En déduire que la famille $F = \{f_k; k \in \mathbb{N}\}$ est libre.*

   On doit montrer que toute sous-famille finie non vide de la famille $F = \{f_k; k \in \mathbb{N}\}$ est libre.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\{i_1, \dots i_p\}$ p entiers tels que $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$.
Soient $\lambda_1 \in \mathbb{K}, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 f_{i_1} + \lambda_2 f_{i_2} + \cdots + \lambda_p f_{i_p} = 0$.
Ceci veut dire, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 \sin i_1 x + \lambda_2 \sin i_2 x + \cdots + \lambda_p \sin i_p x = 0$$

Ce qui signifie que :

$$\int_0^{2\pi} (\lambda_1 \sin i_1 x + \lambda_2 \sin i_2 x + \cdots + \lambda_p \sin i_p x)\, \mathrm{d}x = 0$$

Multiplions $\lambda_1 \sin i_1 x + \lambda_2 \sin i_2 x + \cdots + \lambda_p \sin i_p x$ par $\sin i_1 x$, alors, nous avons :

$$\lambda_1 \sin^2 i_1 x + \lambda_2 \sin i_2 x \sin i_1 x + \cdots + \lambda_p \sin i_p x \sin i_1 x = 0$$

Et, en passant à l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \left(\lambda_1 \sin^2 i_1 x + \lambda_2 \sin i_2 x \sin i_1 x + \cdots + \lambda_p \sin i_p x \sin i_1 x\right) \mathrm{d}x = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\lambda_1 \int_0^{2\pi} \sin^2 i_1 x \,\mathrm{d}x + \lambda_2 \int_0^{2\pi} \sin i_2 x \sin i_1 x \,\mathrm{d}x + \cdots + \lambda_p \int_0^{2\pi} \sin i_p x \sin i_1 x \,\mathrm{d}x = 0$$

De la question précédente, comme $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$, nous avons $\lambda_1 \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 i_1 x \,\mathrm{d}x = \lambda_1 \pi$ et, pour $k \geqslant 2$, $\lambda_k \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin i_k x \sin i_1 x \,\mathrm{d}x = 0$
Nous en concluons donc que $\lambda_1 = 0$.
Pour montrer que $\lambda_k = 0$, nous procédons de manière identique en multipliant $\lambda_1 \sin i_1 x + \lambda_2 \sin i_2 x + \cdots + \lambda_p \sin i_p x$ par $\sin i_k x$, puis en passant à l'intégrale.
Ainsi, nous montrons que la famille $F = \{f_k ; k \in \mathbb{N}\}$ est libre. Plus généralement, la famille $F = \{f_k ; k \in \mathbb{N}\}$ est une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\left(\{f_k ; k \in \mathbb{N}\}\right)$

Pour aller plus loin
La famille $\left\{e^{inx} ; n \in \mathbb{Z}\right\}$ forme une base de $\mathrm{Vect}\left(\left\{e^{inx} ; n \in \mathbb{Z}\right\}\right)$.
En effet :
$\Rightarrow$ Si nous posons $\left\langle e^{ipx} / e^{iqx}\right\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ipx} e^{-iqx} \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)x} \,\mathrm{d}x$, nous avons :

- $\star$ Si $p = q$, $\left\langle e^{ipx} / e^{ipx}\right\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x = 2\pi$
- $\star$ Si $p \neq q$, $\left\langle e^{ipx} / e^{iqx}\right\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(p-q)x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{p-q}\left[e^{i(p-q)x}\right]_0^{2\pi} = 0$

$\Rightarrow$ Montrons que c'est une famille libre.
Comme tout à l'heure, soit $p \in \mathbb{N}$ et $\{i_1, \dots i_p\}$ p entiers tels que $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$.
Soient $\lambda_1 \in \mathbb{K}, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 e^{i_1 x i} + \lambda_2 e^{i_2 x i} + \cdots + \lambda_p e^{i_p x i} = 0$
En multipliant l'expression $\lambda_1 e^{i_1 x i} + \lambda_2 e^{i_2 x i} + \cdots + \lambda_p e^{i_p x i}$ par $e^{i_k x i}$ où $1 \leqslant k \leqslant p$, puis en passant à l'intégrale, nous obtenons $\lambda_k = 0$
Ainsi, la famille $\left\{e^{inx} ; n \in \mathbb{Z}\right\}$ forme une famille libre
En conclusion la famille $\left\{e^{inx} ; n \in \mathbb{Z}\right\}$ forme une base de $\mathrm{Vect}\left(\left\{e^{inx} ; n \in \mathbb{Z}\right\}\right)$.

On verra *(en L_2)* que l'expression $\left\langle e^{ipx} / e^{iqx}\right\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ipx} e^{-iqx} \,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire et que la famille $\left\{e^{inx} ; n \in \mathbb{Z}\right\}$ est une famille orthogonale.

Exercice 44 :

$\mathbb{K}[X]$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Nous considérons l'application u : $\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & u[P] \end{array} \right. \quad \text{où } u[P](X) = P(\alpha)X + P(\beta) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } \beta \in \mathbb{K} \text{ et } \alpha \neq \beta$$

1. *Démontrer que u est une application linéaire*

   Ce n'est pas une question difficile.
   Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $Q \in KX$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{array}{rl} u[\lambda P + \mu Q](X) = & [\lambda P + \mu Q](\alpha)X + [\lambda P + \mu Q](\beta) \\ = & (\lambda P(\alpha) + \mu Q(\alpha))X + \lambda P(\beta) + \mu Q(\beta) \\ = & \lambda P(\alpha)X + \mu Q(\alpha)X + \lambda P(\beta) + \mu Q(\beta) \\ = & \lambda(P(\alpha)X + P(\beta)) + \mu(Q(\alpha)X + Q(\beta)) \\ = & \lambda u[P](X) + \mu u[Q](X) \\ = & [\lambda u[P] + \mu u[Q]](X) \end{array}$$

   Et nous avons $u[\lambda P + \mu Q] = \lambda u[P] + \mu u[Q]$
   u est donc une application linéaire

2. *Déterminer $\ker u$ le noyau de u et $\mathrm{Im} u$, l'image de u*

   ▷ **Recherche de $\mathrm{Im} u$**
   Il est évident que $\mathrm{Im} u \subset \mathbb{K}_1[X]$ où $\mathbb{K}_1[X]$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur à 1, à coefficients dans $\mathbb{K}$.
   Réciproquement, si $AX + B$ est un polynôme de $\mathbb{K}_1[X]$, existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $u[P](X) = AX + B$

   Il suffit de prendre le polynôme $P \in \mathbb{K}_1[X]$ défini par $P(X) = \dfrac{A(X-\beta) - B(X-\alpha)}{\alpha - \beta}$

   Et donc, $\mathrm{Im} u = \mathbb{K}_1[X]$

   ▷ **Recherche de $\ker u$**
   Si $P \in \ker u$, alors $P(\alpha) = P(\beta) = 0$, et donc α et β sont des racines de P et P s'écrit donc :

$$P(X) = (X-\alpha)(X-\beta)Q(X)$$

   Ainsi,

$$\ker u = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tels que } P(X) = (X-\alpha)(X-\beta)Q(X)\}$$

   ▷ **Que se passe-t-il si $\alpha = \beta$?**
   Alors, nous avons $P(\alpha) = P(\beta)$ et $u[P](X) = P(\alpha)(X+1)$. Nous concluons simplement :
   - ⋆ Si $B(X) = X + 1$, alors $\mathrm{Im} u = \mathrm{Vect}(\{B\})$
   - ⋆ Et $\ker u = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tels que } P(X) = (X-\alpha)Q(X)\}$

Exercice 45 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p_1 et p_2 deux projecteurs de E tels que $p_1 \circ p_2 = \mathcal{O}_E$ et $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$. Montrer que q est un projecteur et trouver son noyau et son image.

⇒ **Montrons que q est un projecteur**
Il faut donc démontrer que $q \circ q = q$

$$\begin{array}{rl} q \circ q = & (p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1) \circ (p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1) \\ = & p_1 \circ p_1 + p_1 \circ p_2 - p_1 \circ (p_2 \circ p_1) + p_2 \circ p_1 + p_2 \circ p_2 - p_2 \circ (p_2 \circ p_1) - \\ & \quad (p_2 \circ p_1) \circ p_1 - (p_2 \circ p_1) \circ p_2 + (p_2 \circ p_1) \circ (p_2 \circ p_1) \\ = & p_1 - (p_1 \circ p_2) \circ p_1 + p_2 \circ p_1 + p_2 - (p_2 \circ p_2) \circ p_1 - p_2 \circ (p_1 \circ p_1) - \\ & \quad p_2 \circ (p_1 \circ p_2) + p_2 \circ (p_1 \circ p_2) \circ p_1 \\ = & p_1 + p_2 \circ p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1 - p_2 \circ p_1 \\ = & p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1 = q \end{array}$$

q est donc un projecteur

$\Rightarrow$ **Recherche du noyau de** q
Soit $u \in \ker q$. Alors, $q(u) = 0 \Longleftrightarrow p_1(u) + p_2(u) - (p_2 \circ p_1)(u) = 0$
En composant par p_1 à gauche, nous avons :

$$p_1 \circ (p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1) = p_1 \circ p_1 + p_1 \circ p_2 - p_1 \circ (p_2 \circ p_1) = p_1 - (p_1 \circ p_2) \circ p_1 = p_1$$

Ainsi, si $q(u) = 0$, alors $p_1(u) = 0$. Et donc, si $u \in \ker q$, alors $u \in \ker p_1$
De même, en composant par p_2 à gauche, nous avons :

$$\begin{aligned} p_2 \circ (p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1) = & \; p_2 \circ p_1 + p_2 \circ p_2 - p_2 \circ (p_2 \circ p_1) = p_2 \circ p_1 + p_2 - (p_2 \circ p_2) \circ p_1 \\ = & \; p_2 \circ p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1 \\ = & \; p_2 \end{aligned}$$

Ainsi, si $q(u) = 0$, alors $p_2(u) = 0$. Et donc, si $u \in \ker q$, alors $u \in \ker p_2$
Donc, si $u \in \ker q$, alors $u \in \ker p_1 \cap \ker p_2$
La réciproque est évidente : si $u \in \ker p_1 \cap \ker p_2$, alors $u \in \ker q$
Et nous avons bien $\ker q = v$

$\Rightarrow$ **Nous allons montrer que** $\mathrm{Im} q = \mathrm{Im} p_1 \oplus \mathrm{Im} p_2$
Pas si évident de trouver ce résultat ; pour ma part j'ai traîné pas mal avant de penser -et de démontrer- le résultat

- $\star$ <u>Tout d'abord, nous avons $\mathrm{Im} q = \mathrm{Im} p_1 + \mathrm{Im} p_2$</u>
  Soit $u \in E$
  Alors, $q(u) \in \mathrm{Im} q$ et :
  $$\begin{aligned} q(u) = & \; (p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1)(u) \\ = & \; p_1(u) + p_2(u - p_1(u)) \end{aligned}$$
  Or, $p_1(u) \in \mathrm{Im} p_1$ et $p_2(u - p_1(u)) \in \mathrm{Im} p_2$.
  Ainsi, tout élément de $\mathrm{Im} q$ peut se décomposer en une somme d'un élément de $\mathrm{Im} p_1$ et d'un élément de $\mathrm{Im} p_2$. Donc, $\mathrm{Im} q = \mathrm{Im} p_1 + \mathrm{Im} p_2$
- $\star$ <u>Ensuite, nous avons $\mathrm{Im} p_1 \cap \mathrm{Im} p_2 = \{0\}$</u>
  Pour démontrer que $\mathrm{Im} p_1$ et $\mathrm{Im} p_2$ sont en somme directe, il faut démontrer que $\mathrm{Im} p_1 \cap \mathrm{Im} p_2 = \{0\}$
  Soit donc $u \in \mathrm{Im} p_1 \cap \mathrm{Im} p_2$.
  Comme $u \in \mathrm{Im} p_1$, nous avons $p_1(u) = u$; de même, comme $u \in \mathrm{Im} p_2$, nous avons $p_2(u) = u$. Donc :
  $$(p_1 \circ p_2)(u) = p_1[p_2(u)] = p_1[u] = u$$
  C'est à dire $(p_1 \circ p_2)(u) = u$
  De l'hypothèse $p_1 \circ p_2 = \mathcal{O}_E$, nous déduisons que $u = 0$.
  Donc, $\mathrm{Im} p_1 \cap \mathrm{Im} p_2 = \{0\}$

D'où nous avons bien $\mathrm{Im} q = \mathrm{Im} p_1 \oplus \mathrm{Im} p_2$

Exercice 46 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $f \in \mathcal{L}(E)$, $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$ deux scalaires tels que $a \neq b$. On suppose que $(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = \mathcal{O}_E$

Avant de commencer, remarquons que $(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = (f - b\mathrm{Id}_E) \circ (f - a\mathrm{Id}_E)$, la démonstration se faisant par un calcul très simple :

$$\begin{aligned} (f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = & \; f^2 - bf - af + ab\mathrm{Id}_E = f^2 - (a+b)f + ab\mathrm{Id}_E = \mathcal{O}_E \\ (f - b\mathrm{Id}_E) \circ (f - a\mathrm{Id}_E) = & \; f^2 - af - bf + ab\mathrm{Id}_E = f^2 - (a+b)f + ab\mathrm{Id}_E = \mathcal{O}_E \end{aligned}$$

1. *Etablir l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$ non nuls tels que $\lambda(f - a\mathrm{Id}_E)$ et $\mu(f - a\mathrm{Id}_E)$ soient des projecteurs.*
   $\Rightarrow$ De l'identité $(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = \mathcal{O}_E$, nous tirons :
   $$(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = \mathcal{O}_E \Longleftrightarrow f^2 - (a+b)f + ab\mathrm{Id}_E = \mathcal{O}_E \Longleftrightarrow f^2 = (a+b)f - ab\mathrm{Id}_E$$

$\Rightarrow$ **Etudions maintenant** $(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - a\mathrm{Id}_E)$
Nous avons, en utilisant l'identité $f^2 = (a+b)\,f - ab\mathrm{Id}_E$:

$$\begin{aligned}(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - a\mathrm{Id}_E) = &\ f^2 - 2af + a^2\mathrm{Id}_E \\ = &\ (a+b)\,f - ab\mathrm{Id}_E - 2af + a^2\mathrm{Id}_E \\ = &\ (b-a)\,f - a\,(b-a)\,\mathrm{Id}_E \\ = &\ (b-a)\,(f - a\mathrm{Id}_E)\end{aligned}$$

En posant $\lambda = \dfrac{1}{b-a}$, nous avons $(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - a\mathrm{Id}_E) = \dfrac{1}{\lambda}\,(f - a\mathrm{Id}_E)$, et donc :

$$\begin{aligned}[\lambda\,(f - a\mathrm{Id}_E)] \circ [\lambda\,(f - a\mathrm{Id}_E)] = &\ \lambda^2\,[(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - a\mathrm{Id}_E)] \\ = &\ \lambda^2 \left[\frac{1}{\lambda}\,(f - a\mathrm{Id}_E)\right] \\ = &\ \lambda\,(f - a\mathrm{Id}_E)\end{aligned}$$

Ainsi $\dfrac{1}{b-a}\,(f - a\mathrm{Id}_E)$ est un projecteur

$\Rightarrow$ **Continuons avec** $(f - b\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E)$
Vous vous doutez bien que la méthode pour y arriver sera la même !!
Nous avons, en utilisant l'identité $f^2 = (a+b)\,f - ab\mathrm{Id}_E$:

$$\begin{aligned}(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - a\mathrm{Id}_E) = &\ f^2 - 2bf + b^2\mathrm{Id}_E \\ = &\ (a+b)\,f - ab\mathrm{Id}_E - 2bf + b^2\mathrm{Id}_E \\ = &\ (a-b)\,f - b\,(a-b)\,\mathrm{Id}_E \\ = &\ (a-b)\,(f - b\mathrm{Id}_E)\end{aligned}$$

En utilisant le même raisonnement que ci-dessus, et en posant $\mu = \dfrac{1}{a-b}$, nous avons $\dfrac{1}{a-b}\,(f - b\mathrm{Id}_E)$ qui est un projecteur

$\Rightarrow$ **Allons un peu plus loin**
En posant $p = \dfrac{1}{b-a}\,(f - a\mathrm{Id}_E)$ et $q = \dfrac{1}{a-b}\,(f - b\mathrm{Id}_E)$, nous avons $f = bp + aq$. En effet :

$$\begin{aligned}bp + aq = &\ \frac{b}{b-a}\,(f - a\mathrm{Id}_E) + \frac{a}{a-b}\,(f - b\mathrm{Id}_E) \\ = &\ \left(\frac{b}{b-a} + \frac{a}{a-b}\right) f - \left(\frac{ab}{b-a} + \frac{ab}{a-b}\right) \mathrm{Id}_E \\ = &\ \left(\frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a}\right) f \\ = &\ f\end{aligned}$$

2. *Montrer que* $\mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E) = \ker\,(f - a\mathrm{Id}_E)$.

$\Rightarrow$ **Montrons que** $\mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E) \subset \ker\,(f - a\mathrm{Id}_E)$
Soit donc $y \in \mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E)$; il nous faut montrer que $y \in \ker\,(f - a\mathrm{Id}_E)$
Comme $y \in \mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = (f - b\mathrm{Id}_E)\,(x)$; et donc :

$$(f - a\mathrm{Id}_E)\,(y) = (f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E)\,(x) = \mathcal{O}_E\,(x) = 0$$

et donc $y \in \ker\,(f - a\mathrm{Id}_E)$ et nous avons bien $\mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E) \subset \ker\,(f - a\mathrm{Id}_E)$

$\Rightarrow$ **Montrons que** $\ker\,(f - a\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E)$
Soit $x \in \ker\,(f - a\mathrm{Id}_E)$. Il nous faut montrer que $x \in \mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E)$, c'est à dire qu'il existe $x' \in E$ tel que $\mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E)\,(x') = x$
Comme $x \in \ker\,(f - a\mathrm{Id}_E)$, alors $(f - a\mathrm{Id}_E)\,(x) = 0 \Longleftrightarrow f\,(x) = ax$, et donc $(f - b\mathrm{Id}_E)\,(x) = ax - bx = (a-b)\,x$.
Posons $x' = \dfrac{1}{a-b}x$, alors :

$$(f - b\mathrm{Id}_E)\,(x') = f\,(x') - bx' = f\left(\frac{1}{a-b}x\right) - \frac{b}{a-b}x = \frac{1}{a-b}f\,(x) - \frac{b}{a-b}x = \frac{a}{a-b}x - \frac{b}{a-b}x = x$$

Nous avons montré que $x \in \mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E)$ et que, donc, $\ker\,(f - a\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E)$

En conclusion, $\mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E) = \ker(f - a\mathrm{Id}_E)$

3. *Calculer f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   Nous allons utiliser le fait que $f = bp + aq$, que $p \circ q = q \circ p = \mathcal{O}_E$ et que, pour $k \geqslant 1$, $p^k = p$ ainsi que $q^k = q$

   Comme p et q commutent, on utilise le binôme de Newton :

$$f^n = (bp + aq)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} p^k q^{n-k} = b^n p^n + a^n q^n$$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = b^n p^n + a^n q^n$

4. *Si $ab \neq 0$, montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$*

   De l'identité $f^2 - (a+b)\,f + ab\mathrm{Id}_E = \mathcal{O}_E$, nous tirons $f^2 - (a+b)\,f = -ab\mathrm{Id}_E$, c'est à dire

$$f \circ (f - (a+b)\,\mathrm{Id}_E) = -ab\mathrm{Id}_E$$

   Si $ab \neq 0$, posons $\varphi = \dfrac{1}{ab}\left((a+b)\,\mathrm{Id}_E - f\right)$. Alors,

$$f \circ \varphi = \varphi \circ f = \mathrm{Id}_E$$

   Et donc $\varphi = f^{-1}$

   Ainsi, f est bijective, c'est à dire $f \in \mathrm{GL}(E)$ et $f^{-1} = \dfrac{1}{ab}\left((a+b)\,\mathrm{Id}_E - f\right)$

Exercice 47 :

Dans tout l'exercice $\mathbb{K}$ est un corps commutatif

1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, la famille $\{x, f(x)\}$ soit une famille liée. Il faut montrer que f est une homothétie.*

   $\Rightarrow$ Si f est une homothétie, alors, pour tout $x \in E$, la famille $\{x, f(x)\}$ est une famille liée

   $\Rightarrow$ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, la famille $\{x, f(x)\}$ soit une famille liée, c'est à dire qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$, à priori dépendant de $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Soient $x \in E$ et $y \in E$ 2 vecteurs de E quelconques non nuls*(Le cas de nullité est trivial)*. Nous avons $f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y$ et il nous faut montrer que $\lambda_x = \lambda_y$

   - ⋆ On suppose que la famille $\{x, y\}$ est une famille liée. Alors, $y = \mu x$ avec $\mu \in \mathbb{K}$
     Nous avons $f(y) = \lambda_y y = \lambda_y \mu x$ et $f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x$.
     Donc,$f(y) = \lambda_y \mu x = \mu \lambda_x x$ d'où nous tirons $\lambda_x = \lambda_y$
   - ⋆ On suppose, maintenant, que la famille $\{x, y\}$ est une famille libre.
     Comme tout à l'heure, $f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y$. Nous allons nous pencher sur le cas $x + y$:

$$\begin{aligned} f(x+y) = & \ \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y \\ = & \ f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y \end{aligned}$$

     Nous avons donc

$$\lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y = \lambda_x x + \lambda_y y \iff (\lambda_{x+y} - \lambda_x)\,x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)\,y = 0$$

     De l'indépendance de x et de y, nous déduisons que $\lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$, c'est à dire $\lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$ et donc, nous déduisons que $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$

   f est donc une homothétie.

2. *Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels . Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$ 2 applications linéaires . On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe un nombre $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $g(x) = \lambda_x f(x)$. Il faut montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $g = \lambda f$*

   Comme tout à l'heure, soient $x \in E$ et $y \in E$ 2 vecteurs de E quelconques non nuls *(Le cas de nullité est trivial)*.

   Nous avons $g(x) = \lambda_x f(x)$ et $g(y) = \lambda_y f(y)$ et il nous faut montrer que $\lambda_x = \lambda_y$

- ⋆ On suppose que les deuc vecteurs x et y sont liés, c'est à dire $y = \mu x$, où $\mu \in \mathbb{K}$ et donc que la famille $\{f(x), f(y)\}$ est une famille liée.
  Alors, $f(y) = \mu f(x)$.
  Nous avons $g(y) = \lambda_y f(y) = \lambda_y \mu f(x)$.
  Et $g(y) = g(\mu x) = \mu g(x) = \mu \lambda_x f(x)$; nous avons donc $g(y) = \lambda_y \mu f(x) = \mu \lambda_x f(x)$
  D'où nous tirons $\lambda_x = \lambda_y$
- ⋆ On suppose que la famille $\{f(x), f(y)\}$ soit une famille libre.
  Alors, $g(y) = \lambda_y f(y)$ et $g(x) = \lambda_x f(x)$ et :

$$\begin{aligned} g(x+y) = &\ \lambda_{x+y} f(x+y) \\ = &\ \lambda_{x+y} f(x) + \lambda_{x+y} f(y) \\ = &\ g(x) + g(y) = \lambda_x f(x) + \lambda_y f(y) \end{aligned}$$

  D'où nous tirons :

$$\lambda_{x+y} f(x) + \lambda_{x+y} f(y) = \lambda_x f(x) + \lambda_y f(y) \Longleftrightarrow (\lambda_{x+y} - \lambda_x) f(x) + (\lambda_{x+y} - \lambda_y) f(y) = 0$$

  De l'indépendance de $f(x)$ et $f(y)$, nous tirons $\lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$, c'est à dire $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $g = \lambda f$

3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_0 un sous-espace vectoriel de E, strictement inclus dans E* (C'est à dire $E_0 \neq E$ et $E_0 \nsubseteq E$). *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.*
   On suppose que pour tout $x \in E \setminus E_0$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Il faut monter que f est une homothétie

- ⇒ On peut faire remarquer que si E_0 est un sous-espace vectoriel de E, $E \setminus E_0$ ne l'est pas forcément.
- ⇒ Soit $x \in E \setminus E_0$ et $y \in E \setminus E_0$.
  - ⋆ Alors nous ne pouvons avoir $x + y \in E_0$ et $x - y \in E_0$.
    En effet, supposons que nous les ayions en en même temps, c'est à dire $x + y \in E_0$ et $x - y \in E_0$.
    Comme E_0 est un sous-espace vectoriel , alors $(x+y) + (x-y) \in E_0$, c'est à dire $2x \in E_0$, ce qui est impossible
  - ⋆ Nous avons donc $x + y \in E \setminus E_0$ ou $x - y \in E \setminus E_0$ qu'il est possible de résumer en écrivant qu'il existe $\varepsilon \in \{-1; +1\}$, tel que $x + \varepsilon y \in E \setminus E_0$
  - ⋆ Supposons $x \in E \setminus E_0$ et $y \in E \setminus E_0$ liés.
    Alors, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu x$
    Nous avons $f(y) = \lambda_y y = \lambda_y \mu x$ et $f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x$.
    Donc,$f(y) = \lambda_y \mu x = \mu \lambda_x x$ d'où nous tirons $\lambda_x = \lambda_y$
  - ⋆ Supposons, maintenant, que $x \in E \setminus E_0$ et $y \in E \setminus E_0$ soient libres.
    Soit donc $\varepsilon \in \{-1; +1\}$, tel que $x + \varepsilon y \in E \setminus E_0$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x+\varepsilon y) = &\ \lambda_{x+\varepsilon y}(x+\varepsilon y) = \lambda_{x+\varepsilon y} x + \varepsilon \lambda_{x+\varepsilon y} y \\ = &\ f(x) + \varepsilon f(y) \\ = &\ \lambda_x x + \varepsilon \lambda_y y \end{aligned}$$

    Donc :

$$\lambda_{x+\varepsilon y} x + \varepsilon \lambda_{x+\varepsilon y} y = \lambda_x x + \varepsilon \lambda_y y \Longleftrightarrow (\lambda_{x+\varepsilon y} - \lambda_x) x + \varepsilon (\lambda_{x+\varepsilon y} - \lambda_y) y$$

    De l'indépendance de x et de y, nous obtenons $\lambda_{x+\varepsilon y} - \lambda_x = \lambda_{x+\varepsilon y} - \lambda_y = 0$, c'est à dire $\lambda_x = \lambda_y$

  Ainsi, pour tout $x \in E \setminus E_0$, nous avons $f(x) = \lambda x$
- ⇒ Soit, maintenant, $x \in E_0$; il existe $y_0 \in E \setminus E_0$ tel que $x + y_0 \in E \setminus E_0$ et $x - y_0 E \setminus E_0$.
  Nous avons alors $x = \dfrac{1}{2}[(x+y_0) + (x-y_0)]$ et donc :

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x+y_0) + f(x-y_0)] = \frac{1}{2}[\lambda(x+y_0) + \lambda(x-y_0)] = \lambda x$$

Ainsi, nous déduisons que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$

Exercice 48 :

1. *$\mathbb{K}[X]$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on définit l'application $\Phi_x : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}$ par :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi_x : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & \Phi_x(P) = P(x) \end{array} \right.$$

(a) *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{K}$, Φ_x est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$*

Cette question ne pose aucune difficulté. Pour la résoudre nous allons utiliser les opérations d'addition des polynômes et de la multiplication par un scalaire.
Soient donc $x \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$; alors :

$$\Phi_x(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda P(x) + \mu Q(x) = \lambda \Phi_x(P) + \mu \Phi_x(Q)$$

Donc $\Phi_x(\lambda P + \mu Q) = \lambda \Phi_x(P) + \mu \Phi_x(Q)$
Φ_x est donc bien linéaire.

(b) *Démontrer que la famille $(\Phi_x)_{x\in\mathbb{K}}$ est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X], \mathbb{K}) = (\mathbb{K}[X])^*$*

Pour démontrer cette question, nous devons extraire une famille finie quelconque de la famille $(\Phi_x)_{x\in\mathbb{K}}$ et démontrer qu'elle est libre.
Soient donc $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n éléments de $\mathbb{K}$, 2 à 2 distincts et $\{\Phi_{x_i}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$, les formes linéaires correspondantes.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, n éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\lambda_1\Phi_{x_1} + \lambda_2\Phi_{x_2} + \cdots + \lambda_n\Phi_{x_n} = \mathcal{O}_{(\mathbb{K}[X])^*}$
Ceci veut donc dire que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$:

$$\lambda_1\Phi_{x_1}(P) + \lambda_2\Phi_{x_2}(P) + \cdots + \lambda_n\Phi_{x_n}(P) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 P(x_1) + \lambda_2 P(x_2) + \cdots + \lambda_n P(x_n) = 0$$

L'égalité précédente est vraie pour tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$, c'est à dire pour les polynômes de degré 1, 2 ou 452896.

Incise

Nous allons introduire, pour résoudre cet exercice, les polynômes de Lagrange adaptés aux scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [6]. Ce sont des polynômes du type :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

Nous avons alors

$$L_i(x_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} = 1$$
$$L_i(x_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k} = 0 \text{ si } i \neq j$$

En somme $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$

Donc, En appliquant l'égalité

$$\lambda_1\Phi_{x_1}(P) + \lambda_2\Phi_{x_2}(P) + \cdots + \lambda_n\Phi_{x_n}(P) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 P(x_1) + \lambda_2 P(x_2) + \cdots + \lambda_n P(x_n) = 0$$

6. C'est une indication que j'aurais pu donner à la rédaction de l'énoncé. Pour résoudre cette question, j'ai mis bien longtemps...cherchant en particulier à partir des polynômes de degré 1, 2 ou 25639. C'est en relisant des textes sur l'approximation polynômiale que les polynômes de Lagrange me sont revenus...J'ai voulu laisser la réflexion du lecteur se faire toute seule

aux polynômes de Lagrange $L_i; 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\begin{array}{l}
\lambda_1 L_1(x_1) + \lambda_2 L_1(x_2) + \cdots + \lambda_n L_1(x_n) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0 \\
\lambda_1 L_2(x_1) + \lambda_2 L_2(x_2) + \cdots + \lambda_n L_2(x_n) = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = 0 \\
\quad \vdots \\
\lambda_1 L_i(x_1) + \lambda_2 L_i(x_2) + \cdots + \lambda_i L_i(x_i) + \cdots + \lambda_n L_i(x_n) = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0 \\
\quad \vdots \\
\lambda_1 L_n(x_1) + \lambda_2 L_n(x_2) + \cdots + \lambda_n L_n(x_n) = 0 \Longrightarrow \lambda_n = 0
\end{array}$$

D'où nous avons $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

La famille $\{\Phi_{x_i}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ forme donc une famille libre et, plus généralement, la famille $(\Phi_x)_{x\in\mathbb{K}}$ est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X], \mathbb{K}) = (\mathbb{K}[X])^*$

2. *On se place, maintenant dans $\mathbb{K}_n[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n.*

   (a) *Soient $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, $n+1$ scalaires du corps $\mathbb{K}$ 2 à 2 distincts. D'après la question précédente, la famille $\{\Phi_{x_0}, \Phi_{x_1}, \cdots, \Phi_{x_n}\}$ forme une base de $(\mathbb{K}_n[X])^*$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathbb{K}_n[X]$.*
   En chercher la base duale sur $\mathbb{K}_n[X]$

   L'incise de la question précédente prend, ici, tout son sens.
   D'après le théorème 3.8.2, étant donnée une base $\{\Phi_{x_0}, \Phi_{x_1}, \cdots, \Phi_{x_n}\}$ de $(\mathbb{K}_n[X])^*$, il existe une et une seule base $P_0, \ldots, P_n$ de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que $\Phi_{x_i}(P_j) = \delta_{i,j}$.
   En réutilisant le résultat de la question précédente, cette base est donnée par les polynômes de Lagrange adaptés aux $n+1$ scalaires $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$. Ainsi, les polynômes :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \text{ avec } 0 \leqslant i \leqslant n$$

   Forment la base duale de $\{\Phi_{x_0}, \Phi_{x_1}, \cdots, \Phi_{x_n}\}$

   (b) *Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer qu'il existe des réels $\lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, uniques, tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$*

$$\int_0^1 P(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

   On sait que $F : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & F(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\, \mathrm{d}t \end{array}\right.$$

   F est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$
   Pour $n+1$ réels distincts 2 à 2 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, les formes linéaires $\{\Phi_{x_0}, \Phi_{x_1}, \cdots, \Phi_{x_n}\}$ forment une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
   Il existe donc $n+1$ réels $\lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, uniques, tels que,

$$F = \lambda_0 \Phi_{x_0} + \lambda_1 \Phi_{x_1} + \cdots + \lambda_n \Phi_{x_n}$$

   C'est à dire, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$F(P) = \lambda_0 \Phi_{x_0}(P) + \lambda_1 \Phi_{x_1}(P) + \cdots + \lambda_n \Phi_{x_n}(P) \Longleftrightarrow \int_0^1 P(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

   Ce que nous voulions

Pour aller plus loin

Il est très facile de démontrer que la famille des polynômes de Lagrange $\{L_i; 0 \leqslant i \leqslant n\}$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soient donc $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ $n+1$ scalaires de $\mathbb{K}$ tels que :

$$\lambda_0 L_0 + \lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n = \mathcal{O}$$

ce qui veut dire que, pour tout $x \in \mathbb{K}$, nous avons :

$$\lambda_0 L_0(x) + \lambda_1 L_1(x) + \cdots + \lambda_n L_n(x) = \mathcal{O}(x) = 0$$

En particulier si $x = x_0, x = x_1, \dots, x = x_n$ et donc :

$$\begin{array}{l}
\lambda_0 L_0(x_0) + \lambda_1 L_1(x_0) + \cdots + \lambda_n L_n(x_0) = 0 \Longrightarrow \lambda_0 = 0 \\
\lambda_0 L_0(x_1) + \lambda_1 L_1(x_1) + \cdots + \lambda_n L_n(x_1) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0 \\
\qquad \vdots \\
\lambda_0 L_0(x_i) + \lambda_1 L_1(x_i) + \cdots + \lambda_i L_i(x_i) + \cdots + \lambda_n L_n(x_i) = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0 \\
\qquad \vdots \\
\lambda_0 L_0(x_n) + \lambda_1 L_1(x_n) + \cdots + \lambda_n L_n(x_n) = 0 \Longrightarrow \lambda_n = 0
\end{array}$$

Et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et la famille $\{L_i; 0 \leqslant i \leqslant n\}$ est libre et forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$

Exercice 49 :

1. *Soient A et B 2 $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et $f : A \longrightarrow B$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Il faut démontrer que f est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si, pour tout $x \in A$, $f(ix) = if(x)$*

   On suppose $f : A \longrightarrow B$ une application $\mathbb{R}$-linéaire.
   → Si f est aussi $\mathbb{C}$-linéaire, il est évident qu'alors, pour tout $x \in A$, $f(ix) = if(x)$
   → Réciproquement, supposons que f soit $\mathbb{R}$-linéaire et que pour tout $x \in A$, $f(ix) = if(x)$
   Soit alors $z = a + ib$ un nombre complexe ; pour tout $x \in A$, nous avons :

$$\begin{array}{rcl}
f(zx) = & & f((a+ib)x) \\
& = & f(ax + bix) = f(ax) + f(bix) \\
& = & af(x) + bf(ix) \\
& = & af(x) + bif(x) \\
& = & (a+ib) f(x) = zf(x)
\end{array}$$

   f est donc $\mathbb{C}$-linéaire

2. *Soit, maintenant, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On considère le produit cartésien $E \times E$ dans lequel, nous définissons :*
   — ***Une addition interne** :*
   Pour tout $(x, y) \in E \times E$ et $(x', y') \in E \times E$ $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
   — ***Une loi externe** :*
   Pour tout $(x, y) \in E \times E$ et tout $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\alpha = a + ib$, $\alpha(x, y) = (ax - by, bx + ay)$
   Montrer que $E \times E$ muni de ces deux lois est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel que nous noterons $E_{\mathbb{C}}$

   La présentation classique de la loi externe n'est pas, ici, respectée. Une présentation classique pourrait être celle-ci :

$$\left\{ \begin{array}{rcl}
\Phi : \mathbb{C} \times (E \times E) & \longrightarrow & E \times E \\
(a + ib, (x, y)) & \longmapsto & \Phi[(a + ib, (x, y))] = (ax - by, bx + ay)
\end{array} \right.$$

   Mais, comme c'est le dernier exercice de la longue liste des exercices proposés, je suppose que vous maîtrisez bien !!

   ⇒ **$(E \times E, +)$ est un groupe commutatif**
   Comme $(E, +)$ est un groupe commutatif (puisque E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel), $(E \times E, +)$ est un produit direct de groupes commutatifs et est donc un groupe commutatif

⇒ **Etude de la loi externe**
Dans la résolution qui suit, nous écrivons $\lambda = a+ib$ et $\mu = c+id$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$
Alors pour tout $(x,y) \in E \times E$, tout $(x_1,y_1) \in E \times E$, tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $\mu \in \mathbb{C}$

⋆ Montrons que $(\lambda\mu)(x,y) = \lambda(\mu(x,y))$ Pour commencer :

$$\begin{aligned}(\lambda\mu)(x,y) &= (ac-bd+i(bc+ad))(x,y)\\ &= ((ac-bd)x-(bc+ad)y,(bc+ad)x+(ac-bd)y)\end{aligned}$$

Et maintenant

$$\begin{aligned}\lambda(\mu(x,y)) &= \lambda(cx-dy,dx+cy)\\ &= (a(cx-dy)-b(dx+cy),b(cx-dy)+a(dx+acy))\\ &= (acx-ady-bdx-bcy,bcx-bdy+adx+acy)\\ &= ((ac-bd)x-(ad+bc)y,(bc+ad)x+(ac-bd)y)\end{aligned}$$

Nous avons bien $(\lambda\mu)(x,y) = \lambda(\mu(x,y))$

⋆ Montrons que $\lambda[(x,y)+(x_1,y_1)] = \lambda(x,y)+\lambda(x_1,y_1)$
Tout d'abord, $(x,y)+(x_1,y_1) = (x+x_1,y+y_1)$, et donc :

$$\begin{aligned}\lambda[(x,y)+(x_1,y_1)] &= \lambda(x+x_1,y+y_1)\\ &= (a+ib)(x+x_1,y+y_1)\\ &= [a(x+x_1)-b(y+y_1),b(x+x_1)+a(y+y_1)]\\ &= [ax+ax_1-by-by_1,bx+bx_1+ay+ay_1]\\ &= (ax-by,bx+ay)+(ax_1-by_1,bx_1+ay_1)\\ &= \lambda(x,y)+\lambda(x_1,y_1)\end{aligned}$$

⋆ Montrons que $(\lambda+\mu)(x,y) = \lambda(x,y)+\mu(x,y)$
Nous avons

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)(x,y) &= [(a+ib)+(c+id)](x,y)\\ &= [(a+c)+i(b+d)](x,y)\\ &= [(a+c)x-(b+d)y,(b+d)x+(a+c)y]\\ &= (ax+cx-by-dy,bx+dx+ay+cy)\\ &= (ax-by,bx+ay)+(cx-dy,dx+cy)\\ &= (a+ib)(x,y)+(c+id)(x,y)\\ &= \lambda(x,y)+\mu(x,y)\end{aligned}$$

⋆ E, pour terminer, montrons que $1\times(x,y) = (x,y)$
Nous avons $1 = 1+0i$, et donc :

$$\begin{aligned}1\times(x,y) &= (1+0i)(x,y)\\ &= (1\times x-0\times y,0\times x+1\times y) = (x,y)\end{aligned}$$

Donc, $E\times E$ muni de ces deux lois est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

3. *Soit $J : E \longrightarrow E_{\mathbb{C}}$ une application définie par :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} J : E & \longrightarrow & E_{\mathbb{C}}\\ x & \longmapsto & J(x) = (x,0)\end{array}\right.$$

(a) Montrer que J est $\mathbb{R}$-linéaire

(b) Montrer que J est injective

(c) Montrer que, pour tout $(x,y) \in E_{\mathbb{C}}$, nous avons $(x,y) = J(x)+iJ(y)$

▷ **J est $\mathbb{R}$-linéaire**
⋆ Soient $x \in E$ et $y \in E$. Alors :

$$J(x+y) = (x+y,0) = (x,0)+(y,0) = J(x)+J(y)$$

⋆ Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, comme E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , $\lambda x \in E$ et, dans $E_{\mathbb{C}}$:

$$\lambda (x, 0) = (\lambda + i0) (x, 0) = (\lambda x - 0 \times 0, 0x + \lambda 0) = (\lambda x, 0)$$

Donc :

$$J (\lambda x) = (\lambda x, 0) = \lambda (x, 0) = \lambda J (x)$$

J est donc $\mathbb{R}$-linéaire

▷ **J est injective**
Soient $x \in E$ et $y \in E$ tels que $J (x) = J (y)$
Alors $J (x) = J (y) \iff (x, 0) = (y, 0) \iff x = y$
J est donc injective

▷ **Pour tout $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$, nous avons $(x, y) = J (x) + iJ (y)$**
Il suffit d'utiliser la définition :

$$J (x)+iJ (y) = (x, 0)+i (y, 0) = (x, 0)+(0 \times y - 1 \times 0, 1 \times y + 0 \times 0) = (x, 0)+(0, y) = (x, y)$$

Nous avons donc $(x, y) = J (x) + iJ (y)$

4. *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel quelconque et $f : E \longrightarrow V$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Montrer qu'il existe une application $\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$, $\mathbb{C}$-linéaire telle que $f = \tilde{f} \circ J$*

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel quelconque et $f : E \longrightarrow V$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. En fait on nous demande de trouver une fonction $\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$ telle que le schéma suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "J"'] & V \\ & E_{\mathbb{C}} \arrow[u, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

C'est à dire que nous aurons donc $f = \tilde{f} \circ J$

▷ **Supposons qu'il existe une fonction $\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$, $\mathbb{C}$-linéaire telle que $f = \tilde{f} \circ J$**
Alors, pour tout $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{f} [(x, y)] = & \ \tilde{f} [J (x) + iJ (y)] \\ = & \ \tilde{f} [J (x)] + i\tilde{f} [J (y)] \text{ par } \mathbb{C}\text{-linéarité} \\ = & \ \tilde{f} \circ J (x) + i\tilde{f} \circ J (y) \\ = & \ f (x) + if (y) \text{ car } f = \tilde{f} \circ J \end{aligned}$$

Ainsi, si $\tilde{f}$ existe, alors, elle est définie par $\tilde{f} [(x, y)] = f (x) + if (y)$. $\tilde{f}$ est donc entièrement déterminée par f et est donc unique.

▷ **Considérons la fonction $\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$, définie par $\tilde{f} [(x, y)] = f (x) + if (y)$**

⋆ Nous avons, pour tout $x \in E$ $f (x) = \tilde{f} \circ J (x)$
Soit $x \in E$. Alors, puisque f est $\mathbb{R}$-linéaire et que donc $f (0) = 0$, nous avons :

$$\tilde{f} \circ J (x) = \tilde{f} [J (x)] = \tilde{f} [(x, 0)] = f (x) + if (0) = f (x)$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, nous avons $f (x) = \tilde{f} \circ J (x)$

⋆ $\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$ est $\mathbb{R}$-linéaire
◊ Soient $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$ et $(x_1, y_1) \in E_{\mathbb{C}}$; alors :

$$\begin{aligned} \tilde{f} [(x, y) + (x_1, y_1)] = & \ \tilde{f} [(x + x_1, y + y_1)] \\ = & \ f (x + x_1) + if (y + y_1) \text{ par définition de } \tilde{f} \\ = & \ f (x) + f (x_1) + i (f (y) + f (y_1)) \text{ par } \mathbb{R}\text{-linéarité de } f \\ = & \ f (x) + if (y) + f (x_1) + if (y_1) \\ = & \ \tilde{f} (x, y) + \tilde{f} (x_1, y_1) \end{aligned}$$

Nous avons donc $\tilde{f} [(x, y) + (x_1, y_1)] = \tilde{f} [(x, y)] + \tilde{f} [(x_1, y_1)]$

$\lozenge$ Soient $a \in R$ et $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{f}\left[a(x, y)\right] &= \tilde{f}\left[(ax, ay)\right] \\
&= f(ax) + i(ay) \\
&= af(x) + ai(y) \text{ par } \mathbb{R} - \text{linéarité de } f \\
&= a\left[f(x) + i(y)\right] \\
&= a\tilde{f}\left[(x, y)\right]
\end{aligned}$$

Nous avons donc, pour $a \in R$ et $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$ $\tilde{f}\left[a(x, y)\right] = a\tilde{f}\left[(x, y)\right]$

$\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$ est donc bien $\mathbb{R}$-linéaire

$\star$ <u>Montrons maintenant que $\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$ est $\mathbb{C}$-linéaire</u>

Comme $\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$ est $\mathbb{R}$-linéaire, il nous suffit de montrer que, pour tout $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$, $\tilde{f}\left[i(x, y)\right] = i\tilde{f}\left[(x, y)\right]$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}\left[i(x, y)\right] &= \tilde{f}\left[(0 + i)(x, y)\right] \\
&= \tilde{f}\left[(0 \times x - y, x + 0 \times y)\right] \\
&= \tilde{f}\left[(-y, x)\right] \\
&= f(-y) + if(x) \\
&= -f(y) + if(x) = i^2 f(y) + if(x) \\
&= i\left(if(y) + f(x)\right) \\
&= i\tilde{f}\left[(x, y)\right]
\end{aligned}$$

Nous avons bien $\tilde{f}\left[i(x, y)\right] = i\tilde{f}\left[(x, y)\right]$

$\tilde{f}$ est donc bien $\mathbb{C}$-linéaire

Donc, $\tilde{f}$ définie pour tout $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$ par $\tilde{f}\left[(x, y)\right] = f(x) + if(y)$ est bien la seule application $\mathbb{C}$-linéaire de $E_{\mathbb{C}}$ dans V telle que $f = \tilde{f} \circ J$

Chapitre 4

Les matrices

W.I.P. : Work In Progress

Chapitre 5

Les déterminants

W.I.P. : Work In Progress

Chapitre 6

Les polynômes

Jusqu'ici, un polynôme est juste une fonction de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

L'objet de ce chapitre est de définir les polynômes, non comme une fonction, mais comme une expression formelle qui existe entant que telle
La construction des polynômes prend pour base l'ensemble des suites ; nous nous intéresserons aux suites nulles à partir d'un certain rang

6.1 Une construction des polynômes

6.1.1 Définition

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif et unitaire et on considère $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathcal{A}$
On appelle polynôme à une variable *(ou à une idéterminée)*, à coefficents dans $\mathcal{A}$ une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, nulle à partir d'un certain rang

Remarque 1 :

Les items de cette remarque, ont, eux aussi, beaucoup d'importance.

1. Dire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang, c'est dire qu'il existe $N_a \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n > N_a$, alors $a_n = 0$
   On peut donc aussi noter cette suite : $(a_0, a_1, \cdots, a_{N_a}, 0, 0, \ldots, 0, \cdots)$
2. Le terme a_0 est le terme constant, et les a_i sont les coefficients du polynôme.
3. Un polynôme est donc une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{A}$ dont un nombre fini de valeurs sont non nulles
4. De la définition 6.1.1, nous tirons la notion d'égalité de 2 polynômes :

$$((a_0, a_1, \cdots, a_i) = (b_0, b_1, \cdots, b_i)) \Longleftrightarrow ((\forall i \in \mathbb{N})\,(a_i = b_i))$$

5. L'ensemble des polynômes à coefficents dans $\mathcal{A}$ est noté $\mathcal{A}[X]$
6. Dans la plupart des cas, l'anneau $\mathcal{A}$ sera l'anneau des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, les corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

6.1.2 Addition de 2 polynômes

1. Soient P et Q 2 polynômes de $\mathcal{A}[X]$.
   Nous avons alors $P=(a_0,a_1,\cdots,a_n,0,0,\ldots,0,\cdots)$ et $Q=(b_0,b_1,\cdots,b_p,0,0,\ldots,0,\cdots)$.
   Nous définissons alors l'addition de P et Q par :
   $$P+Q=(a_0+b_0,a_1+b_1,\cdots,\cdots,0,0,\ldots,0,\cdots)$$
   De manière générale, si $P+Q=(c_0,c_1,\cdots,\cdots,0,0,\ldots,0,\cdots)$, alors $c_i=a_i+b_i$
2. Muni de cette addition, $\mathcal{A}[X]$ est un groupe commutatif
   $\rightarrow$ L'élément neutre est le polynôme $\mathcal{O}=(0,0,\cdots,\cdots,0,0,\ldots,0,\cdots)$ *(Le polynôme nul)*
   $\rightarrow$ L'opposé du polynôme $P=(a_0,a_1,\cdots,a_n,0,0,\ldots,0,\cdots)$ est le polynôme $-P=(-a_0,-a_1,\cdots,-a_n,0,0,\ldots,0,\cdots)$

Démonstration

La démonstration est simple et laissée au lecteur

6.1.3 Multiplication de 2 polynômes

Soient P et Q 2 polynômes de $\mathcal{A}[X]$.
Nous avons alors $P=(a_0,a_1,\cdots,a_n,0,0,\ldots,0,\cdots)$ et $Q=(b_0,b_1,\cdots,b_p,0,0,\ldots,0,\cdots)$.
Nous définissons alors la multiplication de P et Q par :

$$P\times Q=(c_0,c_1,\cdots,c_n,0,0,\ldots,0,\cdots) \text{ où } c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$$

Remarque 2 :

Le produit $c_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ est aussi appelé **produit de convolution** des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

6.1.4 Proposition

Soient P et Q 2 polynômes de $\mathcal{A}[X]$.
Nous avons alors $P=(a_0,a_1,\cdots,a_n,0,0,\ldots,0,\cdots)$ et $Q=(b_0,b_1,\cdots,b_p,0,0,\ldots,0,\cdots)$ 2 polynômes tels que si $i>n$, alors $a_i=0$ et si $j>p$, alors $b_j=0$
Nous appelons toujours $P\times Q=(c_0,c_1,\cdots,c_n,0,0,\ldots,0,\cdots)$
Alors, si $k>n+p$, alors $c_k=0$

Démonstration

Soit k entier tel que $k>n+p$. Alors, $c_k=\displaystyle\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}$

- Si $i\leqslant n$, alors $-i\geqslant -n$ et alors $k-i>n+p-n=p$. Comme $k-i>p$, alors $b_{k-i}=0$
- Si $k-i\leqslant p$, alors $i\geqslant k-p>n+p-p=n$ et donc $a_i=0$

Dans chaque cas, nous avons $c_k=0$

6.1.5 Théorème

$\mathcal{A}$ étant un anneau unitaire, $\mathcal{A}[X]$ muni de l'addition et de la multiplication est aussi un anneau unitaire commutatif.

Démonstration

1. On sait déjà que $\mathcal{A}[X]$, muni de l'addition est un groupe commutatif
2. L'élément $E = (1, 0, 0, \cdots, 0)$ est l'élément neutre pour la multiplication.
   Pour les calculs, nous notons $E = (e_1, e_2, e_0, \cdots, e_k, \cdots)$ avec $e_1 = 1$ et $e_k = 0$ si $k \geqslant 2$
   En effet, soit $P = (a_0, a_1, \cdots, a_n, 0, 0, \cdots)$ un polynôme de $\mathcal{A}[X]$. Alors, si nous posons $E \times P = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m, 0, 0, \cdots)$ le polynôme produit, nous avons :
   $$\alpha_k = \sum_{i=0}^{k} e_i a_{k-i} = e_0 a_k = a_k$$
   Et nous avons donc bien $E \times P = P$
3. Montrons que la multiplication est associative
   Soient $P = (a_0, a_1, \cdots, a_n, 0, 0, \ldots, 0, \cdots)$, $Q = (b_0, b_1, \cdots, b_p, 0, 0, \ldots, 0, \cdots)$ et $R = (c_0, c_1, \cdots, c_m, 0, 0, \ldots, 0, \cdots)$ 3 polynômes de $\mathcal{A}[X]$
   Nous écrirons :
   - ⋆ $Q \times R = \left([QR]_0, [QR]_1, \cdots, [QR]_q, 0, 0, \ldots, 0, \cdots\right)$ où $[QR]_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} b_i c_{k-i}$.
   - ⋆ Et $P \times Q = \left([PQ]_0, [PQ]_1, \cdots, [PQ]_q, 0, 0, \ldots, 0, \cdots\right)$ où $[PQ]_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

   De telle sorte que,β_l le terme d'ordre l de $P \times (Q \times R)$, alors
   $$\beta_l = \sum_{j=0}^{l} a_j [QR]_{l-j} = \sum_{j=0}^{l} a_j \left(\sum_{i=0}^{l-j} b_i c_{l-j-i}\right)$$
   Et si γ_l le terme d'ordre l de $(P \times Q) \times R$, alors
   $$\gamma_l = \sum_{j=0}^{l} [PQ]_j c_{l-j} = \sum_{j=0}^{l} c_{l-j} \left(\sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}\right)$$
   Ré-écrivons le terme β_l en tableau pour tenter de comprendre :
   $$\begin{array}{cccccc}
   a_0b_0c_l+ & a_0b_1c_{l-1}+ & a_0b_2c_{l-2}+ & a_0b_3c_{l-3}+ & \cdots+ & a_0b_lc_0 \\
   a_1b_1c_{l-1}+ & a_0b_1c_{l-2}+ & a_1b_2c_{l-3}+ & \cdots & \cdots+ & a_1b_{l-1}c_0 \\
   a_2b_0c_{l-2}+ & a_2b_1c_{l-3}+ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
   a_3b_0c_{l-3}+ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
   \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
   \end{array}$$
   D'où nous pouvons écrire :
   $$\beta_l = \sum_{x=0}^{l} c_{l-x} \left(\sum_{i=0}^{l} a_i b_{x-i}\right) = \sum_{x=0}^{l} [PQ]_x c_{l-x} = \gamma_l$$
   Et donc, nous avons bien $P \times (Q \times R) = (P \times Q) \times R$
   La multiplication est bien associative.
4. La multiplication est commutative
   Avec les mêmes notations que tout à l'heure, nous avons :
   $$[PQ]_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i = [QP]_k$$
   Il y a donc commutativité

$\mathcal{A}[X]$ muni de l'addition et de la multiplication est donc un anneau commutatif et unitaire.

6.1.6 Proposition

Soit $\mathcal{P}_0$ le sous ensemble de $\mathcal{A}[X]$ des polynômes $(a, 0, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, 0, \cdots)$ où $a \in \mathcal{A}$
Alors $\mathcal{A}$ et $\mathcal{P}_0$ sont des anneaux isomorphes et $\mathcal{P}_0$ est un sous anneau de $\mathcal{A}[X]$

Démonstration

Pour le démontrer, nous construisons une application $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P}_0$ naturellement définie par :

$$\begin{cases} \Phi : \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{P}_0 \\ \quad a & \longmapsto & \Phi(a) = (a, 0, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, 0, \cdots) \end{cases}$$

Clairement :
- ▷ Φ est bijective
- ▷ Pour tout $a \in \mathcal{A}$ et tout $b \in \mathcal{A}$:

$$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b) \text{ et } \Phi(a+b) = \Phi(a) + \Phi(b)$$

Et donc, $\mathcal{P}_0$ est un sous anneau de $\mathcal{A}[X]$

Remarque 3 :

1. On identifie l'élément $a \in \mathcal{A}$ au polynôme $(a, 0, 0, 0, 0, \cdots, 0, 0, 0, \cdots) \in \mathcal{A}[X]$
2. Le polynôme nul et le polynôme unité seront donc notés respectivement 1 et 0.
3. Il est possible de définir sur $\mathcal{A}[X]$une multiplication externe :

$$(\forall \lambda \in \mathcal{A})\,(\lambda P = \lambda(a_0, a_1, \cdots, a_n, 0, 0, \ldots, 0, \cdots) = (\lambda a_0, \lambda a_1, \cdots, \lambda a_n, 0, 0, \ldots, 0, \cdots))$$

Nous avons, et cela se vérifie très facilement, pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$ et tout $b \in \mathcal{A}$, tout $P \in \mathcal{A}[X]$ et tout $P \in \mathcal{A}[X]$:

$$\begin{array}{ll} \lambda(\mu P) = (\lambda\mu)P & 1 \times P = P \\ (\lambda + \mu)P = \lambda P + \mu P & \lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q \end{array}$$

6.1.7 Notion d'indéterminée

On note, comme toujours $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker, c'est à dire le symbole défini par

$$\delta_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j \qquad \delta_{i,i} = 1$$

1. On considère les suites de polynômes $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$e_k = (\delta_{0,k}, \delta_{1,k}, \delta_{2,k}, \cdots, \delta_{k,k}, \cdots) = (\delta_{i,k})_{i\in\mathbb{N}}$$

   C'est à dire des suites nulles partout sauf au rang k qui vaut 1
2. La suite particulière $e_1 = (\delta_{i,1})_{i\in\mathbb{N}} = (0, 1, 0, 0 \cdots, 0) = X$ est appelée indéterminée.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous notons $X^k = \underbrace{X \times X \times X \times \cdots \times X}_{k \text{ fois}}$

   Alors $X^k = e_k$; en particulier $X^0 = e_0 = 1$
4. Tout polynôme $P = (a_0, a_1, \cdots, a_n, 0, 0, \ldots, 0, \cdots)$ peut s'écrire

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$$

5. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et tout nombre $a_k \in \mathcal{A}$ $(k \leqslant n)$, la relation

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k = 0$$

   Entraîne, pour tout $k \leqslant n$, $a_k = 0$
6. Tout polynôme $P \in \mathcal{A}[X]$ s'écrit de manière unique $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$

Démonstration

1. Il est évident que tout polynôme $P = (a_0, a_1, \cdots, a_n, 0, 0, \ldots, 0, \cdots)$ de $\mathcal{A}[X]$ peut s'écrire

$$P = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n = \sum_{k=0}^{n} a_ke_k$$

2. Nous allons démontrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $X^k = e_k$
   - ▷ C'est vrai pour $k = 0$ et $k = 1$
   - ▷ Supposons maintenant que $X^k = e_k$
   - ▷ Démontrons maintenant que $X^{k+1} = e_{k+1}$
     Par définition, $X^{k+1} = X^k \times X$ et si $X^{k+1} = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p, 0, 0, \ldots, 0, \cdots)$, nous avons :

$$\alpha_p = \sum_{i=0}^{p} \delta_{i,k}\delta_{p-i,1}$$

     D'après 6.1.4, si $p > k+1 \iff p \geqslant k+2$, alors $\alpha_p = 0$
     Si $p < k$, alors, comme $i \leqslant p < k$, $\delta_{i,k} = 0$ et $\alpha_p = 0$

     Si $p = k$, alors $\alpha_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \delta_{i,k}\delta_{k-i,1} = \delta_{k,k}\delta_{0,1} = 0$

     Et, si $p = k+1$, alors $\alpha_{k+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k+1} \delta_{i,k}\delta_{k+1-i,1} = \delta_{k,k}\delta_{1,1} = 1$

     Et nous avons bien $X^{k+1} = e_{k+1}$

   Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $X^k = e_k$

3. Et donc, d'après le point 1, l'identité

$$P = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k$$

peut aussi s'écrire

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

4. Supposons, maintenant, que $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = 0$.

   Si nous revenons à la définition, ceci signifie que nous avons :

$$(a_0, a_1, \cdots, a_n, 0, 0, \ldots, 0, \cdots) = (0, 0, \cdots, 0, 0, 0, \ldots, 0, \cdots)$$

   qui est vraie, si et seulement si, pour tout $k \leqslant n$, $a_k = 0$
5. Supposons, maintenant, qu'il y ait 2 écritures de P :

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots + b_n X^n$$

   Alors :

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots + b_n X^n$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) X + (a_2 - b_2) X^2 + \cdots + (a_n - b_n) X^n = 0$$

   D'où nous déduisons $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \cdots a_n = b_n$.
   Il y a donc unicité de l'écriture d'un polynôme

Remarque 4 :

1. X est une idéterminée ; on aurait pu choisir Y comme nom de l'indéterminée !!

   Pour « pousser un peu », nous aurions très bien pu choisir comme indéterminée $\heartsuit$, $\looparrowright$ ou encore *Jules* et nous aurions alors écrit $\mathcal{A}[\heartsuit]$, $\mathcal{A}[\looparrowright]$ ou encore $\mathcal{A}[Jules]$.
   Ainsi, le même polynôme P sécrit dans $\mathbb{Z}[X]$ $P = X^2 + X + 1$ et dans $\mathbb{Z}[\heartsuit]$, $P = \heartsuit^2 + \heartsuit + 1$
   L'usage veut que nous utilisions X comme indéterminée [1]

   L'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathcal{A}$ est noté $\mathcal{A}[X]$. D'après la remarque précédente, on voit que $\mathcal{A}[X]$ et $\mathcal{A}[Y]$ sont isomorphes.
2. $\mathcal{A}$ peut très bien être un corps $\mathbb{K}$, car un corps est un anneau particulier.

   Exemples :
   - $P = X^2 + X + 1$ est dans $\mathbb{Z}[X]$, mais aussi dans $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ ou encore $\mathbb{C}[X]$
   - $Q = (1+i) X^3 - 2iX + 1$ est dans $\mathbb{C}[X]$, mais pas dans $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ ou $\mathbb{Z}[X]$
   - $R = X^4 + 1$ est aussi dans $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$
3. $\mathcal{A}[X]$ étant un anneau, il nous est possible de considérer $\mathcal{A}[X][Y]$ polynôme d'indéterminée Y et de coefficients dans $\mathcal{A}[X]$. Nous notons $\mathcal{A}[X][Y] = \mathcal{A}[X, Y]$

1. Et ce n'est pas plus mal, bien au contraire !!

6.1.8 Nombre algébrique, nombre transcendant

Soit $\mathcal{A}$ un anneau unitaire et commutatif et $\mathcal{L}$ un anneau commutatif et unitaire tel que $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$
Soit $\alpha \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{A}$, c'est à dire tel que $\alpha \in \mathcal{L}$ et $\alpha \notin \mathcal{A}$
Nous appelons $\mathcal{A}[\alpha]$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}$ définis par :

$$\mathcal{A}[\alpha] = \left\{ y \in \mathcal{L} \text{ tels que } y = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k \text{ où } a_k \in \mathcal{A} \text{ pour } k = 0, \dots n \right\}$$

$\mathcal{A}[\alpha]$ est aussi un anneau commutatif et unitaire.

1. S'il existe une relation $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n = 0$, avec, pour tout $k = 0, \cdots, n$, $a_k \in \mathcal{A}$, on dit que α est algébrique sur $\mathcal{A}$
2. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout n-uplet $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathcal{A}^n$, l'égalité $a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_n\alpha^n = 0$ entraîne $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, on dit que α est transcendant sur $\mathcal{A}$

Remarque 5 :

1. Si $\mathcal{A}$ est un anneau et $\mathcal{L}$ un anneau tel que $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$, on dit que $\mathcal{L}$ est un **sur-anneau** de $\mathcal{A}$
2. Il n'est pas nécessaire que $\mathcal{L}$ soit un anneau commutatif et unitaire ; il suffit juste que α commute avec avec tous les éléments de $\mathcal{A}$. Si je l'ai écrit dans la définition, c'est que ce sera le cas le plus fréquent.
3. La démonstration du fait que $\mathcal{A}[\alpha]$ est aussi un anneau commutatif et unitaire est élémentaire.
4. Si α est transcendant, alors les anneaux $\mathcal{A}[\alpha]$ et $\mathcal{A}[X]$ sont isomorphes

Exemple 1 :

1. Le nombre $\sqrt{2}$ est algébrique sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$, puisque si $\alpha = \sqrt{2}$, alors $\alpha^2 - 2 = 0$ et le polynôme $P = X^2 - 2$ est un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Q}[X]$
2. De même le nombre complexe i est algébrique sur $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, puisque si $\alpha = i$, alors $\alpha^2 + 1 = 0$ et le polynôme $Q = X^2 + 1$ est un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

6.2 Degré d'un polynôme

6.2.1 Définition

$\mathcal{A}$ est un anneau commutatif unitaire.

1. Soit P un polynôme de $\mathcal{A}[X]$, c'est à dire que nous écrivons

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

   avec, pour tout $k = 0, \dots, n$, $a_k \in \mathcal{A}$.
   On appelle **degré de** P le plus grand entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$
   Nous notons alors $n = \deg P$
2. a_n est le coefficient dominant de P. Si $a_n = 1$, alors le polynôme est dit unitaire.

Remarque 6 :

1. Le polynôme nul n'a pas de degré
2. Les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants.
3. Les polynômes $P = a_nX^n$ avec $a_n \neq 0$ sont appelés **monomes** de degré n

6.2.2 Proposition

$\mathcal{A}$ est un anneau commutatif unitaire ; P et Q sont 2 polynômes de $\mathcal{A}[X]$

1. Si $\deg P \neq \deg Q$, alors $P+Q \neq 0$ et $\deg(P+Q) = \sup(\deg P, \deg Q)$
2. Si $\deg P = \deg Q$ et si $P+Q \neq 0$ alors $\deg(P+Q) \leqslant \deg P$
3. De manière plus générale, $\deg(P+Q) \leqslant \sup(\deg P, \deg Q)$
4. Si, de plus, $\mathcal{A}$ est un anneau intègre, $\mathcal{A}[X]$ est aussi intègre, et si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, alors
$$\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$$

Démonstration

1. Supposons $\deg P \neq \deg Q$, et posons, pour fixer les idées, $n = \deg P$ et $p = \deg Q$ avec $n > p$.
Alors, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} b_k X^k$ avec $b_p \neq 0$. Alors :
$$P+Q = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{p} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{p} (a_k + b_k) X^k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k X^k$$
Comme $a_n \neq 0$, nous avons bien $P+Q \neq 0$ et $\deg(P+Q) = n$.
Si nous avions pris $p > n$, nous aurions eu le même résultat. Donc $\deg(P+Q) = \sup(\deg P, \deg Q)$
2. Supposons $\deg P = \deg Q$, et $P+Q \neq 0$.
Posons, toujours pour fixer les idées, $n = \deg P = \deg Q$.
Si $P+Q \neq 0 \Longleftrightarrow P \neq -Q$, alors il existe k_0, avec $0 \leqslant k_0 \leqslant n$, tels que $b_{k_0} \neq -a_{k_0}$
$$P+Q = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{k_0-1} (a_k + b_k) X^k + (a_{k_0} + b_{k_0}) X^{k_0} + \sum_{k_0+1}^{n} (a_k + b_k) X^k$$
Ainsi, si $a_n + b_n \neq 0$, alors $\deg(P+Q) = \deg P$ et si $a_n + b_n = 0$, alors $\deg(P+Q) < \deg P$.
D'où le résultat
3. Il est clair, qu'en synthèse, nous avons $\deg(P+Q) \leqslant \sup(\deg P, \deg Q)$
4. Soient donc P et Q 2 polynômes de $\mathcal{A}[X]$.
On pose donc $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} b_k X^k$ avec $b_p \neq 0$. Alors :
$$PQ = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{p} b_k X^k\right) = a_n b_p X^{n+p} + \cdots + \alpha_i X^i + \cdots + a_0 b_0$$
Où $\alpha_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$, avec, en particulier $\alpha_{p+n} = a_n b_p$.
Comme $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$, que l'anneau $\mathcal{A}$ est un anneau intègre, alors $\alpha_{p+n} = a_n b_p \neq 0$ et donc $\deg(P \times Q) = n + p$, c'est à dire $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$

6.2.3 Corollaire

$\mathcal{A}$ est un anneau commutatif unitaire et intègre. Les seuls éléments inversibles de $\mathcal{A}[X]$ sont ceux de $\mathcal{A}$

Démonstration

Soient P et Q 2 polynômes de $\mathcal{A}[X]$ inverses l'un de l'autre, c'est à dire tels que $PQ = 1$. Alors :
$$\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q = \deg(1) = 0$$
Comme $\deg P \in \mathbb{N}$ et $\deg Q \in \mathbb{N}$, de l'égalité $\deg P + \deg Q = 0$, nous déduisons $\deg P = \deg Q = 0$, c'est à dire que $P \in \mathcal{A}$ et $Q \in \mathcal{A}$ et sont donc des éléments inversibles de $\mathcal{A}$

Remarque 7 :

1. Il était tentant, à l'image des polynômes constants non nuls, de donner au polynôme 0 un degré nul. Nous aurions alors eu, pour tout $P \in \mathcal{A}[X]$:

$$\deg 0 = \deg (P \times 0) = \deg P + \deg 0 \iff \deg P = 0$$

Ainsi, tout polynôme $P \in \mathcal{A}[X]$ aurait eu un degré nul ; ce qui est impossible.
Le polynôme nul n'a donc pas de degré.

2. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau possédant de véritables diviseurs de 0, donc non intègre. Intéressons nous à l'anneau de polynômes $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[X]$
   - ▷ Soit $P = 4X^2 - 1$ et $Q = 3X^3 + 1$. Alors :

$$\begin{aligned} PQ = \left(4X^2 - 1\right)\left(3X^3 + 1\right) &= 12X^5 + 4X^2 - 3X^3 - 1 \\ &= -3X^3 + 4X^2 - 1 = 3X^3 + 4X^2 + 5 \end{aligned}$$

   Nous avons donc $\deg (P \times Q) = 3 < \deg P + \deg Q$
   Nous soulignons, par cet exemple, l'importance de l'intégrité de l'anneau $\mathcal{A}$
   - ▷ Les éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[X]$ sont ceux de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$, c'est à dire 1 et 5

Exercice 1 :

Calculer, dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$, l'expression $f^3 + g^3 + h^3$ où

⋆ $f = X^2 + 2X$ ⋆ $g = 2X^2 + 1$ ⋆ $h = X + 2$

6.2.4 Fonction polynôme : définition

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire.
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathcal{A}[X]$.
À ce polynôme P, nous faisons correspondre une fonction $\widetilde{P} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{P} : \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ x & \longmapsto & \widetilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array} \right.$$

Cette fonction $\widetilde{P}$ est appelée **fonction polynôme** associée au polynôme P

Remarque 8 :

1. L'ensemble des fonctions polynômes de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ que nous pouvons noter $\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ est un sous anneau de $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathcal{A}^{\mathcal{A}}$ des applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$
2. Pour tout polynôme P et Q de $\mathcal{A}[X]$, nous avons :

   ▷ $\widetilde{P + Q} = \widetilde{P} + \widetilde{Q}$ ▷ $\widetilde{P \times Q} = \widetilde{P} \times \widetilde{Q}$ ▷ Pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$, $\widetilde{\lambda P} = \lambda \widetilde{P}$

   La transformation :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{A}[X] & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \\ P & \longmapsto & \Phi(P) = \widetilde{P} \end{array} \right.$$

   est un homomorphisme d'anneau
3. On appelle valeur du polynôme P en $\alpha \in \mathcal{A}$ l'élément $\widetilde{P}(\alpha) \in \mathcal{A}$ défini par :

$$\widetilde{P}(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$$

4. Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, nous avons donc :

- ▷ $\widetilde{P+Q}(\alpha) = \widetilde{P}(\alpha) + \widetilde{Q}(\alpha)$
- ▷ $\widetilde{P \times Q}(\alpha) = \widetilde{P}(\alpha) \times \widetilde{Q}(\alpha)$
- ▷ Pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$, $\widetilde{\lambda P}(\alpha) = \lambda \widetilde{P}(\alpha)$

5. **Abus d'écriture :** on fait un abus d'écriture en écrivant P au lieu de $\widetilde{P}$; c'est pourquoi, au lieu d'écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on écrit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

   En jouant sur la forme des variables, on écrira plutôt la fonction polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
6. **Abus de langage :** aux polynômes que nous identifions aux éléments de $\mathcal{A}$ sont associées les fonctions constantes de $\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$; d'où le nom de polynôme constant donnés aux polynômes $P = \lambda$ avec $\lambda \in \mathcal{A}$
7. Soit $\mathcal{L}$ un sur-anneau de $\mathcal{A}$ (cf page 179).

   Il est possible de prolonger $\widetilde{P}$ de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$, car si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_k \in \mathcal{A}$, nous pouvons poser, pour tout $l \in \mathcal{L}$: $\widetilde{P}(l) = \sum_{k=0}^{n} a_k l^k$ et nous avons, bien sûr, $\widetilde{P}(l) \in \mathcal{L}$

   Par exemple, nous avons $P = X^2 + X + 1$ élément de $\mathbb{R}[X]$, mais aussi élément de $\mathbb{C}[X]$ et donc, nous pouvons calculer $\widetilde{P}(i) = i$ ou $\widetilde{P}(j) = \widetilde{P}(\bar{j}) = 0$

Exercice 2 :

Soient P et Q 2 polynômes de $\mathcal{A}[X]$. Démontrer qu'en général $P(Q) \neq Q(P)$

6.3 Division euclidienne des polynômes

6.3.1 Théorème

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $B = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathcal{A}[X]$ non nul dont le coefficient dominant est inversible.

Alors, pour tout polynôme $A \in \mathcal{A}[X]$, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) de $\mathcal{A}[X]$ tel que

$$A = BQ + R \text{ avec } \deg R < \deg B$$

Démonstration

1. Démonstration de l'existence

   Nous posons :

$$A = \alpha_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \alpha_0 = \alpha_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k \text{ avec } \alpha_n \neq 0$$

$$B = \beta_m X^m + \beta_{m-1} X^{m-1} + \cdots + \beta_0 = \beta_m X^m + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k X^k \text{ avec } \beta_m \text{ inversible}$$

   Nous avons donc $\deg A = n$ et $\deg B = m$

   $\Longrightarrow$ Si $\deg A < \deg B \Longleftrightarrow n < m$, alors $A = 0 \times B + A$ et, si nous posons $Q = 0$ et $A = R$, nous en avons prouvé l'existence

   $\Longrightarrow$ Supposons $\deg A \geqslant \deg B \Longleftrightarrow n \geqslant m$.

   Comme B n'est pas le polynôme nul, alors $\deg B \geqslant 0$ et comme nous avons $\deg A \geqslant \deg B \geqslant 0$ ceci veut dire que A n'est pas le polynôme nul.

⋆ Considérons le monôme $Q_1 = \alpha_n \left(\beta_m\right)^{-1} X^{n-m}$. Alors :

$$\begin{aligned} Q_1 B = & \ \alpha_n \left(\beta_m\right)^{-1} X^{n-m} \left(\beta_m X^m + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k X^k\right) \\ = & \ \alpha_n X^n + \alpha_n \left(\beta_m\right)^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k X^{k+n-m} \\ = & \ \alpha_n X^n + \alpha_n \left(\beta_m\right)^{-1} \sum_{k=n-m}^{n-1} \beta_{k+m-n} X^k \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} A - Q_1 B = & \ \alpha_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k - \alpha_n X^n - \alpha_n \left(\beta_m\right)^{-1} \sum_{k=n-m}^{n-1} \beta_{k+m-n} X^k \\ = & \ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k - \alpha_n \left(\beta_m\right)^{-1} \sum_{k=n-m}^{n-1} \beta_{k+m-n} X^k \\ = & \ \left(\alpha_{n-1} - \alpha_n \left(\beta_m\right)^{-1} \beta_{m-1}\right) X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-m-1} \alpha_k X^k + \sum_{k=n-m}^{n-2} \left(\alpha_k - \alpha_n \left(\beta_m\right)^{-1} \beta_{k+m-n}\right) X^k \end{aligned}$$

⋆ En posant $R_1 = A - Q_1 B$, nous avons $\deg R_1 \leqslant n-1 < \deg A$
Si $\deg R_1 < \deg B$, alors nous nous arrêtons et nos avons prouvé l'existence.

⋆ Si $\deg R_1 \geqslant \deg B$, nous recommençons la démarche et considérons le monôme

$$Q_2 = \left(\alpha_{n-1} - \alpha_n \left(\beta_m\right)^{-1} \beta_{m-1}\right) \left(\beta_m\right)^{-1} X^{n-1-m}$$

Nous avons alors :

$$Q_2 B = \left(\alpha_{n-1} - \alpha_n \left(\beta_m\right)^{-1} \beta_{m-1}\right) X^{n-1} + \left(\alpha_{n-1} - \alpha_n \left(\beta_m\right)^{-1} \beta_{m-1}\right) \left(\beta_m\right)^{-1} X^{n-1-m} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \beta_k X^k\right)$$

En écrivant $R_2 = R_1 - Q_2 B$, nous avons, à nouveau, $\deg R_2 \leqslant n-2 < \deg R_1 < \deg A$

⋆ En itérant le processus, nous arrivons alors à une égalité de la forme $R_n = R_{n-1} - BQ_n$ avec $\deg R_n < \deg R_{n-1} < \ldots < \deg R_1 < \deg A$
Nous avons affaire, là, à une suite décroissante d'entiers positifs.
Il va donc exister un en tier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\deg R_{n_0} < \deg B$
Et là, nous nous arrêtons ! !

$\Longrightarrow$ A ce moment là, nous avons :

$$\left\{ \begin{aligned} R_1 = & \ A - BQ_1 \\ R_2 = & \ R_1 - BQ_2 \\ R_3 = & \ R_2 - BQ_3 \\ \vdots \ & \ \vdots \\ R_{n_0-1} = & \ R_{n_0-2} - BQ_{n_0-1} \\ R_{n_0} = & \ R_{n_0-1} - BQ_{n_0} \end{aligned} \right.$$

En additionnant, nous avons :

$$\left(R_1 + R_2 + \cdots + R_{n_0}\right) = \left(A + R_1 + R_2 + \cdots + R_{n_0-1}\right) - B\left(Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{n_0}\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$R_{n_0} = A - B\left(Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{n_0-1} + Q_{n_0}\right)$$

C'est à dire $A = B\left(Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{n_0-1} + Q_{n_0}\right) + R_{n_0}$ où $\deg R_{n_0} < \deg B$
En posant $Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{n_0-1} + Q_{n_0}$ et $R = R_{n_0}$, nous obtenons $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$

Nous avons donc prouvé l'existence d'un couple de polynômes (Q, R) de $\mathcal{A}[X]$ tel que $A = BQ+R$ avec $\deg R < \deg B$

2. Démonstration de l'unicité de ce couple
   Comme toujours dans ces cas, nous supposons qu'il y en a 2
   $$A = BQ_1 + R_1 \text{ avec } \deg R_1 < \deg B \text{ et } A = BQ_2 + R_2 \text{ avec } \deg R_2 < \deg B$$
   Alors, nous avons :
   $$A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2 \Longleftrightarrow BQ_1 - BQ_2 = R_2 - R_1 \Longleftrightarrow B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$$
   Donc $\deg(B(Q_1 - Q_2)) = \deg B + \deg(Q_1 - Q_2) = \deg(R_2 - R_1)$.
   Si $Q_1 - Q_2 \neq 0$, alors $\deg(Q_1 - Q_2) \geqslant 0$ et $\deg(R_2 - R_1) \geqslant \deg B$.
   Or, $\deg(R_2 - R_1) \leqslant \sup(\deg R_2, \deg R_1) < \deg B$. Il y a donc contradiction.
   Donc, $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$
   Il y a donc unicité du couple (Q, R)

6.3.2 Corollaire

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire et intègre.
Le reste de la division d'un polynôme $P \in \mathcal{A}[X]$ par un polynôme unitaire du premier degré $g = X - c$ est égal à $\widetilde{P}(c)$

Démonstration

D'après l'algorithme de division vu dans le théorème 6.3.1, nous avons $P = Q(X - c) + R$ avec $\deg R < \deg(X - c)$, c'est à dire que $\deg R = 0$.
R est donc une constante, élément de $\mathcal{A}$.
Nous avons $\widetilde{P}(c) = \widetilde{Q}(c)(c - c) + R = R$. Donc, $R = \widetilde{P}(c)$.
Ce que nous voulions.

Remarque 9 :

Très souvent, maintenant, nous oublierons le tilde et écrirons $\widetilde{P}(c) = P(c)$ pour $c \in \mathcal{A}$

6.3.3 Corollaire : division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ où $\mathbb{K}$ est un corps

Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif et A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec B non nul
Alors, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) de $\mathbb{K}[X]$ tel que
$$A = BQ + R \text{ avec } \deg R < \deg B$$

Démonstration

$\mathbb{K}$ étant un anneau particulier, le théorème 6.3.1 doit pouvoir s'appliquer. Il s'applique d'autant mieux que tout élément non nul d'un corps $\mathbb{K}$ est inversible.
Ainsi, si $\deg B = n$, alors $B = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ et donc inversible. Le théorème 6.3.1s'applique donc.

Exercice 3 :

Effectuer, dans $\mathbb{C}[X]$, la division euclidienne des polynômes $f \in \mathbb{C}[X]$ et $g \in \mathbb{C}[X]$ où :
1. $f = 7X^4 - X^3 + 2X - 4$ et $g = 2X^2 - 3X - 5$
2. $f = X^8 - 1$ et $g = X^3 - 1$
3. $f = 2X^5 - 5X^3 - 8X$ et $g = X + 3$
4. $f = 4X^3 + X^2$ et $g = X + (1 + i)$

Exercice 4 :

Est-il possible d'effectuer la division euclidienne de f par g, avec :

$$f = 6X^3 + X^2 + 7X \qquad g = 3X^2 + 2X - 1$$

dans $\mathbb{Z}[X]$?

Exercice 5 :

Soient $\mathbb{K}$ un corps et $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq b$. Soit aussi $P \in \mathbb{K}[X]$.
Exprimer le reste de la division de P par le polynôme $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$

6.4 Divisibilité des polynômes

6.4.1 Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.
On dit qu'un polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ est **divisible** par $B \in \mathbb{K}[X]$, ou que B divise A ou que B est un diviseur de A ou que A est **un multiple** de B s'il existe $C \in \mathcal{A}[X]$ tel que $A = BC$
On note $B \div A$

Remarque 10 :

1. L'ensemble $\{BQ \text{ où } Q \in \mathbb{K}[X]\}$ est l'ensemble des multiples de B. On le note $B \times \mathbb{K}[X]$
2. Ainsi, $B \div A \iff A \in B \times \mathbb{K}[X]$

Exemple 2 :

1. Tout polynôme divise 0. En effet, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $0 = 0 \times P$; donc $P \div 0$ et 0 ne divise que le polynome nul ; tout ceci présente peu d'intérêt
2. Si $\mathbb{K}$ est un corps et $A \in \mathbb{K}[X]$, alors, tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$ divise tout élément $A \in \mathbb{K}[X]$ puisque $A = \lambda \times \left(\dfrac{1}{\lambda} A\right)$
3. Nous avons $\left(X^2 + 1\right) \div \left(X^3 - X^2 + X - 1\right)$ puisque $\left(X^3 - X^2 + X - 1\right) = (X - 1)\left(X^2 + 1\right)$

6.4.2 Proposition

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.

1. La relation de divisibilité est **réflexive**, c'est à dire que pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, $A \div A$
2. La relation de divisibilité est **transitive**, c'est à dire que pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, tout $B \in \mathbb{K}[X]$ et tout $C \in \mathbb{K}[X]$, si $A \div B$ et $B \div C$ alors $A \div C$

Démonstration

La démonstration est simple et laissée au lecteur.

6.4.3 Polynômes associés

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.
Si $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ se divisent l'un l'autre, c'est à dire si $A \div B$ et $B \div A$ alors $A = \lambda B$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.
On dit que A et B sont des polynômes associés

Démonstration

Effectivement, si $A = BC$ et si $B = AC'$, alors $\deg A = \deg B + \deg C$ et $\deg B = \deg A + \deg C'$, c'est à dire que nous avons

$$\deg A = (\deg A + \deg C') + \deg C \Longleftrightarrow \deg C' + \deg C = 0$$

Comme nous sommes dans $\mathbb{N}$, alors $\deg C' = \deg C = 0$, c'est à dire que C et C' sont des polynômes constants.

Exemple 3 :

Si $\mathbb{K}$ est un corps, alors, dans $\mathbb{K}[X]$, tout polynôme non nul est associé à un polynôme unitaire et un seul.

En effet, soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$, alors $P = a_n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} X^k \right) = a_n \left(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} X^k \right)$.

En posant $P' = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} X^k$, P' est unitaire et $P = a_n P' \Longleftrightarrow P' = \frac{1}{a_n} P$, et P et P' sont associés.

6.4.4 Premières propriétés de la divisibilité

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.

1. Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, tout $B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$, si $B \div A$, alors $\deg B \leqslant \deg A$
2. Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, tout $B \in \mathbb{K}[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, nous avons :

$$A \div B \Longleftrightarrow (\lambda A) \div B$$

3. Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, tout $B \in \mathbb{K}[X]$ et tout $C \in \mathbb{K}[X]$, $B \div A \Longrightarrow B \div AC$
4. Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, tout $B \in \mathbb{K}[X]$ et tout $C \in \mathbb{K}[X]$ $(A \div B \text{ et } A \div C) \Longrightarrow A \div (B + C)$

Démonstration

La démonstration est simple et peut être vue comme un exercice corrigé

1. Si B divise A et si $B \neq 0$, alors $A = BC$ et, parce que $\mathbb{K}$ est intègre, $\deg A = \deg B + \deg C$ et donc $\deg B \leqslant \deg A$
2. Supposons $A \div B$.

   Il existe donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = AQ$ et donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, nous avons $B = (\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda} Q\right)$.

   Nous avons bien $(\lambda A) \div B$
3. Si $B \div A$, il existe alors $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$ et donc, pour tout $C \in \mathbb{K}[X]$, $AC = BQC \Longleftrightarrow AC = B(QC)$, et donc $B \div AC$
4. Si $A \div B$ et $A \div C$, alors il existe $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ et $Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $B = Q_1 A$ et $C = Q_2 A$ et donc $B + C = Q_1 A + Q_2 A = A(Q_1 + Q_2)$ et donc $A \div (B + C)$

Remarque 11 :

On ne peut que constater une analogie avec la division dans l'ensemble $\mathbb{Z}$

6.4.5 Définition

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire et $P \in \mathcal{A}[X]$
Un élément $c \in \mathcal{A}$ est appelé <u>zéro</u> ou <u>racine</u> du polynôme P si et seulement si $\widetilde{P}(c) = 0$

Remarque 12 :

1. La fonction polynôme $\widetilde{P}$ a été définie en 6.2.4
2. Pour plus de généralité, la définition a été donnée dans un anneau $\mathcal{A}$ et son anneau de polynôme $\mathcal{A}[X]$.
3. Soit $\mathbb{L}$ un corps tel que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$.
   Si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors, nous avons aussi $P \in \mathbb{L}[X]$, et si $\alpha \in \mathbb{L}$, nous pouvons avoir $P(\alpha) = 0$

   Exemple :
   Le polynôme $X^2 - 2$ n'a aucune racine dans $\mathbb{Q}$, mais en a 2 dans $\mathbb{R}$
   De même, le polynôme $X^2 + 1$ n'a aucune racine dans $\mathbb{R}$, mais en a 2 dans $\mathbb{C}$

Exercice 6 :

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire intègre et $P \in \mathcal{A}[X]$. Soient $f \in \mathcal{A}[X]$ et $g \in \mathcal{A}[X]$ tels que $P = fg$, c'est à dire tels que P soit le produit des 2 polynômes f et g. Démontrer que $\alpha \in \mathcal{A}$ est une racine de P si et seulement si α est une racine de f ou de g *Cet exercice ne fait pas l'objet d'une correction*

6.4.6 Théorème

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire
$P \in \mathcal{A}[X]$ est divisible par le polynôme unitaire du premier degré $(X - c)$ si et seulement si, c est une racine *(ou zéro)* de P

Démonstration

1. Supposons que c soit un zéro de P et faisons la division euclidienne de P par $(X - c)$. Nous avons alors :
$$P(X) = Q(X)(X - c) + R(X) \text{ avec } \deg R < 1$$
   C'est à dire $\deg R = 0$ et donc R est constant. Alors $P(c) = R = 0$, ce qui veut dire que $P(X) = Q(X)(X - c)$ et donc P est divisible par $(X - c)$
2. Réciproquement, il est bien sûr évident que si P est divisible par $(X - c)$, alors $P(c) = 0$

Remarque 13 :

1. Remarquons que nous venons de faire un abus de langage en identifiant $P(c)$ et $\widetilde{P}(c)$, ce que nous ferons volontiers dorénavant.
2. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ a une racine dans $\mathbb{K}$, alors P est réductible dans $\mathbb{K}[X]$, mais la réciproque est fausse :

   Exemple :
   Le polynôme $Q(X) = \left(X^2 + 1\right)^2$ est réductible dans $\mathbb{R}[X]$, puisque $Q(X) = \left(X^2 + 1\right)\left(X^2 + 1\right)$, mais n'a aucune racine dans $\mathbb{R}$

Exercice 7 :

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient

- $A = X^2 - 2X\cos\theta + 1$,
- $P_n = X^n \sin\theta - X\sin n\theta + \sin(n-1)\theta$
- $Q_n = X^{n+1}\cos(n-1)\theta - X^n\cos n\theta - X\cos\theta + 1$

Démontrer que A divise P_n et que A divise Q_n

Exercice 8 :

1. Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $A \in \mathbb{K}[X]$. Nous désignons par Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.
   Montrer que les racines communes à A et B sont les racines communes à B et R
2. Résoudre les équations $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ avec

$$A(X) = X^4 - 3X^3 - 7X^2 + 27X - 18 \text{ et } B(X) = X^3 - 12X^2 + 47X - 60$$

   sachant que A et B ont des racines communes

6.4.7 Théorème

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire
Soient $P \in \mathcal{A}[X]$, $\alpha \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{N}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. P est divisible par $(X - \alpha)^n$, mais pas par $(X - \alpha)^{n+1}$
2. $P(X) = (X - \alpha)^n Q(X)$ où $Q \in \mathcal{A}[X]$ est un polynôme tel que $Q(\alpha) \neq 0$

On dit alors que α est une racine d'ordre n ou de multiplicité n

Démonstration

1. Supposons P est divisible par $(X - \alpha)^n$, mais pas par $(X - \alpha)^{n+1}$
   Alors, $P(X) = (X - \alpha)^n Q(X)$.
   Si $Q(\alpha) = 0$, alors Q est divisible par $(X - \alpha)$ et alors $Q(X) = (X - \alpha) Q_1(X)$, ce qui veut dire que $P(X) = (X - \alpha)^{n+1} Q_1(X)$.
   Il y a donc contradiction et $Q(\alpha) \neq 0$
2. Supposons $P(X) = (X - \alpha)^n Q(X)$ où $Q \in \mathcal{A}[X]$ est un polynôme tel que $Q(\alpha) \neq 0$
   Nous allons démontrer que P n'est pas divisible par $(X - \alpha)^{n+1}$.
   Supposons le contraire, c'est à dire que $P(X) = (X - \alpha)^{n+1} Q_1(X)$; alors, nous avons $Q(X) = (X - \alpha) Q_1(X)$ et donc $Q(\alpha) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

6.4.8 Corollaire

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire et $P \in \mathcal{A}[X]$
Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ p racines distinctes de P d'ordre respectif $n_1, \ldots, n_p$.
Alors, $P(X) = (X - \alpha_1)^{n_1} (X - \alpha_2)^{n_2} \cdots (X - \alpha_p)^{n_p} Q(X)$ où $Q \in \mathcal{A}[X]$ est un polynôme n'addmettant pas pour racines $x_1, x_2, \ldots, x_p$

Démonstration

Elle est évidente

Exercice 9 :

Trouver $a \in \mathbb{C}$ pour que $P(X) = X^5 + aX^4 + aX + 1$ admette 1 comme racine double

6.4.9 Corollaire

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire et intègre
Alors un polynôme $P \in \mathcal{A}[X]$ de degré n a au plus n racines dans $\mathcal{A}$

Démonstration

Nous allons faire cette démonstration de deux façons.

1. Pour la première démonstration, nous supposons que P admette $(n+1)$ racines $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Alors $P(X) = (X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_n)(X - x_{n+1}) Q(X)$, et donc, $\deg P \geqslant n+1$; il y a une contradiction et donc P admet au plus n racines dans $\mathcal{A}$
2. Nous faisons la seconde démonstration par récurrence sur le degré de P.
   (a) Si le degré de P est 1, c'est à dire si $P(X) = aX + b$
   - ▷ Si a n'est pas inversible dans $\mathcal{A}$, alors P n'a pas de racine dans $\mathcal{A}$
   - ▷ Si a est inversible dans $\mathcal{A}$, alors $c = -a^{-1}b$ est une racine de P, et P n'a que cette racine dans $\mathcal{A}$

   Ainsi, si $\deg P = 1$, P a au plus 1 racine dans $\mathcal{A}$

   (b) Supposons que $P \in \mathcal{A}[X]$ de degré n a au plus n racines dans $\mathcal{A}$

   (c) Soit $P \in \mathcal{A}[X]$ de degré $n+1$
   - ▷ P peut n'avoir aucune racine dans $\mathcal{A}$; il a donc 0 racine.
   - ▷ Supposons que P admette une racine $c \in \mathcal{A}$.
     Alors, P est divisible par $(X - c)$ et nous avons $P(X) = Q(X)(X - c)$.
     $\mathcal{A}$ étant un anneau intègre, nous avons $\deg P = \deg Q + 1 \Longleftrightarrow \deg Q = n$ et donc, comme $\deg Q = n$,d'après l'hypothèse de récurrence, Q admet au plus n racines dans $\mathcal{A}$, et ainsi P admet au plus $n+1$ racines dans $\mathcal{A}$

   Le théorème est ainsi démontré.

6.5 Arithmétique de $\mathbb{K}[X]$

Nous avons besoin, dans ce paragraphe, de la notion **d'idéal principal**. La notion d'idéal et d'anneau principal a déjà été donnée en 2.2.2. Nous nous proposons de la redonner dans les définitions ci-après

6.5.1 Rappel d'idéal principal

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif
On appelle idéal principal de $\mathcal{A}$ l'idéal $[b]$ des multiples d'un élément quelconque $b \in \mathcal{A}$, c'est à dire :

$$[b] = \{z \in \mathcal{A} \text{ où } z = kb \text{ où } k \in \mathcal{A}\}$$

Remarque 14 :

1. Les idéaux principaux d'un anneau intègre $\mathcal{A}$ sont liés aux propriétés de la divisibilité dans $\mathcal{A}$.
   Ainsi, pour $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{A}$, $[a] \subset [b]$ signifie qu'il existe $k \in \mathcal{A}$ tel que $a = kb$ et donc, b divise a
   Par exemple, dans l'anneau $\mathbb{Z}$, nous avons $6\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z}$, puisque tout élément de $6\mathbb{Z}$ s'écrit $6k = 2(3k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$; en particulier, $6 \in 2\mathbb{Z}$ puisque $6 = 2 \times 3$ et donc 2 divise 6
2. Un diviseur propre $b \in \mathcal{A}$ de $a \in \mathcal{A}$ détermine un idéal plus grand que $[a]$, c'est à dire $[a] \subset [b]$
3. Pour $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{A}$, nous avons $[a] = [b]$ si et seulement si a et b sont associés dans $\mathcal{A}$
4. $[a] = \mathcal{A}$ si et seulement si a est inversible dans $\mathcal{A}$

6.5.2 Rappel d'anneau principal

Un anneau $\mathcal{A}$ est dit anneau principal s'il est intègre et si tout idéal de $\mathcal{A}$ est principal

Exemple 4 :

Un exemple d'anneau principal est $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs, puisque, dans $\mathbb{Z}$, tout idéal est de la forme $n\mathbb{Z}$

6.5.3 Théorème

Si $\mathbb{K}$ est un corps, alors, $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal, ce qui veut dire :

1. Si I est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, alors, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que I soit l'ensemble des multiples de P, c'est à dire tel que $I = [P] = P \times \mathbb{K}[X]$
2. P est déterminé de manière unique, à la multiplication par une constante non nulle près. *(On écrit $I = [P] = P \times \mathbb{K}[X]$; si P est unitaire, il est unique)*

Démonstration

1. Si $I = \{0\}$, alors, le théorème est évident
2. Supposons, maintenant que $I \neq \{0\}$
   Soit donc $P \neq 0$ tel que $P \in I$ et on suppose que $\deg P$ est minimal ; il est possible d'en trouver un, puisque $\deg P \in \mathbb{N}$
   (a) Par definition de ce qu'est un idéal, tous les multiples de P sont dans cet idéal I ; on peut donc écrire que $[P] \subset I$
   (b) Réciproquement, soit $B \in I$ et montrons que B est un multiple de P. Nous aurons alors $I \subset [P]$.
   Effectuons la division euclidienne de B par P.
   Nous avons alors $B = PQ + R$ avec $\deg R < \deg P$.
   De $B = PQ + R$, nous déduisons que $R = B - PQ$. Comme I est un idéal, alors $PQ \in I$. Comme I, idéal est aussi un groupe, $B - PQ \in I$
   Si $R \neq 0$, alors $\deg R \geqslant 0$ et donc $\deg P$ n'est pas minimal. Il y a donc contradiction.
   D'où $R = 0$ et $B = PQ$, ce qui veut dire que B est un multiple de P

   Ainsi $I = [P]$ et $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.
3. Il est évident que si P est le polynôme de I tel que $\deg P$ soit minimal, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda P \in I$ et $\deg(\lambda P) = \deg P$
4. Si P' est un polynôme tel que $I = [P]$ soit l'ensemble des multiples de P', c'est à dire tels que $I = [P']$, alors $P = P'Q$ et $P' = PQ_1$, c'est à dire que P et P' sont associés, c'est à dire $P' = \lambda P$

6.5.4 Définition du pgcd de 2 polynômes

$\mathbb{K}$ est un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes. Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$
Alors, $D \in \mathbb{K}[X]$ est appelé plus grand diviseur commun ou pgcd des 2 polynômes $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ si pour tout $C \in \mathbb{K}[X]$

$$((D \div A)(D \div B)(C \div A)(C \div B)) \Longrightarrow (C \div B)$$

On note $D = \operatorname{pgcd}(A, B)$

Remarque 15 :

1. Cette définition montre que $D = \operatorname{pgcd}(A, B)$ est multiple de tout diviseur commun à A et B
2. 2 pgcd différents de A et B sont associés :

   En effet, $D = \operatorname{pgcd}(A, B)$ et supposons qu'il existe $D_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $D_1 = \operatorname{pgcd}(A, B)$. Alors, de la propriété de pgcd, D divise D_1 et D_1 divise D et sont donc associés, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tels que $D = \lambda D_1$

6.5.5 Théorème : existence du pgcd

$\mathbb{K}$ est un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes. Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$

1. Il existe un élément $D \in \mathbb{K}[X]$ tel que D divise A et B
2. Tous les diviseurs de D sont les diviseurs communs à A et à B
3. D est donc le pgcd des 2 polynômes A et B et est déterminé de manière unique, à la multiplication par une constante près
4. Si $A \neq 0$ et si $B \neq 0$, alors le degré de D majore celui de tous les diviseurs communs à A et B
5. Il existe $U \in \mathbb{K}[X]$ et $V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = D$

Démonstration

Soient donc $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$

1. (a) On appelle $\mathcal{I} = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tels que il existe } Q \in \mathbb{K}[X] \text{ et } R \in \mathbb{K}[X] \text{ tels que } P = AQ + BR\}$
   i. $\mathcal{I}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$
   - ▷ $\mathcal{I} \neq \emptyset$ puisque $0 \in \mathcal{I}$.
     En effet, $0 = 0 \times A + 0 \times B$ et donc $0 \in \mathcal{I}$
   - ▷ Si $P_1 \in \mathcal{I}$ et $P_2 \in \mathcal{I}$, alors :
   $$P_1 - P_2 = (AQ_1 + BR_1) - (AQ_2 + BR_2) = A(Q_1 - Q_2) + B(R_1 - R_2)$$
     Donc $P_1 - P_2 \in \mathcal{I}$

   Donc $\mathcal{I}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$

   ii. D'autre part, soit $P \in \mathcal{I}$ et $L \in \mathbb{K}[X]$, alors $P = AQ + BR$ et
   $$LP = L(AQ + BR) = A(QL) + B(RL)$$
   et donc, $LP \in \mathcal{I}$

   Nous en déduisons que $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

   (b) $\mathbb{K}$ étant un corps, $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal ; il existe donc $D \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mathcal{I} = [D] = D \times \mathbb{K}[X]$, c'est à dire :
   $$\mathcal{I} = [D] = D \times \mathbb{K}[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tels que } P = QD \text{ où } Q \in \mathbb{K}[X]\}$$
   C'est à dire que $\mathcal{I}$ est l'ensemble des multiples d'un polynôme $D \in \mathbb{K}[X]$. Ainsi, le polynôme D divise A et B ; c'est un diviseur commun à A et B
2. Nous avons $D = \text{pgcd}(A, B)$
   - ▷ Tout diviseur commun à A et B divise D. En effet :
     Soit $C \in \mathbb{K}[X]$ un diviseur commun à A et B. Alors $A = A_1C$ et $B = B_1C$.
     Comme $D = SA + TB = S(A_1C) + T(B_1C) = C(A_1S + B_1T)$, le polynôme C divise D
   - ▷ Plus généralement, C divise tous les éléments de la forme $AP + BQ$.

   D est donc le pgcd de A et B

   Remarquons que si $H \in \mathbb{K}[X]$ divise D, alors H divise tous les éléments de $\mathcal{I} = [D]$, c'est à dire tous les polynômes de la forme $AP + BQ$. et que, si H divise tous les éléments de la forme $AP + BQ$, alors H divise D, puisque $D \in \mathcal{I}$
3. Soit C un diviseur commun à A et B. Comme $D = \text{pgcd}(A, B)$, alors C divise D et donc $\deg C \leqslant \deg D$
4. Comme $D \in \mathcal{I}$, il existe $U \in \mathbb{K}[X]$ et $V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $D = AU + BV$

6.5.6 Proposition

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes. Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ 2 polynômes tels que $B \neq 0$

Alors, si $A = BQ + R$, les diviseurs communs à A et B sont aussi les diviseurs communs de B et de R

En particulier, $\text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(B, R)$

Démonstration

Si $B \in \mathbb{K}[X]$ est le polynôme nul, alors tous les diviseurs de A sont aussi ceux de B, puisque si $A = \Lambda A_1$, alors $0 = \Lambda 0$.
Supposons donc $B \in \mathbb{K}[X]$ et $B \neq 0$ et effectuons donc la division euclidienne de A par B. Nous avons donc :

$$A = BQ + R \text{ avec } \deg R < \deg B$$

1. Soit $C \in \mathbb{K}[X]$ un diviseur commun à A et B.
   Alors, il existe $A_1 \in \mathbb{K}[X]$ et $B_1 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A = CA_1$ et $B = CB_1$ et donc, alors :
   $$A = BQ + R \Longleftrightarrow CA_1 = B_1C + R \Longleftrightarrow R = CA_1 - B_1C = C(A_1 - B_1)$$
   Ce qui montre que C divise B et R.
   Ainsi, les diviseurs communs à A et B sont aussi diviseurs de B et R
2. Soit $D \in \mathbb{K}[X]$ un diviseur commun à R et B.
   Alors, il existe $R_1 \in \mathbb{K}[X]$ et $B_1 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $R = DR_1$ et $B = DB_1$ et donc, alors :
   $$A = BQ + R \Longleftrightarrow A = B_1D + DR_1 \Longleftrightarrow A = D(B_1 + R_1)$$
   Ce qui montre que D divise B et A.
   Ainsi, les diviseurs communs à R et B sont aussi diviseurs de B et A

6.5.7 Algorithme de recherche du pgcd

Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ 2 polynômes tels que $B \neq 0$.

1. Effectuons la division euclidienne de A par B.
   - ▷ Nous avons alors $A = BQ + R_1$ avec $\deg R_1 < \deg B$
   - ▷ Si $R_1 = 0$, alors B divise A et $\mathrm{pgcd}(A, B) = B$
   - ▷ Si $R_1 \neq 0$, alors, d'après la proposition précédente, $\mathrm{pgcd}(A, B) = \mathrm{pgcd}(B, R_1)$
2. Effectuons la division euclidienne de B par R_1
   - ▷ Nous avons alors $B = R_1Q + R_2$ avec $\deg R_2 < \deg R_1$
   - ▷ Si $R_2 = 0$, alors R_1 divise B et $\mathrm{pgcd}(R_1, B) = R_1$. Mais nous avons aussi $\mathrm{pgcd}(A, B) = \mathrm{pgcd}(B, R_1)$, c'est à dire que $\mathrm{pgcd}(A, B) = R_1$
   - ▷ Si $R_2 \neq 0$, alors, d'après la proposition précédente, $\mathrm{pgcd}(A, B) = \mathrm{pgcd}(B, R_1) = \mathrm{pgcd}(R_1, R_2)$
3. Nous pouvons ainsi continuer longtemps, jusque l'étape n, où nous avons $R_{n-1} = R_nQ_n + R_{n+1}$ avec $\deg R_{n+1} < \deg R_n$ et
   $$\mathrm{pgcd}(A, B) = \mathrm{pgcd}(B, R_1) = \mathrm{pgcd}(R_1, R_2) = \cdots = \mathrm{pgcd}(R_{n+1}, R_n)$$
   Nous avons aussi $\deg R_{n+1} < \deg R_n < \cdots < \deg R_1 < \deg B$, c'est à dire une suite d'entiers décroissante, l'algorithme s'arrête au bout d'un nombre fini N d'étapes avec $R_{N+1} = 0$
4. **Résultat :**
   Le polynôme R_N obtenu à la fin de l'algorithme est un pgcd de A et B *(c'est le dernier reste non nul, si A et B sont différents de 0)*

Exemple 5 :

Quel est le pgcd de $X^3 + X + 1$ et de $X^2 + X + 1$?

1. On effectue la division euclidienne de $X^3 + X + 1$ par $X^2 + X + 1$:
   $$X^3 + X + 1 = (X^2 + X + 1)(X - 1) + X + 2$$
2. Maintenant, nous faisons la division euclidienne de $X^2 + X + 1$ par $X + 2$:
   $$X^2 + X + 1 = (X + 2)(X - 1) + 3$$

3. Et, pour terminer
$$X+2 = 3\times\left(\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}\right)+0$$

L'un des pgcd de X^3+X+1 et de X^2+X+1 est 3, et si nous considérons uniquement les polynômes unitaires, le pgcd de X^3+X+1 et de X^2+X+1 est 1

Exercice 10 :

Déterminer les pgcd des paires de polynômes A et B suivantes :

1. $A = X^6+2X^4-4X^3-3X^2+8X-5$ et $B = X^5+X^2-X+1$
2. $A = X^4-3X^3+3X^2-3X+2$ et $B = X^3-2X^2-X+2$
3. $A = X^5+X^4-X^3-3X^2-3X-1$ et $B = X^4-2X^3-X^2-2X+1$
4. $A = X^4-4X^3+1$ et $B = X^3-3X^2+1$
5. $A = X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1$ et $B = X^4+2X^3+X+2$
6. $A = X^5+5X^4+9X^3+7X^2+5X+3$ et $B = X^4+2X^3+2X^2+X+1$

6.5.8 Proposition

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes. Soient $A\in\mathbb{K}[X]$ et $B\in\mathbb{K}[X]$ 2 polynômes tels que $B\neq 0$. On appelle D le pgcd de A et de B
Alors pour tout polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$, non nul, le pgcd de AP et BP est le polynôme DP que nous pouvons écrire :
$$\text{pgcd}\,(PA, PB) = P\times\text{pgcd}\,(A,B)$$

Démonstration

On peut prendre cette démonstration comme un exercice résolu
Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ avec $P\neq 0$.

1. D étant le pgcd de A et de B, il existe alors $A_1\in\mathbb{K}[X]$ et $B_1\in\mathbb{K}[X]$ tels que $A = DA_1$ et $B = DB_1$. Et donc $AP = (DA_1)P = A_1(DP)$, nous montrons, là, que DP divise AP.
   Nous démontrerions de même que DP divise BP
   DP est donc un diviseur commun à AP et BP
2. Montrons que si $Q\in\mathbb{K}[X]$ divise les polynômes AP et BP, alors Q divise aussi DP
   Si Q divise AP et BP, il existe alors $Q_1\in\mathbb{K}[X]$ et $Q_2\in\mathbb{K}[X]$ tels que $AP = QQ_1$ et $BP = QQ_2$.
   D étant le pgcd de A et de B il existe $U\in\mathbb{K}[X]$ et $V\in\mathbb{K}[X]$ tels que $D = AU+BV$.
   Nous avons donc $DP = APU+BPV = QQ_1U+QQ_2V = Q(Q_1U+Q_2V)$.
   Donc Q divise DP

D'après la définition 6.5.4, DP est donc le pgcd de AP et BP

Remarque 16 :

Montrons aussi que si $Q\in\mathbb{K}[X]$ divise le polynôme DP, alors Q divise aussi AP et BP
D étant le pgcd de A et de B, il existe alors $A_1\in\mathbb{K}[X]$ et $B_1\in\mathbb{K}[X]$ tels que $A = DA_1$ et $B = DB_1$.
Q divisant DP, il existe $Q_1\in\mathbb{K}[X]$ tel que $DP = QQ_1$. Donc :
$$AP = (A_1D)P = A_1(DP) = A_1(QQ_1) = (A_1Q_1)Q$$

Ce qui montre que Q divise AP
Nous aurions aussi $BP = (B_1Q_1)Q$ et Q divise aussi BP
Ainsi, nous venons de démontrer que tout diviseur de DP divise aussi AP et BP
L'ensemble des diviseurs de DP est aussi celui des diviseurs communs à AP et BP

6.5.9 Proposition

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes. Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ 2 polynômes tels que $B \neq 0$. On appelle D le pgcd de A et de B
Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = QA_1$ et $B = QB_1$. Alors :

1. Q divise D
2. Si $D_1 \in \mathbb{K}[X]$ est tel que $D = QD_1$, alors, D_1 est le pgcd de A_1 et de B_1

Démonstration

Une nouvelle fois, on peut prendre cette démonstration comme un exercice résolu

1. Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = QA_1$ et $B = QB_1$, alors, d'après la définition 6.5.4, Q est un diviseur de D.
2. Soit, maintenant, $D_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $D = QD_1$.
   - ▷ D étant le pgcd de A et B, il existe $U \in \mathbb{K}[X]$ et $V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $D = AU + BV$ et donc $QD_1 = QA_1U + QB_1V$, c'est à dire $D_1 = A_1U + B_1V$
   - ▷ Soit D_1^1 le pgcd de A_1 et B_1
     Alors, d'après la proposition 6.5.8, QD_1^1 est le pgcd de QA_1 et QB_1, c'est à dire que QD_1^1 est le pgcd de A et B et donc QD_1^1 et D sont associés.
     Nous avons alors :
     $$\deg\left(QD_1^1\right) = \deg D = \deg QD_1 \Longrightarrow \deg Q + \deg D_1^1 = \deg Q + \deg D_1 \Longrightarrow \deg D_1^1 = \deg D_1$$
     D_1 et D_1^1 sont donc associés

6.5.10 Polynômes premiers entre eux

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes. Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ 2 polynômes
On dit que A et B sont **premiers entre eux** si et seulement si le pgcd de A et B est 1 (ou $\lambda \in \mathbb{K}^*$)
Autrement dit :
A et B sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont aucun diviseurs communs non triviaux

Exemple 6 :

Nous avons montré que le pgcd de $X^3 + X + 1$ et de $X^2 + X + 1$ était 1. Ce sont donc des polynômes premiers entre eux.

6.5.11 Identité de Bezout

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes. Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ 2 polynômes
A et B sont premiers entre eux si et seulement si il existe 2 polynômes $U \in \mathbb{K}[X]$ et $V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$

Démonstration

1. Supposons A et B sont premiers entre eux.
   1 étant le pgcd de A et B, d'après la proposition 6.5.5, il existe $U \in \mathbb{K}[X]$ et $V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $1 = AU + BV$
2. Réciproquement, supposons qu'il existe $U \in \mathbb{K}[X]$ et $V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $1 = AU + BV$
   Soit $D = \text{pgcd}(A, B)$, unitaire.
   Il existe $A_1 \in \mathbb{K}[X]$ et $B_1 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A = DA_1$ et $B = DB_1$ et donc :
   $$1 = AU + BV = DA_1U + DB_1V = D(A_1U + B_1V)$$
   Ce qui veut dire que D divise 1 et donc $\deg D = 0$. D est donc un polynôme constant, et comme D est unitaire, $D = 1$.
   Ainsi, A et B sont premiers entre eux

6.5.12 Corollaire

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes. Soient $A \in \mathbb{K}[X]$, $B_1 \in \mathbb{K}[X]$ et $B_2 \in \mathbb{K}[X]$ 3 polynômes
Si A est premier avec B_1 et si A est premier avec B_2, alors A est premier avec le produit B_1B_2

Démonstration

- Si A est premier avec B_1, il existe donc $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ et $R_1 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AQ_1 + R_1B_1 = 1$
- De même, si A est premier avec B_2, il existe donc $Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ et $R_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AQ_2+R_2B_2 = 1$
- Alors :

$$\begin{aligned} 1 = & \ (AQ_1 + R_1B_1)(AQ_2 + R_2B_2) = A^2Q_1Q_2 + AQ_1R_2B_2 + R_1B_1AQ_2 + R_1B_1R_2B_2 \\ = & \ A(AQ_1Q_2 + Q_1R_2B_2 + R_1B_1Q_2) + (R_1R_2)B_1B_2 \end{aligned}$$

Il existe donc des polynômes $U \in \mathbb{K}[X]$ et $V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + B_1B_2V = 1$
A est donc premier avec le produit B_1B_2

Remarque 17 :

Il est très possible de généraliser :

1. Si $A \in \mathbb{K}[X]$ est premier avec $B_1, B_2, \ldots, B_n$, alors A est premier avec $B_1B_2 \cdots B_n$
2. Si $A \in \mathbb{K}[X]$ est premier avec B, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ A est premier avec B^n
3. Si $A \in \mathbb{K}[X]$ est premier avec B, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$, A^m est premier avec B^n

Les démonstrations se font, sans difficulté, par récurrence.

6.5.13 Proposition

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes. Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ 2 polynômes tels que $B \neq 0$. On appelle D le pgcd de A et de B
Soient $A_1 \in \mathbb{K}[X]$ et $B_1 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A = DA_1$ et $B = DB_1$. Alors : A_1 et B_1 sont premiers entre eux

Démonstration

Comme $D \div A$ et $D \div B$, nous pouvons donc écrire $A = DA_1$ et $B = DB_1$ avec $A_1 \in \mathbb{K}[X]$ et $B_1 \in \mathbb{K}[X]$.
D étant le pgcd de A et de B, il existe $U \in \mathbb{K}[X]$ et $V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $D = AU + BV$. En remplaçant, nous obtenons :

$$D = AU + BV \iff D = (DA_1)U + (DB_1V) = D(A_1U + B_1V) \iff A_1U + B_1V = 1$$

A_1 et B_1 sont donc premiers entre eux.

Remarque 18 :

Une autre façon de démontrer la proposition précédente :

Comme $D \div A$ et $D \div B$, nous pouvons écrire, comme dans la proposition, $A = DA_1$ et $B = DB_1$ avec $A_1 \in \mathbb{K}[X]$ et $B_1 \in \mathbb{K}[X]$.
Alors, d'après la proposition 6.5.8

$$D = \text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(DA_1, DB_1) = D \times \text{pgcd}(A_1, B_1)$$

De $D = D \times \text{pgcd}(A_1, B_1)$, nous en déduisons que $\text{pgcd}(A_1, B_1) = 1$, c'est à dire que A_1 et B_1 sont premiers entre eux.

6.5.14 Lemme de Gauss

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes. Soient $A \in \mathbb{K}[X]$, $B \in \mathbb{K}[X]$ et $C \in \mathbb{K}[X]$ 3 polynômes
Si A divise BC et si A est premier avec B, alors A divise C

Démonstration

Soient donc $A \in \mathbb{K}[X]$, $B \in \mathbb{K}[X]$ et $C \in \mathbb{K}[X]$ tels que A divise BC et A est premier avec B.
Si A divise BC, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $BC = AQ$
A étant premier avec B, il existe donc $U \in \mathbb{K}[X]$ et $V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $1 = AU + BV$ et donc $C = AUC + BVC$. Ainsi :

$$C = AUC + BVC = AUC + AQV = A(UC + QV)$$

Ainsi, A divise C

6.5.15 Proposition

$\mathbb{Z}[X]$ n'est pas un anneau principal

Démonstration

1. Puisque $\mathbb{Z}$ est un anneau et non un corps, nous nous en doutions un peu ; jusqu'ici, nous nous sommes basés sur le fait que $\mathbb{K}[X]$ était un anneau principal, justement parce que $\mathbb{K}$ est un corps
2. Considérons les 2 polynômes de $\mathbb{Z}[X]$: $A = X^2 + 1$ et $B = 2X$.
   A et B n'ont aucun diviseur en commun sauf 1. Ceux de B sont 1, 2, X, $2X$ et leurs opposés.
   Or, ni 2, ni X et $2X$ ne divisent $A = X^2 + 1$
3. Supposons que $\mathbb{Z}[X]$ soit principal
   - ▷ Soit $\mathcal{I}(A, B) = \{PA + QB \text{ où } P \in \mathbb{Z}[X] \text{ et } Q \in \mathbb{Z}[X]\}$
     Il est facile de démontrer que $\mathcal{I}(A, B)$ est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$; c'est l'idéal engendré par A et B
   - ▷ Si $\mathbb{Z}[X]$ est principal, alors il est engendré par un polynôme $C \in \mathbb{Z}[X]$, c'est à dire que :

     $$\mathcal{I}(A, B) = [C] = C(X) \times \mathbb{Z}[X]$$

     Ce polynôme $C \in \mathbb{Z}[X]$ ne peut être qu'un diviseur commun à A et B. Ce diviseur commun est le seul polynôme $C(X) = 1$
   - ▷ Or, 1 ne peut pas appartenir à $\mathcal{I}(A, B)$
     - ⋆ Autre forme de la question : existe-t-il des polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $PA + QB = 1$?
     - ⋆ Comme $\mathbb{Z}[X]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}[X]$, d'après le théorème de Bezout 6.5.11, il existe des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $PA + QB = 1$.
       Recherchons ces polynômes.
       Posons $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et $Q(X) = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta$
       Alors :

       $$PA+QB = 1 \iff aX^5+(b + 2\alpha) X^4+(c + a + 2\beta) X^3+(d + b + 2\gamma) X^2+(2\delta + c) X+d = 1$$

       D'où nous tirons :

       $$\left\{\begin{aligned} a =& \ 0 \\ b + 2\alpha =& \ 0 \\ c + a + 2\beta =& \ 0 \\ d + b + 2\gamma =& \ 0 \\ 2\delta + c =& \ 0 \\ d =& \ 1 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} a =& \ 0 \\ b =& \ -2\alpha \\ c =& \ -2\beta \\ b =& \ -2\gamma - 1 \\ c =& \ -2\delta \\ d =& \ 1 \end{aligned}\right.$$

       D'où nous tirons $\beta = \delta$ et $2\alpha = 2\gamma + 1 \iff \alpha = \dfrac{2\gamma + 1}{2} = \gamma + \dfrac{1}{2}$

⋆ Ainsi :

$$\begin{aligned} Q(X) = &\ \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta = \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \beta \\ = &\ \frac{X^3}{2} + \gamma\left(X^3 + X\right) + \beta\left(X^2 + 1\right) \end{aligned}$$

Et $P(X) = -2(\gamma + 1) X^2 + -2\beta X + 1$

⋆ Si $\gamma \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \mathbb{Z}$, alors $P \in \mathbb{Z}[X]$, mais $Q \notin \mathbb{Z}[X]$

Donc $1 \notin \mathcal{I}(A, B)$ et $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas un anneau principal

Remarque 19 :

1. Nous avons aussi $\left(X^2 + 1\right) - \left(\dfrac{X}{2}\right) \times (2X) = 1$. La démonstration de la proposition a l'avantage de la généralité
2. Par contre, si nous posons $A = X^2 + 1$ et $B = X$, alors $\left(X^2 + 1\right) - (X) \times (X) = 1$ et donc la polynôme 1 appartient à $\mathcal{I}(A, B)$, l'idéal engendré par A et B et, dans ce cas, $\mathcal{I}(A, B) = \mathbb{Z}[X]$

6.5.16 Théorème et définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes. Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$

1. Il existe $M \in \mathbb{K}[X]$ tel que les multiples communs à A et B sont les multiples de M
2. M est déterminé de manière unique, à une constante multiplicative non nulle près
3. Si $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$ sont tels que $A \neq 0$ et $B \neq 0$ alors, le degré de M est plus petit que le degré de tout multiple commun à A et$B$
4. M est le plus petit multiple commun (PPCM) à A et B. On le note $\mathrm{PPCM}(A, B)$

Démonstration

1. Supposons $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
   Soient $[A] = A \times \mathbb{K}[X]$ et $[B] = B \times \mathbb{K}[X]$ les idéaux engendrés par A et B et considérons $[A] \cap [B]$
   $[A] \cap [B]$ est un idéal ; c'est l'idéal formé par les multiples communs à A et B et $[A] \cap [B] \neq \emptyset$ puisque $AB \in [A] \cap [B]$
2. $\mathbb{K}[X]$ étant un anneau principal, il existe $M \in \mathbb{K}[X]$, de degré minimal, unique à une constante multiplicative non nulle près tel que $[A] \cap [B] = [M]$
   Donc, le degré de M minore le degré de tout multiple commun à A et B
3. Si A est le polynôme nul ($A = 0$), 0 est le seul multiple commun à A et B

Remarque 20 :

En fait, M est un diviseur de tous les multiples communs à A et B

Exercice 11 :

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ où $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$.

Soit $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ une racine rationnelle de P avec p et q premiers entre eux.

1. Montrer que q divise a_n et que p divise a_0
2. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, le nombre entier $p - mq$ divise $P(m)$
3. Déterminer les racines rationnelles des polynômes :
   (a) $P_1 = X^3 - 6X^2 + 15X - 14$
   (b) $P_2 = X^5 - 2X^4 - 4X^3 + 4X^2 - 5X + 6$
4. Déduire du 1. que si $a_n = 1$ (c'est à dire si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire), les racines réelles de P sont soit entières, soit irrationnelles.

6.6 Polynômes irréductibles

6.6.1 Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.
Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit irréductible si et seulement si :

1. $\deg P \geqslant 1$
2. Tout diviseur de P est 1 ou bien est associé à P

Remarque 21 :

1. Autrement dit : $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible si $\deg P \geqslant 1$ et tout diviseur de P est de la forme λP où $\lambda \in \mathbb{K}^*$
2. On peut remplacer la seconde condition par :

   Il n'existe pas de diviseurs Q de P tels que $0 < \deg Q < \deg P$

   Notons bien que nous écartons les polynômes constants
3. **Vocabulaire** : On dit aussi qu'un polynôme non irréductible est un polynôme réductible ou factorisable.

Exemple 7 :

1. Tout polynôme de degré 1 est irréductible
2. Tout polynôme associé à un polynôme irréductible est lui-même irréductible
3. L'irréductibilité **dépend du corps de base**

   En effet :
   - ▷ Le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, mais pas dans $\mathbb{C}[X]$
   - ▷ De même,polynôme $X^2 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, mais pas dans $\mathbb{R}[X]$
4. On voit bien que la réductibilité est liée à l'existence ou non de racine dans le corps $\mathbb{K}$. On peut cependant avoir des polynômes réductibles ou factorisables sans qu'il y ait de racines dans ce corps $\mathbb{K}$

   Exemple : $P(X) = X^4 + 6X^2 + 9 = \left(X^2 + 3\right)^2 = \left(X^2 + 3\right)\left(X^2 + 3\right)$ est donc réductible dans $\mathbb{R}$, sans que P admette de racines dans $\mathbb{R}$

6.6.2 Proposition

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P \geqslant 2$

1. Si P est irréductible, alors P n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$
2. Si $\deg P = 2$ ou $\deg P = 3$ et si P n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$, alors P est irréductible

Démonstration

Comme souvent, cette proposition peut être vue comme un exercice résolu

1. Pour le premier point, nous allons faire une démonstration par contraposée :
   Supposons que P admette une racine $\alpha \in \mathbb{K}$; alors P est divisible par $X - \alpha$ et $P = (X - \alpha) Q$ avec $\deg Q = \deg P - 1$.
   P n'est donc pas irréductible
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P = 2$ ou $\deg P = 3$ et supposons que P soit réductible, c'est à dire qu'il 2 polynômes $f \in AX$ et $g \in \mathcal{A}[X]$ avec $\deg f \geqslant 1$ et $\deg g \geqslant 1$ tels que $P = fg$.
   De l'identité $\deg P = \deg f + \deg g$, nous obtenons :
   - ▷ Si $\deg P = 2$, alors $\deg f = \deg g = 1$ alors f et g admettent chacun une racine dans $\mathbb{K}$, et donc P admet des racines dans $\mathbb{K}$

▷ Maintenant, si $\deg P = 3$, alors ou bien $\deg f = 1$ et $\deg g = 2$ ou bien $\deg f = 2$ et $\deg g = 1$. Dans chacun des 2 cas cités, il y a un polynôme de degré 1. Supposons, par exemple, que $\deg f = 1$. Alors f admet une racine dans $\mathbb{K}$, et donc P admet une racines dans $\mathbb{K}$

Nous avons donc démontré, toujours par contraposée, le second point

Remarque 22 :

1. Dans $\mathbb{R}[X]$, tous les polynômes de dégré 3 sont réductibles, puisque l'analyse montre qu'ils ont forcément une racine réelle
2. Il n'est pas difficile de démontrer que, dans $\mathbb{Q}[X]$, il existe des polynômes irréductibles de tout degré

6.6.3 Proposition

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que Q soit un polynôme irréductible.
Alors :

▷ Ou bien Q est premier avec P
▷ Ou bien Q divise P

Démonstration

Soit D le PGCD de P et Q que nous avons choisi unitaire. C'est à dire $D = \text{pgcd}(P, Q)$.
Le polynôme D est donc un polynôme unitaire et il divise Q. Or Q est irréductible et donc, d'après la définition 6.6.1

→ Ou bien D est le polynôme constant égal à 1 et P et Q sont premiers entre eux,
→ Ou bien D est de la forme λQ, où λ est une constante non nulle *(égale à l'inverse du coefficient dominant de Q)*. Alors, dans ce dernier cas, on en déduit que Q divise P.

Ce qui achève la démonstration.

6.6.4 Corollaire

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que P et Q soient irréductibles. Alors P et Q sont premiers entre eux ou associés

Démonstration

D'après la proposition précédente 6.6.3, ou bien Q est premier avec P ou bien Q divise P.
Si Q divise P, alors, P n'est pas irréductible. Donc, P et Q sont premiers entre eux ou associés, c'est à dire $Q = \lambda P$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$

6.6.5 Polynôme irréductible divisant un produit

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$, avec P irréductible sur $\mathbb{K}[X]$.
Si le polynôme P divise le produit AB, alors P divise A ou P divise B.
Autrement dit si un polynôme irréductible divise un produit de polynômes, il divise l'un des polynômes.

Démonstration

La démonstration de cette proposition est basée sur le théorème de Gauss 6.5.14.
Soit donc P un polynôme irréductible divisant le produite AB
Supposons que P ne divise pas le polynôme A. Alors d'après la proposition précédente 6.6.3, il est premier avec A.
On peut donc appliquer le théorème de Gauss et conclure que P divise B.

Remarque 23 :

Par récurrence, on peut démontrer que si P irréductible sur $\mathbb{K}[X]$ divise un produit $A_1A_2\cdots A_n$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors, P divise l'un des polynômes A_i

6.6.6 Théorème

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.
Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 possède un diviseur irréductible.

Démonstration

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant, c'est à dire tel que $\deg P \geqslant 1$.
On appelle E l'ensemble des diviseurs non constants de P
E n'est pas vide puisqu'il contient P lui-même.
On en déduit que la partie $\Omega \subset \mathbb{N}$ dont les éléments sont les degrés des éléments de E n'est pas vide.
Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide possédant un plus petit élément, Ω, non vide, possède donc un plus petit élément noté n_0. Il existe donc un élément de E, noté P_0 de degré n_0 qui est donc un diviseur non constant de P.
Montrons qu'alors P_0 est irréductible.
En effet, si P_0 n'était pas irréductible, il aurait un diviseur Q, non constant, de degré strictement plus petit. Ce diviseur serait aussi un diviseur de P, et son degré serait donc strictement plus petit que n_0.
Ce qui est en contradiction avec la définition de l'entier n_0

6.6.7 Théorème

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.
Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ se décompose de manière unique sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (P_i)^{\alpha_i}$$

Où les P_i sont des polynômes unitaires irréductibles de $\mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$

Démonstration

La démonstration se fera, par récurrence, sur le degré de P

1. Si $\deg P = 0$, cela veut dire que P est un polynôme constant ; alors $P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (P_i)^0 = \lambda$
2. Supposons que, si $\deg P \leqslant n$, alors P se décompose de manière unique sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (P_i)^{\alpha_i}$$

3. Soit, maintenant, $P \in \mathbb{K}[X]$, réductible, de degré $n+1$.
$\Longrightarrow$ Montrons l'existence
D'après le théorème 6.6.6, P admet au moins un diviseur irréductible ; appelons le P_0. Donc $P = P_0 \times Q$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg Q \leqslant n$ puisque $\deg P_0 \geqslant 1$.
D'après l'hypothèse de récurrence, Q se décompose de manière unique sous la forme

$$Q = \lambda \prod_{i=1}^{k} (Q_i)^{\alpha_i}$$

Et donc $P = P_0 \times \left(\lambda \prod_{i=1}^{k} (Q_i)^{\alpha_i}\right) = \lambda \times P_0 \times \left(\prod_{i=1}^{k} (Q_i)^{\alpha_i}\right)$
L'existence est donc prouvée

$\Longrightarrow$ Montrons l'unicité

Supposons donc que P admette 2 décompositions en polynômes irréductibles unitaires

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (P_i)^{\alpha_i} = \mu \prod_{i=1}^{k_1} (Q_i)^{\beta_i}$$

Les P_i et les Q_i étant unitaires, λ et μ représentent le coefficient du terme de plus haut de degré de P et donc $\lambda = \mu$, ce qui nous permet de simplifier et donc d'écrire

$$\prod_{i=1}^{k} (P_i)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{k_1} (Q_i)^{\beta_i}$$

Et, en ne tenant pas compte de leur multiplicité :

$$P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_r = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_s \Longleftrightarrow P_1 \times (P_2 \times \cdots \times P_r) = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_s$$

P_1, irréductible, divise le produit $Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_s$ et donc, d'après 6.6.5, divise l'un des Q_i.
Quitte à ré-arranger les polynômes, on peut supposer que P_1 divise Q_1.
Q_1 étant irréductible, nous en déduisons qu'ils sont associés ; mais comme P_1 et Q_1 sont unitaires, nous avons $P_1 = Q_1$.
Nous pouvons, alors, dans l'expression $P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_r = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_s$, simplifier par P_1 et nous obtenons $P_2 \times \cdots \times P_r = Q_2 \times \cdots \times Q_s$
En posant $g = P_2 \times \cdots \times P_r = Q_2 \times \cdots \times Q_s$, nous avons 2 décompositions en polynômes irréductibles d'un polynôme g tel que $\deg g \leqslant n$.
D'après l'hypothèse de récurrence, cette décomposition est unique.

Nous venons donc de montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ se décompose de manière unique sous la forme $P = \lambda P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_r$ où les P_i sont des polynômes unitaires irréductibles de $\mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

6.6.8 Proposition

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ 2 polynômes tels que $P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (P_i)^{\alpha_i}$ et $Q = \mu \prod_{i=1}^{k} (P_i)^{\beta_i}$ *(On peut avoir $\alpha_i = 0$ ou $\beta_i = 0$)* avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\mu \in \mathbb{K}^*$

Alors, pour que P divise Q, il faut et il suffit que $\alpha_i \leqslant \beta_i$ pour tout i

Démonstration

1. Supposons que $\alpha_i \leqslant \beta_i$ pour tout i.
   Alors,
   $$\begin{aligned} Q = & \ \mu \prod_{i=1}^{k} (P_i)^{\beta_i} = \mu \prod_{i=1}^{k} (P_i)^{\beta_i - \alpha_i + \alpha_i} = \lambda \prod_{i=1}^{k} (P_i)^{\alpha_i} \times \frac{\mu}{\lambda} \prod_{i=1}^{k} (P_i)^{\beta_i - \alpha_i} \\ = & \ P \times R \end{aligned}$$
   Et donc, P divise bien Q
2. Réciproquement, supposons que P divise Q.
   Il existe alors $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = P \times R$ et $R = \dfrac{\mu}{\lambda} \prod_{i=1}^{k} (P_i)^{\gamma_i}$, avec éventuellement $\gamma_i = 0$.
   Alors, $P \times R = \mu \prod_{i=1}^{k} (P_i)^{\alpha_i + \gamma_i}$ et donc $\alpha_i + \gamma_i = \beta_i$ d'où $\alpha_i \leqslant \beta_i$
   Ce que nous voulions

6.6.9 Corollaire

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ 2 polynômes unitaires tels que $P = \prod_{i=1}^{k} (P_i)^{\alpha_i}$ et $Q = \prod_{i=1}^{k} (P_i)^{\beta_i}$ *(On peut avoir $\alpha_i = 0$ ou $\beta_i = 0$)*
Alors :

1. $D = \text{pgcd}(P, Q) = \prod_{i=1}^{k} (P_i)^{\inf(\alpha_i, \beta_i)}$
2. $M = \text{ppcm}(P, Q) = \prod_{i=1}^{k} (P_i)^{\sup(\alpha_i, \beta_i)}$

Remarque 24 :

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ sont des polynômes unitaires.
Si $D = \text{pgcd}(P, Q)$ et $M = \text{ppcm}(P, Q)$, alors $DM = PQ$

6.7 Etude de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Dans cette section, nous ne considérons que des polynômes à coefficients réels ou complexes.
$\mathbb{R}[X]$ est donc l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.
Nous avons, évidemment $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$

Exemple 8 :

1. Si $P(X) = X^2 - 3X + 1$ alors P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2. C'est également un polynôme qui appartient à $\mathbb{C}[X]$.
2. Par contre, le polynôme Q défini par $Q(X) = X^3 - 2jX + iX^2 - 5j$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ uniquement.

6.7.1 Théorème de D'Alembert

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré supérieur ou égal à 1, admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$

Démonstration

Nous admettons ce théorème ; c'est un théorème très important issu de l'analyse

6.7.2 Théorème

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n
Soient $x_1, \ldots, x_k$ les k racines de P, de multiplicité *(ou d'ordre)* respective $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.
Alors :

1. $P(X) = \lambda (X - x_1)^{\alpha_1} \cdots (X - x_k)^{\alpha_k} = \lambda \prod_{j=1}^{k} (X - x_j)^{\alpha_j}$
   où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est le coefficient dominant de P
2. $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n$

Démonstration

D'après la proposition 6.4.7 et surtout son corollaire 6.4.8, si $x_1, \ldots, x_k$ sont les k racines de P, de multiplicité respective $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, nous avons

$$P(X) = (X - x_1)^{\alpha_1} \cdots (X - x_k)^{\alpha_k} Q(X)$$

où $Q \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme n'addmettant pas pour racines $x_1, x_2, \ldots, x_k$.
Si $\deg Q \geqslant 1$, alors, d'après le théorème de D'Alembert 6.7.1, Q admet au moins une racine qui serait aussi racine de P ; ce qui est impossible puisque P n'admet que $x_1, x_2, \ldots, x_k$ comme racines.
Donc $\deg Q = 0$ et Q est une constante $\lambda \in \mathbb{C}$.
Nous avons donc $P(X) = \lambda (X - x_1)^{\alpha_1} \cdots (X - x_k)^{\alpha_k}$ et λ apparaît donc comme le coefficient de plus haut degré de P
En utilisant la multiplication, nous avons bien $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = \deg P = n$

Remarque 25 :

On peut donc énoncer :

Dans $\mathbb{C}[X]$ tout polynôme de degré n a exactement n racines

1. On dit que $\mathbb{C}$ est un **corps algébriquement clos**
2. Tous les corps ne sont pas algébriquement clos
   - $\mathbb{Q}$ n'est pas un corps algébriquement clos, puisque, par exemple $P(X) = X^2 - 2$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$ *(mais, P en a dans $\mathbb{R}[X]$: $x_1 = \sqrt{2}$ et $x_2 = -\sqrt{2}$)*
   - $\mathbb{R}$ n'est pas non plus algébriquement clos puisque le polynôme $Q(X) = X^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$
   - $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est un corps, mais n'est pas algébriquement clos.
     Soit $R \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[X]$ où $R(X) = X^2 + 1$; alors R n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

6.7.3 Définition

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n c'est à dire $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ où, pour tout k, $\alpha_k \in \mathbb{C}$ et $\alpha_n \neq 0$

On appelle polynôme conjugué de P le polynôme $\overline{P}(X) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\alpha_k} X^k$

Remarque 26 :

1. La conjugaison ne s'applique qu'au coefficient et non à l'indéterminée
2. On démontre que, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\overline{P+Q} = \overline{P} + \overline{Q} \quad ; \quad \overline{\lambda \times P} = \overline{\lambda} \times \overline{P} \quad ; \quad \overline{P \times Q} = \overline{P} \times \overline{Q} \quad ; \quad \overline{\overline{P}} = P$$

3. Attention, $P \times \overline{P}$ n'est pas le module de P.
   Pour le voir, prenons un contre-exemple :
   - Soit $P(X) = iX^2 - (1+i)X + i$; alors $\overline{P}(X) = -iX^2 - (1-i)X - i$
   - Donc, $\left(P + \overline{P}\right)(X) = -2X$
   - Et aussi :

$$\begin{aligned} \left(P \times \overline{P}\right)(X) &= \left(iX^2 - (1+i)X + i\right)\left(-iX^2 - (1-i)X - i\right) \\ &= X^4 + (1-i)X^3 + X^2 + (i-1)X^3 + 2X^2 + (i-1)X + X^2 - (1+i)X + 1 \\ &= X^4 + 4X^2 - 2X + 1 \end{aligned}$$

Exercice 12 :

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, alors $P + \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$ et $P \times \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$
2. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ $\widetilde{\overline{P}}(\overline{z}) = \overline{\widetilde{P}(z)}$
3. Montrer que, pour $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{Q} \in \mathbb{C}[X]$, les 2 propositions suivantes sont équivalentes :

$\Rightarrow$ P est divisible par Q $\Rightarrow$ $\overline{P}$ est divisible par $\overline{Q}$

6.7.4 Théorème

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$

1. α est racine d'ordre n de P si et seulement si $\overline{\alpha}$ est racine d'ordre n de $\overline{P}$
2. Si les coefficients de P sont réels *(c'est à dire si $P \in \mathbb{R}[X]$)*, alors
   α est racine d'ordre n de P si et seulement si $\overline{\alpha}$ est aussi racine d'ordre n de P

Démonstration

1. Si $\alpha \in \mathbb{C}[X]$ est racine d'ordre n de P, alors, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = (X-\alpha)^n Q(X)$.
   Donc :
$$\overline{P}(X) = \left[\overline{(X-\alpha)^n}\right]\overline{Q}(X) = \left[\overline{(X-\alpha)}\right]^n \overline{Q}(X) = (X-\overline{\alpha})^n \overline{Q}(X)$$
   Et donc $\overline{\alpha}$ est racine d'ordre n de $\overline{P}$
2. Bien entendu, si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P = \overline{P}$ et donc, d'après le point ci-dessus, $\overline{\alpha}$ est racine de $\overline{P} = P$

Remarque 27 :

Attention le résultat :
α **est racine d'ordre** n **de** P **si et seulement si** $\overline{\alpha}$ **est aussi racine d'ordre** n **de** P
est faux dans $\mathbb{C}[X]$.
Les racines d'un **polynôme à coefficients complexes** ne sont pas nécessairement conjuguées.

6.7.5 Corollaire

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$
- ▷ Soient $\{r_i\, i = 1 \dots p\}$ les p **racines réelles** d'ordre respectif n_i de P
- ▷ Soient $\{\rho_i\, i = 1 \dots p'\}$ les p' **racines complexes** d'ordre respectif k_i de P

Alors,
$$P(X) = \lambda (X-r_1)^{n_1} (X-r_2)^{n_2} \cdots (X-r_p)^{n_p} (X-\rho_1)^{k_1} (X-\overline{\rho_1})^{k_1} (X-\rho_2)^{k_2} (X-\overline{\rho_2})^{k_2} \times \cdots \times (X-\rho_{p'})^{k_1} (X-\overline{\rho_{p'}})^{k_{p'}}$$
où $\lambda \in \mathbb{R}$ est le coefficient du terme de plus haut degré

Remarque 28 :

Il se peut que même si $P \in \mathbb{R}[X]$, P n'admette aucune racine réelle

Exemples

$\Rightarrow$ $P(X) = X^2 + X + 1$ n'a aucune racine réelle. Ce polynôme admet, par contre 2 racines complexes conjuguées $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et donc $\overline{j} = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$ d'où
$$P(X) = (X-j)\left(X-\overline{j}\right)$$
En remarquant que $j^2 = \overline{j}$, nous avons donc $P(X) = (X-j)\left(X-\overline{j}\right) = (X-j)\left(X-j^2\right)$

$\Rightarrow$ Le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$ n'a que des racines réelles ; nous pouvons écrire $P(X) = (X-1)(X-2)$

$\Rightarrow$ Le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$ a lui, 3 racines : 1 racine réelle et 2 racines complexes conjuguées. Nous avons :
$$P(X) = X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X-i)(X+i)$$

Exercice 13 :

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P(X) = X^4 + 1$
2. $P(X) = X^6 - 1$
3. $P(X) = X^8 + X^4 + 1$

6.7.6 Théorème

Les éléments irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :

1. Les polynômes du premier degré
2. Les polynômes du second degré à discriminant négatif

Démonstration

1. Si P est un polynôme du premier degré, alors il est irréductible *(Cette propriété fait partie de la définition de polynômes irréductibles)*
   De même, si P est un polynôme du second degré à discriminant négatif, P n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$ et est donc irréductible.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, irréductible.
   - ▷ Si $\deg P = 1$, on s'arrête.
   - ▷ Supposons que $\deg P \geqslant 2$
     P, irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, est aussi un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et P admet sûrement une racine complexe. Appelons α cette racine complexe.
     D'après 6.7.4, $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P et donc
     $$P(X) = (X - \alpha)(X - \overline{\alpha})\, Q(X)$$
     Où $Q \in \mathbb{R}[X]$
     Comme P est irréductible, $\deg Q = 0$
     En effet, si $\deg Q \geqslant 1$, alors P n'est plus irréductible
     Et donc Q est un polynôme constant et nous avons donc $P(X) = \lambda (X - \alpha)(X - \overline{\alpha})$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$
     Nous avons donc $P(X) = \lambda \left(X^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha) X + |\alpha|^2\right)$

6.7.7 Corollaire

Tout polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit de manière unique comme produit de polynômes de la forme $(X - r)$ et $(X - \alpha)^2 + \beta^2$ avec $r \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$

Exercice 14 :

Montrer que $P(X) = X(X + a)(X + 2a)(X + 3a) + a^4$ est un carré dans $\mathbb{K}[X]$. En déduire une décomposition de $Q(X) = X(X + 1)(X + 2)(X + 3) - 8$ en produit.

6.8 Dérivée d'un polynôme. Formule de Taylor

6.8.1 Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes. Alors :

1. $\mathbb{K}[X]$ muni de l'addition des polynômes et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie dénombrable
3. La famille de polynômes $\{e_k ; k \in \mathbb{N}\}$ où $e_k(X) = X^k$ est la base canonique de $\mathbb{K}[X]$

Démonstration

1. Nous savons, déjà que $(\mathbb{K}[X], +)$ est un groupe abélien et que l'opération :
   $$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ (\lambda, P) & \longmapsto & \lambda P \end{array} \right.$$
   vérifie toutes les conditions de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

2. En définissant, comme dans l'énoncé, la famille de polynômes $\{e_k ; k \in \mathbb{N}\}$ où $e_k(X) = X^k$, on voit que tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k$ avec $\lambda_n \neq 0$ et toute famille finie, extraite de de la famille $\{e_k ; k \in \mathbb{N}\}$ forme une famille libre.
La famille $\{e_k ; k \in \mathbb{N}\}$ est donc une base de $\mathbb{K}[X]$. C'est la base canonique

Remarque 29 :

En fait, la multiplication des polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ confère à $\mathbb{K}[X]$, en plus de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel , la **structure d'algèbre**

6.8.2 Corollaire

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.
Nous appellons $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n
Alors $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $n+1$ et de base canonique $\{e_0, e_1, \cdots e_k, \cdots, e_n\}$

Démonstration

La démonstration est simple et laissée au lecteur

Exercice 15 :

On note $D : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$ l'application définie par

$$D(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

1. Montrez que D est bien une application linéaire .
2. Déterminer la matrice A de D dans la base canonique $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$
3. Soit la famille de vecteurs $\mathcal{B} = \{1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3)\}$.
Montrez que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$
4. Déterminer les matrices de passage entre la base canonique et $\mathcal{B}$
5. Déterminer la matrice A_1 de D dans la base $\mathcal{B}$.
6. Calculez A^n.

6.8.3 Théorème

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes. $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
Soit $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ une suite finie de n entiers strictement croissante, c'est à dire telle que $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$.
Nous considérons n polynômes $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_n}\}$ tels que si $k = 1, \cdots, n$, alors $\deg f_{i_k} = i_k$.
Alors, la famille $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_n}\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$

Démonstration

La démonstration n'est pas difficile, mais demande beaucoup de soins.
Soit donc $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Alors $f_{i_k} = \sum_{j=0}^{i_k} a_j^{i_k} X^j$ avec $a_{i_k}^{i_k} \neq 0$ puisque $\deg f_{i_k} = i_k$

Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ n scalaires de $\mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 f_{i_1} + \cdots + \lambda_n f_{i_n} = \mathcal{O}$.

1. L'expression $\lambda_1 f_{i_1} + \cdots + \lambda_n f_{i_n}$ est un polynôme dont le terme de plus haut degré est $\lambda_n a_{i_n}^{i_n}$.
De l'égalité $\lambda_1 f_{i_1} + \cdots + \lambda_n f_{i_n} = \mathcal{O}$, nous en déduisons que $\lambda_n a_{i_n}^{i_n} = 0$ et donc, comme $a_{i_n}^{i_n} \neq 0$, nous avons $\lambda_n = 0$

2. Ce qui fait que $\lambda_1 f_{i_1} + \cdots + \lambda_n f_{i_n} = \mathcal{O}$ devient $\lambda_1 f_{i_1} + \cdots + \lambda_{n-1} f_{i_{n-1}} = \mathcal{O}$ et le même raisonnement que ci-dessus montre que $\lambda_{n-1} = 0$
3. En itérant donc le raisonnement, nous obtenons $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

La famille $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_n}\}$ est donc une famille libre de $\mathbb{K}[X]$

6.8.4 Corollaire

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n admet pour base toute famille de polynômes $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ telle que, pour tout $k = 1, \cdots, n$, $\deg f_k = k$

Exemple 9 :

Dans l'exercice précédent, nous avons démontré que la famille de vecteurs

$$\mathcal{B} = \{1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3)\}$$

est une base de $\mathbb{R}_4[X]$
Le corollaire 6.8.4 permet de généraliser cet exercice en prenant des polynômes de structure semblable :

Considérons pour $k = 1, \cdots, n$ le polynôme $f_k(X) = \prod_{j=0}^{k-1} (X - j)$ et $f_0(X) = 1$.

Nous avons donc, pour $k = 0, \cdots, n$, $\deg f_k = k$ et la famille $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_{n+1}[X]$

6.8.5 Définition de la dérivation des polynômes

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire et intègre et $\mathcal{A}[X]$ son anneau de polynômes.

Soit $P \in \mathcal{A}[X]$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

On appelle polynôme dérivé de P le polynôme P' défini par :

$$P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + \cdots + n a_n X^{n-1}$$

Remarque 30 :

1. Nous avons $\deg P' = \deg P - 1$
2. Supposons que $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ et que nous nous intéressions donc au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
   Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, nous appelons $\widetilde{P}$ la fonction polynôme associée à P.

   Nous avons $\widetilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

   $\widetilde{P}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $\left(\widetilde{P}\right)'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$, c'est à dire que la fonction associée à P' est la dérivée de la fonction associée à P.
   Autrement dit : $\left(\widetilde{P}\right)' = \widetilde{P'}$

6.8.6 Propriétés de la dérivation des polynômes

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire et intègre et $\mathcal{A}[X]$ son anneau de polynômes.
Soient $P \in \mathcal{A}[X]$ et $Q \in \mathcal{A}[X]$. Alors :

1. $(P+Q)' = P' + Q'$
2. $(P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q'$
3. Pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$, $(\lambda P)' = \lambda P'$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,$(P^n)' = nP'P^{n-1}$

Démonstration

La démonstration est simple et laissée au lecteur. En fait, elle s'appuie sur l'identité $\left(\widetilde{P}\right)' = \widetilde{P'}$

Remarque 31 :

Si $\mathbb{K}$ est un corps et $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficents dans $\mathbb{K}$.
On peut alors considérer l'application $D : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} D : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & D(P) = P' \end{array} \right.$$

D'après 6.8.6, D est linéaire. Le noyau de D est formé des polynômes constants.

6.8.7 Définition de dérivées successives

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire et intègre et $\mathcal{A}[X]$ son anneau de polynômes.
Soient $P \in \mathcal{A}[X]$
Nous définissons les dérivées successives de P par :

1. $P'' = P^{(2)}\left(P'\right)'$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}, P^{(n)} = \left(P^{(n-1)}\right)'$

Remarque 32 :

Si nous revenons sur $D : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ l'opérateur de dérivation, et en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^1 = D \\ D^n = D^{n-1} \circ D \end{array} \right.$$

Et nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $P \in \mathcal{A}[X]$ $D^n(P) = P^{(n)}$.
Par composition des application, D^n est aussi une application linéaire

Exemple 10 :

1. En considérant $e_k(X) = X^k$, nous avons $e_k^{(p)}(X) = \mathrm{A}_k^p X^{k-p}$. Si $p > k$, la dérivée p-ième de e_k est nulle.
2. Dans le même ordre d'idée, la dérivée p-ième de $f_k(X) = (X-\rho)^k$ est $f_k^{(p)}(X) = \mathrm{A}_k^p (X-\rho)^{k-p}$. De même, si $p > k$, la dérivée p-ième de f_k est nulle.

Exercice 16 :

Démontrer les affirmations ci-dessus, c'est à dire démontrer que $e_k^{(p)}(X) = \mathrm{A}_k^p X^{k-p}$ et $f_k^{(p)}(X) = \mathrm{A}_k^p (X-\rho)^{k-p}$

Exercice 17 :

Dans cet exercice on travaille dans $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux.
Soit l'application

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & g(P) \text{ où } \widetilde{g(P)}(x) = (1+x)P'(x) + 3\displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t - xP(x) \end{array} \right.$$

1. Montrer que g est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice A de g dans la base canonique$\{1, X, X^2\}$.
3. Montrer que g est bijective.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}_2[X]$ l'équation

$$(1+x)P'(x)+3\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t - xP(x) = x^2-x+1$$

(Dans cette dernière question, nous avons confondu $\widetilde{P}$ et P)

6.8.8 Formule de Taylor pour les polynômes

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. Alors

1. $P(X) = P(0) + P'(0)X + \dfrac{P''(0)}{2}X^2 + \cdots + \dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k$
2. Plus généralement, pour tout $\rho \in \mathbb{K}$, nous avons :

$$P(X) = P(\rho) + P'(\rho)(X-\rho) + \frac{P''(\rho)}{2}(X-\rho)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(\rho)}{n!}(X-\rho)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(\rho)}{k!}(X-\rho)^k$$

Démonstration

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. Alors $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

1. Remarquons que $P(0) = a_0$
   (a) Tout d'abord $P'(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = a_1 + \sum_{k=2}^{n} k a_k X^{k-1}$ et donc $P'(0) = a_1$
   (b) Ensuite, $P''(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)a_k X^{k-2} = 2a_2 + \sum_{k=3}^{n} k(k-1)a_k X^{k-2}$ et donc $P''(0) = 2a_2$.
   D'où nous tirons $a_2 = \dfrac{P''(0)}{2}$
   (c) Et, plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant p \leqslant n$

$$P^{(p)}(X) = p!a_p + \sum_{k=p+1}^{n} k a_k \mathrm{A}_k^p X^{k-p}$$

   De telle sorte que $P^{(p)}(0) = p!a_p$ et donc $a_p = \dfrac{P^{(p)}(0)}{p!}$

   D'où le résultat $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k$

2. Soit $\rho \in \mathbb{K}$. Nous allons montrer que $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(\rho)}{k!}(X-\rho)^k$
   (a) Nous avons $X^k = [(X-\rho)+\rho]^k = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_k^p \rho^{k-p}(X-\rho)^p$ et donc

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_k^p \rho^{k-p}(X-\rho)^p\right)$$

(b) Ecrivons, maintenant $P(X)$ différemment :

$$\begin{array}{cccccc}
a_0 & & & & & \\
a_1\mathrm{C}_1^0\rho+ & a_1\mathrm{C}_1^1(X-\rho) & & & & \\
a_2\mathrm{C}_2^0\rho^2+ & a_2\mathrm{C}_2^1\rho(X-\rho)+ & a_2\mathrm{C}_2^2(X-\rho)^2 & & & \\
a_3\mathrm{C}_3^0\rho^3+ & a_3\mathrm{C}_3^1\rho^2(X-\rho)+ & a_3\mathrm{C}_3^2\rho(X-\rho)^2+ & a_3\mathrm{C}_3^3(X-\rho)^3 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
a_n\mathrm{C}_n^0\rho^n+ & a_n\mathrm{C}_n^1\rho^{n-1}(X-\rho)+ & a_n\mathrm{C}_n^2\rho^{n-2}(X-\rho)^2+ & a_n\mathrm{C}_n^3\rho^{n-3}(X-\rho)^3+ & \cdots & +a_n\mathrm{C}_n^n(X-\rho)^n
\end{array}$$

En réordonnant, nous avons $P(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=k}^{n}a_p\mathrm{C}_p^k\rho^{p-k}\right)(X-\rho)^k$

(c) Nous allons, maintenant, nous intéresser à $\displaystyle\sum_{p=k}^{n}a_p\mathrm{C}_p^k\rho^{p-k}$.

De $\mathrm{C}_p^k=\dfrac{1}{k!}\mathrm{A}_p^k$, nous tirons :

$$\sum_{p=k}^{n}a_p\mathrm{C}_p^k\rho^{p-k}=\frac{1}{k!}\sum_{p=k}^{n}a_p\mathrm{A}_p^k\rho^{p-k}=\frac{1}{k!}P^{(k)}(\rho)$$

D'où nous avons bien la formule de Taylor $P(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(\rho)}{k!}(X-\rho)^k$

Remarque 33 :

$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et il est possible d'utiliser cette structure pour démontrer la formule de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$.

Une seconde démonstration de la formule de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$ où $\mathbb{K}$ est un corps

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ de degré n et donc $P\in\mathbb{K}_n[X]$. Soit $\rho\in\mathbb{K}$

Considérons les polynômes $E_k(X)=(X-\rho)^k$ pour $k=0,\cdots,n$; nous avons donc $\deg E_k=k$.

D'après le corollaire 6.8.4, la famille $\{E_k ; k=0,\cdots,n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Il existe donc des scalaires $\lambda_0,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ uniques tels que

$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_kE_k(X)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_kE_k(X-\rho)^k$$

La dérivée p-ième de $(X-\rho)^k$ est donnée par $E_k^{(p)}(X)=\mathrm{A}_k^p(X-\rho)^{k-p}$ et si $p>k$, la dérivée p-ième de f_k est nulle. Ainsi :

$$\begin{aligned}
P^{(p)}(X) &= \sum_{k=p}^{n}\lambda_kE_k^{(p)}(X)=\sum_{k=p}^{n}\lambda_k\mathrm{A}_k^p(X-\rho)^{k-p}\\
&= \lambda_p\mathrm{A}_p^p+\sum_{k=p+1}^{n}\lambda_k\mathrm{A}_k^p(X-\rho)^{k-p}=\lambda_pp!+(X-\rho)\sum_{k=p+1}^{n}\lambda_k\mathrm{A}_k^p(X-\rho)^{k-p-1}
\end{aligned}$$

D'où nous tirons, bien entendu $P^{(p)}(\rho)=\lambda_pp!$, c'est à dire $\lambda_p=\dfrac{P^{(p)}(\rho)}{p!}$

Ce que nous voulions

Remarque 34 :

Du fait de l'apparition des quotients $\dfrac{P^{(p)}(\rho)}{p!}$, on ne peut parler de formule de Taylor que dans les corps $\mathbb{K}$

6.8.9 Proposition

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors

1. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre n de P alors α est racine d'ordre $n-1$ de P'
2. Si $P(\alpha) = P^{'}(\alpha) = \cdots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(n)}(\alpha) \neq 0$ alors α est racine d'ordre n de P

Démonstration

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré N et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine d'ordre $n \leqslant N$ de P.
   Alors, nous avons $P(X) = (X-\alpha)^n R(X)$ où $R(\alpha) \neq 0$
   Et, en calculant la dérivée de P, nous avons :
   $$P'(X) = n(X-\alpha)^{n-1} R(X) + (X-\alpha)^n R'(X) = (X-\alpha)^{n-1}(nR(X) + (X-\alpha)R'(X))$$
   En posant $Q(X) = (nR(X) + (X-\alpha)R'(X))$, nous avons $Q(\alpha) = nR(\alpha) \neq 0$ et donc α est bien racine d'ordre $n-1$ de P'
2. Supposons $P(\alpha) = P^{'}(\alpha) = \cdots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(n)}(\alpha) \neq 0$.
   Ecrivons la formule de Taylor :
   $$P(X) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = \sum_{k=n}^{N} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = (X-\alpha)^n \sum_{k=n}^{N} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^{k-n}$$
   Ce qui montre que α est une racine d'ordre n de P

Remarque 35 :

En fait, les 2 propositions de 6.8.9 **sont équivalentes.**

Il ne reste donc plus qu'à démontrer que si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre n de P alors $P(\alpha) = P^{'}(\alpha) = \cdots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(n)}(\alpha) \neq 0$.
Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre n de P alors α est racine d'ordre $n-1$ de P' et est racine d'ordre $n-2$ de P''.
En continuant, α est racine d'ordre $n-k$ de $P^{(k)}$ et donc d'ordre 1 de $P^{(n-1)}$, c'est à dire que $P^{(n)}(\alpha) \neq 0$.
Nous avons donc :
$$P(\alpha) = P^{'}(\alpha) = \cdots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(n)}(\alpha) \neq 0$$

Exercice 18 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$. Montrer que P_n est divisible par $(X-1)^3$ *Cet exercice ne fait pas l'objet d'une correction*

Exercice 19 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_n(X) = (X+1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1$

1. Démontrer que le polynôme $X^2 + X$ divise le polynôme P_n
2. Former le quotient de la division de P_n par $X^2 + X$
3. -1 est-il racine double de P_n ?

Exercice 20 :

Trouver $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$ pour que $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$

6.9 Exercices complémentaires

Exercice 21 :

Vrai ou faux

1. $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$
2. Deux polynômes unitaires ayant les mêmes racines avec le même ordre de multiplicité sont égaux.
3. Le polynôme $B \in \mathbb{K}[X]$ étant fixé, l'application qui à $A \in \mathbb{K}[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de A par B est un projecteur.
4. Le polynôme $1+X^4$ étant somme de 2 carrés n'est pas décomposable en produit de deux polynômes du second degré.
5. Deux polynômes de degré n qui prennent les mêmes valeurs en n points sont égaux.
6. La somme de deux polynômes de degré n est un polynôme de degré n.
7. Si la somme des coefficients d'un polynôme est nulle, il est factorisable par $X-1$.
8. Le polynôme $1+X+\ldots+X^n$ n'a pas de racine réelle.
9. Si le polynôme P est de degré n, alors, la famille $\left\{(P, P', P", \cdots, P^{(n)}\right\}$ des dérivées successives de P est une base de $\mathbb{K}_n[X]$
10. Si a est racine d'ordre k d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, alors a annule P et ses k premières dérivées.

6.9.1 Calculs sur les polynômes

Exercice 22 :

Montrer que $\left(X^3+X^2+X+1\right)\left(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k X^k\right) = X^{2n+3}+X^{2n+1}+X^2+1$

Exercice 23 :

1. Vérifier que $1-X^3 = (1-X)\left((1-X)^2+3X\right)$
2. En déduire que $\left(1-X^3\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k 3^k X^k (1-X)^{2n-2k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k X^k (1-X)^{2n-2k}$

Cet exercice ne fait pas l'objet d'une correction

Exercice 24 :

Effectuer $(1+X)\left(1+X^2\right)\left(1+X^4\right)\cdots\left(1+X^{2^n}\right)$

Exercice 25 :

Factoriser $Q_n(X) = 1-\frac{1}{1!}X+\frac{1}{2!}X(X-1)+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}X(X-1)\cdots(X-n+l)$.

Exercice 26 :

Trouver $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $(P')^2 = 4P$ où P' est le polynôme dérivé de P

Exercice 27 :

Trouver $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $\left(X^2+1\right)P''-6P = 0$ où P'' est le polynôme dérivée seconde de P

6.9.2 Arithmétique des polynômes

Exercice 28 :

De l'art d'accommoder les restes des divisions
Nous nous plaçons dans $\mathbb{C}[X]$

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Le reste de la division de P par $(X-2)$ est 5 ; le reste de la division de P par $(X-3)$ est 7.
   Quel est le reste de la division de P par $(X-2)(X-3)$?
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Le reste de la division de P par $(X-1)$ est 3 ; le reste de la division de P par $(X+1)$ est 1 ;le reste de la division de P par $(X-2)$ est 7
   Quel est le reste de la division de P par $(X-1)(X+1)(X-2)$?
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Le reste de la division de P par $\left(X^2+1\right)$ est $X+1$; le reste de la division de P par $(X-1)$ est 4.
   Quel est le reste de la division de P par $(X-1)\left(X^2+1\right)$?

Exercice 29 :

Soient $P(X) = 3X^3 + X + 1$ et $Q(X) = 3X^2 + X - 1$.
Rechercher $\text{pgcd}(P, Q)$ dans les cas suivants :

1. $P \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$ et $Q \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$
2. $P \in \mathbb{Q}[X]$ et $Q \in \mathbb{Q}[X]$
3. $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $Q \in \mathbb{Z}[X]$

Exercice 30 :

Soient $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer dans $\mathbb{R}[X]$, le pgcd des polynômes $X^n - a$ et $X^m - a$

Exercice 31 :

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivants :

1. $P_1(X) = X^6 + 1$
2. $P_2(X) = X^6 - 1$
3. $P_3(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$
4. $P_4(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k$

6.9.3 Dérivée d'un polynôme. Formule de Taylor

Exercice 32 :

Trouver tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P

Exercice 33 :

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, non nuls et $n \in \mathbb{N}$.
Nous considérons le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = \dfrac{X^n (a - bX)^n}{n!}$
Démontrer que P et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières en $X = 0$ et $X = \dfrac{a}{b}$

Exercice 34 :

On note $f : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$ l'application linéaire définie par : $f(P)(X) = (X-1)P'(X) - P(X)$.

1. Calculer l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$. En déduire $\ker f$ et $\text{im} f$.
2. L'équation $f(P) = Q$ a-t-elle toujours des solutions dans $\mathbb{R}_4[X]$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_4[X]$?

3. alculer $f\left((X-1)^k\right)$ pour $k=0,1,2,3,4$. En déduire une caractérisation des polynômes $Q \in \mathbb{R}_4[X]$ pour lesquels l'équation $f(P)=Q$ a des solutions.
4. Résoudre l'équation $(X-1)P'(X)-P(X)=X^2-2X+2$.

Cet exercice ne fait pas l'objet d'une correction

Exercice 35 :

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tels que $(X+2)^3$ divise $P(X)+10$ et $(X-2)^3$ divise $P(X)-10$

Exercice 36 :

$\mathbb{R}[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à une indéterminée.
On considère $A:\mathbb{R}[X]\longrightarrow\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A:\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & A(P) \text{ où } A(P)(X)=\left(X^2-1\right)P''(X)-3XP'(X)-5P(X) \end{array}\right.$$

1. Vérifier que A est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$
2. $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
   (a) Montrer que si $P\in\mathbb{R}_n[X]$, alors $A(P)\in\mathbb{R}_n[X]$
   (b) Nous notons A_n la restriction de A à $\mathbb{R}[X]$, c'est à dire :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} A_n:\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & A_n(P)=A(P) \end{array}\right.$$

   Montrer qu'il existe une seule valeur de n pour laquelle $\mathrm{Im}A_n\subset\mathbb{R}_{n-1}[X]$
   (c) Déterminer le noyau et l'image de A_4
   (d) Déterminer l'image de A_5. En déduire la dimension et une base du noyau de A_5

Cet exercice ne fait pas l'objet d'une correction

Exercice 37 :

$\mathbb{C}[X]$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes. Soit $A\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme fixé tel que $\deg A=\alpha$
$\mathbb{C}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On définit une application $f:\mathbb{C}[X]\longrightarrow\mathbb{C}[X]$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & f(P)=A'P-AP' \end{array}\right.$$

A' et P' étant les polynômes dérivés de A et P

1. Déterminer $\ker f$, le noyau de f
2. Quel est le rang de la restriction de f à $\mathbb{C}_n[X]$
3. Montrer que $f(\mathbb{C}[X])\cap\mathbb{C}_n[X]=f(\mathbb{C}_{n-\alpha+1}[X])$ et déterminer sa dimension

Cet exercice ne fait pas l'objet d'une correction

Exercice 38 :

Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}_n[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à une indéterminée sur $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.

1. Soient $P\in\mathbb{K}_n[X]$ et $a\in\mathbb{K}$. Nous définissons le polynôme $Q\in\mathbb{K}[X]$ par :

   $$Q(X)=(X-a)\left[P'(X)+P'(a)\right]-2\left[P(X)-P(a)\right]$$

   Montrer que a est zéro triple de Q

2. Montrer que $Q \in \mathbb{K}_n[X]$
3. Soit $f : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$ une application définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & f(P) = Q \end{array}\right.$$

   Où $Q(X) = f(P)(X) = (X-a)[P'(X) + P'(a)] - 2[P(X) - P(a)]$
   Montrer que f est une application linéaire
4. Trouver image et noyau de f

Exercice 39 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $P_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cot\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

6.9.4 Miscelleanous

Exercice 40 :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ où $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

1. Pour $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} P\left(re^{it}\right) e^{-ipt}\, dt$
2. En déduire que, s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|P(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors P est un polynôme constant.

Exercice 41 :

Trouver la valeur minimum de $a^2 + b^2$, où a et b sont des nombres réels pour lesquels l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

admet au moins une solution réelle.
(On pourra poser $t = x + \dfrac{1}{x}$ et former un polynôme en a dont on étudiera le minimum).

Exercice 42 :

1. On rappelle que le nombre a *(réel ou complexe)* est appelé zéro du polynôme $P(x)$ si $P(a) = 0$.
   On donne les trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$

$$A(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0 \quad B(X) = b_2X^2 + b_1X + b_0 \quad C(X) = c_2X^2 + c_1X + c_0$$

   Les constantes $a_2, a_1, a_0, b_2, b_1, b_0, c_2, c_1, c_0$ sont réelles et choisies de telle façon que, pour tout X, on ait :$A^2(X) + B^2(X) = C^2(X)$.
   D'autre part, aucun des nombres a_2, b_2 et c_2 n'est nul.
   (a) Démontrer que, si deux de ces trois polynômes admettent un zéro commun, réel ou complexe, ce zéro est aussi zéro du troisième.
   (b) Démontrer que,si les deux polyndmes $B(x) - C(x)$ et $B(x) + C(x)$ admettent un zéro commun, ce zéro est aussi zéro de $B(x)$ et de $C(x)$.
2. Dans toute la suite du problème, on suppose que les polynômes $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ n'ont pas de zéro commun.
   (a) Démontrer que $C(x)$ possède deux zéros complexes conjugués.

(b) A partir de l'égalité $A^2(X) = (B(x) - C(x))(B(x) + C(x))$, démontrer que les polynômes $B(x) - C(x)$ et $B(x) + C(x)$ ont chacun un zéro double réel.

(c) En déduire que $A(x)$ et $B(x)$ admettent chacun 2 zéros réels distincts

(d) 0n prend $a_2 = 1$ et l'on suppose connus, les zéros, p et q, de $A(x)$
Démontrer qu'il existe une infinité de polynômes $B(x)$ et $C(x)$ dépendant d'un paramètre et vérifiant la relation $A^2(X) + B^2(X) = C^2(X)$

(e) Démontrer qu'entre les zéros p et q de $A(x)$ et les zéros r et s de $B(x)$, il existe une relation indépendante du paramètre précédent, et que l'on explicitera.

3. Les nombres réels p et q, zéros de $A(x)$ étant fixés, il existe une infinité de polynômes $C(x)$. 0n appellera $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les zéros de $C(x)$. Démontrer qu'entre α, β, p et q, il existe une relation que l'on explicitera.

Exercice 43 :

Dans ce problème, nous construisons un produit scalaire ainsi qu'une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, adaptée à ce produit scalaire.
On considère p réels distincts fixés une fois pour toutes $x_1, x_2, \ldots, x_p$
Dans tout le problème n est un entier positif donné et p un entier strictement supérieur à $n+1$ ($p > n+1$).
$\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n

1. On considère l'application de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ fait correspondre le réel

$$\langle P/Q \rangle = \sum_{k=1}^{p} P(x_k)\, Q(x_k)$$

(a) Montrer que pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$, nous avons : $\langle P/Q \rangle = \langle Q/P \rangle$

(b) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P/P \rangle \geqslant 0$, et que $\langle P/P \rangle = 0$ si et seulement si P est le polynôme nul

(c) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme fixé. Montrer que l'application Φ_Q, ainsi définie

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi_Q : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \Phi_Q(P) = \langle P/Q \rangle \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

2. On dit que deux polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ sont orthogonaux sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ si et seulement si $\langle P/Q \rangle = 0$

(a) Soit $P_0 = 1$, c'est à dire que P_0 est le polynôme constant et égal à 1. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme normalisé P_1 du premier degré orthogonal à P_0 sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$

(b) Montrer que l'on peut déterminer de manière unique les coefficients a_2 et b_2 de façon à ce que le polynôme $P_2 = XP_1 + a_2P_1 + b_2P_0$ soit orthogonal sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ à P_1 et P_0. Quel est le degré de P_2 ?

3. Le but de cette question est de définir deux suites $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que la suite des $n+1$ polynômes définie par P_0 , P_1 et la relation de récurrence

$$P_i = XP_{i-1} + a_iP_{i-1} + b_iP_{i-2} \qquad 2 \leqslant i \leqslant n$$

soit formée de polynômes non nuls, deux à deux orthogonaux sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$
Pour nous simplifier les écritures, nous posons, pour $j \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant j \leqslant n$, $N_j = \langle P_j/P_j \rangle$

(a) Soit $i \in \{2, \ldots, n\}$
On suppose construits par récurrence les polynômes $P_0, P_1, \cdots, P_{i-1}$ orthogonaux sur sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ tels que les nombres N_j associés soient non nuls.
Déterminer a_i et b_i de façon que le polynôme P_i soit orthogonal sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ à P_{i-1} et P_{i-2}

(b) Montrer que pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, i-3\}$, nous avons $\langle XP_{i-1}/P_j \rangle = \langle P_{i-1}/XP_j \rangle = 0$
(Pour démontrer la seconde égalité, on remplacera XP_j par une combinaison linéaire de P_{j+1} , P_j et P_{j-1})

(c) En déduire que le polynôme P_i défini en a) est orthogonal à $P_0, P_1, \cdots, P_{i-1}$

(d) Montrer que P_i est non nul et déterminer son degré.

(e) Montrer que la famille de polynômes $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 44 :

Interpolation de Lagrange

Partie 1 : aspects théoriques

On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}$ tous distincts.

1. Soit L_i le polynôme défini par : $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

   (a) Montrer que L_i est un polynôme de degré n.

   (b) Calculer la valeur $L_i(x_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$

   (c) Pour i fixé, démontrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n, vérifiant
   $$P(x_k) = L_i(x_k) \text{ pour } 0 \leqslant k \leqslant n$$

2. (a) Démontrer que la famille de polynômes $\{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$

   (b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Quelles sont les coordonnées de P dans la base $\{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\}$

   (c) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$

3. Soit f une fonction donnée, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous considérons toujours $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}$ tous distincts.

   > Interpoler la fonction f, par un polynôme P de degré n aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$, c'est résoudre le problème suivant :
   > Trouver un polynôme P_f de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant i \leqslant n$, $P_f(x_i) = f(x_i)$

   Démontrer que l'unique solution du problème est le polynôme $P_f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$

4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a;b]$ et on suppose que f s'annule en $n+2$ points de $[a;b]$
   Démontrer que

   (a) La dérivée f' s'annule au moins en $n+1$ points de $[a;b]$

   (b) La dérivée $n+1$-ième $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois en un point $c \in [a;b]$

5. Nous appelons $q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

   Calculer la dérivée $n+1$-ième de q

6. Soit $x \in [a;b]$ tel que, pour $i = 0, \ldots, n$, nous ayions $x \neq x_i$. On appelle toujours P_f le polynôme d'interpolation de f. Nous construisons pour, tout $t \in [a;b]$ la fonction W_x définie par :
   $$W_x(t) = f(t) - P_f(t) - \frac{q(t)}{q(x)} (f(x) - P_f(x))$$

   (a) Démontrer que W_x est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a;b]$ et calculer $W_x^{(n+1)}(t)$

(b) Démontrer que $W_x(x) = W_x(x_0) = W_x(x_1) = \ldots = W_x(x_n) = 0$

(c) En déduire qu'il existe $\xi \in [a;b]$ tel que $W_x^{(n+1)}(\xi) = 0$

(d) Conclure que pour tout $x \in [a;b]$, il existe $\xi \in [a;b]$ tel que

$$f(x) - P_f(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

7. Démontrer que si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a;b]$ alors, pour tout $x \in [a;b]$

$$|f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{|a-b|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\in[a;b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

Partie 2 : applications numériques

1. Considérons les fonctions définies l'intervalle $[1;2]$ par $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$, et trois points $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 2$.
   (a) Montrer, sans le calculer, que f et g ont le même polynôme d'interpolation sur le support $\{x_0, x_1, x_2\}$
   (b) Donner l'expression des polynômes de Lagrange relatifs à ce support.
   (c) Comparer sur un graphe
2. Pour $n = 4$, $[a;b] = [0;1]$ et $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$, trouver une majoration de $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P(x)|$.
3. (a) Calculer la dérivée k-ième de $f(x) = \ln(1+\lambda x)$ avec $\lambda > 0$
   (b) Pour $n = 4$, $[a;b] = [0;1]$ et $f(x) = \ln(1+\lambda x)$, pour quelles valeurs de λ, sommes nous assurés que $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P_f(x)| \leqslant 10^{-4}$
   (c) Soit $\lambda = \frac{1}{2}$; en utilisant l'inégalité de Taylor à l'ordre n en 0, montrer que si

$$P_n(x) = \frac{x}{2\times 1} - \frac{x^2}{2^2\times 2} + \frac{x^3}{2^3\times 3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{2^n\times n}$$

   Alors $\sup_{x\in[0,1]} \left|\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - P_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}$

   (d) Pour quelles valeurs de n est-on assuré que $\sup_{x\in[0,1]} \left|\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - P_n(x)\right| \leqslant 10^{-4}$

6.10 Correction de quelques exercices

6.10.1 Correction des exercices du cours

Exercice 1 :

Calculer, dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ l'expression $f^3+g^3+h^3$ où

- $\star$ $f = X^2 + 2X$
- $\star$ $g = 2X^2 + 1$
- $\star$ $h = X + 2$

Facile ! !
Nous avons :

- $\star$ $f^3 = X^6 + 2^3X^3 = X^6 + 2X^3$
- $\star$ $g^3 = 2X^6 + 1$
- $\star$ $h^3 = X^3 + 5$

Donc, $f^3+g^3+h^3 = 3X^6 + 3X^3 + 6 = 0$ et donc $f^3+g^3+h^3$ est le polynôme nul de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$

Exercice 2 :

Soient P et Q 2 polynômes de $\mathcal{A}[X]$. Démontrer qu'en général $P(Q) \neq Q(P)$
Il suffit de prendre $\mathcal{A}[X] = \mathbb{Z}[X]$ et, par exemple, $P = X^2+1$ et $Q = X^2+X$

Exercice 4 :

Est-il possible d'effectuer la division euclidienne de f par g, avec :

$$f = 6X^3 + X^2 + 7X \qquad g = 3X^2 + 2X - 1$$

dans $\mathbb{Z}[X]$?
A priori, non, puisque, comme nous sommes dans $\mathbb{Z}[X]$, le nombre 3 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}$
Cependant, nous obtenons $6X^3 + X^2 + 7X = \left(3X^2+2X-1\right)(2X-1) + 11X - 1$.
Il est donc possible d'effectuer la division euclidienne de f par g dans $\mathbb{Z}[X]$
Question : *Est-il possible d'effectuer, dans $\mathbb{Z}[X]$, la division euclidienne de f par g, avec :*

$$f_1 = 2X^3 + X^2 + 7X \qquad g_1 = 3X^2 + 2X - 1$$

Exercice 5 :

Soient $\mathbb{K}$ un corps et $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq b$. Soit aussi $P \in \mathbb{K}[X]$.
Exprimer le reste de la division de P par le polynôme $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$
Comme le polynôme $B = (X-a)(X-b)$ est de degré 2, le reste de la division d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ par B sera un polynôme de degré 1. Nous aurons donc :

$$P(X) = (X-a)(X-b)Q(X) + \alpha X + \beta$$

De telle sorte que nous obtenons :

$$P(a) = \alpha a + \beta \text{ et } P(b) = \alpha b + \beta$$

Nous devons trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$, c'est à dire résoudre le système :

$$\begin{cases} \alpha a + \beta = & P(a) \\ \alpha b + \beta = & P(b) \end{cases}$$

C'est un système linéaire 2×2 d'où nous trouvons $\alpha = \dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}$ et $\beta = \dfrac{aP(b)-bP(a)}{a-b}$. Et le reste est donc donné par :

$$R(X) = \frac{1}{a-b}\left(\left(P(a)-P(b)\right)X + \left(aP(b)-bP(a)\right)\right)$$

Exercice 7 :

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient

- $A = X^2 - 2X\cos\theta + 1$,
- $P_n = X^n \sin\theta - X\sin n\theta + \sin(n-1)\theta$
- $Q_n = X^{n+1}\cos(n-1)\theta - X^n\cos n\theta - X\cos\theta + 1$

Démontrer que A divise P_n et que A divise Q_n

Bien qu'ils soient à coefficients réels, nous allons baigner ces 3 polynômes dans $\mathbb{C}[X]$.

- Remarquons que $A = X^2 - 2X\cos\theta + 1 = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right)$,
- Nous allons montrer, en calculant, que $P_n\left(e^{i\theta}\right) = P_n\left(e^{-i\theta}\right) = 0$, et alors, nous pourrons écrire $P_n = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right)B(X) = A(X) \times B(X)$.
En utilisant les formules d'Euler,

$$\begin{aligned} P_n\left(e^{i\theta}\right) &= \left(e^{in\theta}\right)\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) - e^{i\theta}\left(\frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}\right) + \left(\frac{e^{i(n-1)\theta} - e^{-i(n-1)\theta}}{2i}\right) \\ &= \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{i(n-1)\theta} + e^{-i(n-1)\theta} - e^{i(n+1)\theta} + e^{i(n-1)\theta} - e^{-i(n-1)\theta}}{2i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons donc $P_n\left(e^{i\theta}\right) = 0$ et comme P_n est à coefficients réels, nous avons aussi $P_n\left(e^{-i\theta}\right) = 0$.
Le polynôme A divise donc le polynôme P_n
- $Q_n = X^{n+1}\cos(n-1)\theta - X^n\cos n\theta - X\cos\theta + 1$
La démonstration que A divise Q_n est laissée au lecteur, mais elle est la même que pour P_n

Exercice 8 :

1. *Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $A \in \mathbb{K}[X]$. Nous désignons par Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.*
Montrer que les racines communes à A et B sont les racines communes à B et R
2. *Résoudre les équations $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ avec*

$$A(X) = X^4 - 3X^3 - 7X^2 + 27X - 18 \text{ et } B(X) = X^3 - 12X^2 + 47X - 60$$

sachant que A et B ont des racines communes

1. Soit $x_0 \in \mathbb{K}$ une racine commune à A et B.
De $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$ nous déduisons $A(x_0) = B(x_0)Q(x_0) + R(x_0) \Longrightarrow R(x_0) = 0$.
On démontrerait de la même manière que si $B(x_0) = R(x_0) = 0$, alors $A(x_0) = 0$
2. Effectuons la division euclidienne de A par B
Nous avons :

$$\left(X^4 - 3X^3 - 7X^2 + 27X - 18\right) = (X+9)\left(X^3 - 12X^2 + 47X - 60\right) + \left(54X^2 - 336X + 522\right)$$

Cherchons maintenant les racines du polynôme $R(X) = 54X^2 - 336X + 522$
Remarquons que $54X^2 - 336X + 522 = 6\left(9X^2 - 56X + 87\right)$ d'où nous trouvons 2 racines $x_1 = \dfrac{29}{9}$ et $x_2 = 3$.
Seule $x_2 = 3$ est une racine commune de B et R et est donc aussi racine de A
3. Pour résoudre $B(x) = 0$, nous factorisons B par $x - 3$ et nous obtenons :

$$X^3 - 12X^2 + 47X - 60 = (X-3)\left(X^2 - 9X + 20\right)$$

Les méthodes traditionnelles pour trouver les racines nous donnent $x_1 = 5$ et $x_3 = 4$
Les racines de B sont donc $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ et $x_3 = 4$

4. Pour résoudre $A(x) = 0$, nous factorisons A par $x - 3$ et nous obtenons :

$$X^4 - 3X^3 - 7X^2 + 27X - 18 = (X - 3)\left(X^3 - 7X + 6\right)$$

1 est racine évidente de $X^3 - 7X + 6$ *(puisque la somme des coefficients est nulle)* et nous obtenons

$$X^3 - 7X + 6 = (X - 1)\left(X^2 + X - 6\right) = (X - 1)(X + 3)(X - 2)$$

Les racines de A sont donc $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ et $x_4 = 3$

Exercice 9 :

Trouver $a \in \mathbb{C}$ pour que $P(X) = X^5 + aX^4 + aX + 1$ admette 1 comme racine double

Si 1 est racine double de P, nous pouvons écrire $P(X) = (X - 1)^2\left(X^3 + \alpha X^2 + \beta X + 1\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{C}$.
En développant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} X^5 + aX^4 + aX + 1 = &\ \left(X^2 - 2X + 1\right)\left(X^3 + \alpha X^2 + \beta X + 1\right) \\ = &\ X^5 + (\alpha - 2)X^4 + (\beta - 2\alpha + 1)X^3 + (\alpha - 2\beta + 1)X^2 + (\beta - 2)X + 1 \end{aligned}$$

Et donc, en identifiant, nous obtenons :

$$\alpha - 2 = a \quad \beta - 2\alpha + 1 = 0 \quad \alpha - 2\beta + 1 = 0 \quad \beta - 2 = a$$

D'où nous tirons :

$$\left\{\begin{aligned} \alpha = &\ 2 + a \\ \beta - 2\alpha + 1 = &\ 0 \\ \alpha - 2\beta + 1 = &\ 0 \\ \beta = &\ a + 2 \end{aligned}\right.$$

D'où nous extrayons le système :

$$\left\{\begin{aligned} \beta - 2\alpha = &\ -1 \\ \alpha - 2\beta = &\ -1 \end{aligned}\right. \iff \alpha = \beta = 1$$

D'où nous tirons $a = -1$
Ainsi,

$$P(X) = X^5 - X^4 - X + 1 = (X - 1)^2\left(X^3 + X^2 + X + 1\right)$$

Il est, bien entendu, possible d'aller plus loin ; en effet :

$$X^3 + X^2 + X + 1 = X^2(X + 1) + X + 1 = (X + 1)\left(X^2 + 1\right) = (X + 1)(X + i)(X - i)$$

Ainsi, une décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P(X) = (X - 1)^2(X + 1)\left(X^2 + 1\right)$$

Et dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = (X - 1)^2(X + 1)(X + i)(X - i)$$

On peut aussi remarquer que

$$\begin{aligned} P(X) = &\ X^5 - X^4 - X + 1 \\ = &\ X^4(X - 1) - (X - 1) = (X - 1)\left(X^4 - 1\right) = (X - 1)\left(X^2 - 1\right)\left(X^2 + 1\right) \\ = &\ (X - 1)^2(X + 1)\left(X^2 + 1\right) \\ = &\ (X - 1)^2(X + 1)(X + i)(X - i) \end{aligned}$$

Exercice 10 :

Déterminer les pgcd *des paires de polynômes A et B suivantes :*

La résolution des questions de cet exercices étant toutes semblables, nous ne donnons le corrigé que des 2 premières

1. $A = X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5$ *et* $B = X^5 + X^2 - X + 1$
   - ▷ Nous faisons la division euclidienne de A par B et nous avons :
   $$X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5 = X\left(X^5 + X^2 - X + 1\right) + 2X^4 - 5X^3 - 2X^2 + 7X - 5$$
   - ▷ Maintenant, division suivante ; nous avons donc :
   $$X^5 + X^2 - X + 1 = \left(\frac{X}{2} + \frac{5}{4}\right)\left(2X^4 - 5X^3 - 2X^2 + 7X - 5\right) + \frac{29}{4}X^3 - \frac{29}{4}X + \frac{29}{4}$$
   - ▷ Itérons donc
   $$2X^4 - 5X^3 - 2X^2 + 7X - 5 = \left(\frac{8}{29}X + \frac{20}{29}\right)\left(\frac{29}{4}X^3 - \frac{29}{4}X + \frac{29}{4}\right) + 10X - 10$$
   - ▷ Une fois de plus : $\frac{29}{4}X^3 - \frac{29}{4}X + \frac{29}{4} = \left(\frac{29}{40}X^2 + \frac{29}{40}X\right)(10X - 10) + \frac{29}{4}$
   - ▷ Ça sent bon la fin : $10X - 10 = \left(\frac{40}{29}X - \frac{40}{29}\right)\frac{29}{4}$

   Ainsi, un pgcd de $A = X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5$ et $B = X^5 + X^2 - X + 1$ est $\frac{29}{4}$ et si nous utilisons un polynôme normalisé, ce pgcd est 1
2. $A = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$ *et* $B = X^3 - 2X^2 - X + 2$
   - ▷ Nous faisons la division euclidienne de A par B et nous avons :
   $$X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2 = (X - 1)\left(X^3 - 2X^2 - X + 2\right) + 2X^2 - 6X + 4$$
   - ▷ Maintenant, division suivante ; nous avons donc :
   $$X^3 - 2X^2 - X + 2 = \left(\frac{X}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(2X^2 - 6X + 4\right)$$

   Ainsi, un pgcd de $A = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$ et $B = X^3 - 2X^2 - X + 2$ est $2X^2 - 6X + 4$ et si nous utilisons un polynôme normalisé, ce pgcd est $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$

Nous voyons ainsi, qu'il n'y a pas qu'un seul pgcd, mais, plusieurs, à une constante multiplicative près. Si nous cherchons l'unicité, il faut normaliser ce polynôme. L'unicité de ce pgcd est donc liée à la forme du polynôme.

Exercice 11 :

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ *où* $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$.

Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *une racine rationnelle de* P *avec* p *et* q *premiers entre eux.*

1. *Montrer que* q *divise* a_n *et que* p *divise* a_0

   Nous supposons $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$; alors :
   $$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p^n}{q^n}\right) + a_{n-1}\left(\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right) + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$
   En multipliant par q^n, nous obtenons :
   $$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

⇒ Dès lors, nous avons $a_n p^n = -q\left(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right)$.
Donc q divise le produit $a_n p^n$ et, si q est premier avec p, alors q est premier avec p^n. D'après le lemme de Gauss, q divise a_n

⇒ De même, nous avons $p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1}\right) = -a_0 q^n$.
Donc p divise le produit $a_0 q^n$ et, si p est premier avec q, alors p est premier avec q^n. D'après le lemme de Gauss, p divise a_0

2. *Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, le nombre entier $p - mq$ divise $P(m)$*

   Soit $m \in \mathbb{Z}$.
   Alors
   $$q^n P(m) = a_n q^n m^n + a_{n-1} q X^{m-1} + \cdots + a_1 m + a_0$$
   Et :
   $$\begin{aligned} q^n P(m) = &\ q^n P(m) - q^n P\left(\frac{p}{q}\right) \\ = &\ a_n\left(q^n m^n - p^n\right) + a_{n-1}\left(q^n m^{n-1} - p^{n-1}q\right) m^{m-1} + \cdots + a_1 q^{n-1}(mq - p) \end{aligned}$$
   De l'identité $X^n - Y^n = (X - Y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k Y^{n-k}\right)$, nous concluons :
   $$(qm)^j - p^j = ((qm) - p)\left(\sum_{k=0}^{j-1} (qm)^k p^{j-k}\right) = ((qm) - p)\, Q_j(m, p, q)$$
   Et donc :
   $$q^n P(m) = ((qm) - p)\left(a_n Q_n(m, p, q) + a_{n-1} Q_{m-1}(m, p, q) + \cdots + a_1 q^{n-1}\right)$$
   Nous voyons, ici, que $((qm) - p)$ divise le produite $q^n P(m)$
   Si p est premier avec q, alors $(qm) - p$ est premier avec q^n ; d'après le lemme de Gauss, $(qm) - p$ divise $P(m)$

3. *Déterminer les racines rationnelles des polynômes :*

   (a) $P_1 = X^3 - 6X^2 + 15X - 14$

   Si $\frac{p}{q}$ est une racine rationnelle de P_1, alors q divise 1 et donc $q = 1$. p divise 14 et donc $p = \pm 1$, ou $p = \pm 2$ ou $p = \pm 7$ ou $p = \pm 14$
   Par calcul, nous obtenons que la seule racine rationnelle est $x_0 = 2$

   (b) $P_2 = X^5 - 2X^4 - 4X^3 + 4X^2 - 5X + 6$

   Nous faisons la même démarche pour P_2 et nous trouvons comme solutions rationnelles de P_1, $x_0 = 1$, $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$

4. *Déduire du 1. que si $a_n = 1$ (c'est à dire si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire), les racines réelles de P sont soit entières, soit irrationnelles.*

   Dans cette question, $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire, c'est à dire que $a_n = 1$ et que donc $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$.
   Toute racine rationnelle de P est, en fait, entière. Donc, toute racine de P est soit entière, soit irrationnelle.

Exercice 12 :

1. *Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, alors $P + \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$ et $P \times \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$*

   Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec, pour tout $k = 1, \cdots, n$, $a_k \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$.

   Alors $\overline{P}(X) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k$

▷ Regardons $P + \overline{P}$

$$P(X) + \overline{P}(X) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k\right) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + \overline{a_k}) X^k$$

Pour tout $k = 1, \cdots, n$, nous avons $a_k + \overline{a_k} \in \mathbb{R}$ et donc $P + \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$

▷ Maintenant, regardons le produit $P \times \overline{P}$

$$P \times \overline{P}(X) = P(X) + \overline{P}(X) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k\right) = \sum_{p=0}^{2n} b_p X^p$$

Où, par définition, $b_p = \sum_{i+j=p} a_i \overline{a_j}$ en précisant que $a_j = 0$ si $j > n$ ou $j < 0$.

Il faut donc regarder de plus près l'expression de b_p

⋆ Si $p \leqslant n$, alors $b_p = \sum_{i=0}^{p} a_i \overline{a_{p-i}}$ et si $p \geqslant n+1$, alors $b_p = \sum_{i=p-n}^{n} a_i \overline{a_{p-i}}$.

⋆ Il faut aussi remarquer que, si $p \leqslant n$, $b_p = \sum_{i=0}^{p} a_i \overline{a_{p-i}} = \sum_{i=0}^{p} a_{p-i} \overline{a_i}$. Alors :

$$\overline{b_p} = \overline{\sum_{i=0}^{p} a_i \overline{a_{p-i}}} = \sum_{i=0}^{p} \overline{a_i \overline{a_{p-i}}} = \sum_{i=0}^{p} \overline{a_i} a_{p-i} = b_p$$

Comme $\overline{b_p} = b_p$, nous en concluons que, si $p \leqslant n$, alors $b_p \in \mathbb{R}$

⋆ Remarquons, à nouveau, que, si $p \geqslant n+1$, alors $b_p = \sum_{i=p-n}^{n} a_i \overline{a_{p-i}} = \sum_{i=p-n}^{n} \overline{a_i} a_{p-i}$

Et alors :

$$\overline{b_p} = \overline{\sum_{i=p-n}^{n} a_i \overline{a_{p-i}}} = \sum_{i=p-n}^{n} \overline{a_i \overline{a_{p-i}}} = \sum_{i=0}^{p} \overline{a_i} a_{p-i} = b_p$$

Comme $\overline{b_p} = b_p$, nous en concluons que, si $p \geqslant n+1$, alors $b_p \in \mathbb{R}$

Ainsi, pour tout p, $b_p \in \mathbb{R}$ et donc $P \times \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$

2. *Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ $\widetilde{\overline{P}}(\overline{z}) = \overline{\widetilde{P(z)}}$*

Rappelons que $\widetilde{P}$ désigne la fonction associée au polynôme P et que $\widetilde{P(z)}$ désigne aussi la valeur de la fonction $\widetilde{P}$ en P.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$\widetilde{\overline{P}}(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \overline{\widetilde{P(z)}}$$

Nous avons donc bien pour tout $z \in \mathbb{C}$ $\widetilde{\overline{P}}(\overline{z}) = \overline{\widetilde{P(z)}}$

3. *Montrer que, pour $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{Q} \in \mathbb{C}[X]$, les 2 propositions suivantes sont équivalentes :*

⇒ P est divisible par Q *⇒ $\overline{P}$ est divisible par $\overline{Q}$*

La résolution de cet exercice repose sur la propriété $\overline{P \times Q} = \overline{P} \times \overline{Q}$.

P est divisible par Q si et seulement si, il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = QR$ et donc :

$$P = QR \Longleftrightarrow \overline{P} = \overline{QR} \Longleftrightarrow \overline{P} = \overline{Q}\overline{R}$$

Et donc $\overline{P}$ est divisible par $\overline{Q}$.

Ayant procédé par équivalences, nous avons équivalence entre les 2 propositions

Exercice 13 :

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P(X) = X^4 + 1$

   Les racines de ce polynômes sont les racines 4-ièmes de -1.

   Si θ est l'argument d'une racine de -1, nous avons $4\theta = \pi + 2k\pi \iff \theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ avec $k = 0, \cdots, 3$, c'est à dire, qu'en fait :
   $$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{4} \text{ avec } k = 0, \cdots, 3$$
   Il y a donc bien 4 racines à ce polynôme :
   $$x_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad x_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad x_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -x_0 = \overline{x_1} \quad x_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = -x_1 = \overline{x_0}$$
   Nous obtenons ainsi la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:
   $$\begin{aligned} P(X) = X^4 + 1 = & \left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) \\ = & \prod_{k=0}^{3}\left(X - e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}\right) \end{aligned}$$
   Puis, dans $\mathbb{R}[X]$:
   $$\begin{aligned} P(X) = & \ X^4 + 1 = \left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \\ = & \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right) \end{aligned}$$
   La factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est donc $P(X) = \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)$

2. $P(X) = X^6 - 1$

   Les racines de ce polynômes sont les racines 6-ièmes de 1.

   Si θ est l'argument d'une racine de 1, nous avons $6\theta = 2k\pi \iff \theta = \dfrac{k\pi}{3}$ avec $k = 0, \cdots, 5$.

   Il y a donc bien 6 racines à ce polynôme :
   $$x_0 = 1 \quad x_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad x_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j \quad x_3 = -1 \quad x_4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \overline{x_2} = j^2 = \overline{j} \quad x_5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \overline{x_1}$$
   Nous obtenons ainsi la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:
   $$\begin{aligned} P(X) = X^6 - 1 = & \ (X-1)(X+1)\left(X - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)e^{i\frac{4\pi}{3}}\left(X - e^{i\frac{5\pi}{3}}\right) \\ = & \prod_{k=0}^{5}\left(X - e^{i\frac{k\pi}{3}}\right) \end{aligned}$$
   Puis, dans $\mathbb{R}[X]$:
   $$\begin{aligned} P(X) = & \ X^6 - 1 = (X-1)(X+1)\left(X - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)e^{i\frac{4\pi}{3}}\left(X - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \\ = & \ (X-1)(X+1)\left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 + X + 1\right) \end{aligned}$$
   La factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est donc $P(X) = (X-1)(X+1)\left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 + X + 1\right)$

3. $P(X) = X^8 + X^4 + 1$

   En faisant le changement de variables $U = X^4$, nous obtenons $U^2 + U + 1$ et $U^2 + U + 1 = 0$ si et seulement si $U = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$ ou $U = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \overline{j} = j^2$

   Et donc $X^4 = j$ ou $X^4 = j^2$

- ▷ Nous avons $\arg(j) = \dfrac{2\pi}{3}$ et si θ est l'argument de X, nous avons :

$$4\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

Nous avons ainsi 4 racines X_k pour $k = 0, \cdots, 3$

$$X_0 = e^{\frac{i\pi}{6}} \quad X_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j \quad X_2 = e^{\frac{7i\pi}{6}} = -X_0 \quad X_3 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = -X_1 = -j$$

- ▷ Nous avons $\arg\left(j^2\right) = \dfrac{4\pi}{3}$ et si θ est l'argument de X, nous avons :

$$4\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$$

Nous avons ainsi 4 racines X_k pour $k = 4, \cdots, 7$

$$X_4 = e^{\frac{i\pi}{3}} = \overline{X_3} \quad X_5 = e^{\frac{5i\pi}{6}} = \overline{X_2} \quad X_6 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -X_4 = \overline{X_1} = \overline{j} \quad X_7 = e^{\frac{11i\pi}{6}} = \overline{X_0}$$

D'où la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = X^8 + X^4 + 1 = \prod_{k=0}^{3} \left(X - e^{\frac{i(3k+1)\pi}{6}}\right)\left(X - e^{\frac{i(3k+2)\pi}{6}}\right)$$

Et dans $\mathbb{R}[X]$

$$P(X) = X^8 + X^4 + 1 = \left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{3}X + 1\right)\left(X^2 + X + 1\right)\left(X^2 - \sqrt{3}X + 1\right)$$

Exercice 14 :

Montrer que $P(X) = X(X+a)(X+2a)(X+3a)+a^4$ est un carré dans $\mathbb{K}[X]$. En déduire une décomposition de $Q(X) = X(X+1)(X+2)(X+3) - 8$ en produit.

- ▷ En développant, nous avons $P(X) = X^4 + 6aX^3 + 11a^2X^2 + 6a^3X + a^4$.
Si c'est un carré, ce sera le carré d'un polynôme de degré 2 dont l'aspect ne peut être que du type $X^2 + \beta X + a^2$.
Par calcul, nous avons :

$$\left(X^2 + \beta X + a^2\right)^2 = X^4 + 2\beta X^3 + \left(\beta^2 + 2a^2\right) X^3 + a^2\left(2a^2\beta\right) X + a^4$$

Et en identifiant, nous obtenons $\beta = 3a$
D'où $X(X+a)(X+2a)(X+3a) + a^4 = \left(X^2 + 3aX + a^2\right)^2$
- ▷ Maintenant, il nous faut regarder $Q(X)$.
D'après ce que nous venons de montrer, nous avons (avec $a = 1$) :

$$X(X+1)(X+2)(X+3) + 1 = \left(X^2 + 3X + 1\right)^2$$

Et donc

$$\begin{aligned} Q(X) = {} & X(X+1)(X+2)(X+3) - 8 = X(X+1)(X+2)(X+3) + 1 - 9 \\ = {} & \left(X^2 + 3X + 1\right)^2 - 9 = \left(X^2 + 3X + 1 + 3\right)\left(X^2 + 3X + 1 - 3\right) \\ = {} & \left(X^2 + 3X + 4\right)\left(X^2 + 3X - 2\right) \end{aligned}$$

- ▷ Remarquons que le polynôme $\left(X^2 + 3X + 4\right)$ est irréductible dans $\mathbb{R}$ alors que

$$\left(X^2 + 3X - 2\right) = \left(X - \frac{3 - \sqrt{17}}{2}\right)\left(X - \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)$$

⋆ Ainsi, une décomposition de Q dans $\mathbb{R}[X]$ est donnée par :

$$Q(X) = \left(X^2+3X+4\right)\left(X-\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(X-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$$

⋆ Puisque $\left(X^2+3X+4\right) = \left(X+\frac{3-i\sqrt{7}}{2}\right)\left(X+\frac{3+i\sqrt{7}}{2}\right)$, la décomposition de Q dans $\mathbb{C}[X]$ est donnée par :

$$Q(X) = \left(X+\frac{3-i\sqrt{7}}{2}\right)\left(X+\frac{3+i\sqrt{7}}{2}\right)\left(X-\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(X-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$$

Exercice 15 :

On note $D : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$ l'application définie par

$$D(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

1. *Montrez que D est bien une application linéaire .*

   Montrer la linéarité ne pose pas de difficulté
   Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned} D(\lambda P+\mu Q)(X) = &\ (\lambda P+\mu Q)(X+1) - (\lambda P+\mu Q)(X) \\ = &\ (\lambda P)(X+1) + (\mu Q)(X+1) - (\lambda P)(X) - (\mu Q)(X) \\ = &\ \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) \\ = &\ \lambda P(X+1) - \lambda P(X) + \mu Q(X+1) - \mu Q(X) \\ = &\ \lambda[P(X+1) - P(X)] + \mu[Q(X+1) - Q(X)] \\ = &\ \lambda D(P)(X) + \mu D(Q)(X) \end{aligned}$$

   Nous avons donc bien, dans $\mathbb{R}[X]$, $D(\lambda P+\mu Q) = \lambda D(P) + \mu D(Q)$.
   D est donc bien linéaire

2. *Déterminer la matrice A de D dans la base canonique $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$*

   Nous allons rechercher les images par D de chacun des vecteurs de base
   - ▷ $D(e_0)(X) = e_0(X+1) - e_0(X) = 1-1 = 0$
   - ▷ $D(e_1)(X) = e_1(X+1) - e_1(X) = X+1-X = 1 = e_0(X)$
   - ▷ $D(e_2)(X) = e_2(X+1) - e_2(X) = (X+1)^2 - X^2 = 2X+1 = e_0(X) + 2e_1(X)$
   - ▷ $D(e_3)(X) = e_3(X+1) - e_3(X) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^2+3X+1 = e_0(X) + 3e_1(X) + 3e_2(X)$
   - ▷ Et le calcul de $D(e_4)$:

$$\begin{aligned} D(e_4)(X) = &\ e_4(X+1) - e_4(X) = (X+1)^4 - X^4 = 4X^3+6X^2+4X+1 \\ = &\ e_0(X) + 4e_1(X) + 6e_2(X) + 4e_3(X) \end{aligned}$$

   Et donc la matrice A de D est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *Soit la famille de vecteurs $\mathcal{B} = \{1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3)\}$.*
   Montrez que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$

   Nous appelons $f_0 = e_0$, $f_1 = e_1$, $f_2 = -e_1+e_2$, $f_3 = 2e_1-3e_2+e_3$ et $f_4 = -6e_1+11e_2-6e_3+e_4$.

Alors, $\mathcal{B} = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ et le déterminant de $\mathcal{B}$ dans la base canonique est :

$$\det \mathcal{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

La famille $\mathcal{B}$ forme donc une famille libre et est une base de $\mathbb{R}_4[X]$

4. *Déterminer les matrices de passage entre la base canonique et $\mathcal{B}$*

   ⋆ Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique.
   Cette matrice nous donnera les coordonnées d'un vecteur U dans la base canonique, connaissant les coordonnées de ce vecteur U dans la base $\mathcal{B}$. Les colonnes de cette matrice P sont formées des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base canonique. Nous avons donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   ⋆ De la même manière, la matrice de passage de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$ nous donnera les coordonnées d'un vecteur U dans la base $\mathcal{B}$, connaissant les coordonnées de ce vecteur U dans la base canoniques. Les colonnes de cette matrice sont formées des coordonnées des vecteurs de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$. Il faut remarquer que cette matrice est P^{-1}. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} e_0 &= f_0 \\ e_1 &= f_1 \\ e_2 &= f_2 + e_1 = f_1 + f_2 \\ e_3 &= f_3 + 3e_2 - 2e_1 = -2f_1 + 3(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + 3f_2 + f_3 \\ e_4 &= f_4 + 6f_1 - 11(f_1 + f_2) + 6(f_1 + 3f_2 + f_3) = f_1 + 7f_2 + 6f_3 + f_4 \end{aligned}$$

   D'où nous obtenons :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. *Déterminer la matrice A_1 de D dans la base $\mathcal{B}$.*

   ⇒ En revenant aux matrices de changement de bases, nous avons :

$$\{\mathbb{R}_4[X], \mathcal{B}\} \xrightarrow{P} \{\mathbb{R}_4[X], Can\} \xrightarrow{A} \{\mathbb{R}_4[X], Can\} \xrightarrow{P^{-1}} \{\mathbb{R}_4[X], \mathcal{B}\}$$

   Et nous avons $A_1 = P^{-1}AP$, et pour trouver, aux calculs!!

   ⇒ Une autre solution, tout aussi laborieuse et moins élégante est de calculer les $D(f_i)$ pour $i = 0, \cdots, 3$ dans la base $\mathcal{B}$

   ⋆ $D(f_0) = D(e_0) = 0$

   ⋆ $D(f_1) = D(e_1) = e_0 = f_0$

   ⋆ $D(f_2) = D(-e_2 + e_1) = -D(e_2) + D(e_1) = -(e_0 + 2e_1) + e_0 = -2e_1 = -2f_1$

   ⋆ Le calcul de $D(f_3)$ semble plus long

$$\begin{aligned} D(f_3) = &\ D(2e_1 - 3e_2 + e_3) = 2D(e_1) - 3D(e_2) + D(e_3) \\ = &\ 2e_0 - 3(e_0 + 2e_1) + (e_0 + 3e_1 + 3e_2) = -3e_1 + 3e_2 = 3f_2 \end{aligned}$$

   ⋆ Et pour terminer, celui de $D(f_4)$:

$$\begin{aligned} D(f_4) = &\ D(-6e_1 + 11e_2 - 6e_3 + e_4) = -6D(e_1) + 11D(e_2) - 6D(e_3) + D(e_4) \\ = &\ -6e_0 + 11(e_0 + 2e_1) - 6(e_0 + 3e_1 + 3e_2) + (e_0 + 4e_1 + 6e_2 + 4e_3) \\ = &\ 8e_1 - 12e_2 + 4e_3 = 4f_3 \end{aligned}$$

D'où la matrice A_1 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. *Calculez A^n.*

   De $A_1 = P^{-1}AP$ nous tirons $A = PA_1P^{-1}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous déduisons $A^n = PA_1^nP^{-1}$. Et donc :

   ▷

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Et donc $A_1^5 = \mathcal{O}$

   ▷ Si $n \geqslant 5$, alors $A_1^n = \mathcal{O}$ et, en particulier $A^n = \mathcal{O}$

Exercice 17 :

Dans cet exercice, nous allons confondre polynôme et fonctions polynôme

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, nous considérons l'application :

$$\begin{cases} g : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ \qquad P & \longmapsto & g(P) \text{ où } \widetilde{g(P)}(x) = (1+x)P'(x) + 3\displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t - xP(x) \end{cases}$$

1. *Montrer que g est une application linéaire.*

   La démonstration de la linéarité est simple ; elle est liée à la linéarité de la dérivation et de l'intégration.

2. *Déterminer la matrice A de g dans la base canonique* $\{1, X, X^2\}$.

   ▷ Appelons $e_0(X) = 1$. Alors :

$$g(e_0)(x) = (1+x)e_0'(x) + 3\int_0^x \mathrm{d}t - xe_0(x) = 3x - x = 2x = 2e_1(x)$$

   ▷ Appelons $e_1(X) = X$. Alors :

$$\begin{aligned} g(e_1)(x) = & \ (1+x)e_1'(x) + 3\int_0^x e_1(t)\,\mathrm{d}t - xe_1(x) \\ = & \ (1+x) + 3\int_0^x t\,\mathrm{d}t - x^2 = (1+x) + 3\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x - x^2 = (1+x) + \frac{3x^2}{2} - x^2 \\ = & \ \frac{x^2}{2} + x + 1 \end{aligned}$$

   ▷ Pour terminer, appelons $e_1(X) = X^2$. Alors :

$$\begin{aligned} g(e_2)(x) = & \ (1+x)e_2'(x) + 3\int_0^x e_2(t)\,\mathrm{d}t - xe_2(x) \\ = & \ (1+x) + 3\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t - x^3 = (1+x) + 3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x - x^3 = (1+x) + x^3 - x^3 \\ = & \ x + 1 \end{aligned}$$

D'où nous obtenons la matrice de g :

$$\mathcal{M}_{\{1,X,X^2\}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3. *Montrer que g est bijective.*

   Nous calculons le déterminant de la matrice. S'il est non nul, alors g est bijective

   $$\det \mathcal{M}_{\{1,X,X^2\}}(g) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -2 \times \frac{-1}{2} = 1$$

   Comme $\det \mathcal{M}_{\{1,X,X^2\}}(g) \neq 0$, g est bijective.

4. *Résoudre dans $\mathbb{R}_2[X]$ l'équation*

   $$(1+x)P'(x) + 3\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t - xP(x) = x^2 - x + 1$$

   L'objet de cette question est de trouver $F \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $g(F)(x) = x^2 - x + 1$.
   Supposons que $F(x) = ax^2 + bx + c$.
   Utilisons le calcul matriciel pour connaître $g(F)$

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+a \\ 2c+b+a \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

   Nous devons donc trouver $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que :

   $$\left\{\begin{aligned} b+a &= 1 \\ 2c+b+a &= -1 \\ \frac{b}{2} &= 1 \end{aligned}\right.$$

   D'où nous tirons $b = 2$, $a = -1$ et $c = -1$ et donc $F(x) = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2$

Exercice 19 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_n(X) = (X+1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1$

1. *Démontrer que le polynôme $X^2 + X$ divise le polynôme P_n*

   Il est facile de démontrer que $P_n(-1) = P_n(0) = 0$ et que donc P_n est factorisable (ou divisible) par $X(X+1) = X^2 + X$

2. *Former le quotient de la division de P_n par $X^2 + X$*

   Nous avons $(X+1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^k X^k = 1 + \sum_{k=1}^{2n} \mathrm{C}_{2n+1}^k X^k + X^{2n+1}$, de telle sorte que :

   $$P_n(X) = (X+1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1 = \sum_{k=1}^{2n} \mathrm{C}_{2n+1}^k X^k = X\left(\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{C}_{2n+1}^k X^{k-1}\right)$$

   Maintenant, il faut trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{C}_{2n+1}^k X^{k-1} = (X+1)Q(X)$

⇒ En utilisant les symétries classiques des coefficients binômiaux, nous avons :

$$\mathrm{C}_{2n+1}^{k} = \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1-k}$$

Et nous avons alors :

$$\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} \left(X^{k-1} + X^{2n-k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} X^{k-1} \left(1 + X^{2(n-k)+1}\right)$$

⇒ Regardons de manière plus précise $1 + X^{2(n-k)+1}$.
De manière classique, en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, nous avons :

$$1 + X^{2(n-k)+1} = 1 - (-X)^{2(n-k)+1} = (1 - (-X)) \sum_{j=0}^{2(n-k)} (-X)^j = (1+X) \sum_{j=0}^{2(n-k)} (-X)^j$$

⇒ En « réinjectant » l'identité trouvée, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} X^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} X^{k-1} \left(1 + X^{2(n-k)+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} X^{k-1} \left((1+X) \sum_{j=0}^{2(n-k)} (-X)^j\right) \\ &= (1+X) \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} X^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{2(n-k)} (-X)^j\right)\end{aligned}$$

Nous venons donc de trouver Q ; nous avons $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} X^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{2(n-k)} (-X)^j\right)$

3. *-1 est-il racine double de P_n ?*

Si -1 est racine double de P_n alors -1 est racine de P_n' ; or :

$$P_n'(X) = (2n+1)\left((X+1)^{2n} - X^{2n}\right)$$

Et $P_n'(-1) = (2n+1) - 1 = 2n$. -1 n'est donc pas racine de P_n' et -1 n'est sûrement pas racine double de P_n

Exercice 20 :

Trouver $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$ pour que $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$

Ceci signifie que 1 est racine d'ordre 2 de $P_n(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$.
Nous devons donc avoir $P_n(1) = P_n'(1) = 0$ et $P_n''(1) \neq 0$

- ▷ Tout d'abord, $P_n(1) = a + b + 1$ et nous obtenons une première relation : $a + b + 1 = 0$
- ▷ Ensuite $P_n'(X) = (n+1)aX^n + nbX^{n-1}$ et donc $P_n'(1) = 0 \iff (n+1)a + nb = 0$
- ▷ Nous obtenons alors un système d'équations :

$$\begin{cases} a + b = & -1 \\ (n+1)a + nb = & 0 \end{cases} \iff a = n \text{ et } b = -(n+1)$$

Nous avons donc $P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$

- ▷ Nous retrouvons :
  - ⋆ $P_n(1) = 0$
  - ⋆ $P_n'(X) = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$ et $P_n'(1) = n(n+1) - n(n+1) = 0$
  - ⋆ $P_n''(X) = n^2(n+1)X^{n-1} - n\left(n^2-1\right)X^{n-2}$ et

$$P_n''(1) = n^2(n+1) - n\left(n^2-1\right) = n^3 + n^2 - n^3 + n = n^2 + n$$

et donc $P_n''(1) \neq 0$

$(X-1)^2$ divise donc $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$

6.10.2 Correction des exercices complémentaires

Exercice 21 :

Vrai ou faux

1. *$\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$*

   C'est faux, puisque si cela était, le polynôme $X+1$, élément de $\mathbb{R}[X]$, serait, multiplié par le nombre complexe $1+i$, un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, ce qui est faux

2. *Deux polynômes unitaires ayant les mêmes racines avec le même ordre de multiplicité sont égaux.*

   C'est faux, Voyons, par exemple les polynômes $P(X) = (X-2)^7(X+1)^3\left(X^2+X+1\right)$ et $Q(X) = (X-2)^7(X+1)^3\left(2X^2-X+1\right)$ ont les mêmes racines dans $\mathbb{R}[X]$ mais ne sont pas égaux.
   C'est, par contre, vrai dans $\mathbb{C}[X]$

3. *Le polynôme $B \in \mathbb{K}[X]$ étant fixé, l'application qui à $A \in \mathbb{K}[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de A par B est un projecteur.*

   C'est vrai,
   Considérons l'application P_B définie par :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} P_B : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ A & \longmapsto & P_B(A) = R \text{ où } R \text{ est tel que } A = BQ + R \text{ où } \deg R < \deg B \end{array}\right.$$

   $\Rightarrow$ Nous pouvons écrire, en fait, $A = BQ + P_B(A)$
   $\Rightarrow$ Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $A_1 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A = BQ + R$ et $A_1 = BQ_1 + R_1$ avec $\deg R < \deg B$ et $\deg R_1 < \deg B$.
   Alors, $A + A_1 = B(Q+Q_1) + R + R_1$ et $\deg(R+R_1) \leqslant \max(\deg R, \deg R_1) \leqslant \deg B$.
   Ainsi, $P_B(A+A_1) = P_B(A) + P_B(A_1)$
   $\Rightarrow$ On montre facilement que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $P_B(\lambda A) = \lambda P_B(A)$
   P_B est donc une application linéaire.
   C'est aussi un projecteur.
   Il faut démontrer que $P_B \circ P_B = P_B$.
   Ce n'est pas très difficile ! !... Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. Alors,
   Si $A = BQ + R$, c'est à dire $A = BQ + P_B(A)$ alors $R = B \times \mathcal{O} + R$ et donc $P_B(R) = R \Longleftrightarrow P_B[P_B(A)] = R = P_B(A)$

4. *Le polynôme $1 + X^4$ étant somme de 2 carrés n'est pas décomposable en produit de deux polynômes du second degré.*

   Bien entendu, **C'est faux**
   Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes du premier degré et les polynômes du second degré à discriminant néagatif.
   Le polynôme $1 + X^4$ est donc réductible ou factorisable dans $\mathbb{R}[X]$. D'ailleurs, Le polynôme $1 + X^4 = \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)$

5. *Deux polynômes de degré n qui prennent les mêmes valeurs en n points sont égaux.*

   C'est faux
   Pour les polynômes de degré n, il faut $n+1$ points.

6. *La somme de deux polynômes de degré n est un polynôme de degré n.*

   C'est trivialement faux
   Il suffit de choisir $P(X) = X^n + 4$ et $Q(X) = -X^n + X^2 + 4$; Alors $P(X) + Q(X) = X^2 + 5$.
   De manière générale, $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$

7. *Si la somme des coefficients d'un polynôme est nulle, il est factorisable par $X - 1$.*

   C'est vrai
   Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors,$P(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

Ainsi, si $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$, alors, $P(1) = 0$ et P est factorisable par $X - 1$

8. *Le polynôme $1 + X + \ldots + X^n$ n'a pas de racine réelle.*

   C'est faux

   Si n est impair, alors -1 est racine du polynôme.

9. *Si le polynôme P est de degré n, alors, la famille $\left\{(P, P', P", \cdots, P^{(n)}\right\}$ des dérivées successives de P est une base de $\mathbb{K}_n[X]$*

   C'est vrai

   Si $\deg P = n$, alors $\deg P^{(k)} = n - k$ et la famille $\left\{(P, P', P", \cdots, P^{(n)}\right\}$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés. D'après le corollaire 6.8.4, elle forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$

10. *Si a est racine d'ordre k d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, alors a annule P et ses k premières dérivées.*

    C'est faux

    a annule P et ses $k-1$ premières dérivées

Calculs sur les polynômes

Exercice 22 :

Montrer que $\left(X^3 + X^2 + X + 1\right)\left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k\right) = X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1$

- Nous avons $X^3 \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^{k+3} = \sum_{k=3}^{2n+3} (-1)^{k-3} X^k = -\sum_{k=3}^{2n+3} (-1)^k X^k$
- De même :$X^2 \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^{k+2} = \sum_{k=2}^{2n+2} (-1)^{k-2} X^k = \sum_{k=2}^{2n+2} (-1)^k X^k$
- Puis $X \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^{k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} X^k = -\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k X^k$

De là,

$$\begin{aligned}
\left(X^3 + X^2 + X + 1\right)\left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k\right) &= -\sum_{k=3}^{2n+3} (-1)^k X^k + \sum_{k=2}^{2n+2} (-1)^k X^k - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k X^k + \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k \\
&= -\left(\sum_{k=3}^{2n} (-1)^k X^k + \left(-X^{2n+1} + X^{2n+2} - X^{2n+3}\right)\right) \\
&\quad + \left(X^2 + \sum_{k=3}^{2n} (-1)^k X^k - X^{2n+1} + X^{2n+2}\right) \\
&\quad - \left(-X + X^2 + \sum_{k=3}^{2n} (-1)^k X^k - X^{2n+1}\right) \\
&\quad + \left(1 - X + X^2 + \sum_{k=3}^{2n} (-1)^k X^k\right) \\
&= \left(X^{2n+1} - X^{2n+2} + X^{2n+3}\right) + \left(X^2 - X^{2n+1} + X^{2n+2}\right) \\
&\quad - \left(-X + X^2 - X^{2n+1}\right) + \left(1 - X + X^2\right) \\
&= X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1
\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Exercice 24 :

Effectuer $(1 + X)\left(1 + X^2\right)\left(1 + X^4\right)\cdots\left(1 + X^{2^n}\right)$

Nous allons appeler $P_n(X) = (1 + X)\left(1 + X^2\right)\left(1 + X^4\right)\cdots\left(1 + X^{2^n}\right) = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + X^{2^k}\right)$

Nous pouvons remarquer que $P_n(X) = \left(1 + X^{2^n}\right) P_{n-1}(X)$
Nous allons faire quelques premiers calculs :

$\Rightarrow$ $P_0(X) = (1 + X)$

$\Rightarrow$ $P_1(X) = (1 + X)\left(1 + X^2\right) = 1 + X + X^2 + X^3$

$\Rightarrow$ $P_2(X) = (1 + X)\left(1 + X^2\right)\left(1 + X^4\right) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + X^7$

Nous pouvons penser que $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\left(2^{n+1}-1\right)} X^k$ et nous allons le démontrer par récurrence.

$\Rightarrow$ **C'est vrai pour** $n = 0$
Il suffit de le vérifier dans les calculs que nous venons de faire. C'est aussi vrai pour $n = 1$ et $n = 2$

$\Rightarrow$ **Supposons que c'est vrai à l'ordre** n c'est à dire que $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\left(2^{n+1}-1\right)} X^k$

$\Rightarrow$ **Démontrons à l'ordre** $n + 1$
Nous savons que $P_n(X) = \left(1 + X^{2^n}\right) P_{n-1}(X)$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(X) = & \left(1 + X^{2^{n+1}}\right) P_n(X) = \left(1 + X^{2^{n+1}}\right)\left(\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k\right) \\
= & \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k + X^{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k\right) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k + \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^{k+2^{n+1}} \\
= & \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k + \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}+2^{n+1}-1} X^k = Sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k + \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1} X^k = \sum_{k=0}^{2^{n+2}-1} X^k
\end{aligned}$$

Nous avons donc $P_{n+1}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n+2}-1} X^k = \sum_{k=0}^{2^{(n+1)+1}-1} X^k$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\left(2^{n+1}-1\right)} X^k$

Exercice 25 :

Factoriser $Q_n(X) = 1 - \frac{1}{1!}X + \frac{1}{2!}X(X-1) + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}X(X-1)\cdots(X-n+l)$

Tout d'abord, remarquons que, pour $n \geqslant 1$, nous avons $Q_n(X) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X - j)$ et $Q_0(X) = 1$.

En particulier, pour tout $n \geqslant 1$, $Q_n(X) = Q_{n-1}(X) + \dfrac{(-1)^n}{n!} \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} (X - j)$

Comme dans l'exercice précédent, nous allons faire quelques premiers calculs :

$\Rightarrow$ $Q_1(X) = (1 - X)$

$\Rightarrow$ $Q_2(X) = 1 - X + \frac{1}{2}X(X-1) = (1 - X)\left(1 - \frac{X}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - X)(2 - X)$

$\Rightarrow$ $Q_3(X) = \frac{1}{2}(1 - X)(2 - X) - \frac{1}{3!}X(X-1)(X-2) = \frac{1}{3!}(X-1)(X-2)(3-X)$ et donc

$$Q_3(X) = \frac{-1}{3!}(X-1)(X-2)(X-3)$$

Nous pouvons penser que, pour $n \geqslant 1$, $Q_n(X) = \dfrac{(-1)^n}{n!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - k)$ et nous allons le démontrer par récurrence.

⇒ **C'est vrai pour** $n = 1$
Il suffit de le vérifier dans les calculs que nous venons de faire. C'est aussi vrai pour $n = 2$ et $n = 3$

⇒ **Supposons que c'est vrai à l'ordre** n c'est à dire que $Q_n(X) = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-k)$

⇒ **Démontrons à l'ordre** $n+1$
Nous savons que $Q_n(X) = Q_{n-1}(X) + \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(X-j)$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(X) &= Q_n(X) + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(X-k)\\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}(X-k) + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(X-k)\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}(X-k)\left(-(n+1)+X\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n+1}(X-k)
\end{aligned}$$

Nous avons donc $Q_{n+1}(X) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(X-k)$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $Q_n(X) = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-k)$

Exercice 26 :

Trouver $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $(P')^2 = 4P$ où P' est le polynôme dérivé de P

▷ Intéressons nous tout d'abord au degré du polynôme P. Comme $\deg P' = \deg P - 1$ et que $\deg (P')^2 = 2\deg P'$, nous avons l'égalité

$$2(\deg P - 1) = \deg P \iff \deg P = 2$$

▷ On suppose $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors $P'(X) = 2aX + b$ et :

$$(P')^2 = 4P \iff (2aX+b)^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c \iff 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c$$

Et en identifiant, nous obtenons $4a^2 = 4a$, $4ab = 4b$ et $b^2 = 4c$

▷ Nous obtenons donc le système :

$$\begin{cases} 4a^2 = & 4a \\ 4ab = & 4b \\ b^2 = & 4c \end{cases} \iff \begin{cases} a(a-1) = & 0 \\ b(a-1) = & 0 \\ b^2 = & 4c \end{cases}$$

⋆ Si $a = 0$ alors $b = c = 0$ et P est le polynôme nul

⋆ Si $a \neq 0$, alors $a = 1$ et alors $b \in \mathbb{R}$ et $c = \dfrac{b^2}{4}$ et le polynôme P est donc du type :

$$P(X) = X^2 + bX + \frac{b^2}{4} \text{ avec } b \in \mathbb{R}$$

Exercice 27 :

Trouver $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $\left(X^2+1\right)P'' - 6P = 0$ où P'' est le polynôme dérivée seconde de P

→ A l'image de l'exercice que nous venons de résoudre, nous pourrions nous atteler au degré du polynôme P ; nous avons :

$$\deg P'' + 2 = \deg P \iff \deg -2 + 2 = \deg P \iff \deg P = \deg P$$

Ce qui ne nous apporte rien ! !

→ Nous allons utiliser la méthode Bull-Dozer en écrivant $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où n est le degré de P et $a_n \neq 0$

Alors, $P''(X) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2}$ et donc :

$$\begin{aligned}\left(X^2+1\right) P'' &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^k + \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2} \\ &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^k + \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)(k+1) a_{k+2} X^k \\ &= 2a_0 + 6a_1 X + \sum_{k=2}^{n-2} \left[k(k-1) a_k + (k+2)(k+1) a_{k+2}\right] X^k + \\ &\qquad (n-1)(n-2) a_{n-1} X^{n-1} + n(n-1) a_n X^n\end{aligned}$$

Si $\left(X^2+1\right) P'' - 6P = 0 \iff \left(X^2+1\right) P'' = 6P$, nous avons : $6a_n = n(n-1) a_n$, ce qui est équivalent, puisque $a_n \neq 0$, à $6 = n(n-1) \iff n^2 - n - 6 = 0$
La résolution de cette équation du second degré nous donne $n = 3$ et $n = -2$. Comme nous devons avoir $n \in \mathbb{N}$, nous retenons donc $n = 3$.

→ Soit donc P un polynôme de degré 3. Nous avons donc :

$$P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \text{ et } P''(X) = 6aX + 2b$$

D'où, après calculs,

$$\left(X^2+1\right) P'' - 6P = 0 \iff -4bX^2 + 6(a-c) X + (2b - 6d) = 0$$

D'où nous tirons :

$$b = 0 \quad a - c = 0 \quad b - 3d = 0 \iff a = c \quad b = d = 0 \text{ avec } a \in \mathbb{C}$$

Donc $P(X) = a\left(X^3 + X\right)$ avec $a \in \mathbb{C}$
Réciproquement, on vérifie que ce polynôme vérifie $\left(X^2+1\right) P'' - 6P = 0$

Ainsi, l'ensemble des solutions polynômiales de l'équation différentielle du second ordre $\left(x^2+1\right) y'' - 6y = 0$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$.
Le vecteur nul de ce sous-espace vectoriel , qui est donc le polynôme nul, est bien solution de cette équation différentielle

6.10.3 Arithmétique des polynômes

Exercice 28 :

1. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Le reste de la division de P par $(X-1)$ est 3 ; le reste de la division de P par $(X+1)$ est 1 ;le reste de la division de P par $(X-2)$ est 7*
Quel est le reste de la division de P par $(X-1)(X+1)(X-2)$?

Nous allons toujours utiliser le fait que $P(X) = A(X) Q(X) + R(X)$ avec $\deg R < \deg A$
D'après l'énoncé, nous avons donc :

$$\begin{cases} P(X) = & (X-1) Q_1(X) + 3 \\ P(X) = & (X+1) Q_2(X) + 1 \\ P(X) = & (X-2) Q_3(X) + 7 \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} P(1) = & 3 \\ P(-1) = & 1 \\ P(2) = & 7 \end{cases}$$

Dans la division par $(X-1)(X+1)(X-2)$, nous pouvons écrire :

$$P(X) = (X-1)(X+1)(X-2)\,Q_4(X) + aX^2 + bX + c$$

Et donc :

$$\left\{\begin{array}{rl} P(1) = & 3 = a+b+c \\ P(-1) = & 1 = a-b+c \\ P(2) = & 7 = 4a+2b+c \end{array}\right. \quad \text{d'où le système} \quad \left\{\begin{array}{rl} a+b+c = & 3 \\ a-b+c = & 1 \\ 4a+2b+c = & 7 \end{array}\right.$$

D'où nous tirons $a=b=c=1$ et le reste est donc $R(X) = X^2+X+1$

2. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Le reste de la division de P par $\left(X^2+1\right)$ est $X+1$; le reste de la division de P par $(X-1)$ est 4.*
   Quel est le reste de la division de P par $(X-1)\left(X^2+1\right)$?

   La résolution est totalement identique ; nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} P(X) = & \left(X^2+1\right)Q_1(X) + X + 1 \\ P(X) = & (X-1)\,Q_2(X) + 4 \end{array}\right. \quad \text{et donc} \quad \left\{\begin{array}{rl} P(i) = & 1+i \\ P(-i) = & 1-i \\ P(1) = & 4 \end{array}\right.$$

   Dans la division par $(X-1)\left(X^2+1\right)$, nous pouvons écrire :

$$P(X) = (X-1)\left(X^2+1\right)Q(X) + aX^2 + bX + c$$

   Et donc nous obtenons le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} -a+ib+c = & 1+i \\ -a-ib+c = & 1-i \\ a+b+c = & 4 \end{array}\right.$$

   D'où nous tirons $a=1$, $b=1$ et $c=2$ et le reste est donc $R(X) = X^2+X+2$

Exercice 29 :

Soient $P(X) = 3X^3+X+1$ et $Q(X) = 3X^2+2X-1$.
Rechercher $\operatorname{pgcd}(P,Q)$ dans les cas suivants :

1. *$P \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$ et $Q \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$*

   Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$, nous avons $P(X) = X+1$ et $Q(X) = 2X-1 = 2X+2 = 2(X+1)$.
   Ainsi, dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$, $\operatorname{pgcd}(P,Q) = (X+1)$

2. *$P \in \mathbb{Q}[X]$ et $Q \in \mathbb{Q}[X]$*

   On peut remarquer que -1 est racine de Q et donc $Q(X) = (X+1)(3X-1)$
   Or, ni -1, ni $\dfrac{1}{3}$ ne sont racines de P. Donc, P et Q sont premiers entre eux

3. *$P \in \mathbb{Z}[X]$ et $Q \in \mathbb{Z}[X]$*

   Pour $\mathbb{Z}[X]$, le raisonnement est identique ; donc, dans $\mathbb{Z}[X]$, P et Q sont aussi premiers entre eux

Exercice 30 :

Soient $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer dans $\mathbb{R}[X]$, le pgcd des polynômes $X^n - a$ et $X^m - a$

- ▹ Tout d'abord, si $a=0$, c'est terminé : si $n>m$, le pgcd est alors X^m.
- ▹ Si $a \neq 0$ et que $m=n$, ce n'est pas plus difficile !!

Nous allons donc supposer $a \neq 0$ et $n \neq m$; supposons donc $n > m$

1. Soit donc $n>m$. Nous allons effectuer la division euclidienne de (Z^n-1) par (Z^m-1)
   (a) Tout d'abord, si nous effectuons la division euclidienne de n par m, nous obtenons :

$$n = mq_1 + r_1 \text{ où } 0 \leqslant r_1 < m$$

(b) Classiquement, nous avons :

$$(A^{q_1} - 1) = (A - 1)\left(A^{q_1 - 1} + A^{q_1 - 2} + \cdots + A + 1\right)$$

C'est à dire, qu'en remplaçant A par Z^m, nous obtenons :

$$((Z^m)^{q_1} - 1) = (Z^m - 1)\left((Z^m)^{q_1 - 1} + (Z^m)^{q_1 - 2} + \cdots + Z^m + 1\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(Z^{mq_1} - 1) = (Z^m - 1)\left(Z^{mq_1 - m} + Z^{mq_1 - 2m} + \cdots + Z^m + 1\right)$$

(c) Maintenant, multiplions les deux membres par Z^{r_1} :

$$Z^{r_1} \times (Z^{mq_1} - 1) = (Z^m - 1) \times Z^{r_1} \times \left(Z^{mq_1 - m} + Z^{mq_1 - 2m} + \cdots + Z^m + 1\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(Z^{mq_1 + r_1} - Z^{r_1}) = (Z^m - 1)\left(Z^{mq_1 + r_1 - m} + Z^{mq_1 + r_1 - 2m} + \cdots + Z^{m + r_1} + Z^{r_1}\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(Z^n - Z^{r_1}) = (Z^m - 1)\left(Z^{n-m} + Z^{n-2m} + \cdots + Z^{n - m(q_1 - 1)} + Z^{n - mq_1}\right)$$

Puisque

$$n = mq_1 + r_1 \Longleftrightarrow r_1 = n - mq_1 \text{ et donc } m + r_1 = n - m\,(q_1 - 1)$$

(d) Maintenant, nous avons $(Z^n - Z^{r_1}) = (Z^n - 1 + 1 - Z^{r_1}) = (Z^n - 1) - (Z^{r_1} - 1)$, de telle sorte que :

$$(Z^n - 1) = (Z^m - 1)\left(Z^{n-m} + Z^{n-2m} + \cdots + Z^{n - m(q_1 - 1)} + Z^{n - mq_1}\right) + (Z^{r_1} - 1)$$

Nous avons, ici la division euclidienne de $(Z^n - 1)$ par $(Z^m - 1)$

2. D'après l'algorithme d'Euclide, nous pouvons écrire :

$$\text{pgcd}\left((Z^n - 1), (Z^m - 1)\right) = \text{pgcd}\left((Z^m - 1), (Z^{r_1} - 1)\right)$$

(a) En effectuant les divisions successives de n par m, nous avons :

i. D'après le premier point, nous avons $n = mq_1 + r_1$ où $0 \leqslant r_1 < m$ et $\text{pgcd}\,(n, m) = \text{pgcd}\,(m, r_1)$ et donc

$$\text{pgcd}\left((Z^n - 1), (Z^m - 1)\right) = \text{pgcd}\left((Z^m - 1), (Z^{r_1} - 1)\right)$$

ii. En continuant les divisions, nous avons $m = q_2 r_1 + r_2$ où $0 \leqslant r_2 < r_1$ et $\text{pgcd}\,(m, r_1) = \text{pgcd}\,(r_1, r_2)$ et donc

$$\text{pgcd}\left((Z^m - 1), (Z^{r_1} - 1)\right) = \text{pgcd}\left((Z^{r_1} - 1), (Z^{r_2} - 1)\right)$$

C'est à dire $\text{pgcd}\,(n, m) = \text{pgcd}\,(m, r_1) = \text{pgcd}\,(r_1, r_2)$ et donc

$$\text{pgcd}\left((Z^n - 1), (Z^m - 1)\right) = \text{pgcd}\left((Z^m - 1), (Z^{r_1} - 1)\right) = \text{pgcd}\left((Z^{r_1} - 1), (Z^{r_2} - 1)\right)$$

(b) En itérant ces divisions successives, nous obtenons :

$$\text{pgcd}\left((Z^n - 1), (Z^m - 1)\right) = \left(Z^{\text{pgcd}(n,m)} - 1\right)$$

(c) En particulier, si m et n sont premiers entre eux, nous avons $\text{pgcd}\left((Z^n - 1), (Z^m - 1)\right) = (Z - 1)$

3. Maintenant, quel est le pgcd de $X^n - a^n$ et $X^m - a^m$?

(a) Nous avons$X^n - a^n = a^n \left[\left(\dfrac{X}{a}\right)^n - 1\right]$ et donc

$$\text{pgcd}\left((X^n - a^n), (X^m - a^m)\right) = \text{pgcd}\left(\left[\left(\frac{X}{a}\right)^n - 1\right], \left[\left(\frac{X}{a}\right)^m - 1\right]\right)$$

(b) Si nous posons $Z = \dfrac{X}{a}$, nous pouvons écrire

$$\text{pgcd}\left(\left[\left(\frac{X}{a}\right)^n - 1\right], \left[\left(\frac{X}{a}\right)^m - 1\right]\right) = \left(\frac{X}{a}\right)^{\text{pgcd}(n,m)} - 1$$

(c) Et nous avons donc $\text{pgcd}\,(X^n - a^n, X^m - a^m) = X^{\text{pgcd}(n,m)} - a^{\text{pgcd}(n,m)}$

Exercice 31 :

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivants :

1. $P_1(X) = X^6 + 1$

   Il s'agit donc de rechercher les racines 6-ièmes de -1. Nous avons :

   $$X^6 = -1 \iff X^6 = e^{i(\pi+2k\pi)}$$

   Nous obtenons facilement 6 racines, indicées par $k = 0, \cdots, 5$ $X_k = e^{i\frac{(\pi+2k\pi)}{6}}$:

   $$\begin{aligned}
   X_0 &= e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\
   X_1 &= e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\
   X_2 &= e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\
   X_3 &= e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{3}\right)} = -e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} = \overline{X_2} \\
   X_4 &= e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \\
   X_5 &= e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} = \overline{X_0}
   \end{aligned}$$

   D'où les factorisations de P_1
   - ▷ Dans $\mathbb{C}[X]$:

   $$P_1(X) = X^6 + 1 = \left(X - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)(X - i)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(X + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)(X + i)\left(X - e^{i\frac{11\pi}{6}}\right)$$

   - ▷ Dans $\mathbb{R}[X]$ *(il faut regrouper les racines complexes et leurs conjugués)* :

   $$P_1(X) = X^6 + 1 = \left(X^2 + 1\right)\left(X^2 - X\sqrt{3} + 1\right)\left(X^2 + X\sqrt{3} + 1\right)$$

2. $P_2(X) = X^6 - 1$

   Tout d'abord, $X^6 - 1 = \left(X^3 - 1\right)\left(X^3 + 1\right)$
   - ▷ Et donc $X^3 - 1 = (X - 1)\left(X^2 + X + 1\right) = (X - 1)(X - j)\left(X - \overline{j}\right)$
   - ▷ Ensuite $X^3 + 1 = (X + 1)\left(X^2 - X + 1\right) = (X + 1)\left(X - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$

   D'où les factorisations de P_2
   - ▷ Dans $\mathbb{R}[X]$:

   $$P_2(X) = X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)\left(X^2 + X + 1\right)\left(X^2 - X + 1\right)$$

   - ▷ Dans $\mathbb{C}[X]$:

   $$P_2(X) = X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - j)\left(X - \overline{j}\right)\left(X - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$$

3. $P_3(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$

   $\Longrightarrow$ Il y a un changement de variables évident : $U = X^3$ et nous obtenons un nouveau polynôme en U

   $$P_{3,1}(U) = 1 + U + U^2 + U^3$$

   On a vu en L_0 que les racines d'un tel polynôme sont les racine 4-ièmes de 1 sauf 1
   Les racines de $P_{3,1}$ sont donc $U_1 = -1$, $U_2 = i$ et $U_3 = -i$.
   Nous devons, maintenant, rechercher les racines cubiques de U_1, U_2 et U_3.
   - ▷ Il est assez facile de voir que les racines cubiques de -1 sont -1, $-j$ et $-j^2$
   - ▷ Sachant que $i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$, les racines cubiques de i sont $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $-i$

▷ Et donc, les racines cubiques de $-i$ sont i, $-e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $-e^{i\frac{5\pi}{6}}$

D'où les factorisations de P_3

▷ Dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P_3(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1 = (X+1)(X+j)(X+j^2)(X+i)\left(X - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\cdots (X-i)\left(X + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X + e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$$

▷ Dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P_3(X) = X^9+X^6+X^3+1 = (X+1)\left(X^2+1\right)\left(X^2+X+1\right)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right)$$

$\Longrightarrow$ Une autre façon de voir les choses est d'écrire :

$$P_3(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1 = 1 + X^3 + \left(X^3\right)^2 + \left(X^3\right)^3 = \frac{1 - \left(X^3\right)^4}{1 - X^3}$$

De telles sortes que les racines de P_3 sont toutes les racines 12-ièmes de 1 sauf 1, j et j^2.
Bien entendu, nous retrouvons les mêmes racines.[2]

6.10.4 Dérivée d'un polynôme. Formule de Taylor

Exercice 32 :

Trouver tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P

Dire que P' divise P, c'est dire qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = QP'$

1. Si P est le polynôme nul, alors P vérifie la relation demandée
2. Si P est un polynôme constant non nul, alors $P' = 0$ et P ne vérifie pas la relation demandée
3. Pour commencer, si $\deg P = 1$, alors $P(X) = aX + b$ avec $a \neq 0$ et $P'(X) = a$.
   Alors $P(X) = aX + b = a\left(X + \dfrac{b}{a}\right)$ et donc $Q(X) = X + \dfrac{b}{a}$
4. Supposons $\deg P = n$ où $n > 1$; alors $\deg P' = n - 1$ et si $Q \in \mathbb{C}[X]$ est tel que $P = QP'$, alors $\deg Q = 1$ et donc $Q(X) = \alpha X + \beta$ avec $\alpha \neq 0$.
   C'est à dire que nous avons $P(X) = Q(X) P'(X) = (\alpha X + \beta) P'(X)$ et, en particulier $P\left(\dfrac{-\beta}{\alpha}\right) = 0$.
   Soit, maintenant, $\rho \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre k de P où $\rho \neq \dfrac{-\beta}{\alpha}$. ρ est aussi une racine d'ordre $k-1$ de P'.
   ρ devant être une racine d'ordre k de P, d'après la relation $P(X) = (\alpha X + \beta) P'(X)$, c'est impossible.
   Donc $\rho = \dfrac{-\beta}{\alpha}$ et $P(X) = \lambda (X - \rho)^k$.
   Réciproquement, tous les polynômes de la forme $P(X) = \lambda (X - \rho)^k$ vérifient $P = QP'$

Exercice 33 :

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, non nuls et $n \in \mathbb{N}$.

Nous considérons le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = \dfrac{X^n (a - bX)^n}{n!}$

Démontrer que P et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières en $X = 0$ et $X = \dfrac{a}{b}$

0 et $\dfrac{a}{b}$ sont des racines d'ordre n de P et donc, toutes les dérivées successives $P^{(k)}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ s'annulent en $X = 0$ et $X = \dfrac{a}{b}$

2. Le vérifier !!

1. Nous allons écrire la Formule de Taylor pour les polynômes en $X = 0$
   $\Rightarrow$ D'après la formule de Taylor appliquée aux polynômes, nous avons :
$$P(X) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$
   Sachant que les $n-1$ premières dérivées de P sont nulles en $X = 0$, nous avons, en fait :
$$P(X) = \sum_{k=n}^{2n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k = X^n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} X^k \right)$$
   Comme $P(X) = \dfrac{X^n (a-bX)^n}{n!}$, nous avons donc :
$$\frac{(a-bX)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} X^k \Longleftrightarrow (a-bX)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n! P^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} X^k$$
   $\Rightarrow$ En développant $(a-bX)^n$, nous avons $(a-bX)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k b^k a^{n-k} X^k$.

   Et donc, en identifiant, nous obtenons $\dfrac{n! P^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} = \mathrm{C}_n^k (-1)^k b^k a^{n-k}$

   $\Rightarrow$ D'où, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, npous avons $P^{(n+k)}(0) = \frac{(n+k)!}{n!} \mathrm{C}_n^k (-1)^k b^k a^{n-k}$
   Ainsi, toutes les dérivées de P prennent des valeurs entières en 0
2. Nous allons écrire la Formule de Taylor pour les polynômes en $X = \dfrac{a}{b}$
   $\Rightarrow$ Alors, nous avons :
$$P(X) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{P^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)}{k!} \left(X - \frac{a}{b}\right)^k$$
   Sachant que les $n-1$ premières dérivées de P sont nulles en $X = \dfrac{a}{b}$, nous avons, en fait :
$$P(X) = \sum_{k=n}^{2n} \frac{P^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)}{k!} \left(X - \frac{a}{b}\right)^k$$
   $\Rightarrow$ En écrivant $Y = X - \dfrac{a}{b} \Longleftrightarrow X = Y + \dfrac{a}{b}$, nous avons :
$$\frac{X^n (a-bX)^n}{n!} = (-1)^n b^n \frac{\left(Y + \frac{a}{b}\right)^n Y^n}{n!}$$
   Et alors :
$$(-1)^n b^n \frac{\left(Y + \frac{a}{b}\right)^n Y^n}{n!} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{P^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)}{k!} Y^k = Y^n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(n+k)}\left(\frac{a}{b}\right)}{(n+k)!} Y^k \right)$$
   $\Rightarrow$ Comme tout à l'heure, nous pouvons écrire :
$$(-1)^n b^n \frac{\left(Y + \frac{a}{b}\right)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(n+k)}\left(\frac{a}{b}\right)}{(n+k)!} Y^k \Longleftrightarrow \left(Y + \frac{a}{b}\right)^n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n! P^{(n+k)}\left(\frac{a}{b}\right)}{b^n (n+k)!} Y^k$$
   $\Rightarrow$ Nous avons $\left(Y + \dfrac{a}{b}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(\dfrac{a}{b}\right)^{n-k} Y^k$, et en identifiant, nous obtenons :
$$\mathrm{C}_n^k \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} = (-1)^n \frac{n! P^{(n+k)}\left(\frac{a}{b}\right)}{b^n (n+k)!} \Longleftrightarrow P^{(n+k)}\left(\frac{a}{b}\right) = (-1)^n \mathrm{C}_n^k \frac{(n+k)!}{n!} b^k a^{n-k}$$
   Ainsi, toutes les dérivées de P prennent des valeurs entières en $\dfrac{a}{b}$

Exercice 35 :

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tels que $(X+2)^3$ divise $P(X)+10$ et $(X-2)^3$ divise $P(X)-10$

⇒ Si nous appelons $P_1(X) = P(X)+10$, alors $(X+2)^3$ divise $P_1(X)$ et nous avons :

$$P_1(X) = (X+2)^3 Q_1(X)$$

-2 est racine d'ordre 2 de P_1' ; or $P_1'(X) = P'(X)$ et donc -2 est aussi racine d'ordre 2 de P'

⇒ Si nous appelons $P_2(X) = P(X)-10$, alors $(X-2)^3$ divise $P_2(X)$ et nous avons :

$$P_2(X) = (X-2)^3 Q_2(X)$$

2 est racine d'ordre 2 de P_2' ; or $P_2'(X) = P'(X)$ et donc 2 est aussi racine d'ordre 2 de P'

⇒ Comme $P \in \mathbb{R}_5[X]$, alors $P' \in \mathbb{R}_4[X]$ et $P'(X) = \lambda(X-2)^2(X+2)^2 = \lambda\left(X^2-4\right)^2$.

⇒ Ainsi, comme $P'(X) = \lambda X^4 - 8\lambda X^2 + 16\lambda$, nous avons

$$P(X) = \lambda\frac{X^5}{5} - 8\lambda\frac{X^3}{3} + 16\lambda X + \mu \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

⇒ De $P_1(X) = (X+2)^3 Q_1(X)$, nous tirons $P_1(-2) = 0$ et donc $P(-2) = -10$; de même, $P(2) = 10$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} P(-2) = {} & \lambda\frac{(-2)^5}{5} - 8\lambda\frac{(-2)^3}{3} + 16\lambda\times(-2) + \mu = \frac{-32\lambda}{5} + \frac{64\lambda}{3} - 32\lambda + \mu \\ = {} & \frac{-256\lambda}{15} + \mu = -10 \end{aligned}$$

Par des calculs semblables, nous obtenons $P(2) = \dfrac{256\lambda}{15} + \mu = 10$.

⇒ Nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \dfrac{-256\lambda}{15} + \mu = & -10 \\ \dfrac{256\lambda}{15} + \mu = & 10 \end{cases} \Longrightarrow \mu = 0 \text{ et } \lambda = \frac{75}{128}$$

D'où, nous avons trouvé P et

$$P(X) = \lambda\frac{X^5}{5} - 8\lambda\frac{X^3}{3} + 16\lambda X = \frac{75}{128}\left(\frac{X^5}{5} - 8\frac{X^3}{3} + 16X\right) = \frac{15}{128}\left(X^5 - 8X^3 + 80X\right)$$

Exercice 38 :

Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}_n[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à une indéterminée sur $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.

1. *Soient $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Nous définissons le polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ par :*

$$Q(X) = (X-a)[P'(X) + P'(a)] - 2[P(X) - P(a)]$$

Montrer que a est zéro triple de Q

⇒ Première remarque, nous avons $Q(a) = 0$

⇒ Calculons la dérivée première de Q :

$$Q'(X) = (X-a)[P''(X)] + [P'(X) + P'(a)] - 2[P'(X)]$$

Et nous avons $Q'(a) = 0$

$\Rightarrow$ Et maintenant, allons y pour la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} Q''(X) &= (X-a)\left[P^{(3)}(X)\right] + 2\left[P''(X)\right] - 2\left[P''(X)\right] \\ &= (X-a)\left[P^{(3)}(X)\right] \end{aligned}$$

Et nous avons $Q''(a) = 0$

a est bien un zéro triple de Q

2. *Montrer que $Q \in \mathbb{K}_n[X]$*

   Pas très difficile ; il faut raisonner sur le degré de P et le degré de P'
   En effet, si $\deg P \leqslant n$, alors $\deg P' \leqslant n-1$ et $\deg (X-a) \times P'(X) \leqslant n$.
   Donc, $\deg Q \leqslant n$ et donc $Q \in \mathbb{K}_n[X]$

3. *Soit $f : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$ une application définie par :*

$$\begin{cases} f : \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ \quad\quad P & \longmapsto f(P) = Q \end{cases}$$

   Où $Q(X) = f(P)(X) = (X-a)\left[P'(X) + P'(a)\right] - 2\left[P(X) - P(a)\right]$
   Montrer que f est une application linéaire

   La démonstration est simple et repose sur la linéarité de la dérivation.
   f, linéaire de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_n[X]$ est un endomorphisme

4. *Trouver image et noyau de f*

   Nous appelons $e_k(X) = (X-a)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Nous avons $\deg e_k = k$
   D'après le théorème 6.8.4, la famille $\{e_k ; 0 \leqslant k \leqslant n\}$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$
   Nous allons commencer par quelques bricolages.

   - $\triangleright$ Sachant que $e_0(X) = 1$, la dérivée de e_0 est donnée par $e_0'(X) = 0$ et donc, nous avons, très simplement $f(e_0)(X) = 0$, de telle sorte que nous avons sûrement $\mathbb{K}e_0 \subset \ker f$
   - $\triangleright$ De même, $e_1(X) = (X-a)$ et $e_1'(X) = 1$ et donc

$$f(e_1)(X) = 2(X-a) - 2\left[(X-a)\right] = 0$$

     De la même manière, le sous-espace vectoriel $\mathbb{K}e_1$ est tel que $\mathbb{K}e_1 \subset \ker f$
   - $\triangleright$ Toujours en bricolant, $e_2(X) = (X-a)^2$ et $e_2'(X) = 2(X-a)$, d'où

$$f(e_1)(X) = (X-a)\left[2(X-a)\right] - 2\left[(X-a)^2\right] = 0$$

     Et donc le sous-espace vectoriel $\mathbb{K}e_2$ est tel que $\mathbb{K}e_2 \subset \ker f$
   - $\triangleright$ Plus généralement, pour $k \geqslant 3$, si $e_k(X) = (X-a)^k$, alors $e_k'(X) = k(X-a)^{k-1}$ et

$$f(e_k)(X) = (X-a)\left[k(X-a)^{k-1}\right] - 2\left[(X-a)^k\right] = (k-2)(X-a)^k = (k-2)\,e_k(X)$$

   Etude de $\mathrm{Im} f$, l'image de f

   - $\triangleright$ L'image de f est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ engendré par les images des vecteurs de bases, c'est à dire que

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left(\{f(e_0), f(e_1), f(e_2), f(e_3), \cdots, f(e_n)\}\right) = \mathrm{Vect}\left(\{e_3, e_4, \cdots, e_n\}\right)$$

     Toujours d'après 6.8.4, la famille $\{e_3, e_4, \cdots, e_n\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$ et comme elle est aussi génératrice, elle forme une base de $\mathrm{Im} f$.

     Ainsi, si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ s'écrit de manière unique $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k$, $f(P)$ s'écrira de manière toute aussi unique $f(P) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (k-2)\, e_k$, c'est à dire

$$\begin{aligned} f(P)(X) &= \lambda_3 (X-a)^3 + 2\lambda_4 (X-a)^4 + \cdots + (n-2)\,\lambda_n (X-a)^n \\ &= (X-a)^3 \left(\lambda_3 + 2\lambda_4 (X-a) + \cdots + (n-2)\,\lambda_n (X-a)^{n-3}\right) \end{aligned}$$

     Nous montrons ainsi que $f(P)$ est un polynôme divisible par $(X-a)^3$ ou encore qui admet a comme racine d'ordre 3

▷ Réciproquement, si $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ est un polynôme qui admet a comme racine d'ordre 3, d'après la formule de Taylor, nous avons :

$$Q(X) = (X-a)^3 \frac{Q^{(3)}(a)}{3!} + (X-a)^4 \frac{Q^{(4)}(a)}{4!} + \cdots + (X-a)^n \frac{Q^{(n)}(a)}{n!}$$

C'est à dire $Q = \dfrac{Q^{(3)}(a)}{3!}e_3 + \dfrac{Q^{(4)}(a)}{4!}e_4 + \cdots + \dfrac{Q^{(n)}(n)}{3!}e_n$ et $Q \in \mathrm{Im} f$

$\mathrm{Im} f$ est donc exactement le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes qui admettent a comme racine d'ordre 3.

C'est un sous-espace vectoriel de dimension $n-2$

Etude de $\ker f$, le noyau de f

D'après le théorème du rang, nous avons

$$\dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{K}_n[X] \iff (n-2) + \dim \ker f = n+1$$

Et donc $\dim \ker f = 3$.

Les polynômes e_0, e_1 et e_2 sont des éléments de $\ker f$. La famille $\{e_0; e_1; e_2\}$ est une famille libre et donc forme une base de $\ker f$.

Ainsi, les é léments de $\ker f$ sont du type $P = \mu_0 e_0 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$ avec $\mu_0 \in \mathbb{K}$, $\mu_1 \in \mathbb{K}$ et $\mu_2 \in \mathbb{K}$, c'est à dire :

$$P(X) = \mu_0 + \mu_1 (X-a) + \mu_2 (X-a)^2 \text{ où } \mu_0 \in \mathbb{K} \quad \mu_1 \in \mathbb{K} \quad \mu_2 \in \mathbb{K}$$

Exercice 39 :

1. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $P_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$*

⇒ Vouloir factoriser P_n, c'est aussi vouloir rechercher les racines de P_n. Or :

$$P_n(X) = 0 \iff (X+1)^n = (X-1)^n \iff \left(\frac{X+1}{X-1}\right)^n = 1$$

En remarquant que ni 1 ni -1 ne sont racines de P_n.

En faisant le changement de variables $Z = \dfrac{X+1}{X-1}$, nous avons donc à résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^n = 1$ pour laquelle il existe n solutions $Z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k = 0, \cdots, n-1$.

De $Z_k = \dfrac{X_k+1}{X_k-1}$, nous obtenons $X_k = \dfrac{Z_k+1}{Z_k-1}$ où nous devons avoir $Z_k \neq 1$, c'est à dire $k \neq 0$.

P_n admet donc $n-1$ racines $X_k = \dfrac{Z_k+1}{Z_k-1}$ avec $k = 1, \cdots, n-1$.

⇒ Calculons explicitement ces racines X_k. Nous avons :

$$X_k = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1} = \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}+e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{\frac{-ik\pi}{n}}} = \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{2\sin\frac{ik\pi}{n}} = -i\cot\frac{k\pi}{n}$$

Donc $P_n(X) = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(X + i\cot\frac{k\pi}{n}\right)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ est le terme de plus haut degré de P_n

⇒ Alors, quel est ce terme de plus haut degré ?

Nous avons :

$$P_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k^n X^k - \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k^n (-1)^{n-k} X^k = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k^n \left(1 + (-1)^{n+1-k}\right) X^k$$

Pour $k = n$ nous avons $\mathrm{C}_n^n \left(1 + (-1)^{n+1-n}\right) X^n = 0$, ce qui veut dire que P_n est un polynôme de degré $n-1$; nous nous en doutions avec le nombre de racines trouvées.

Ainsi :

$$P_n(X) = \mathrm{C}_{n-1}^{n}\left(1+(-1)^{n+1-n+1}\right)X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\mathrm{C}_k^n\left(1+(-1)^{n+1-k}\right)X^k$$

Comme $\mathrm{C}_{n-1}^{n}\left(1+(-1)^{n+1-n+1}\right)X^{n-1} = 2nX^{n-1}$, nous en déduisons que le coefficient dominant de P_n est $2n$, c'est à dire $\lambda = 2n$

Et donc :

$$P_n(X) = 2n\prod_{k=1}^{n-1}\left(X + i\cot\frac{k\pi}{n}\right)$$

Nous obtenons là, la factorisation de P_n

2. *En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cot\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$*

⇒ Nous avons $P_{2n+1}(X) = (X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1} = (4n+2)\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}\left(X + i\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

En particulier, $P_{2n+1}(0) = 2 = (4n+2)\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}\left(i\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)$

⇒ Remarquons que :

$$\prod_{k=1}^{2n}\left(i\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \prod_{k=1}^{2n}(i)\times\prod_{k=1}^{2n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right) = (i)^{2n}\prod_{k=1}^{2n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right) = (-1)^n\prod_{k=1}^{2n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

Donc

$$P_{2n+1}(0) = 2 = (-1)^n(4n+2)\prod_{k=1}^{2n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right) = (-1)^n(4n+2)\prod_{k=1}^{n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\times\prod_{k=n+1}^{2n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

⇒ Nous allons démontrer que $\cot\dfrac{(2n-k)\pi}{2n+1} = -\cot\dfrac{(k+1)\pi}{2n+1}$

Nous avons :

$$\frac{(2n-k)\pi}{2n+1} = \frac{(2n+1)\pi}{2n+1} - \frac{(k+1)\pi}{2n+1} = \pi - \frac{(k+1)\pi}{2n+1}$$

Comme $\cot(\pi - x) = -\cot x$, nous avons :

$$\cot\frac{(2n-k)\pi}{2n+1} = \cot\left(\frac{\pi-(k+1)\pi}{2n+1}\right) = -\cot\frac{(k+1)\pi}{2n+1}$$

⇒ Nous avons

$$\begin{aligned}\prod_{k=n+1}^{2n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right) &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(\cot\frac{(2n-k)\pi}{2n+1}\right)\\ &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\cot\frac{(k+1)\pi}{2n+1}\right) = (-1)^n\prod_{k=1}^{n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

⇒ Donc :

$$\begin{aligned}2 &= (-1)^n(4n+2)\prod_{k=1}^{n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\times\prod_{k=n+1}^{2n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\\ &= (-1)^n(4n+2)\prod_{k=1}^{n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\times(-1)^n\prod_{k=1}^{n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\\ &= (4n+2)\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2\end{aligned}$$

C'est à dire $2 = (4n+2)\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 \iff \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 = \dfrac{1}{2n+1}$

$\Rightarrow$ Pour $k = 1, \cdots, n$, nous avons $0 < \dfrac{k\pi}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\cot \dfrac{k\pi}{2n+1} > 0$
Nous pouvons donc en déduire que :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\cot \frac{k\pi}{2n+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Ce que nous voulions

6.10.5 Miscelleanous

Exercice 40 :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ où $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

1. *Pour $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{2\pi} P\left(re^{it}\right) e^{-ipt}\, \mathrm{d}t$*

   ▷ Remarquons tout d'abord que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^{2\pi} e^{-ipt}\, \mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi \text{ si } p = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   ▷ Ensuite, $P\left(re^{it}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ikt}$ et donc, en utilisant la linéarité :

$$\int_0^{2\pi} P\left(re^{it}\right) e^{-ipt}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ikt} e^{-ipt}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-p)t}\, \mathrm{d}t$$

   Comme $\int_0^{2\pi} e^{i(k-p)t}\, \mathrm{d}t = 0$ si $k \neq p$ et $\int_0^{2\pi} e^{i(k-p)t}\, \mathrm{d}t = 2\pi$ si $k = p$, nous déduisons que

$$\int_0^{2\pi} P\left(re^{it}\right) e^{-ipt}\, \mathrm{d}t = 2\pi a_p r^p$$

2. *En déduire que, s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|P(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors P est un polynôme constant.*

   Supposons que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|P(z)| \leqslant M$.
   Alors, pour $1 \leqslant p \leqslant n$:

$$|2\pi a_p r^p| = \left| \int_0^{2\pi} P\left(re^{it}\right) e^{-ipt}\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^{2\pi} \left|P\left(re^{it}\right) e^{-ipt}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} M\, \mathrm{d}t = 2\pi M$$

   C'est à dire que, pour tout p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, nous avons $|a_p| \leqslant \dfrac{M}{r^p}$

   Or, $\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{M}{r^p} = 0$ et donc, pour tout p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$, $a_p = 0$ et donc $P(X) = a_0$.
   P est bien un polynôme constant.

Exercice 41 :

Trouver la valeur minimum de $a^2 + b^2$, où a et b sont des nombres réels pour lesquels l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

admet au moins une solution réelle.

Exercice un peu tarabiscoté...
Si nous considérons le polynôme $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$, nous pouvons observer que $P(0) = 1$ et que donc, 0 n'est pas racine de P.
En factorisant par x^2, nous obtenons :

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = x^2\left(x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

Et donc

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \iff x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \iff \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0$$

Si nous posons $t = x + \frac{1}{x}$, nous obtenons $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \iff x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$
La relation $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0$ devient :

$$\left\{\begin{array}{l} t = x + \frac{1}{x} \\ (t^2 - 2) + at + b = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t = x + \frac{1}{x} \\ t^2 + at + (b - 2) = 0 \end{array}\right.$$

⇒ Pour $x \in \mathbb{R}^*$, en posant $\varphi(x) = x + \frac{1}{x}$, nous avons $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ et le tableau de variations donne :

x		-1		0		$+1$	
$\varphi'(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	2	$\nearrow$

De là, nous concluons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|\varphi(x)| \geqslant 2$.
Ainsi, si l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ admet une solution réelle, alors, t, solution de $t^2 + at + (b - 2) = 0$ est tel que $|t| \geqslant 2$

⇒ Supposons donc que l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ admette une solution réelle; donc $|t| \geqslant 2$ et nous devons donc minimiser la quantité $a^2 + b^2$

- ⋆ De $t^2 + at + (b - 2) = 0$, nous tirons $b = 2 - t^2 - at$ et donc $b^2 = \left[(2 - t^2) - at\right]^2 = a^2 - 2at(2 - t^2) + (2 - t^2)^2$ d'où

$$a^2 + b^2 = (1 + t^2)a^2 - 2t(2 - t^2)a + (2 - t^2)^2$$

- ⋆ Soit $f_t(a) = (1 + t^2)a^2 - 2t(2 - t^2)a + (2 - t^2)^2$ et nous étudions les variations de f_t en fonction a et la valeur minimale de f_t sera la valeur minimale de $a^2 + b^2$.
- ⋆ Le minimum de f_t est atteint en $a_0 = \frac{t(2 - t^2)}{1 + t^2}$ et ce minimum est, après calculs

$$f_t(a_0) = \frac{(2 - t^2)^2}{1 + t^2}$$

⇒ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $f_t(a) \geqslant 0$. Comme $t \in \mathbb{R}$ est tel que $|t| \geqslant 2$ le minimum est atteint lorsque $|t| = 2$ et, à ce moment là,

$$f_t(a_0) = \frac{(2 - 2^2)^2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5}$$

Le minimum est donc $a^2 + b^2 = \frac{4}{5}$

Exercice 42 :

1. *On donne les trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$*

$$A(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0 \quad B(X) = b_2X^2 + b_1X + b_0 \quad C(X) = c_2X^2 + c_1X + c_0$$

Les constantes $a_2, a_1, a_0, b_2, b_1, b_0, c_2, c_1, c_0$ sont réelles et choisies de telle façon que, pour tout X, on ait : $A^2(X) + B^2(X) = C^2(X)$.
D'autre part, aucun des nombres a_2, b_2 et c_2 n'est nul.

(a) *Démontrer que, si deux de ces trois polynômes admettent un zéro commun, réel ou complexe, ce zéro est aussi zéro du troisième.*

Question qui ne pose pas de difficulté.
Il faut partir de la relation vraie pour tout X : $A^2(X) + B^2(X) = C^2(X)$
▷ Si nous avons $A(x_0) = B(x_0) = 0$, alors $A^2(x_0) + B^2(x_0) = C^2(x_0) = 0$
▷ Si nous avons $C(x_0) = B(x_0) = 0$, alors $A^2(x_0) = C^2(x_0) - B^2(x_0) = 0$
▷ Si nous avons $C(x_0) = A(x_0) = 0$, alors $B^2(x_0) = C^2(x_0) - A^2(x_0) = 0$

(b) *Démontrer que, si les deux polyndmes $B(x) - C(x)$ et $B(x) + C(x)$ admettent un zéro commun, ce zéro est aussi zéro de $B(x)$ et de $C(x)$.*

Soit $x_0 \in \mathbb{C}$ tel que $B(x_0) - C(x_0) = B(x_0) + C(x_0) = 0$, alors, en additionnant ou en soustrayant, nous obtenons $2B(x_0) = 0 \iff B(x_0) = 0$ et $2C(x_0) = 0 \iff C(x_0) = 0$

2. *Dans toute la suite du problème, on suppose que les polynômes $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ n'ont pas de zéro commun.*

(a) *Démontrer que $C(x)$ possède deux zéros complexes conjugués.*

A, B et C étant des polynômes à coefficients réels, ils admettent, dans $\mathbb{C}$, 2 racines *(réelles ou complexes ; si elles sont complexes, elles sont conjuguées)*
Supposons que C admette une racine réelle $x_0 \in \mathbb{R}$; alors, d'après la relation de départ, vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A^2(X) + B^2(X) = C^2(X)$, nous avons aussi

$$A^2(x_0) + B^2(x_0) = C^2(x_0) = 0$$

Et donc $A^2(x_0) = B^2(x_0) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse où on suppose que les polynômes $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ n'ont pas de zéro commun.
Ainsi, les seules racines possibles de C sont complexes et donc conjuguées.

(b) *A partir de l'égalité $A^2(X) = (B(x) - C(x))(B(x) + C(x))$, démontrer que les polynômes $B(x) - C(x)$ et $B(x) + C(x)$ ont chacun un zéro double réel.*

La relation $A^2(X) + B^2(X) = C^2(X)$ implique forcément que nous avons $a_2^2 + b_2^2 = c_2^2$.
▷ On ne peut avoir $b_2 = c_2$ ou $b_2 = -c_2$ puisqu'alors $a_2 = 0$ et A ne serait pas du second degré ; contradiction. De même, et pour les mêmes raisons, pour B, cette fois ci, nous ne pouvons pas avoir $a_2 = c_2$ ou $a_2 = -c_2$.
Nous pouvons, par contre, avoir $a_2 = b_2$ ou $a_2 = -b_2$
▷ Donc, $A^2(X) = C^2(X) - B^2(X) = [C(X) + B(X)][C(X) - B(X)]$.
Comme $b_2 \neq c_2$, $b_2 \neq -c_2$ et $a_2 \neq 0$, les polynômes $[C(X) + B(X)]$ et $[C(X) - B(X)]$ sont bien des polynômes du second degré.
▷ Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} C(X) - B(X) &= (c_2 - b_2)(x - z_1)(x - \overline{z_1}) \\ C(X) + B(X) &= (c_2 + b_2)(x - z_2)(x - \overline{z_2}) \\ A(X) &= a_2(x - z_3)(x - \overline{z_3}) \end{aligned}$$

▷ On sait, d'après la question 1-b que si les deux polynômes $B(x) - C(x)$ et $B(x) + C(x)$ admettent un zéro commun, ce zéro est aussi zéro de $B(x)$ et de $C(x)$; comme on suppose que les polynômes $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ n'ont pas de zéro commun, nous avons forcément $z_1 \neq z_2$.

▷ Supposons qu'il y a un des deux polynômes $B(x) - C(x)$ ou $B(x) + C(x)$ qui n'a pas de zéro double réel.
Supposons, par exemple, que $C(X) - B(X) = (c_2 - b_2)(x - z_1)(x - \overline{z_1})$
et que $C(X) + B(X) = (c_2 + b_2)(x - z_2)^2$, avec $z_2 \in \mathbb{R}$.
Alors,

$$A^2(x) = [C(x) + B(x)][C(x) - B(x)] = (c_2 - b_2)(c_2 + b_2)(x - z_1)(x - \overline{z_1})(x - z_2)^2$$

▷ Et donc

$$\begin{array}{l} A^2(z_1) = 0 \Longleftrightarrow A(z_1) = 0 \\ A^2(\overline{z_1}) = 0 \Longleftrightarrow A(\overline{z_1}) = 0 \\ A^2(z_2) = 0 \Longleftrightarrow A(z_2) = 0 \end{array}$$

A, polynôme du second degré admettrait donc 3 racines, ce qui est contradictoire.
Ainsi, les polynômes $B(x) - C(x)$ et $B(x) + C(x)$ ont chacun un zéro double réel.

(c) *En déduire que $A(x)$ et $B(x)$ admettent chacun 2 zéros réels distincts*

Comme nous venons de montrer que les polynômes $B(x) - C(x)$ et $B(x) + C(x)$ ont chacun un zéro double réel, nous pouvons écrire :

$$C(X) - B(X) = (c_2 - b_2)(x - z_1)^2 \text{ et } C(X) + B(X) = (c_2 + b_2)(x - z_2)^2$$

avec $z_1 \in \mathbb{R}$, $z_2 \in \mathbb{R}$ et $z_1 \neq z_2$
Alors $A^2(x) = [C(x) + B(x)][C(x) - B(x)] = a_2^2 (x - z_1)^2 (x - z_2)^2$, c'est à dire :

$$A(x) = a_2 (x - z_1)(x - z_2)$$

A a donc 2 racines réelles distinctes.

(d) *On prend $a_2 = 1$ et l'on suppose connus, les zéros, p et q, de $A(x)$*
Démontrer qu'il existe une infinité de polynômes $B(x)$ et $C(x)$ dépendant d'un paramètre et vérifiant la relation $A^2(X) + B^2(X) = C^2(X)$

Tout d'abord, nous pouvons écrire

$$A(x) = a_2(x - p)(x - q) = (x - p)(x - q) = x^2 - (p + q)x + pq$$

De ce que nous avons déjà vu : $A^2(x) = [C(x) + B(x)][C(x) - B(x)]$, nous pouvons écrire, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

$$(x - p)^2 (x - q)^2 = [\lambda(C(x) + B(x))]\left[\frac{1}{\lambda}(C(x) - B(x))\right]$$

Donc, de deux choses l'une :

$$\text{Ou bien } \left\{ \begin{array}{rl} \lambda(C(x) + B(x)) = & (x - p)^2 \\ \frac{1}{\lambda}(C(x) - B(x)) = & (x - q)^2 \end{array} \right. \quad \text{Ou bien } \left\{ \begin{array}{rl} \lambda(C(x) + B(x)) = & (x - q)^2 \\ \frac{1}{\lambda}(C(x) - B(x)) = & (x - p)^2 \end{array} \right.$$

Les deux cas étant symétriques, on résoud le premier cas. Les calculs donnent :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda(c_2 + b_2) = & 1 \\ \lambda(c_1 + b_1) = & -2p \\ \lambda(c_0 + b_0) = & p^2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rl} \frac{1}{\lambda}(c_2 - b_2) = & 1 \\ \frac{1}{\lambda}(c_1 - b_1) = & -2q \\ \frac{1}{\lambda}(c_0 - b_0) = & q^2 \end{array} \right.$$

Nous obtenons alors les systèmes de 2 équations à 2 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda(c_2 + b_2) = & 1 \\ \frac{1}{\lambda}(c_2 - b_2) = & 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} c_2 + b_2 = & \frac{1}{\lambda} \\ c_2 - b_2 = & \lambda \end{array} \right.$$

D'où nous tirons $c_2 = \dfrac{1}{2}\left(\lambda + \dfrac{1}{\lambda}\right)$ et $b_2 = \dfrac{1}{2}\left(\lambda - \dfrac{1}{\lambda}\right)$.

C'est par une même méthode que nous trouverons les autres coefficients. Donc :

$$c_1 = -\left(q\lambda + \frac{p}{\lambda}\right) \quad b_1 = q\lambda - \frac{p}{\lambda} \quad c_0 = \frac{1}{2}\left(q^2\lambda + \frac{p^2}{\lambda}\right) \quad b_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{\lambda} - q^2\lambda\right)$$

Avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$

(e) *Démontrer qu'entre les zéros p et q de $A(x)$ et les zéros r et s de $B(x)$, il existe une relation indépendante du paramètre précédent, et que l'on explicitera.*

Si $B(x)$ a pour racines r et s, alors $B(x) = b_2(x-r)(x-s) = b_2x^2 - b_2(r+s)x + b_2rs$ et donc, en identifiant, nous obtenons des relations classiques :

$$\begin{cases} -b_2(r+s) = & b_1 \\ b_2rs = & b_0 \end{cases} \iff \begin{cases} r+s = & \dfrac{-b_1}{b_2} \\ rs = & \dfrac{b_0}{b_2} \end{cases}$$

En utilisant les relations trouvées dans les questions précédentes, nous trouvons :

$$\begin{aligned} r+s = & -\frac{q\lambda - \frac{p}{\lambda}}{\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{2\left(p - q\lambda^2\right)}{\lambda^2 - 1} \\ rs = & \frac{p - q^2\lambda}{\lambda^2 - 1} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(r+s)(p+q) &= \frac{\left(p - q\lambda^2\right)(p+q)}{\lambda^2 - 1} = \frac{p^2 + pq\lambda^2 - pq - q^2\lambda}{\lambda^2 - 1} \\ &= \frac{p - q^2\lambda}{\lambda^2 - 1} + pq = rs + pq \end{aligned}$$

D'où, donc $\boxed{\dfrac{1}{2}(r+s)(p+q) = rs + pq}$

3. *Les nombres réels p et q, zéros de $A(x)$ étant fixés, il existe une infinité de polynômes $C(x)$. On appellera $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les zéros de $C(x)$. Démontrer qu'entre α, β, p et q, il existe une relation que l'on explicitera.*

De la même manière, sachant que C a des racines complexes θ et $\overline{\theta}$, nous pouvons écrire :

$$C(x) = c_2(x-\theta)\left(x - \overline{\theta}\right) = c_2x^2 - 2\,\mathrm{Re}(\theta)\,x + c_2|\theta|^2$$

En écrivant, pour simplifier, $\theta = X + iY$, nous obtenons :

$$c_1 = -2c_2X \quad c_0 = c_2\left(X^2 + Y^2\right)$$

D'où nous tirons :

$$X = \frac{c_1}{-2c_2} = \frac{p + q\lambda^2}{\lambda^2 + 1} \quad X^2 + Y^2 = \frac{c_0}{c_2} = \frac{p^2 + q^2\lambda^2}{\lambda^2 + 1}$$

Or $X(p+q) = \dfrac{\left(p + q\lambda^2\right)(p+q)}{\lambda^2 + 1} = X^2 + Y^2 + pq$.

La relation est donc :

$$\boxed{X(p+q) = X^2 + Y^2 + pq \iff \mathrm{Re}(\theta)(p+q) = |\theta|^2 + pq}$$

Exercice 43 :

On considère p réels distincts fixés une fois pour toutes $x_1, x_2, \ldots, x_p$
Dans tout le problème n est un entier positif donné et p un entier strictement supérieur à $n+1$ ($p > n+1$).
$\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n

1. *On considère l'application de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ fait correspondre le réel $\langle P/Q \rangle = \sum_{k=1}^{p} P(x_k) Q(x_k)$*

   (a) *Montrer que pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$, nous avons : $\langle P/Q \rangle = \langle Q/P \rangle$*

   Cette question ne pose pas grand problème.
   En utilisant la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$ nous avons de façon évidente

$$\sum_{k=1}^{p} P(x_k) Q(x_k) = \sum_{k=1}^{p} Q(x_k) P(x_k)$$

   Et donc $\langle P/Q \rangle = \langle Q/P \rangle$.
   On dit alors que l'application qui au couple (P, Q) de polynômes fait correspondre le réel $\langle P/Q \rangle$ est **symétrique**.

   (b) *Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P/P \rangle \geqslant 0$, et que $\langle P/P \rangle = 0$ si et seulement si P est le polynôme nul*

   Nous avons $\langle P/P \rangle = \sum_{k=1}^{p} P(x_k) P(x_k) = \sum_{k=1}^{p} P^2(x_k)$ Cette somme étant une somme de carrés est forcément positive ou nulle et donc $\langle P/P \rangle \geqslant 0$
   Elle ne peut s'annuler que si et seulement si chacun de ses termes est lui même nul.
   Le polynôme P aurait alors p racines. Or, il est de degré n et $p > n + l$.
   Ceci n'est possible que pour le polynôme identiquement nul et donc $P = \mathcal{O}$, le polynôme nul.

   (c) *Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme fixé. Montrer que l'application Φ_Q, ainsi définie*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi_Q : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \Phi_Q(P) = \langle P/Q \rangle \end{array} \right.$$

   est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

   C'est une question, elle aussi, très classique !!
   Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$
   D'après la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$, pour tout couple (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \Phi_Q(P_1 + P_2) = \langle P_1 + P_2/Q \rangle & = & \sum_{k=1}^{p} (P_1 + P_2)(x_k) Q(x_k) = \sum_{k=1}^{p} [P_1(x_k) + P_2(x_k)] Q(x_k) \\ & = & \sum_{k=1}^{p} P_1(x_k) Q(x_k) + \sum_{k=1}^{p} P_2(x_k) Q(x_k) \\ & = & \langle P_1/Q \rangle + \langle P_2/Q \rangle = \Phi_Q(P_1) + \Phi_Q(P_2) \end{array}$$

   Et, maintenant, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\begin{array}{rcl} \Phi_Q(\lambda P) = \langle \lambda P/Q \rangle & = & \sum_{k=1}^{p} (\lambda P)(x_k) Q(x_k) = \sum_{k=1}^{p} \lambda P(x_k) Q(x_k) \\ & = & \lambda \sum_{k=1}^{p} P(x_k) Q(x_k) = \lambda \langle P/Q \rangle \\ & = & \lambda \Phi_Q(P) \end{array}$$

   L'application $\Phi_Q : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie est linéaire.
   En échangeant les rôles de P et Q, on obtient de nouveau une application linéaire. On dit alors que l' application

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \langle P/Q \rangle \end{array} \right.$$

   est **bilinéaire.**

Nous venons de construire un produit scalaire
L'application $(P, Q) \longmapsto \langle P/Q \rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique définie positive.
C'est donc bien un produit scalaire.
Il n'est donc pas incongru de parler, dans la suite de polynômes orthogonaux.

2. *On dit que deux polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ sont orthogonaux sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ si et seulement si $\langle P/Q \rangle = 0$*

   (a) *Soit $P_0 = 1$, c'est à dire que P_0 est le polynôme constant et égal à 1. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme normalisé P_1 du premier degré orthogonal à P_0 sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$*

   Que P_1 soit un polynôme normalisé de degré 1 signifie que $P_1(X) = X + b$ où $b \in \mathbb{R}$.
   D'autre part, si $P_0 = 1$ est le polynôme constant, alors, pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, nous avons $P_0(x_k) = 1$. Donc :

$$\langle P_0/P_1 \rangle = \sum_{k=1}^{p} P_0(x_k) P_1(x_k) = \sum_{k=1}^{p} (x_k + b) = \left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right) + p \times b$$

   Donc $\langle P_0/P_1 \rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right) + p \times b = 0 \Longleftrightarrow b = -\dfrac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_k$.

   Ainsi, $P_1(X) = X - \dfrac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_k$

   Il existe donc un et un seul polynôme normalisé P_1 du premier degré orthogonal à P_0 sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$

   (b) *Montrer que l'on peut déterminer de manière unique les coefficients a_2 et b_2 de façon à ce que le polynôme $P_2 = XP_1 + a_2P_1 + b_2P_0$ soit orthogonal sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ à P_1 et P_0. Quel est le degré de P_2 ?*

   Nous devons donc avoir $\langle P_2/P_1 \rangle = \langle P_2/P_0 \rangle = 0$
   $\Rightarrow$ Nous allons étudier ce que pourrait donner $\langle P_2/P_1 \rangle$

$$\langle P_2/P_1 \rangle = \langle XP_1 + a_2P_1 + b_2P_0/P_1 \rangle = \langle XP_1/P_1 \rangle + a_2 \langle P_1/P_1 \rangle + b_2 \langle P_0/P_1 \rangle$$

   ■ → Comme $\langle P_0/P_1 \rangle = 0$, nous avons :

$$\langle P_2/P_1 \rangle = \langle XP_1 + a_2P_1 + b_2P_0/P_1 \rangle = \langle XP_1/P_1 \rangle + a_2 \langle P_1/P_1 \rangle$$

   ■ → Ensuite, nous pouvons écrire :

$$\langle XP_1/P_1 \rangle = \sum_{k=1}^{p} x_k P_1(x_k) \times P_1(x_k) = \sum_{k=1}^{p} x_k (P_1(x_k))^2$$

   Et $\langle P_1/P_1 \rangle = \sum_{k=1}^{p} (P_1(x_k))^2$ et donc : $a_2 = -\dfrac{\sum_{k=1}^{p} x_k (P_1(x_k))^2}{\sum_{k=1}^{p} (P_1(x_k))^2}$

   $\Rightarrow$ Et maintenant, passons à $\langle P_2/P_0 \rangle$

$$\langle P_2/P_0 \rangle = \langle XP_1 + a_2P_1 + b_2P_0/P_0 \rangle = \langle XP_1/P_0 \rangle + a_2 \langle P_1/P_0 \rangle + b_2 \langle P_0/P_0 \rangle$$

   ■ → Comme $\langle P_0/P_1 \rangle = 0$, nous avons :

$$\langle P_2/P_0 \rangle = \langle XP_1 + a_2P_1 + b_2P_0/P_0 \rangle = \langle XP_1/P_0 \rangle + b_2 \langle P_0/P_0 \rangle$$

   ■ → Nous avons

$$\langle XP_1/P_0 \rangle = \sum_{k=1}^{p} x_k P_1(x_k) P_0(x_k) = \sum_{k=1}^{p} x_k P_1(x_k)$$

■ → Et $b_2 \langle P_0/P_0\rangle = b_2 \sum_{k=1}^{p} P_0(x_k) P_0(x_k) = b_2 p$

■ → De $\langle P_2/P_0\rangle = 0$, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{p} x_k P_1(x_k) + b_2 p = 0 \iff b_2 = -\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_k P_1(x_k)$$

Nous avons ainsi défini $P_2(X) = P_1(X)(X + a_2) + b_2$ et comme $\deg P_1 = 1$, nous avons $\deg P_2 = 2$

3. *Le but de cette question est de définir deux suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que la suite des $n+1$ polynômes définie par P_0 , P_1 et la relation de récurrence*

$$P_i = XP_{i-1} + a_i P_{i-1} + b_i P_{i-2} \qquad 2 \leqslant i \leqslant n$$

soit formée de polynômes non nuls, deux à deux orthogonaux sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$
Pour $j \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant j \leqslant n$, nous posons $N_j = \langle P_j/P_j\rangle$

Nous avons démontré que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, et $P \neq \mathcal{O}$, $\langle P/P\rangle > 0$, nous avons donc, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant j \leqslant n$, nous avons $\langle P_j/P_j\rangle = N_j > 0$

(a) *Soit $i \in \{2, \ldots, n\}$*
On suppose construits par récurrence les polynômes $P_0, P_1, \cdots, P_{i-1}$ orthogonaux sur sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ tels que les nombres N_j associés soient non nuls.
Déterminer a_i et b_i de façon que le polynôme P_i soit orthogonal sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ à P_{i-1} et P_{i-2}

Supposons définis par récurrence les polynômes $P_0, P_1, \cdots, P_{i-1}$, deux à deux orthogonaux sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ et tels que $N_j \neq 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant i-1$
Nous devons avoir $\langle P_i/P_{i-1}\rangle = \langle P_i/P_{i-2}\rangle = 0$
⇒ Etudions, pour commencer, $\langle P_i/P_{i-1}\rangle$

$$\langle P_i/P_{i-1}\rangle = \langle XP_{i-1} + a_i P_{i-1} + b_i P_{i-2}/P_{i-1}\rangle = \langle XP_{i-1}/P_{i-1}\rangle + a_i \langle P_{i-1}/P_{i-1}\rangle + b_i \langle P_{i-2}/P_{i-1}\rangle$$

■ → Par construction $\langle P_{i-2}/P_{i-1}\rangle = 0$ et donc

$$\langle P_i/P_{i-1}\rangle = \langle XP_{i-1}/P_{i-1}\rangle + a_i \langle P_{i-1}/P_{i-1}\rangle = \langle XP_{i-1}/P_{i-1}\rangle + a_i N_{i-1}$$

■ → Regardons maintenant $\langle XP_{i-1}/P_{i-1}\rangle$

$$\langle XP_{i-1}/P_{i-1}\rangle = \sum_{k=1}^{p} x_k P_{i-1}(x_k) P_{i-1}(x_k) = \sum_{k=1}^{p} x_k (P_{i-1}(x_k))^2$$

■ → De telle sorte que nous ayions

$$\sum_{k=1}^{p} x_k (P_{i-1}(x_k))^2 + a_i N_{i-1} = 0 \iff a_i = \frac{-1}{N_{i-1}} \sum_{k=1}^{p} x_k (P_{i-1}(x_k))^2$$

⇒ Recommençons avec P_{i-2} et étudions $\langle P_i/P_{i-2}\rangle$

$$\begin{aligned} \langle P_i/P_{i-2}\rangle &= \langle XP_{i-1} + a_i P_{i-1} + b_i P_{i-2}/P_{i-2}\rangle \\ &= \langle XP_{i-1}/P_{i-2}\rangle + a_i \langle P_{i-1}/P_{i-2}\rangle + b_i \langle P_{i-2}/P_{i-2}\rangle \end{aligned}$$

■ → Par construction $\langle P_{i-2}/P_{i-1}\rangle = 0$ et donc $\langle P_i/P_{i-2}\rangle = \langle XP_{i-1}/P_{i-2}\rangle + b_i \langle P_{i-2}/P_{i-2}\rangle = \langle XP_{i-1}/P_{i-2}\rangle + b_i N_{i-2}$

■ → Regardons maintenant $\langle XP_{i-1}/P_{i-2}\rangle$. Nous avons :

$$\langle XP_{i-1}/P_{i-2}\rangle = \sum_{k=1}^{p} x_k P_{i-1}(x_k) P_{i-2}(x_k)$$

■ → De telle sorte que nous ayions

$$\sum_{k=1}^{p} x_k P_{i-1}(x_k) P_{i-2}(x_k) + b_i N_{i-2} = 0 \Longleftrightarrow b_i = \frac{-1}{N_{i-2}} \sum_{k=1}^{p} x_k P_{i-1}(x_k) P_{i-2}(x_k)$$

Nous avons ainsi construit P_i.

(b) *Montrer que pour tout $j \in \{0,1,\dots,i-3\}$, nous avons $\langle XP_{i-1}/P_j\rangle = \langle P_{i-1}/XP_j\rangle = 0$*

Soit $j \in \{0,1,\dots,i-3\}$

⇒ Nous avons :

$$\langle XP_{i-1}/P_j\rangle = \sum_{k=1}^{p} (x_k P_{i-1}(x_k)) P_j(x_k) = \sum_{k=1}^{p} P_{i-1}(x_k)(x_k P_j(x_k)) = \langle P_{i-1}/XP_j\rangle$$

⇒ Par définition de P_{j+1}, nous avons :

$$P_{j+1} = XP_j + a_{j+1}P_j + b_{j+1}P_{j-1} \Longleftrightarrow XP_j = P_{j+1} - a_{j+1}P_j - b_{j+1}P_{j-1}$$

D'où

$$\begin{aligned}\langle P_{i-1}/XP_j\rangle &= \langle P_{i-1}/P_{j+1} - a_{j+1}P_j - b_{j+1}P_{j-1}\rangle \\ &= \langle P_{i-1}/P_{j+1}\rangle - a_{j+1}\langle P_{i-1}/P_j\rangle - b_{j+1}\langle P_{i-1}/P_{j-1}\rangle\end{aligned}$$

⇒ Comme, par hypothèse, $j \in \{0,1,\dots,i-3\}$, nous avons $j \leqslant i-3 \Longleftrightarrow j+1 \leqslant i-2$ et donc

$$\langle P_{i-1}/P_{j+1}\rangle = \langle P_{i-1}/P_j\rangle = \langle P_{i-1}/P_{j-1}\rangle = 0$$

Et donc nous avons $\langle XP_{i-1}/P_j\rangle = \langle P_{i-1}/XP_j\rangle = 0$

Ce que nous voulions.

(c) *En déduire que le polynôme P_i défini en a) est orthogonal à $P_0, P_1, \cdots, P_{i-1}$*

⇒ Pour commencer, pour $j \in \{0,1,\dots,i-3\}$:

$$\langle P_i/P_j\rangle = \langle XP_{i-1} + a_iP_{i-1} + b_iP_{i-2}/P_j\rangle = \langle XP_{i-1}/P_j\rangle + a_i\langle P_{i-1}/P_j\rangle + b_i\langle P_{i-2}/P_j\rangle$$

Nous avons démontré que $\langle XP_{i-1}/P_j\rangle = 0$, et, par construction

$$\langle P_{i-1}/P_j\rangle = \langle P_{i-2}/P_j\rangle = 0$$

Donc, $\langle P_i/P_j\rangle = 0$

P_i est donc orthogonal à tout P_j

⇒ Nous avons, tout à l'heure, nous avons choisi a_i et b_i de telle sorte que P_i soit orthogonal à P_{i-1} et à P_{i-2}.

Ainsi, P_i est orthogonal à tout P_j, pour $0 \leqslant j \leqslant i-1$

Le polynôme P_i défini en a) est orthogonal à $P_0, P_1, \cdots, P_{i-1}$

(d) *Montrer que P_i est non nul et déterminer son degré.*

Nous allons démontrer par récurrence que le polynôme P_i est non nul et que $\deg P_i = i$

C'est vrai pour $i=0$ et $i=1$ En effet $P_0 = 1$ et nous avons calculé que

$$P_1(X) = X - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_k$$

Supposons que c'est vrai à l'ordre i C'est à dire que P_i est non nul et de degré i

Démontrons le à l'ordre $i+1$ Nous avons

$$P_{i+1} = XP_i + a_{i+1}P_i + b_iP_{i-1} = P_i \times (X + a_{i+1}) + b_iP_{i-1}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, P_i est un polynôme non nul et de degré i.

Donc $\deg P_i \times (X + a_{i+1}) = i+1$.

Comme $\deg P_{i-1} = i-1$, nous avons P_{i+1} non nul et de degré $i+1$

Ainsi, le polynôme P_i est non nul et $\deg P_i = i$

(e) *Montrer que la famille de polynômes $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$*

Pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant i \leqslant n$, nous avons $\deg P_i = i$. Il suffit d'appliquer le corollaire 6.8.4 pour démontrer que la famille de polynômes $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 44 :

On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}$ tous distincts.

1. *Soit L_i le polynôme défini par : $L_i(x) = \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$*

   (a) *Montrer que L_i est un polynôme de degré n.*

   Par construction de L_i commune produit de n polynômes de degré 1, L_i est donc un polynôme de degré n. Le numérateur est un produit de n termes $(x - x_j)$ alors que le dénominateur est une constante.

   (b) *Calculer la valeur $L_i(x_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$*

   ▷ Pour commencer, si $i = k$, $L_i(x_i) = \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1$

   ▷ Si $k \neq i$, il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $j_0 \neq i$ et $j_0 = k$ et alors, $\dfrac{x_k - x_k}{x_i - x_k} = 0$ et donc $L_i(x_k) = 0$.

   Nous pouvons donc écrire que $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$ où $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronecker

   (c) *Pour i fixé, démontrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n, vérifiant*

   $$P(x_k) = L_i(x_k) \text{ pour } 0 \leqslant k \leqslant n$$

   Supposons qu'il existe un polynôme Q de degré n tel que pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ nous avons $P(x_k) = Q(x_k)$

   Alors, pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ nous avons $P(x_k) - Q(x_k) = 0$. Ce qui signifie que le polynôme $P - Q$ admet $n+1$ racines alors que $\deg(P - Q) \leqslant n$.

   Ce qui est impossible, sauf si $P - Q = \mathcal{O}$, c'est à dire $P = Q$.

   Il y a donc unicité.

2. (a) *Démontrer que la famille de polynômes $\{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$*

   Tout d'abord $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ et dans la famille $\{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ a aussi $n+1$ éléments.

   Il suffit donc de montrer que la famille $\{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ est libre.

   Soient donc $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $n+1$ réels tels que $\lambda_0 L_0 + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_n L_n = \mathcal{O}$.

   Ceci veut donc dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

   $$\lambda_0 L_0(x) + \lambda_1 L_1(x) + \lambda_2 L_2(x) + \cdots + \lambda_n L_n(x) = 0$$

   En particulier pour x_i où $0 \leqslant i \leqslant n$ où nous avons :

   $$\lambda_0 L_0(x_i) + \lambda_1 L_1(x_i) + \lambda_2 L_2(x_i) + \cdots + \lambda_n L_n(x_i) = \lambda_i = 0$$

   Ainsi, pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant n$, nous avons $\lambda_i = 0$

   La famille $\{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ est donc libre et forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$

   (b) *Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Quelles sont les coordonnées de P dans la base $\{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\}$*

   Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $n+1$ réels tels que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$, c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x)$

   Nous avons, en particulier pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(x_k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_k) = \lambda_k$.

   Ainsi, pour tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, nous avons $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$

(c) *Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$*

Si nous considérons le polynôme constant et égal à 1, nous avons :

$$P(x_0) = P(x_1) = \cdots = P(x_i) = \cdots = P(x_n) = 1$$

Et donc $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$

3. *Soit f une fonction donnée, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous considérons toujours $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}$ tous distincts.*
Interpoler la fonction f, par un polynôme P de degré n aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$, c'est résoudre le problème suivant :
Trouver un polynôme P_f de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $i_i n\mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant i \leqslant n$, $P_f(x_i) = f(x_i)$

Démontrer que l'unique solution du problème est le polynôme $P_f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$

Si un tel polynôme Pf existe, il s'écrit de manière unique $P_f(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x)$.

En faisant $x = x_k$, nous avons

$$P_f(x_k) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_k) \Longrightarrow P_f(x_k) = f(x_k) = \lambda_k$$

L'unique solution du problème est le polynôme $P_f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$

4. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a;b]$ et on suppose que f s'annule en $n+2$ points de $[a;b]$*
Démontrer que

(a) *La dérivée f' s'annule au moins en $n+1$ points de $[a;b]$*

Nous appellons $c_0, c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}$ les $n+2$ points de $[a;b]$ tels que

$$f(c_0) = f(c_1) = \cdots = f(c_n) = f(c_{n+1}) = 0$$

Ainsi, d'après le théorème de Rolle, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant n$ il existe $c_k^1 \in \left]c_k; c_{k+1}\right[$ tel que $f'\left(c_k^1\right) = 0$
Ainsi, la dérivée f' s'annule au moins en $c_0^1, c_1^1, c_2^1, \ldots, c_n^1$, c'est à dire en $n+1$ points de $[a;b]$

(b) *La dérivée $n+1$-ième $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois en un point $c \in [a;b]$*

- ▷ La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, il nous est possible de recommencer le même raisonnement pour la fonction dérivée f' aux points $c_0^1, c_1^1, \ldots, c_n^1$.
- ▷ Ainsi la dérivée seconde f'' s'annulera-t-elle en n points distincts de $[a;b]$ $c_0^2, c_1^2, \ldots, c_{n-1}^2$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$, nous ayions $c_k^2 \in \left]c_k^1; c_{k+1}^1\right[$
- ▷ En continuant ainsi, nous voyons que la dérivée k-ième $f^{(k)}$ s'annulera en $n+2-k$ points distincts de $[a;b]$
- ▷ Et donc, la dérivée $n+1$-ième $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois en un point $c \in [a;b]$

C'est une question classique d'analyse à laquelle nous venons de répondre

5. *Nous appelons $q(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ Calculer $q^{(n+1)}$ la dérivée $n+1$-ième de q*

q est un polynôme unitaire de degré $n+1$. Si $q^{(k)}$ est la dérivée k-ième de q, le terme de plus haut degré de $q^{(k)}(x)$ est donné par $\mathrm{A}_{n+1}^{k} x^{n+1-k}$.

$q^{(n+1)}$ la dérivée $n+1$-ième de q est une constante donnée par $\mathrm{A}_{n+1}^{n+1} x^{n+1-n-1} = (n+1)!$
En conclusion, la dérivée $n+1$-ième de q est $q^{(n+1)}(x) = (n+1)!$

6. *Soit $x \in [a;b]$ tel que, pour $i = 0, \ldots, n$, nous ayions $x \neq x_i$. On appelle toujours P_f le polynôme d'interpolation de f. Nous construisons pour, tout $t \in [a;b]$ la fonction W_x définie par :*

$$W_x(t) = f(t) - P_f(t) - \frac{q(t)}{q(x)}(f(x) - P_f(x))$$

(a) *Démontrer que W_x est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a;b]$ et calculer $W_x^{(n+1)}(t)$*

- ▹ Clairement, W_x est l'addition de polynômes ou de fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et est donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$
- ▹ En utilisant la linéarité de la dérivation, nous avons :

$$W_x^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - P_f^{(n+1)}(t) - \frac{q^{(n+1)}(t)}{q(x)}(f(x) - P_f(x))$$

Comme $\deg P_f = n$, nous avons $P_f^{(n+1)}(t) = 0$, et de la question précédente où nous avons prouvé que $q^{(n+1)}(t) = (n+1)!$, nous avons :

$$W_x^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{(n+1)!}{q(x)}(f(x) - P_f(x))$$

(b) *Démontrer que $W_x(x) = W_x(x_0) = W_x(x_1) = \ldots = W_x(x_n) = 0$*

- ▹ $W_x(x) = f(x) - P_f(x) - \dfrac{q(x)}{q(x)}(f(x) - P_f(x)) = 0$
- ▹ Pour $0 \leqslant i \leqslant n$, nous devons faire remarquer que $q(x_i) = 0$ et nous avons :

$$\begin{aligned} W_x(x_i) &= f(x_i) - P_f(x_i) - \frac{q(x_i)}{q(x)}(f(x) - P_f(x)) \\ &= f(x_i) - f(x_i) = 0 \end{aligned}$$

D'où la conclusion : $W_x(x) = W_x(x_0) = W_x(x_1) = \ldots = W_x(x_n) = 0$

(c) *En déduire qu'il existe $\xi \in [a;b]$ tel que $W_x^{(n+1)}(\xi) = 0$*

W_x, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ s'annule en $n+2$ points. Il existe donc $\xi \in [a;b]$ tel que $W_x^{(n+1)}(\xi) = 0$

(d) *Conclure que pour tout $x \in [a;b]$, il existe $\xi \in [a;b]$ tel que*

$$f(x) - P_f(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Comme

$$\begin{gathered} W_x^{(n+1)}(\xi) = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{q(x)}(f(x) - P_f(x)) = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(n+1)!}{q(x)}(f(x) - P_f(x)) \\ \Longleftrightarrow \\ f(x) - P_f(x) = \frac{q(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \end{gathered}$$

C'est à dire que, pour tout $x \in [a;b]$, il existe $\xi \in [a;b]$ tel que

$$f(x) - P_f(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

7. *Démontrer que si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a;b]$ alors, pour tout $x \in [a;b]$*

$$|f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{|a-b|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\in[a;b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a;b]$ alors, $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a;b]$ et est bornée sur $[a;b]$ et nous avons, pour tout $x \in [a;b]$, $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant \sup\limits_{x\in[a;b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$.

D'autre part, comme pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, $x_i \in [a;b]$, nous avons $|x - x_i| \leqslant |a-b|$ et donc $|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \leqslant |a-b|^{n+1}$

La conclusion est donc, ensuite, évidente.

Partie 2 : applications numériques

8. *Considérons les fonctions définies l'intervalle $[1;2]$ par $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$, et trois points $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 2$.*

   (a) *Montrer, sans le calculer, que f et g ont le même polynôme d'interpolation sur le support $\{x_0, x_1, x_2\}$*

   Avant de commencer, nous pouvons calculer L_0, L_1, L_2.

   $\to L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \dfrac{\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)}{\left(1-\frac{3}{2}\right)(1-2)}$ Et donc $L_0(x) = 2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x-2)$

   $\to L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}$ Et donc $L_1(x) = -4(x-1)(x-2)$

   $\to L_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \dfrac{(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(2-1)\left(2-\frac{3}{2}\right)}$ Et donc $L_2(x) = 2(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$

   Le polynôme de Lagrange d'approximation pour f et g sont, pour f, $P_f(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$ et , pour g, $P_g(x) = g(x_0)L_0(x) + g(x_1)L_1(x) + g(x_2)L_2(x)$.

   Or, un calcul simple montre que $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $f(x_1) = g(x_1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $f(x_2) = g(x_2) = 1$.

   Nous avons bien $P_f = P_g$

   (b) *Donner l'expression des polynômes de Lagrange relatifs à ce support.*

   Nous avons donc :

$$\begin{aligned} P_f(x) = P_g(x) = & \frac{\sqrt{2}}{2}(-4(x-1)(x-2)) + 2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) \\ = & \ 2(x-1)\left(\left(1-\sqrt{2}\right)x + \left(2\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

   (c) *Comparer sur un graphe*

   Voir la figure 6.1

9. *Pour $n = 4$, $[a;b] = [0;1]$ et $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$, trouver une majoration de $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - P(x)|$.*

Il suffit d'utiliser le résultat de la question 7, en voyant que $|a-b| = 1$.
Nous avons donc :

$$|f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{1}{120} \sup_{x\in[0;1]} \left|f^{(5)}(x)\right|$$

En cherchant les dérivées successives de $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$, nous obtenons $f^{(5)}(x) = \dfrac{\pi^5}{1024}\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$, de telle sorte que $\sup\limits_{x\in[0;1]} \left|f^{(5)}(x)\right| = \dfrac{\pi^5}{1024}$.

Ainsi, $|f(x) - P_f(x)| \leqslant \dfrac{1}{120} \times \dfrac{\pi^5}{1024} \approx 0,002490 = 2,49 \times 10^{-3}$

Nous pouvons en conclure qu'en choisissant P_f plutôt que f dans les calculs, l'erreur commise est au maximum de $2,5 \times 10^{-3}$

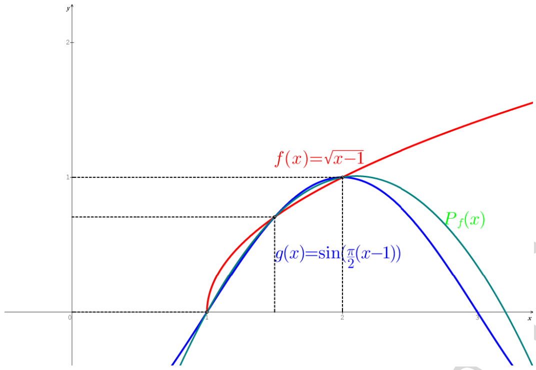

FIGURE 6.1 – Les graphes de f et g et le polynôme d'interpolation. Remarquer qu'en dehors de l'intervalle $[1;2]$ l'interpolation est de mauvaise qualité

10. (a) *Calculer la dérivée k-ième de $f(x) = \ln(1+\lambda x)$ avec $\lambda > 0$*

Comme souvent, nous allons commencer par « bricoler »

→ La dérivée première est $f'(x) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda x} = \lambda(1+\lambda x)^{-1}$

→ La dérivée seconde est $f''(x) = -\lambda^2(1+\lambda x)^{-2}$

→ La dérivée troisième est $f^{(3)}(x) = 2\lambda^3(1+\lambda x)^{-3}$

→ On continue ? ?
La dérivée quatrième est $f^{(4)}(x) = -2\times 3\lambda^4(1+\lambda x)^{-4}$

→ Un petit dernier, pour la route :
La dérivée cinquième est $f^{(5)}(x) = 2\times 3\times 4\lambda^5(1+\lambda x)^{-5}$

Pas d'idée ? ? Je dirais volontiers que

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\lambda^k(1+\lambda x)^{-k} = (-1)^{k-1}(k-1)!\left(\frac{\lambda}{1+\lambda x}\right)^k$$

Résultat qui se démontre très facilement par récurrence.

(b) *Pour $n = 4$, $[a;b] = [0;1]$ et $f(x) = \ln(1+\lambda x)$, pour quelles valeurs de λ, sommes nous assurés que $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - P_f(x)| \leqslant 10^{-4}$*

→ Nous sommes dans la même situation que tout à l'heure et donc :

$$|f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{1}{120}\sup_{x\in[0;1]}\left|f^{(5)}(x)\right|$$

C'est à dire, ici, que

$$|f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{\lambda^5}{5}\sup_{x\in[0;1]}\left|\left(\frac{1}{1+\lambda x}\right)^5\right|$$

→ Pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $1 \leqslant 1+\lambda x \leqslant 1+\lambda$ et donc $\dfrac{1}{1+\lambda} \leqslant \dfrac{1}{1+\lambda x} \leqslant 1$, et à la puissannce 5, nous avons $\sup\limits_{x\in[0;1]}\left|\left(\dfrac{1}{1+\lambda x}\right)^5\right| \leqslant 1$

→ Et donc $|f(x) - P_f(x)| \leqslant \dfrac{\lambda^5}{5}$

→ Nous devons donc avoir $\dfrac{\lambda^5}{5} \leqslant 10^{-4}$ et

$$\frac{\lambda^5}{5} \leqslant 10^{-4} \iff \lambda^5 \leqslant 5\times 10^{-4} \iff 5\ln\lambda \leqslant \ln 5 - 4\ln 10 \iff \ln\lambda \leqslant \frac{\ln 5 - 4\ln 10}{5}$$

D'où nous trouvons $\lambda \leqslant \exp\left(\dfrac{\ln 5 - 4\ln 10}{5}\right) \approx 0,21867$

(c) *Soit $\lambda = \dfrac{1}{2}$; en utilisant l'inégalité de Taylor à l'ordre n en 0, montrer que si*

$$P_n(x) = \frac{x}{2\times 1} - \frac{x^2}{2^2\times 2} + \frac{x^3}{2^3\times 3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{2^n\times n}$$

Alors $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}\left|\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - P_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}$

Rappelons la formule de Taylor-Lagrange vue en 11.4.1 et adaptée à notre problème :

> Soit $f : [0\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[0\ 1]$ admettant sur l'intervalle ouvert $]0\ 1[$ une dérivée $n+1$-ième.
> Nous appelons $P_{n,f}$ le polynôme de Taylor associé à f. Ce polynôme a pour expression, pour tout $x \in [0\ 1]$:
> $$P_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k\,!}x^k$$
> Alors, il existe ξ compris entre 0 et x tel que
> $$f(x) = P_{n,f}(x) + x^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Alors, nous pouvons écrire, pour $f(x) = \ln(1+\lambda x)$:

$$P_{n,f}(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(k-1)!\lambda^k\frac{x^k}{k\,!} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\lambda^k\frac{x^k}{k}$$

$$\ln(1+\lambda x) = P_{n,f}(x) + x^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Où $\xi \in [0;x]$.

Or, $x^{n+1}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\times(-1)^n n!\left(\dfrac{\lambda}{1+\lambda\xi}\right)^{n+1} = (-1)^n\dfrac{x^{n+1}\lambda^{n+1}}{(n+1)(1+\lambda\xi)^{n+1}}$

Pour $\lambda = \dfrac{1}{2}$, nous obtenons $P_{n,f}(x) = P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k2^k}$ et

$$\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - P_n(x) = (-1)^n\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)\left(1+\frac{\xi}{2}\right)^{n+1}}$$

Et donc :

$$\left|\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - P_n(x)\right| = \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)\left(1+\frac{\xi}{2}\right)^{n+1}}$$

Pour tout $x \in [0\ 1]$ et tout $\xi \in [0\ 1]$, nous avons $\dfrac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)\left(1+\frac{\xi}{2}\right)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)}$, la conclusion $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}\left|\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - P_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}$ en découle.

(d) *Pour quelles valeurs de n est-on assuré que* $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}\left|\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - P_n(x)\right| \leqslant 10^{-4}$

La suite numérique de terme général $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)}$ est une suite qui décroit très rapidement vers zéro.

Il faut donc trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$, alors $\dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)} \leqslant 10^{-4}$.

Avec la calculatrice, nous trouvons $u_8 = 2,1701388\times 10^{-4}$ et $u_9 = 0,00009 = 9\times 10^{-5}$

Ainsi, si $n \geqslant 9$ alors $\sup_{x\in[0,1]} \left|\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - P_n(x)\right| \leqslant 10^{-4}$

Cette démarche donne une autre forme d'approximation polynômiale, l'approche par les polynômes de Taylor

Chapitre 7

Les équations linéaires

W.I.P. : Work In Progress

7.1 Equations linéaires (*titre provisoire*)

7.1.1 Corollaire du théorème 3.10.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n
Soient $H_1, H_2, \cdots, H_m$ (avec $m \leqslant n$) m hyperplans de E définis par m formes linéaires $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*$ de E^* **linéairement indépendantes**
Alors $\dim \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i = n - m$

Démonstration

Nous appelons $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et nous rappelons que $H_i = \ker u_i^*$.
Construisons l'application $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{K}^m$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : E & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ x & \longmapsto & \Phi(x) = (u_1^*(x), u_2^*(x), \cdots, u_m^*(x)) \end{array} \right.$$

1. **Φ est une application linéaire** et, pour s'en convaincre, il suffit de revenir à la démonstration de 3.10.3
2. **De la même manière,** $\ker \Phi = \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i$ et nous savons que $\dim \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i \geqslant n - \dim \mathrm{Im}\phi$.
3. Pour démontrer notre corollaire, il faut donc démontrer que $\dim \mathrm{Im}\Phi = m$
   Nous allons démontrer que la famille $\{\Phi(e_1), \ldots, \Phi(e_n)\}$ est une famille de rang m.
   Nous allons donc extraire m vecteurs de la famille $\{\Phi(e_1), \Phi(e_2) \ldots, \Phi(e_n)\}$, par hasard, les vecteurs $\{\Phi(e_1), \Phi(e_2) \ldots, \Phi(e_m)\}$ et démontrer qu'ils forment une famille libre.
   Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ m scalaires tels que $\lambda_1\Phi(e_1) + \lambda_2\Phi(e_2) + \cdots + \lambda_m\Phi(e_m) = 0_{\mathbb{K}^m}$
   Regardons, de manière plus précise $\lambda_1\Phi(e_1) + \lambda_2\Phi(e_2) + \cdots + \lambda_m\Phi(e_m)$
   De la linéarité de Φ, nous tirons :

$$\begin{aligned} \lambda_1\Phi(e_1) + \lambda_2\Phi(e_2) + \cdots + \lambda_m\Phi(e_m) = & \ \Phi\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i\right) \\ = & \left(u_1^*\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i\right), u_2^*\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i\right), \ldots, u_m^*\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i\right)\right) \end{aligned}$$

   De la relation $\lambda_1\Phi(e_1) + \lambda_2\Phi(e_2) + \cdots + \lambda_m\Phi(e_m) = 0_{\mathbb{K}^m}$, nous déduisons que nous avons, pour tout $j = 1, \cdots, m$:

$$u_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i\right) = 0$$

Si nous écrivons $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ la base duale de E^*, nous avons, pour tout $j = 1, \cdots, m$,

$$u_j^* = \sum_{k=1}^{n} \mu_{j,k} e_k^*$$

Les m formes linéaires $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*$ de E^* étant linéairement indépendantes, la famille $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*$ est une famille de rang m, et nous avons donc :

$$\begin{aligned} u_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i\right) &= \sum_{k=1}^{n} \mu_{j,k} e_k^* \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu_{j,k} \left[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_k^*(e_i)\right] \end{aligned}$$

Comme nous l'avons déjà vu dans l'étude des formes linéaires, $e_k^*(e_i) = 1$ si $i = k$ et $1 \leqslant i \leqslant m$ et $e_k^*(e_i) = 0$ sinon.
Nous obtenons donc, pour tout $j = 1, \cdots, m$ d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$u_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu_{j,k} \lambda_k$$

Nous obtenons donc un système (S) à m lignes et m colonnes :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rl} \mu_{1,1}\lambda_1 + \mu_{1,2}\lambda_2 + \cdots + \mu_{1,m}\lambda_m = & 0 \\ \mu_{2,1}\lambda_1 + \mu_{2,2}\lambda_2 + \cdots + \mu_{2,m}\lambda_m = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \mu_{m,1}\lambda_1 + \mu_{m,2}\lambda_2 + \cdots + \mu_{m,m}\lambda_m = & 0 \end{array} \right.$$

Le déterminant du système est donné par $\Delta(S)$:

$$\Delta(S) = \begin{vmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \cdots & \cdots & \mu_{1,m} \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \cdots & \cdots & \mu_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m,1} & \mu_{m,2} & \cdots & \cdots & \mu_{m,m} \end{vmatrix}$$

La famille $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*$ étant une famille de rang m, nous avons $\Delta(S) \neq 0$ et les seules solutions au système (S) sont donc données par $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$
La famille $\{\Phi(e_1), \Phi(e_2) \ldots, \Phi(e_m)\}$ forme une famille libre et donc $\dim \operatorname{Im}\Phi = m$.
En conclusion $\dim \ker \Phi = n - m$ et $\bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - m$

Deuxième partie

Analyse

Chapitre 8

Les suites numériques

DANS CE CHAPITRE, NOUS REVOYONS ET APPROFONDISSONS LES SUITES NUMÉRIQUES. NOUS NOUS INTÉRESSERONS INDIFFÉREMMENT AUX SUITES RÉELLES OU COMPLEXES. DANS CE CHAPITRE, $\mathbb{K}$ DÉSIGNE $\mathbb{R}$ OU $\mathbb{C}$

8.1 Premières Définitions et premières propriétés

8.1.1 Définition

Soit E un ensemble quelconque.
On appelle suite d'éléments de E, une application f de $I \subset \mathbb{N}$ dans E

$$\begin{cases} f : I & \xrightarrow{f} & E \\ n & \xmapsto{f} & f(n) \end{cases}$$

Remarque 1 :

Sans revenir aux définitions de base vues en L_0, nous rappelons quelques notions

1. I peut être un ensemble fini ou infini.
   - Si I est un ensemble fini, **la suite est dite finie**.
   - Si I est un ensemble infini, la suite est dite infinie
2. Nous utiliserons toujours la notation indicielle :
   - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite
   - u_n désigne le terme d'indice n *(c'est l'image de l'entier n par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$)*
3. E peut être n'importe quel ensemble ; par exemple, $E = \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes ou bien E un ensemble d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

   Exemple :
   Les suites de fonctions

   - $f_n(x) = x + e^{-nx}$
   - $g_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$
   - $h_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$

   Les suites de fonctions seront étudiées dans un chapitre ultérieur
4. Si $E = \mathbb{K}$, on parle alors de **suites numériques**. L'ensemble des suites numériques est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

8.1.2 Notion de suite extraite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{g(n)}$ avec g fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

Exemple 1 :

L'exemple le plus classique de suite extraite est la suite des termes de rang pair ou des termes de rang impair : étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons :

— $w_n = u_{2n}$ — $v_n = u_{2n+1}$

Remarque 2 :

Toute application strictement croissante $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) \geqslant n$

Une application strictement croissante $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est telle que, pour tout $n_1 \in \mathbb{N}$ et tout $n_2 \in \mathbb{N}$,

$$n_1 > n_2 \Longrightarrow g(n_1) > g(n_2)$$

Montrons que si $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) \geqslant n$

Nous faisons cette démonstration par récurrence

- ▷ Elle est vraie pour $n = 0$, puisque comme $g(0) \in \mathbb{N}$, nous avons forcément $g(0) \geqslant 0$
- ▷ Supposons que nous ayions, au rang n, $g(n) \geqslant n$
- ▷ Démontrons que nous avons $g(n+1) \geqslant n+1$
  Comme g est strictement croissante, nous avons $g(n+1) > g(n)$; de l'hypothèse de récurrence, par transitivité de la relation d'ordre, nous avons $g(n+1) > n$, c'est à dire $g(n+1) \geqslant n+1$

Ce que nous voulions

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; démontrer que toute suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

8.1.3 Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $l \in \mathbb{K}$
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, si, à tout nombre $\varepsilon > 0$, on peut associer un entier N_ε tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $n \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon$
On écrit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Remarque 3 :

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente ou u'elle admet comme limite l.

8.1.4 Théorème : unicité de la limite

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, alors, cette limite est unique

Démonstration

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent 2 limites l_1 et l_2 telles que $l_1 \neq l_2$.

FIGURE 8.1 – Une visualisation de l'unicité de la limite

Posons $\varepsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{4}$; nous avons bien $\varepsilon > 0$

- ▷ **On écrit, dans un premier temps que** $\lim_{n\to+\infty} u_n = l_1$
Il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N_1$, alors $|u_n - l_1| \leqslant \varepsilon$
- ▷ **On écrit, dans un second temps que** $\lim_{n\to+\infty} u_n = l_2$
Il existe donc $N_2 \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N_2$, alors $|u_n - l_2| \leqslant \varepsilon$
- ▷ **Faisons la synthèse :**

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| \leqslant |l_1 - u_n| + |u_n - l_2|$$

On appelle $N = \max\{N_1, N_2\}$. Si $n \geqslant N$ alors $n \geqslant N_1$ et $n \geqslant N_2$ et donc, $|u_n - l_1| \leqslant \varepsilon$ et $|u_n - l_2| \leqslant \varepsilon$
Donc, si $n \geqslant N$

$$|l_1 - l_2| \leqslant |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| \leqslant 2\varepsilon = 2 \times \frac{|l_1 - l_2|}{4} = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

Comme $|l_1 - l_2| \leqslant \dfrac{|l_1 - l_2|}{2}$ est impossible, l'hypothèse $l_1 \neq l_2$ est impossible.

Donc, $l_1 = l_2$ et la limite est donc unique.

Exemple 2 :

1. La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite qui tend vers zéro
   Pas très difficile!!
   Soit $\varepsilon > 0$. pour que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, nous devons avoir $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.
   Ainsi, en choisissant $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, alors, si $n \geqslant N$, alors $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.
   En effet,
   $$n \geqslant N \Longrightarrow n \geqslant \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$
2. La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui n'admet aucune limite
   Soit $l \in \mathbb{R}$ une limite possible de la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $|l - u_n| = |1 - 1|$ ou $|l - u_n| = |1 + 1|$
   Soit $A = \max\{|1-1|, |1+1|\}$ et $\varepsilon = \dfrac{A}{2}$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ et $|l - u_n| > \varepsilon$
   Ainsi, pour tout $l \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ et $|l - u_n| > \varepsilon$.
   Ce qui est la négation de la définition de suite qui admet une limite. Donc, la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui n'admet aucune limite
3. La suite $\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite qui admet pour limite $\dfrac{1}{2}$
   Soit $\varepsilon > 0$
   Il faut montrer qu'il est possible de majorer $\left|\dfrac{n+1}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right|$ par ε, à partir d'un certain rang.
   Or :
   $$\left|\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)}$$
   Or, $\dfrac{1}{2(2n+1)} < \dfrac{1}{n}$, et la démonstration est facile à terminer

Exercice 2 :

Terminer la démonstration de $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$

8.1.5 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique qui admet une limite $l \in \mathbb{K}$. Alors, toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $l \in \mathbb{K}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{g(n)}$ avec g fonction croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$
Ecrivons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. Soit donc $\varepsilon > 0$.
Il existe donc un entier $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N$, alors $|u_n - l| < \varepsilon$.
g étant une fonction croissante, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) \geqslant n$. Donc, si $n \geqslant N$, alors $g(n) \geqslant N$, et donc, si $n \geqslant N$, alors $\left|u_{g(n)} - l\right| < \varepsilon$, c'est à dire $|v_n - l| < \varepsilon$.
Nous venons de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Remarque 4 :

La réciproque est fausse
Pour le voir, il suffit de penser à la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'est pas convergente, alors que la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 1$ est convergente.
On peut donc avoir des suites extraites convergentes, alors que la suite globale ne l'est pas.

Exercice 3 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que les suites extraites $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{5n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes.La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
3. **Généralisation :** soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, 2 entiers premiers entre eux.
   On suppose que :
   — La suite $(u_{bn})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
   — Pour tout entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant r < a$, la suite $(u_{an+r})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée l_r
   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Exercice 4 :

La suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$ est-elle convergente ?

8.1.6 Théorème de Césaro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l. Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

converge, elle aussi, vers l

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représente la moyenne arithmétique de $u_0, u_1, \cdots, u_n$
Démontrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle aussi, vers l

1. **Premièrement**

$$\begin{aligned} v_n - l = & \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k - l \\ = & \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k - (n+1)\,l\right) \\ = & \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} (u_k - l) \end{aligned}$$

   Et, en passant aux valeurs absolues :

$$|v_n - l| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |u_k - l|$$

2. Soit $\varepsilon > 0$
   - Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant p$, alors $|u_n - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, et donc, pour $n \geqslant p$, nous avons :

   $$\sum_{k=p}^{n} |u_k - l| \leqslant (n-p+1)\,\frac{\varepsilon}{2} \leqslant (n+1)\,\frac{\varepsilon}{2}$$

     Ainsi, pour $n \geqslant p$, nous avons $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=p}^{n} |u_k - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$
   - $\mathbb{R}$ étant archimédien, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} |u_k - l| \leqslant q\frac{\varepsilon}{2}$

     Donc, pour $n \geqslant \max\{p,q\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} |u_k - l| \leqslant (n+1)\,\frac{\varepsilon}{2}$
   - Ainsi, pour $n \geqslant \max\{p,q\}$, nous pouvons écrire :

$$|v_n - l| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |u_k - l| \leqslant \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{p-1} |u_k - l| + \sum_{k=p}^{n} |u_k - l|\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nous venons de démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Remarque 5 :

Bien entendu, la réciproque est fausse :

Considérons la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une suite n'admettant aucune limite.

Soit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ et

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{S_n}{n+1}$$

On peut remarquer que $S_0 = 1$, $S_1 = 0$, $S_2 = 1$ et $S_3 = 0$, et donc, par une récuurence très simple, $S_{2n} = 1$ et $S_{2n+1} = 0$, de telle sorte que $v_{2n} = \dfrac{1}{n+1}$ et $v_{2n+1} = 0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors que la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

Exemple 3 :

Considérons la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est une suite qui tend vers zéro. Alors, par le théorème de Cesaro 8.1.6 la suite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$ tend aussi vers zéro.

En effet,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n}$$

Exercice 5 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne si $v_n = \dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$ admet une limite l. Démontrer qu'une suite périodique converge en moyenne.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **périodique** s'il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+t} = u_n$.
Exemple de suite périodique : la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de période 2
Cet exercice démontre, par un contre exemple, qu'il ne peut y avoir de réciproque au théorème de Césaro.

8.1.7 Définition de suite bornée

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
On dit que cette suite est bornée si l'ensemble : $\{u_n \text{ avec } n \in \mathbb{N}\}$ est borné
Une définition équivalente est donnée par :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \iff (\exists M_u > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (|u_n| \leqslant M_u)$$

Exemple 4 :

Il est très facile de trouver de suites bornées :

— $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ — $\left(e^{in\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ — $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$

8.1.8 Théorème

Toute suite convergente est bornée

Démonstration

Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui admet pour limite $l \in \mathbb{K}$
Il existe donc un entier $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N$, alors $|u_n - l| \leqslant 1$.
Comme $|u_n - l| \leqslant 1 \iff l - 1 \leqslant u_n \leqslant l + 1$, nous avons $|u_n| \leqslant \max\{|l-1|, |l+1|\} \leqslant |l| + 1$
Soit A, le plus grand des nombres $|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |l|+1$, c'est à dire $A = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |l|+1\}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|u_n| \leqslant A$
Ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Remarque 6 :

Et, évidemment, la réciproque est fausse !! Il suffit de prendre la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une suite bornée non convergente.

8.2 Opérations sur les suites

8.2.1 Définition

On appelle $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{N}$
On définit, dans cet ensemble les opérations suivantes :

1. Addition $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Multiplication $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Multiplication par un scalaire Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Nous admettons que, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

8.2.2 Proposition

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites numériques bornées Alors $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

Démonstration

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$; alors, en réécrivant l'hypothèse :
- ▷ Il existe $M_u > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M_u$
- ▷ Il existe $M_v > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M_v$

1. On montre que $\mathcal{B}$ est stable pour l'addition et la multiplication par un scalaire et est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
   (a) En ce qui concerne l'addition, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M_u$ et $|v_n| \leqslant M_v$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire,
   $$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant M_u + M_v$$
   Ce qui montre que l'addition de 2 suites bornées est aussi une suite bornée.
   (b) D'autre part,
   $$(\forall\lambda \in \mathbb{K})\,(|\lambda u_n| = |\lambda|\,|u_n| \leqslant |\lambda|\,M_u)$$
   Ce qui montre que si on multiplie une suite bornée par un scalaire réel, on obtient aussi une suite bornée.

   $\mathcal{B}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
2. On montre, de plus, que $\mathcal{B}$ est stable par multiplication
   De même :
   $$|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \leqslant M_u \times M_v$$
   Ce qui montre bien que le produit de 2 suites bornées est une suite bornée, c'est à dire, un élément de $\mathcal{B}$

8.2.3 Théorème : limite de la somme

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = u + v$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$
- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors $|u_n - u| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$
- De même, de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_2$, alors $|v_n - v| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors, pour $n \geqslant N$,

$$|(u_n - v_n) - (u - v)| = |(u_n - u) + (v_n - v)| \leqslant |u_n - u| + |v_n - v| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On vient donc de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = u + v$

Remarque 7 :

Ce qui se dit : la limite de la somme est la somme des limites

8.2.4 Théorème : limite du produit

Soients $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites
Supposons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = v$. Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n \times v_n) = uv$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$
Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} |u_n v_n - uv| = {} & |u_n v_n - u v_n + u v_n - uv| \\ \leqslant {} & |u_n v_n - u v_n| + |u v_n - uv| \\ \leqslant {} & |v_n|\,|u_n - u| + |u|\,|v_n - v| \end{aligned}$$

— $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente donc bornée par $M_v > 0$, c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M_v$
— De la même manière, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente donc bornée par $M_u > 0$, c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M_u$
— Soit $M > 0$ tel que $M \geqslant \max\{M_u, M_v, |u|, |v|\}$
Nous avons donc :

$$|u_n v_n - uv| \leqslant |v_n|\,|u_n - u| + |u|\,|v_n - v| \leqslant M\,|u_n - u| + M\,|v_n - v|$$

— Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors $|u_n - u| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}$
— De même, de $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = v$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_2$, alors $|v_n - v| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors, pour $n \geqslant N$,

$$|u_n v_n - uv| \leqslant M\,|u_n - u| + M\,|v_n - v| \leqslant M \times \frac{\varepsilon}{2M} + M \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On vient donc de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n v_n) = uv$

Remarque 8 :

1. Ce qui se dit : la limite du produit est le produit des limites
2. Un cas particulier de ce théorème est le suivant :

   Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $\lambda \in \mathbb{K}$
   Supposons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u$. Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} (\lambda \times u_n) = \lambda \times u$

   C'est l'application de 8.2.4 en prenant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme étant la suite constante $u_n = \lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

8.2.5 Théorème : limite du quotient

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ avec $u \neq 0$.
Alors :

1. Il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \neq 0$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u}$

Démonstration

1. **Démonstration du premier point**
Nous allons utiliser l'inégalité triangulaire, à savoir, pour tout $x \in \mathbb{K}$ et tout $y \in \mathbb{K}$:
$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$
Nous avons : $|u_n| = |(u_n - u) + u| \geqslant |u| - |u_n - u|$ et, si $n \geqslant N_1$, alors $-|u_n - u| \geqslant -\dfrac{|u|}{2}$.
Donc, si $n \geqslant N_1$, alors
$$|u_n| \geqslant |u| - |u_n - u| \geqslant |u| - \frac{|u|}{2} = \frac{|u|}{2}$$
Donc, si $n \geqslant N_1$, $u_n \neq 0$
2. **Nous démontrons que** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u}$
Soit $\varepsilon > 0$.
Alors :
$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u}\right| = \left|\frac{u_n - u}{u_n \times u}\right| = \frac{|u_n - u|}{|u_n|\,|u|}$$
Si $n \geqslant N_1$, alors $|u_n| \geqslant \dfrac{|u|}{2}$, c'est à dire $\dfrac{1}{|u_n|} \leqslant \dfrac{2}{|u|}$. Donc, si $n \geqslant N_1$, alors
$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u}\right| = \frac{|u_n - u|}{|u_n|\,|u|} \leqslant \frac{2\,|u_n - u|}{|u|^2}$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_2$, alors $|u_n - u| \leqslant \dfrac{\varepsilon\,|u|^2}{2}$
Donc, si $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$, alors
$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u}\right| \leqslant \frac{2}{|u|^2} \times \frac{\varepsilon\,|u|^2}{2} = \varepsilon$$
Ce qui termine de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u}$

8.2.6 Corollaire

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ avec $u \neq 0$.
Alors il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \neq 0$ et u_n est du même signe que u

Démonstration

On suppose donc $u \neq 0$, c'est à dire $|u| > 0$
Il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors $|u_n - u| \leqslant \dfrac{|u|}{2}$
Alors, si $n \geqslant N_1$, nous avons
$$|u_n - u| \leqslant \frac{|u|}{2} \iff u - \frac{|u|}{2} \leqslant u_n \leqslant u + \frac{|u|}{2}$$

— Si $u > 0$, l'inégalité $u - \dfrac{|u|}{2} \leqslant u_n \leqslant u + \dfrac{|u|}{2}$ devient $\dfrac{u}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3u}{2}$.
  Comme $u > 0$, $u_n \geqslant \dfrac{u}{2} > 0$, et donc $u_n \neq 0$

— Maintenant, si $u < 0$, l'inégalité $u - \dfrac{|u|}{2} \leqslant u_n \leqslant u + \dfrac{|u|}{2}$ devient $\dfrac{3u}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{u}{2}$.
  Comme $u < 0$, $u_n \leqslant \dfrac{u}{2} < 0$, et donc $u_n \neq 0$

On vient de montrer que si $u \neq 0$,à partir d'un certain rang, u_n est non nul et de même signe que u.

Remarque 9 :

1. Nous avons aussi, bien entendu, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u}$
2. Nous venons aussi de démontrer que $|u_n| \geqslant \dfrac{|u|}{2}$ à partir d'un certain rang.
3. Nous retrouverons des résultats sur "limites et relations d'ordre" plus loin.

8.2.7 Conséquence

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ avec $u \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{v_n}{u_n}\right) = \dfrac{v}{u}$

Démonstration

La démonstration est une conséquence simple de 8.2.4 et 8.2.5

8.2.8 Théorème

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique complexe, c'est à dire $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
Nous supposons $z_n = a_n + ib_n$, c'est à dire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
Soit $z = a + ib$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to+\infty} a_n = a \text{ et } \lim_{n\to+\infty} b_n = b$$

Démonstration

On rappelle que si $z \in \mathbb{C}$ et $z = a + ib$, alors $|a| \leqslant |z|$ et $|b| \leqslant |z|$

1. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$
   Soit $\varepsilon >$
   Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $|z_n - z| < \varepsilon$.
   Or, $z_n - z = (a_n - a) + i\,(b_n - b)$, et donc $|a_n - a| \leqslant |z_n - z|$ et $|b_n - b| \leqslant |z_n - z|$.
   Donc, si $n \geqslant N$, alors $|a_n - a| < \varepsilon$ et $|b_n - b| < \varepsilon$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$
2. Réciproquement, supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$
   D'après 8.2.3 et 8.2.4, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} ib_n = ib$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + ib_n = a + ib$, c'est à dire
   $$\lim_{n\to+\infty} z_n = z$$

Remarque 10 :

La démonstration du second point peut se faire différemment :

Réciproquement, supposons $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$

Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe alors $N_a \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_a$, alors $|a_n - a| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$
De même, il existe alors $N_b \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_b$, alors $|b_n - b| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$
Donc, si $n \geqslant \max\{N_a, N_b\}$, alors $|a_n - a| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$ et $|b_n - b| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$
Et donc, si $n \geqslant \max\{N_a, N_b\}$, alors :

$$|z_n - z| = \sqrt{(b_n - b)^2 + (b_n - b)^2} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

Nous venons de montrer que $\lim_{n\to+\infty} z_n = z$

Exercice 6 :

Dans cet exercice, étudier, en fonction de $x \in \mathbb{K}$, les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-n^2x^2}{1+n^2x^2}$
3. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x^n-1}{x^n+1}\right)^2$

Exercice 7 :

Donnez les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=3}^{n} \frac{k^2-1}{k^2+4}$
2. $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$

8.3 Suites et ordre

ATTENTION !! IL N'EXISTE PAS DANS $\mathbb{C}$ DE RELATION D'ORDRE TOTAL COMPATIBLE AVEC L'ADDITION ET LA MULTIPLICATION. IL FAUDRA DONC, À CHAQUE RÉSULTAT EST TRÈS PRÉCIS SUR LES HYPOTHÈSES.

8.3.1 Un premier théorème de majoration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique une suite numérique de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle telle que :
— $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$
— A partir d'un certain rang, $|v_n| \leqslant u_n$
Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Démonstration

La démonstration est très simple.
Soit $\varepsilon > 0$
Alors, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors $|u_n| < \varepsilon$
De plus, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_2$, alors $|v_n| \leqslant u_n$ *(donc, en particulier $u_n \geqslant 0$)*
Donc, pour $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$, nous avons $|v_n| \leqslant u_n \leqslant \varepsilon$
C'est à dire $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exemple 5 :

1. Le premier exemple est la suite complexe $\left(\dfrac{e^{in\alpha}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\left|\frac{e^{in\alpha}}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, nous avons donc, dans $\mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{in\alpha}}{n} = 0$

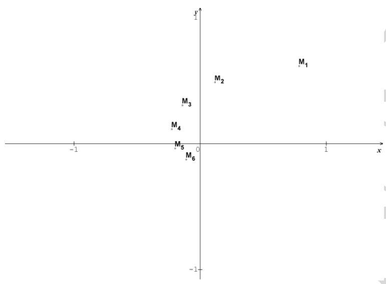

FIGURE 8.2 – Une visualisation de la suite $\left(\dfrac{e^{in\frac{2}{3}}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

2. Un autre exemple, vu dans le cours de L_0, est classique :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sin\left(\dfrac{u_n}{2}\right)$.
De l'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$, on tire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| = \left|\sin\left(\frac{u_{n-1}}{2}\right)\right| \leqslant \frac{|u_0|}{2^n}$$

Et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

8.3.2 Théorème des limites par encadrement

Attention !! ce théorème n'est valable que pour **les suites numériques réelles** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, trois suites numériques réelles telles que :

1. Il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant p$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$

Alors
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant p$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Donc, pour $n \geqslant p$, $u_n - l \leqslant v_n - l \leqslant w_n - l$, et donc, pour $n \geqslant p$, nous avons :

$$|v_n - l| \leqslant \max\{|u_n - l|, |w_n - l|\}$$

— Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe $N_u \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_u$, alors $|u_n - l| < \varepsilon$
— De même, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, il existe $N_w \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_w$, alors $|w_n - l| < \varepsilon$

Ainsi, si $n \geqslant \max\{p, N_u, N_w\}$, alors $|v_n - l| < \varepsilon$
Nous venons donc de montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Remarque 11 :

Il existe une appellation non controlée du théorème 8.3.2 ; on l'appelle souvent **le théorème des gendarmes**

Exemple 6 :

Etudions $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k}$

Pour tout $k = 1, \cdots, n$, nous avons :

$$\frac{1}{n^2+n} \leqslant \frac{1}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2+1}$$

Et donc, en passant à la sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1} \iff \frac{n}{n^2+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \leqslant \frac{n}{n^2+1}$$

Puis, en multipliant par n,

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1$ et donc, d'après le théorème 8.3.2, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k} = 1$

Exercice 8 :

Donner les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{3n+4} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\mathrm{C}_n^k} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\binom{n}{k}}$

8.3.3 Théorème

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ admet une limite l, et si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$ alors $u_n \geqslant a$, alors $l \geqslant a$

Démonstration

Nous allons faire une démonstration par l'absurde.
Supposons $l < a$ et soit $\varepsilon > 0$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|u_n - l| < \varepsilon$
En particulier, pour $\varepsilon = \dfrac{a-l}{2}$, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $\dfrac{-(a-l)}{2} \leqslant u_n - l \leqslant \dfrac{a-l}{2}$, c'est à dire

$$l - \frac{(a-l)}{2} \leqslant u_n \leqslant l + \frac{a-l}{2}$$

c'est à dire : $u_n \leqslant \dfrac{a+l}{2}$
Or, $\dfrac{a+l}{2} < a$, car $l < a$, et $\dfrac{a+l}{2}$ est le milieu de l'intervalle $[l\ a]$
Il y a donc une contradiction avec l'hypothèse $u_n \geqslant a$ et donc $l \geqslant a$

Remarque 12 :

1. Le problème est le même si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$ alors $u_n \leqslant a$: si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, alors $l \leqslant a$
2. Les inégalités strictes ne sont pas conservées ; par exemple : $\dfrac{1}{n} > 0$, mais, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

8.3.4 Proposition

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 2 suites convergentes.
Si $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang p, alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n}$

Démonstration

La démonstration de ce théorème est simple : on crée la suite $w_n = u_n - v_n$, alors, $w_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang .
Comme la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, que sa limite est $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, et que, d'après le théorème 8.3.3 précédent, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n \geqslant 0$, on a le résultat.

8.3.5 Caractérisation des parties denses de $\mathbb{R}$

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$.
A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A

Rappel : A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $x < a < y$

Démonstration

1. Supposons A dense dans $\mathbb{R}$
   Soit $x \in \mathbb{R}$
   Il faut montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Comme A est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $a \in A$ tel que $a \in \left]x - \dfrac{1}{n}\ ,\ x + \dfrac{1}{n}\right[$. On appelle a_n l'un de ces éléments.
   On construit ainsi une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n - x| < \dfrac{1}{n}$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$
   Il existe donc bien une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$
2. Réciproquement, supposons que tout réel $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A
   Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
   Il faut montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $x < a < y$.
   On considère $X = \dfrac{x+y}{2}$
   Il existe donc une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = X$.
   Pour $\varepsilon = \dfrac{|y - X|}{4} = \dfrac{|y - x|}{4} = \dfrac{y - x}{4}$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|a_n - X| \leqslant \varepsilon$. Or :
   $$\begin{aligned} |a_n - X| \leqslant \varepsilon &\iff -\varepsilon + X \leqslant a_n \leqslant \varepsilon + X \\ &\iff -\left(\frac{y-x}{4}\right) + \frac{x+y}{2} \leqslant a_n \leqslant \frac{y-x}{4} + \frac{x+y}{2} \\ &\iff \frac{3x+y}{4} \leqslant a_n \leqslant \frac{x+3y}{4} \end{aligned}$$
   Nous avons $x < \dfrac{3x+y}{4}$ et $\dfrac{x+3y}{4} < y$. Donc, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $x < a_n < y$
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $x < a < y$

8.3.6 Corollaire

$\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels

Exemple 7 :

La suite de nombres rationnels (éléments de $\mathbb{Q}$)définie par $u_0 = 5$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$ converge vers $\sqrt{2}$; or, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

8.4 Variations des suites

CETTE SECTION NE CONCERNE QUE LES SUITES RÉELLES

8.4.1 Définition de suite croissante

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons
$$n \geqslant m \Longrightarrow u_n \geqslant u_m$$
2. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons
$$n > m \Longrightarrow u_n > u_m$$

8.4.2 Définition de suite décroissante

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons
$$n \geqslant m \Longrightarrow u_n \leqslant u_m$$
2. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons
$$n > m \Longrightarrow u_n < u_m$$

Remarque 13 :

1. Une suite est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante
2. De même, une suite est dite **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante
3. Si une suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -u_n$ est décroissante

8.4.3 Caractérisation

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \leqslant u_{n+1}$
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \geqslant u_{n+1}$

Exemple 8 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$$

Cette suite est décroissante car $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$, c'est à dire $u_{n+1} \leqslant u_n$

Exercice 9 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$$

   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. Etudier les variations de la la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$

Exercice 10 :

Etudier les variations des suites suivantes :

1. $u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$
2. $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
3. $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1}$

8.4.4 Convergence et monotonie

Toute suite croissante et majorée converge

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite numérique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, croissante et majorée.
Donc, $\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré, qui admet donc une borne supérieure M.
Soit donc $M = \sup\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$ et soit $\varepsilon > 0$.
Alors, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de l'ensemble $\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$; il existe donc $N_M \in \mathbb{N}$ tel que $M - \varepsilon \leqslant u_{N_M} \leqslant M$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, nous avons : $n \geqslant N_M \Longrightarrow M - \varepsilon \leqslant u_{N_M} \leqslant u_n \leqslant M$, donc, $|u_n - M| \leqslant \varepsilon$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = M$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente et sa limite est sa borne supérieure.

Remarque 14 :

1. On vient de montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique croissante, alors elle converge vers sa borne supérieure
2. Donc, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique décroissante et minorée, alors, elle converge vers sa borne inférieure
3. Une suite peut etre convergente sans être croissante ou décroissante.

   Exemple : $\frac{(-1)^n}{n}$; cette suite converge vers zéro, mais n'est ni croissante, ni décroissante ; elle est, par contre bornée *(majorée et minorée)*, comme toute suite convergente
4. Une suite peut etre bornée *(majorée, entre autres)* sans toutefois être convergente.

   Exemples : $u_n = \sin\frac{n\pi}{6}$, $v_n = (-1)^n$,
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique croissante. Si elle est convergente, alors elle est bornée.
   En prenant la contrapposée, si elle est non bornée, alors elle est divergente.

Exemple 9 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $u_0 = 0$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3. Qu'en déduire ?
   - On montre tout d'abord que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et majorée par 3.
     Cette démonstration se fait par récurrence.
     On appelle $P(n)$ la propriété : $P(n)$: $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 3$
     - $P(0)$ est évidemment vraie
     - Supposons que $P(n)$ soit vraie
     - Démontrons que $P(n+1)$ est vraie.
       Tout d'abord, comme $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$, nous avons bien $u_{n+1} \geqslant 0$
       De plus, $u_{n+1} - 3 = \sqrt{6+u_n} - 3 = \dfrac{6+u_n-9}{\sqrt{6+u_n}+3} = \dfrac{u_n-3}{\sqrt{6+u_n}+3}$.
       Comme $u_n \leqslant 3, \dfrac{u_n-3}{\sqrt{6+u_n}+3} \leqslant 0$, et donc $u_{n+1} \leqslant 3$, et donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$

     Nous venons de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$
   - On montre tout d'abord que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
     Nous faisons donc la différence $u_{n+1} - u_n$.
     $$u_{n+1} - u_n = \sqrt{6+u_n} - u_n = \frac{6+u_n-u_n^2}{\sqrt{6+u_n}+u_n} = \frac{(2+u_n)(3-u_n)}{\sqrt{6+u_n}+u_n}$$
     Comme $\dfrac{(2+u_n)}{\sqrt{6+u_n}+u_n} > 0$, le signe de $u_{n+1}-u_n$ ne dépend que de celui de $3-u_n$. Donc,$u_{n+1}-u_n \geqslant 0$
     et la suite est donc croissante
   - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite coissante et majorée, elle est donc convergente.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{3-u_n}{3}$

   Il suffit de faire les calculs !!
   $3 - u_{n+1} = 3 - \sqrt{6+u_n} = \dfrac{9-6-u_n}{3+\sqrt{6+u_n}} = \dfrac{3-u_n}{3+\sqrt{6+u_n}}$
   Or, $3 \leqslant 3 + \sqrt{6+u_n}$ et donc $\dfrac{3-u_n}{3+\sqrt{6+u_n}} \leqslant \dfrac{3-u_n}{3}$.
   Nous avons donc $3 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{3-u_n}{3}$
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

   Il est aisé de démontrer parr écurrence que $0 \leqslant 3 - u_n \leqslant \dfrac{3-u_0}{3^n}$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - u_n = 0$

   On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

Exercice 11 :

On considère la suite définie par $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Démontrer que c'est une suite convergente

8.4.5 Suites adjacentes

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 2 suites numériques réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si :
   (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante
   (b) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante
   (c) Et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$
2. Deux suites adjacentes sont convergentes et admettent la même limite

Démonstration

1. La suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante
   En effet :
   $$(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$$

— Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$
— Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante, alors $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$
Donc $(v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leqslant 0$ et $(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) \leqslant 0$ et la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante

2. Comme la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geqslant 0$, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 0$
3. <u>Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q_i n\mathbb{N}$, nous avons $u_p \leqslant v_q$</u>
Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$
   (a) Supposons que $p \leqslant q$. Alors :
$$u_p \leqslant u_q \leqslant v_q \Longrightarrow u_p \leqslant v_q$$
   (b) Supposons maintenant que $p > q$. Alors :
$$u_p \leqslant v_p \leqslant v_q \Longrightarrow u_p \leqslant v_q$$
4. Nous avons, en particulier et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante et majorée ; elle admet donc une limite notée l_u
De même, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée ; elle admet donc une limite notée l_v
5. <u>Ces deux suites admettent même limite</u>
Autrement dit, $l_u = l_v$.
En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = l_u - l_v$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$, nous avons $l_u - l_v = 0$, c'est à dire $l_u = l_v$

Exemple 10 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. On construit 2 autres suites, extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

— La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = u_{2n}$ *(la suite des termes de rang pair)*
— La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = u_{2n+1}$ *(la suite des termes de rang impair)*

Nous allons montrer que ces 2 suites sont adjacentes

1. **Tout d'abord :**
$$v_{n+1} - v_n = u_{2n+2} - u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}$$
Comme $\dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1} < 0$, nous avons $v_{n+1} - v_n < 0$, c'est à dire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante
2. **De même, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante**
En effet :
$$w_{n+1} - w_n = u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = u_{2n+3} - u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2}$$
Comme $\dfrac{-1}{2n+3} + \dfrac{1}{2n+2} > 0$, nous avons $w_{n+1} - w_n > 0$, c'est à dire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante
3. **Ensuite** $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - w_n) = 0$
En effet :
$$v_n - w_n = u_{2n} - u_{2n+1} = -\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$
Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - w_n) = 0$

4. **Les deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes**
   Leur limite commune est donc l telle que $w_n \leqslant l \leqslant v_n$, c'est à dire :
$$u_{2n+1} \leqslant l \leqslant u_{2n} \iff u_{2n} - \frac{1}{2n+1} \leqslant l \leqslant u_{2n} \iff -\frac{1}{2n+1} \leqslant l - u_{2n} \leqslant 0$$
   l est aussi la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et une approximation de l à 10^{-2} près est donnée pour $n = 50$ par u_{100}

Remarque 15 :

Il est tout à fait possible d'étudier, en généralisant l'exemple précédent, les suites du type $A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 12 :

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

— $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$

— $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$

Démontrez que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et leur limite commune γ est telle que $0 \leqslant \gamma - v_n \leqslant \frac{1}{n}$

8.4.6 Limite supérieure, limite inférieure d'une suite bornée

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. A partir de cette suite, nous définissons 2 autres suites :

1. $V_n = \sup\{u_p \text{ avec } p \geqslant n\}$
2. $W_n = \inf\{u_p \text{ avec } p \geqslant n\}$

Alors :

1. La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre appelé $\limsup u_n$ [a]
2. La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre appelé $\liminf u_n$ [b]
3. Nous avons $\liminf u_n \leqslant \limsup u_n$
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si : $\liminf u_n = \limsup u_n$. Et dans ce cas, la limite l de la suite est telle que :
$$l = \liminf u_n = \limsup u_n$$

a. Ce nombre est appelé **limite supérieure de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
b. Ce nombre est appelé **limite inférieure de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Démonstration

Pour $n \in \mathbb{N}$, nous appelons $A_n = \{u_p \text{ tels que } p \geqslant n\}$. Alors :
— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, les ensembles A_n sont aussi bornés, et ce, pour tout $n \in \mathbb{N}$; ce qui justifie l'existence de $\sup A_n$ et de $\inf A_n$
— D'autre part, nous avons clairement $A_{n+1} \subset A_n$

1. **La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée, donc convergente**
   En effet, comme $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $x \in A_{n+1}$, nous avons $x \in A_n$; en particulier, pour tout $x \in A_{n+1}$, nous avons $x \leqslant \sup A_n$; en particulier $\sup A_{n+1} \leqslant \sup A_n$, c'est à dire $V_{n+1} \leqslant V_n$; la suite est donc décroissante et minorée, donc convergente.

2. **La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée, donc convergente**
   En effet, comme $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $x \in A_{n+1}$, nous avons $x \in A_n$; en particulier, pour tout $x \in A_{n+1}$, nous avons $x \geqslant \inf A_n$; en particulier $\inf A_{n+1} \geqslant \inf A_n$, c'est à dire $W_{n+1} \geqslant W_n$; la suite est donc croissante et majorée, donc convergente.
3. **Nous avons** $\liminf u_n \leqslant \limsup u_n$
   En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in A_n$, nous avons $\inf A_n \leqslant x \leqslant \sup A_n$, c'est à dire $W_n \leqslant x \leqslant V_n$; et donc, en passant à la limite, $\liminf u_n \leqslant \limsup u_n$
4. **Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si :** $\liminf u_n = \limsup u_n$
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, nous appelons toujours $A_n = \{u_p \text{ tels que } p \geqslant n\}$
   (a) <u>Supposons $\liminf u_n = \limsup u_n$</u>
   On appelle toujours $V_n = \sup A_n$ et $W_n = \inf A_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \leqslant u_n \leqslant V_n$
   Comme les suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite, d'après le théorème 8.3.2 dit des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
   (b) <u>Réciproquement, supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge</u>
   On appelle $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Soit $\varepsilon >$
   Il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|u_n - l| < \varepsilon$, c'est à dire tel que $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$
   Pour $n \geqslant N_\varepsilon$, nous avons $A_n \subset A_{N_\varepsilon}$, et, pour tout $p \geqslant n$, $u_p \in A_n$ et $l - \varepsilon < u_p < l + \varepsilon$.
   Nous avons, en particulier, pour $n \geqslant N_\varepsilon$, $l - \varepsilon < \inf A_n < l + \varepsilon$ et $l - \varepsilon < \sup A_n < l + \varepsilon$, ou encore, écrit autrement, $l - \varepsilon < V_n < l + \varepsilon$ et $l - \varepsilon < W_n < l + \varepsilon$, ce qui traduit bien que les suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite l.
   Ainsi, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, alors $\liminf u_n = \limsup u_n = l$

Remarque 16 :

1. En fait,en référence à 8.4.4 nous avons :
   ▷ $\limsup u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup\{u_p \text{ avec } p \geqslant n\}\right)$
   ▷ $\liminf u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf\{u_p \text{ avec } p \geqslant n\}\right)$
2. D'autre part, et bien évidemment, $\liminf u_n \leqslant \limsup u_n$

Exemple 11 :

1. L'exemple classique est celui de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = (-1)^n$. Bien sûr, $\limsup u_n = +1$ et $\liminf u_n = -1$
2. Moins classique est celui de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $u_n = (-1)^n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
   ▷ C'est une suite bornée : $\left|(-1)^n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right| = 1 + \dfrac{1}{n} \leqslant 2$
   ▷ C'est une suite qui n'admet pas de limite :
   — La suite des termes de rang pair donnée par $u_{2n} = 1 + \dfrac{1}{2n}$ admet pour limite 1
   — La suite des termes de rang impair donnée par $u_{2n} = -1 - \dfrac{1}{2n+1}$ admet pour limite -1
   ▷ En posant $A_n = \{u_p \text{ tels que } p \geqslant n\} = \left\{(-1)^p\left(1 + \dfrac{1}{p}\right) \text{ tels que } p \geqslant n\right\}$
   — En posant $V_n = \sup A_n$, nous avons $V_{2n} = 1 + \dfrac{1}{2n}$ et $V_{2n+1} = 1 + \dfrac{1}{2n+2}$[1]. Nous avons, bien entendu, $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 1$, c'est à dire $\limsup u_n = +1$
   — En posant $W_n = \inf A_n$, nous avons $W_{2n} = -1 - \dfrac{1}{2n+1}$ et $V_{2n+1} = -1 - \dfrac{1}{2n+1}$[2]. Nous

1. Qui peut s'écrire $V_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ si n est pair et $V_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ si n est impair
2. Qui peut s'écrire $W_n = -1 - \dfrac{1}{n+1}$ si n est pair et $W_n = -1 - \dfrac{1}{n}$ si n est impair

avons, bien entendu, $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = -1$, c'est à dire $\liminf u_n = -1$

Exercice 13 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles bornées

1. Montrer que $\limsup(u_n + v_n) \leqslant \limsup u_n + \limsup v_n$
2. De même, montrer que $\liminf u_n + \liminf v_n \leqslant \liminf(u_n + v_n)$
3. Montrer que, si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $\limsup(u_n + v_n) = \limsup u_n + \limsup v_n$

Exercice 14 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle bornée. Montrer que :

$$\liminf u_n = -(\limsup -u_n)$$

Exercice 15 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle bornée. Démontrer les assertions suivantes :

1. $\limsup u_n < \alpha \Longrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})((k \geqslant n) \Longrightarrow (u_k < \alpha))$
2. $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})((k \geqslant n) \Longrightarrow (u_k < \alpha)) \Longrightarrow \limsup u_n \leqslant \alpha$
3. $\limsup u_n > \alpha \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})((k \geqslant n) \text{ et } (u_k > \alpha))$
4. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})((k \geqslant n) \text{ et } (u_k > \alpha)) \Longrightarrow \limsup u_n \geqslant \alpha$

8.5 Valeurs d'adhérence d'une suite

8.5.1 Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
$x \in \mathbb{K}$ est appelé valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n > N$ tel que $|u_n - x| < \varepsilon$

Remarque 17 :

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cette définition signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou encore que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_n \in\ ]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\}$ est infini.
2. Si maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cette définition signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, le disque ouvert $B(x,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - x| < \varepsilon\}$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou encore que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_n \in B(x,\varepsilon)\}$ est infini.

8.5.2 Proposition

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l, alors, cette suite n'a qu'une seule valeur d'adhérence qui est l

Démonstration

Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui admet une limite l.
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette une valeur d'adhérence $x \neq l$; alors $|x - l| > 0$.
Reprenant la définition de valeur d'adhérence, pour $\varepsilon = \dfrac{|x-l|}{3}$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n > N$ tel que $|u_n - x| < \varepsilon = \dfrac{|x-l|}{3}$
Or, pour ce $n > N$, $|x - l| \leqslant |u_n - x| + |u_n - l|$, et donc : $|u_n - l| \geqslant |x - l| - |u_n - x|$.
Toujours pour ce $n > N$, $-|u_n - x| \geqslant -\dfrac{|x-l|}{3}$.

Et donc, pour $n > N$, $|u_n - l| \geqslant |x-l| - |u_n - x| \geqslant |x-l| - \dfrac{|x-l|}{3} = \dfrac{2|x-l|}{3}$
Ainsi, il existe $\varepsilon_1 = \dfrac{2|x-l|}{3}$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ et $|u_n - l| \geqslant \varepsilon_1$, ce qui est la négation de suite qui admet pour limite l.
Contradiction.
Donc, si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l, alors, cette suite n'a qu'une seule valeur d'adhérence qui est l

Exemple 12 :

Premier exemples simples :

1. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ a deux valeurs d'adhérence qui sont -1 et $+1$
2. La suite $\left(\dfrac{(-1)^n n+1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a aussi deux valeurs d'adhérence qui sont -1 et $+1$

Exemple 13 :

Voici un exemple moins évident :
Nous allons rechercher les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\theta \in \mathbb{R}$

1. Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \cos n\theta \leqslant +1$et les valeurs d'adhérence sont forcément dans l'intervalle $[-1;+1]$

   Cela ne peut en être autrement :
   En effet, supposons que x soit une valeur d'adhérence de la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ et que $x \notin [-1;+1]$; alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[\cap [-1;+1] = \emptyset$. Il ne peut donc y avoir une infinité de nombres $\cos n\theta$ dans $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$ *(il n'y en amême aucun ! !)*
   x ne peut donc pas être valeur d'adhérence de la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$
2. On a vu, en L_0, dans l'étude des nombres réels que les ensembles

   $$G(a,b) = \{ap + bq \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}\}$$

   étaient des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. De plus :
   - ▷ $G(a,b) = c\mathbb{Z}$ avec $c \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$
   - ▷ Sinon $G(a,b)$ est dense dans $\mathbb{R}$
3. Donc, l'ensemble $G(\theta, 2\pi) = \{n\theta + p \times 2\pi \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Nous avons donc 2 possibilités :

   (a) $\dfrac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, c'est à dire $\dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$. Alors $\theta = \dfrac{p}{q} \times 2\pi$ et $n\theta = \dfrac{n \times p}{q} \times 2\pi$ et $\cos n\theta$ prend une infinité de fois les mêmes q valeurs qui sont donc les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$

   En effet, si $n \equiv k\,[q]$, alors $n = k + uq$ avec $u \in \mathbb{Z}$ et $k = 0, \cdots, q-1$ et

   $$n\theta = \frac{(k+uq) \times p}{q} \times 2\pi = \frac{k \times p}{q} \times 2\pi + up \times 2\pi$$

   De telle sorte que $\cos n\theta = \cos \dfrac{k \times p}{q} \times 2\pi$

   (b) $\dfrac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ et le groupe $G(\theta, 2\pi)$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in [-1;+1]$ et $\varepsilon > 0$
   Il existe $\alpha \in [0;\pi]$ et $\beta \in [0;\pi]$, $\alpha < \beta$ tels que $\cos\alpha \in]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$, c'est à dire, en fait, de la décroissance de la fonction $\cos x$ sur $[0;\pi]$, tels que $]\cos\beta\,;\,\cos\alpha[\subset]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$
   $G(\theta, 2\pi)$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha < n\theta + 2p\pi < \beta$; il y en a même une infinité.

Toujours de la décroissance de $\cos x$ sur $[0;\pi]$, nous avons $\cos\beta < \cos n\theta < \cos\alpha$, et l'ensemble $\{n \in \mathbb{Z}$ tels que $\cos\beta < \cos n\theta < \cos\alpha\}$ est infini.
De la parité de $\cos x$, c'est à dire comme $\cos(-n\theta) = \cos n\theta$, il y a donc une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $x - \varepsilon < \cos\beta < \cos n\theta < \cos\alpha < x + \varepsilon$.
x est donc une valeur d'adhérence de la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$
L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc, dans ce cas, l'intervalle $[-1;+1]$

8.5.3 Théorème : caractérisation des valeurs d'adhérence d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
$x \in \mathbb{K}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
si et seulement si
Il existe une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui admet pour limite x

Démonstration

1. Supposons qu'il existe une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui admette pour limite x
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Alors, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $\left|u_{\varphi(n)} - x\right| < \varepsilon$, c'est à dire $u_{\varphi(n)} \in]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$.
   Il existe donc une infinité d'éléments u_n dans l'intervalle $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$; ce qui montre que x est valeur d'adhérence.
2. Réciproquement, supposons que $x \in \mathbb{K}$ soit une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   Nous souhaitons donc construire une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.
   Cette construction va se faire par récurrence.
   - **On pose** $\varphi(0) = 0$
   - **Supposons que, pour** $n \in \mathbb{N}$, nous ayions construit une fonction $\varphi : \{0, \cdots, n\} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que :
   $$(\forall p \in \{0, \cdots, n\}) \left(\left|u_{\varphi(p)} - x\right| \leqslant \frac{1}{p}\right)$$
   - **Construisons, maintenant pour** $n+1$
     $x \in \mathbb{K}$ étant valeur d'adhérence de $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$, pour l'entier $\varphi(n)+1$, il existe un entier $N > \varphi(n)+1$ tel que $|u_N - x| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
     On pose $\varphi(n+1) = N$
     Alors, $\varphi(n+1) > \varphi(n) + 1 \geqslant n+1$ car φ est strictement croissante.
     φ est donc définie sur $\{0, \cdots, n+1\}$ de telle façon que $(\forall p \in \{0, \cdots, n+1\}) \left(\left|u_{\varphi(p)} - x\right| \leqslant \dfrac{1}{p}\right)$

   Par récurrence, nous venons donc de définir une une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|u_{\varphi(n)} - x\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = x$, et donc, la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

8.5.4 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle bornée

1. On appelle $l_{sup} = \limsup u_n$ la limite supérieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, l_{sup} est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. De même, si $l_{inf} = \liminf u_n$ la limite inférieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, l_{inf} est la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Démonstration

Nous ne démontrerons que lepremier point, la démonstration du second point en est identique.

- **On démontre que l_{sup} est plus grand que toutes les valeurs d'adhérence**
  Nous appelons toujours $A_n = \{u_p \text{ tels que } p \geqslant n\}$ et $V_n = \sup A_n$. La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l_{sup}$ et $l_{sup} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Remarquons aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant V_n$
  Soit x une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
  Il existe alors une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = x$.
  Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \leqslant V_{\varphi(n)}$; la suite $\left(V_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_{\varphi(n)} = l_{sup}$
  Par passage à la limite, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} V_{\varphi(n)}$, c'est à dire $x \leqslant l_{sup}$
  Ce que nous voulions
- **Montrons maintenant que l_{sup} est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$**
  Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$

  Il faut donc que nous montrions qu'il existe une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $|u_n - l_{sup}| < \varepsilon$

  Pour cet $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow |V_n - l_{sup}| < \varepsilon$
  Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $n \geqslant \max\{N, N_\varepsilon\} \Longrightarrow |V_n - l_{sup}| < \varepsilon$. C'est à dire en tenant compte du fait que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $l_{sup} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$, nous avons :

$$n \geqslant \max\{N, N_\varepsilon\} \Longrightarrow l_{sup} \leqslant V_n \leqslant l_{sup} + \varepsilon$$

  Comme $V_n = \sup A_n$, toujours pour $n \geqslant \max\{N, N_\varepsilon\}$, il existe $p \geqslant n$ tel que $V_n - \varepsilon \leqslant u_p \leqslant V_n$, c'est à dire, en « ré-injectant »l'inégalité vraie pour $n \geqslant \max\{N, N_\varepsilon\}$, $l_{sup} \leqslant V_n \leqslant l_{sup} + \varepsilon$, il existe $p \geqslant n \geqslant \max\{N, N_\varepsilon\}$ tel que :

$$l_{sup} - \varepsilon \leqslant u_p \leqslant l_{sup} + \varepsilon \Longleftrightarrow |l_{sup} - u_p| \leqslant \varepsilon$$

  Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $p \geqslant N$ tel que $|l_{sup} - u_p| \leqslant \varepsilon$. l_{sup} est bien une valeur d'adhérence

l_{sup} est donc la plus grande des valeurs d'adhérence.

8.5.5 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels. Alors, nous pouvons extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente.

Démonstration

On appelle $l_{sup} = \limsup u_n$. l_{sup} existe, c'est une valeur d'adhérence particulière, la plus grande, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après 8.5.3, il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l_{sup}.
Le théorème est donc démontré ; ce que nous voulions.

8.6 Suites de Cauchy

8.6.1 Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>une suite de Cauchy</u> si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous ayons l'implication :

$$((m \geqslant N_\varepsilon) \text{ et } (n \geqslant N_\varepsilon)) \Longrightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon$$

Remarque 18 :

Cette relation peut aussi s'écrire :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ nous ayons l'implication :

$$((m \geqslant N_\varepsilon) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})) \Longrightarrow |u_m - u_{m+n}| < \varepsilon$$

8.6.2 Caractérisation

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \sup\limits_{n\geqslant p} |u_n - u_p| = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |u_n - u_{n+k}|$ tend vers zéro

Démonstration

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy
   Soit $\varepsilon > 0$.
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de Cauchy, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$ et $p \geqslant N_\varepsilon$, alors $|u_n - u_p| \leqslant \varepsilon$
   Donc, en particulier, si $n \geqslant N_\varepsilon$, $v_n = \sup\limits_{n\geqslant p} |u_n - u_p|$ est telle que $|v_n| \leqslant \varepsilon$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
2. Réciproquement, supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
   Soit $\varepsilon > 0$
   Il existe alors $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$ alors $|v_n| \leqslant \varepsilon$. Ainsi donc, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$ et tout $p \geqslant n$, nous avons $|u_n - u_p| \leqslant \varepsilon$
   Donc, pour retomber sur nos pieds, si nous posons, pour $n \geqslant N_\varepsilon$ et $p \geqslant N_\varepsilon$ $n' = \min\{n, p\}$ et $p' = \max\{n, p\}$, nous avons :
   — $|u_n - u_p| = |u'_n - u'_p| \leqslant \varepsilon$ car $n' \geqslant N_\varepsilon$ et $p' \geqslant n'$
   — Ainsi, si $n \geqslant N_\varepsilon$ et $p \geqslant N_\varepsilon$, nous avons $|u_n - u_p| \leqslant \varepsilon$, ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy

Remarque 19 :

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - u_{n+k}) = 0$

8.6.3 Proposition

Toute suite convergente est de Cauchy

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ une suite convergente ; on appelle l cette limite.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$ alors $|u_n - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$
Donc, pour $n \geqslant N_\varepsilon$ et $m \geqslant N_\varepsilon$:

$$|u_n - u_m| = |u_n - l + l - u_m| \leqslant |u_n - l| + |u_m - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy

Remarque 20 :

1. La contraposée est très importante :
   Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ n'est pas de Cauchy, alors, elle n'est pas convergente.

Prenons comme exemple la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons montrer qu'elle n'est pas de Cauchy en étudiant $S_{2n} - S_n$

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Or, pour $k = 0, \ldots, n$, nous avons $\frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n}$, et donc $n \times \frac{1}{2n} \leqslant \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant 1$, c'est à dire $\frac{1}{2} \leqslant S_{2n} - S_n \leqslant 1$

Ainsi, $S_{2n} - S_n$ ne peut être rendu aussi petit qu'on le souhaite. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est donc pas de Cauchy et ne peut être convergente.

2. Autre chose, ce n'est pas parcequ'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lim_{n \to +\infty} (u_n - u_{n+k}) = 0$ que la suite est de Cauchy

   Par exemple, en reprenant la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; on sait qu'elle n'est pas de Cauchy, et pourtant, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n \to +\infty} S_{n+1} - S_n = 0$

   Nous devons avoir, **pour tout** $k \in \mathbb{N}$**,** $\lim_{n \to +\infty} (u_n - u_{n+k}) = 0$

3. Une suite convergente étant de Cauchy, nous avons $\lim_{n \to +\infty} (u_n - u_{n+1}) = 0$; bien entendu, **la réciproque est fausse :** il suffit de penser à $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

8.6.4 Proposition

Toute suite de Cauchy est bornée

Démonstration

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.
Pour $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors nous avons $|u_n - u_N| \leqslant 1$
En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons $||u_n| - |u_N|| \leqslant |u_n - u_N| \leqslant 1$, et donc, si $n \geqslant N$, $|u_n| \leqslant |u_N| + 1$
En posant $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_N|, |u_N| + 1\}$, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|u_n| \leqslant M$, ce qui montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

8.6.5 Théorème

Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy est convergente. On dit de $\mathbb{R}$ que c'est un espace complet

Démonstration

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée et d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass 8.5.5, on peut donc en extraire une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers un nombre l qui est en fait, une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
Soit $\varepsilon > 0$

— $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(m \geqslant n \geqslant N) \Longrightarrow \left(|u_n - u_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

— l étant valeur d'adhérence pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour $n \geqslant N$, il existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant n$ tel que $|u_p - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

— Donc, pour ce $n \geqslant N$,

$$|u_n - l| = |u_n - u_p + u_p - l| \leqslant |u_n - u_p| + |u_p - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

C'est à dire $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant N$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

Remarque 21 :

1. Dans $\mathbb{R}$, nous avons l'équivalence entre suite de Cauchy et suite convergente
2. **Attention !** La notion d'espace complet dépend profondément de l'ensemble dans lequel nous nous situons
   — Par exemple, la suite définie par :

   $$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

   Est une suite dont tous les éléments sont rationnels (des éléments de $\mathbb{Q}$), qui est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, mais qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$ et que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

   — Il en est de même de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $S_n \in \mathbb{Q}$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, mais qui converge dans $\mathbb{R}$ vers e, la base du logarithme népérien, et $e \notin \mathbb{Q}$

Exercice 16 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite telle qu'il existe $M > 0$ et $k \in \mathbb{R}$ tel que $0 < k < 1$ vérifiant :

   $$|u_{n+1} - u_n| \leqslant Mk^n$$

   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
2. Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $0 < k < 1$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous ayions :

   $$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant k\,|u_{n+1} - u_n|$$

   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

8.6.6 Corollaire

Dans $\mathbb{C}$, toute suite de Cauchy est convergente. $\mathbb{C}$ est donc un espace complet

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.
Nous pouvons donc écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n + ib_n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
Soit $\varepsilon > 0$
Il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geqslant q \geqslant N_\varepsilon$ alors $|u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$
Nous avons $|u_p - u_q| = |(a_p - a_q) + i\,(b_p - b_q)|$ et donc $|a_p - a_q| \leqslant |u_p - u_q|$ et $|b_p - b_q| \leqslant |u_p - u_q|$
Ainsi, si $p \geqslant q \geqslant N_\varepsilon$ alors $|a_p - a_q| \leqslant \varepsilon$ et $|b_p - b_q| \leqslant \varepsilon$, ce qui montre que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et sont, d'après 8.6.5, convergente dans $\mathbb{R}$.
Appelons $l_a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ et $l_b = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$, alors, d'après le théorème 8.2.8, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l_a + il_b$

Remarque 22 :

Dans $\mathbb{C}$, nous avons aussi l'équivalence entre suite de Cauchy et suite convergente

8.7 Limites infinies

8.7.1 Définition

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle
   On dit que cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si
   Pour tout $A > 0$, $u_n > A$ à partir d'un certain rang
   Autrement dit
   Pour tout $A > 0$, il existe $N_A \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_A$ alors $u_n > A$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle
   On dit que cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si et seulement si
   Pour tout $A > 0$, $u_n < -A$ à partir d'un certain rang
   Autrement dit
   Pour tout $A > 0$, il existe $N_A \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_A$ alors $u_n < -A$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique ($\mathbb{K}$ étant mis pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
   On dit que cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ∞, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ si et seulement si
   Pour tout $A > 0$, $|u_n| > A$ à partir d'un certain rang
   Autrement dit
   Pour tout $A > 0$, il existe $N_A \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_A$ alors $|u_n| > A$

Remarque 23 :

1. Réécrivons la définition de suite qui tend vers ∞, en écriture formalisée :

$$\boxed{(\forall A > 0)\,(\exists N_A \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(n > N_A \Rightarrow |u_n| > A)}$$

2. On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infiniment grand lorsque n est infiniment grand
3. Une suite qui tend vers l'infini est dite **divergente**
4. Le troisième item de la définition généralise les deux précédents et s'applique aussi aux suites complexes. Ainsi, on peut dire qu'une suite tend vers ∞ si la valeur absolue ou le module de la suite tend vers $+\infty$
   — Si nous nous intéressons à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n n$, que pouvons nous dire de cette suite ?
   - ▷ La suite des termes de rang pair tend vers $+\infty$, alors que la suite des termes de rang impair tend vers $-\infty$
   - ▷ En regardant la valeur absolue, nous avons $|u_n| = n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$, et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ∞ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente

   — Intéressons nous maintenant à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (1+i)^n$, que pouvons nous dire de cette suite ?
   - ▷ Considérons le module de u_n : $|u_n| = |1+i|^n = \left(\sqrt{2}\right)^n$
   - ▷ Nous avons : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n = +\infty$, et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ∞ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente
   - ▷ Petite remarque : $u_n = (1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{\frac{in\pi}{4}}$
5. On peut aussi écrire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si et seulement si la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Il est ainsi facile d'adapter les théorèmes écrit lorsqu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ten devers $+\infty$

8.7.2 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique qui tend vers ∞
Alors, toute suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers ∞

Démonstration

Soit $A > 0$. Alors, il existe $N_A \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_A \Longrightarrow |u_n| > A$
$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une fonction telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$
Donc, si $n \geqslant N_A$ alors $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N_A$ et donc $\left|u_{\varphi(n)}\right| > A$.
Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|u_{\varphi(n)}\right| = +\infty$ et donc la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers ∞

Remarque 24 :

Il est donc clair que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite numérique qui tend vers ∞, alors, toute suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi vers ∞

8.7.3 Propriétés des suites réelles qui tendent vers $+\infty$

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont 2 suites réelles qui tendent vers $+\infty$, alors
   (a) Addition : $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$
   (b) Multiplication :$(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$
   (c) Multiplication par un scalaire :
      i. $(\forall\lambda > 0)\,(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$
      ii. $(\forall\lambda < 0)\,(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $-\infty$
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites ; si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et si il existe $a > 0$ tel que $v_n \geqslant a$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites réelles telles que :
   — La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$
   — La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un nombre μ
   alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$
4. Théorème "pousse au c.." : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites telles que $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang.
   Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Démonstration

1. **Démonstration du premier point**
   (a) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites réelles qui tendent vers $+\infty$
   On va écrire que les deux suites tendent vers $+\infty$
   Soit $A > 0$
   — On écrit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: Il existe $N_A^u \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A^u \Rightarrow u_n \geqslant \dfrac{A}{2}$
   — On écrit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$: Il existe $N_A^v \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A^v \Rightarrow v_n \geqslant \dfrac{A}{2}$
   Soit $N = \max\left\{N_A^u, N_A^v\right\}$
   Si $n \geqslant N$, alors $n \geqslant N_A^u$ et $n \geqslant N_A^v$, donc, $u_n \geqslant \dfrac{A}{2}$ et $v_n \geqslant \dfrac{A}{2}$; donc, si $n \geqslant N$, alors $u_n + v_n \geqslant A$; donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$
   (b) Ecrivons, comme d'habitude, que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont 2 suites réelles qui tendent vers $+\infty$
   Soit $A > 0$
   — Il existe donc $N_A^u \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \geqslant \sqrt{A}$
   — De même, il existe donc $N_A^v \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A^v \Rightarrow v_n \geqslant \sqrt{A}$

Pour $N = \max\{N_A^u, N_A^v\}$
Si $n \geqslant N$, alors $n \geqslant N_A^u$ et $n \geqslant N_A^v$, donc, $u_n \geqslant \sqrt{A}$ et $v_n \geqslant \sqrt{A}$; donc, si $n \geqslant N$, alors $u_n v_n \geqslant \sqrt{A} \times \sqrt{A} = A$; donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$

(c) i. Soit $\lambda > 0$; écrivons, une nouvelle fois, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$

Soit $A > 0$ il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \geqslant \dfrac{A}{\lambda}$. Donc, si $n \geqslant N_A$, $\lambda u_n \geqslant A$, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

ii. De même, soit $\lambda < 0$; comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$, pour $A > 0$ il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \geqslant \dfrac{A}{-\lambda}$. Donc, si $n \geqslant N_A$, $\lambda u_n \leqslant \lambda \dfrac{A}{-\lambda} = -A$; ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

2. **Démonstration du second point**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $v_n > a > 0$ à partir d'un certain rang N_v.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, pour $A > 0$ il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \geqslant \dfrac{A}{a}$.

Soit $Q = \max\{N_A, N_v\}$; si $n \geqslant Q$, alors $n \geqslant N_A$ et $n \geqslant N_v$, et donc $u_n v_n \geqslant a\dfrac{A}{a} = A$.

Ce qui termine de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$

3. **Démonstration du troisième point**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites réelles telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $v_n \geqslant \mu$.

Soit $A > 0$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe $N_A \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_A$, alors $u_n \geqslant A - \mu$

Ainsi, si $n \geqslant N_A$, alors $u_n + v_n \geqslant A - \mu + \mu = A$ et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$

4. **Démonstration du théorème « Pousse au... »**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites réelles telles que $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang.
Ceci veut donc dire qu'il existe un entier $P \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant P$, alors $u_n \geqslant v_n$
Ecrivons que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$; alors, pour $A > 0$ il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow v_n \geqslant A$.

Comme précédemment, nous posons $Q = \max\{N_A, P\}$; si $n \geqslant Q$, alors $n \geqslant N_A$ et $n \geqslant P$, et donc $u_n \geqslant v_n \geqslant A$; en particulier, $u_n \geqslant A$, ce qui termine de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Remarque 25 :

Il y a une application directe du théorème :
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites réelles telles que :
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$
- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|v_n| \leqslant \mu$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$, puisque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est, en particulier minorée.

Exercice 17 :

Démontrer que si $k > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = +\infty$

Correction

Si $k > 1$, il existe $a > 0$ tel que $k = 1 + a$. Donc, $k^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty$, il en est de même de $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = +\infty$

Remarque 26 :

Sur les formes indéterminées
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, on ne peut rien affirmer de $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n)$; nous sommes devant une indétermination.

Exemples :

1. Si $u_n = n$ et $v_n = -n + \frac{1}{n}$, alors $u_n + v_n = \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = 0$
2. Si $u_n = n^2$ et $v_n = -n$, alors $u_n + v_n = n^2 - n = n(n-1)$ et $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$
3. A contrario, si $u_n = n$ et $v_n = -n^2$, alors $u_n + v_n = n - n^2 = -n(n-1)$ et $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = -\infty$

8.7.4 Proposition

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites réelles telles que :
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$
- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l > 0$

alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$

Démonstration

Pour le nombre $l > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $|u_n - l| < \frac{l}{2}$; et donc, si $n \geqslant N$, alors $\frac{-l}{2} \leqslant u_n - l \leqslant \frac{l}{2}$, c'est à dire $u_n \geqslant \frac{l}{2}$ à partir du rang N.
Et il suffit d'appliquer le théorème 8.7.3

Remarque 27 :

En changeant v_n en $-v_n$, on voit que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont 2 suites réelles telles que :
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$
- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l < 0$ ou $-\infty$

alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty$

Remarque 28 :

Retour sur les formes indéterminées
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, on ne peut rien affirmer de $\lim_{n\to+\infty}(u_n \times v_n)$; nous sommes devant une indétermination.

Exemples :

1. Si $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n}$, alors $u_n v_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = 1$
2. Si $u_n = n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$, alors $u_n v_n = n$ et $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = +\infty$
3. A contrario, si $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$, alors $u_n v_n = \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = 0$

8.7.5 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $u_n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ c'est à dire $0 < \dfrac{1}{u_n} \leqslant \varepsilon$

  Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$
- De même, si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $u_n \leqslant -\dfrac{1}{\varepsilon}$ c'est à dire $-\varepsilon < \dfrac{1}{u_n} < 0$

  Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

Exercice 18 :

Démontrer que :

1. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$
2. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et que $u_n < 0$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} = -\infty$

8.7.6 Théorème

1. Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$
2. Une suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$

Démonstration

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique croissante et non majorée.
   Alors, soit $A > 0$
   $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'étant pas une suite majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$
   $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, nous avons l'implication : $n > N \Rightarrow u_n > u_N > A$
   Donc, pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N \Rightarrow u_n > A$.
   Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
2. La démonstration du second point est exactement la même

8.8 Quelques exercices de synthèse sur les suites

8.8.1 Sur le théorème de Césaro 8.1.6

Exercice 19 :

Déterminer la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $w_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}}$

Exercice 20 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}-u_n = l$ avec $l \in \mathbb{K}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = l$
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{R}^{*+}$ *(i.e. $x_n > 0$)*. Montrez que si :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \text{ avec } l \in \mathbb{R}^+ \text{ c'est à dire } l \geqslant 0$$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$
   (a) Appliquer ce résultat à l'étude de :
      i. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\mathrm{C}_{2n}^{n}}$
      ii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$
      iii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$
   (b) Montrer, par des contre-exemples, que la réciproque est fausse

Exercice 21 :

Soient $a\in\mathbb{K}$ et $b\in\mathbb{K}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = a \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = b$$
On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n}{n+1}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

8.8.2 Calculs de limites

Exercice 22 :

Pour $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$, on suppose $a^2-4b<0$, c'est à dire $b>0$ et $|a|<2\sqrt{b}$.
Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n}$

Exercice 23 :

Etudier les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des suites suivantes :

1. $w_n = \sum_{k=n}^{2n} e^{-\sqrt{k}}$
2. $u_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(2-\frac{k}{n}\right)$
3. $u_n = \frac{2n+\cos n}{ni+\sqrt{(n+1)(n+2)}}$
4. $u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ avec $a>0$ et $b>0$

Exercice 24 :

Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$

1. Que pouvons nous dire si $\sin\alpha = 0$?

2. On suppose maintenant que $\sin\alpha \neq 0$.
   Nous voulons montrer que la suite $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite. On suppose le contraire et nous appelons l le nombre tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos n\alpha = l$.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n\alpha = l \times \dfrac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}$
   (b) En considérant $\sin 2n\alpha$, montrer que $l = 0$ ou $l = \dfrac{1}{2}$
   (c) En considérant $\cos 2n\alpha$, montrer que $l = 2l^2 - 1$
   (d) Conclure

Exercice 25 :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle telle que :
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $x_n \geqslant 0$
— Il existe $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ avec $0 \leqslant \alpha + \beta < 1$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} \leqslant \alpha x_{n+2} + \beta x_n$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on construite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par : $u_n = \max\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} \leqslant (\alpha+\beta)\, u_n$
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant (\alpha+\beta)^{\left[\frac{n}{3}\right]} u_0$ où le symbole $[\bullet]$ désigne la partie entière.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

8.8.3 Variation des suites

Exercice 26 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle.
Montrer qu'il existe 2 suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'une croissante et l'autre décroissante, telles que

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Exercice 27 :

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante qui admet une limite l. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $x_n \leqslant l$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ admet une suite extraite convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente

Exercice 28 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2u_n \leqslant u_{n+1} + u_{n-1}$.
On appelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$. Etudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Exercice 29 :

Etudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par :

1. $\diamond$ $u_0 = a$ $\quad\diamond$ $v_0 = b$ $\quad\diamond$ $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ $\quad\diamond$ $v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$
2. $\diamond$ $u_0 = a > 0$ $\quad\diamond$ $v_0 = b > 0$ $\quad\diamond$ $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ $\quad\diamond$ $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$

Exercice 30 :

Suites sous additives
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls vérifiant :

$$(\forall m \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_{m+n} \leqslant u_m + u_n)$$

Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\dfrac{u_n}{n}\right)$

Exercice 31 :

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites de nombres réels telles que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$$

1. Démontrez que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes
2. On appelle $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $b = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Démontrer que $a \leqslant b$
3. Démontrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n; b_n] = [a; b]$
4. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = 0$. Démontrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n; b_n]$ est réduit à un seul élément.

Exercice 32 :

Nous considérons les deux suites numériques réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

1. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont adjacentes
2. Démontrer que leur limite commune l ne peut être rationnelle, c'est à dire que $l \notin \mathbb{Q}$

8.8.4 Valeurs d'adhérence

Exercice 33 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels bornée telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle.

Exercice 34 :

Une preuve par dichotomie du théorème de Bolzano-Weierstrass
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[a; b]$ (c'est donc une suite bornée). On désire construire une sous-suite convergente $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Posons $\varphi(0) = 0$, $a_0 = a$ et $b_0 = b$

1. Montrer que :
   - ▷ Ou bien il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \in \left[\dfrac{a+b}{2}; b\right]$
   - ▷ Ou bien il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \in \left[a; \dfrac{a+b}{2}\right]$

   Dans le premier cas, posons $a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$. Dans le deuxième cas, posons $a_1 = a_0$ et $b_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. De plus, on pose $\varphi(1)$ comme étant le plus petit indice $n \geqslant \varphi(0)$ tel que $u_n \in [a_1; b_1]$
2. Montrer que

- ▷ Ou bien il existe une infinité d'indices $n \geqslant \varphi(1)$ tels que $u_n \in \left[\dfrac{a_1+b_1}{2}; b_1\right]$
- ▷ Ou bien il existe une infinité d'indices n tels que $u_n \in \left[a_1; \dfrac{a_1+b_1}{2}\right]$

  Dans le premier cas, posons $a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$ et $b_2 = b_1$. Dans le deuxième cas, posons $a_2 = a_1$ et $b_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$. De plus, on pose $\varphi(2)$ comme étant le plus petit indice $n \geqslant \varphi(1)$ tel que $u_n \in [a_2; b_2]$

3. Poursuivre cette construction afin d'obtenir trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec des propriétés bien choisies.
4. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers une même limite l.
5. En déduire que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend également vers l

8.8.5 Suites de Cauchy

Exercice 35 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n u_n}$$

Il faut montrer que cette suite est convergente

8.9 Correction de quelques exercices

8.9.1 Limite des suites

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; démontrer que toute suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; il existe donc une application $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, croissante, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{g(n)}$
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; il existe donc une application $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, croissante, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_{h(n)}$.
Or, $v_{h(n)} = u_{g(h(n))}$. C'est à dire que $w_n = u_{g(h(n))}$. g et h étant 2 fonctions croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $g \circ h$ est aussi une fonction croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ apparaît donc comme une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Ce que nous voulions démontrer.

Exercice 3 :

1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes.*
Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

   Nous allons appeler $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = l_1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l_2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n} = l_3$

   (a) **Démontrons que $l_1 = l_2 = l_3$**
   Tout d'abord, d'après 8.1.5 si une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique ayant une limite v, toute suite numérique extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet aussi pour limite v
   - ▷ Démontrons que $l_1 = l_3$
   La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et donc converge vers l_1
   De même, la suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et donc converge vers l_3
   La limite d'une suite étant unique, nous avons $l_1 = l_3$
   - ▷ Démontrons que $l_2 = l_3$
   La démonstration est semblable
   La suite $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et donc converge vers l_2
   De même, la suite $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et donc converge vers l_3
   La limite d'une suite étant unique, nous avons $l_2 = l_3$
   - ▷ Nous avons donc $l_1 = l_2 = l_3$, en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$

   (b) **Démontrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente**
   Nous allons démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
   Soit $\varepsilon > 0$
   Alors, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors $|u_{2n} - l| < \varepsilon$
   De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_2$, alors $|u_{2n+1} - l| < \varepsilon$
   Posons $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$; alors, si $n \geqslant N$, nous avons $|u_n - l| < \varepsilon$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

   Remarque : On vient de montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, ce qui est un résultat remarquable.

2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que les suites extraites $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{5n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes.La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?*

   Eh bien non, justement ! ! ! Pour le voir, il suffit de prendre un contre exemple.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_n = 1$ si $n \equiv 4\,[60]$ et $u_n = 0$ sinon. Cette suite n'admet pas de limite.

Par contre, si $n \equiv 2\,[60]$, alors $n \equiv 2\,[3]$ et $u_{3n+2} = 0$; de même, $n \equiv 1\,[60]$, alors $n \equiv 1\,[4]$ et $u_{4n+1} = 0$ et ;, pour terminer, $n \equiv 3\,[60]$, alors $n \equiv 3\,[5]$ et $u_{5n+3} = 0$.
Ces suites extraites sont convergentes, alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas
Le choix de 60 n'est pas anodin : c'est le ppcm de 3, 4 et 5

3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, 2 entiers premiers entre eux. On suppose que :*
   - *La suite $(u_{bn})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge*
   - *Pour tout entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant r < a$, la suite $(u_{an+r})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée l_r*

   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

   Comme le pgcd $(a, b) = 1$, il existe $u \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathbb{N}$ tels que $au + bv = 1$. Pour $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant r < a$, considérons $abn + bvr$
   - ▷ Nous avons $abn + bvr = b\,(an + vr)$ et donc la suite $(u_{abn+bvr})_{n\in\mathbb{N}}$ apparaît comme une suite extraite de la suite $(u_{bn})_{n\in\mathbb{N}}$; la suite $(u_{abn+bvr})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergent et a donc la même limite que la suite $(u_{abn})_{n\in\mathbb{N}}$; appelons L cette limite.
   - ▷ De l'identité $au + bv = 1$, nous tirons $aur + bvr = r$, et donc $bvr = r - aur$, de telle sorte que
   $$abn + bvr = abn + r - aur = a\,(bn - ur) + r$$
   La suite $(u_{abn+bvr})_{n\in\mathbb{N}}$ apparaît comme une suite extraite de la suite $(u_{an+r})_{n\in\mathbb{N}}$; donc, pour tout entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant r < a$, les nombres l_r sont les mêmes et égaux à L

   Soit $n \in \mathbb{N}$, alors, en effectuant la division euclidienne de n par a, nous avons $n = an' + r$ et $(u_{an+r})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{an'+r})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge donc vers L La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien convergente.

Exercice 4 :

La suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$ est-elle convergente ?

La réponse est **NON**
Il suffit de prendre 2 suites extraites, de démontrer qu'elles convergent vers 2 limites différentes.
- ▷ On prend la suite d'ordre pair $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Nous avons donc $u_{2n} = \dfrac{1}{2n} + 1$ qui admet pour limite en $+\infty$ $+1$
- ▷ On prend la suite d'ordre impair $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Nous avons donc $u_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - 1$ qui admet pour limite en $+\infty$ -1

Et voilà le travail : 2 suites extraites qui admettent 2 limites différentes qui sont donc divergentes

Exercice 6 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne si $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$ admet une limite l. Démontrer qu'une suite périodique converge en moyenne.

Ceci n'est pas une démonstration facile.
Soit $t \in \mathbb{N}$ la période de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$
- ▷ **Nous avons $v_{mt} = v_t$**
  Voilà un résultat surprenant que nous allons nous employer à démontrer.
  $$v_{mt} = \frac{1}{mt}\sum_{k=1}^{mt} u_k = \frac{1}{mt}\left(\sum_{k=1}^{mt} u_k + \sum_{k=1}^{t} u_k + \sum_{k=1+t}^{2t} u_k \cdots + \sum_{k=(m-1)t+1}^{mt} u_k\right) = \frac{1}{mt}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\left(\sum_{k=1+jt}^{(j+1)t} u_k\right)\right)$$
  En faisant le changement $k' = k - jt$, nous avons :
  $$v_{mt} = \frac{1}{mt}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\left(\sum_{k=1+jt}^{(j+1)t} u_k\right)\right) = \frac{1}{mt}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\left(\sum_{k'=1}^{t} u_{k'+jt}\right)\right)$$
  De la périodicité de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous tirons $u_{k'+jt} = u_{k'}$, et donc
  $$v_{mt} = \frac{1}{mt} \times m \times \sum_{k'=1}^{t} u_{k'} = \frac{1}{mt} \times m \times t \times v_t = v_t$$

▷ **Pour** $r \in \mathbb{N}$ **tel que** $0 \leqslant r \leqslant t-1$**, nous avons** $(mt+r)\, v_{mt+r} = mtv_t + rv_r$

Nous avons :

$$\begin{aligned}(mt+r)\, v_{mt+r} &= \sum_{k=1}^{mt+r} u_k = \sum_{k=1}^{mt} u_k + \sum_{k=mt+1}^{mt+r} u_k \\ &= mtv_{mt} + \sum_{k'=1}^{r} u_{k'+mt} \\ &= mtv_{mt} + \sum_{k'=1}^{r} u_{k'} \\ &= mtv_{mt} + rv_r\end{aligned}$$

▷ **Démontrons que** $\lim_{n\to+\infty} v_n = v_t$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et r_n tel que $n \equiv r_n\,[t]$; alors $n = kt + r_n$ avec $0 \leqslant r_n \leqslant t-1$. Alors,

$$nv_n = ktv_t + r_n v_{r_n} = (n - r_n)\, v_t + r_n v_{r_n} = nv_t + r_n\,(v_{r_n} - v_t)$$

De telle sorte que :

$$v_n = v_t + \frac{r_n}{n}\,(v_{r_n} - v_t)$$

<u>Montrons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{r_n}{n}\,(v_{r_n} - v_t) = 0$</u>

Là, c'est plus facile ! ! En passant à la valeur absolue, nous avons $|v_{r_n} - v_t| \leqslant 2\sum_{k=1}^{t}|u_k|$, et donc :

$$\left|\frac{r_n}{n}\,(v_{r_n} - v_t)\right| \leqslant \frac{t-1}{n} 2\sum_{k=1}^{t}|u_k|$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{t-1}{n} 2\sum_{k=1}^{t}|u_k| = 0$, nous en déduisons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{r_n}{n}\,(v_{r_n} - v_t) = 0$

Et donc, tout simplement, $\lim_{n\to+\infty} v_n = v_t$

Exercice 7 :

Donner les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{3n+4} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

   Voilà une méthode des plus classiques :

   Pour tout $k = 1, \cdots, 3n+4$, nous avons :

$$\frac{1}{n^2+3n+4} \leqslant \frac{1}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2+1}$$

   Ensuite, en passant à la racine :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

   Et donc, en passant à la sommation :

$$\sum_{k=1}^{3n+4} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n+4}} \leqslant \sum_{k=1}^{3n+4} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \sum_{k=1}^{3n+4} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}} \iff \frac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}} \leqslant \sum_{k=1}^{3n+4} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{3n+4}{\sqrt{n^2+1}}$$

   Maintenant, il y a 2 limites à étudier :

▷ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{3n+4}\frac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}}$

Nous avons :

$$\frac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}}=\frac{n\left(3+\frac{4}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}}=\frac{3+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}}$$

Et nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}}=3$

▷ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+4}{\sqrt{n^2+1}}$

Nous avons :

$$\frac{3n+4}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n\left(3+\frac{4}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}=\frac{3+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

Et nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+4}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=3$

Et donc, en conclusion, d'après le théorème 8.3.2 dit théorème des gendarmes, nous avons : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{3n+4}k=1^{3n+4}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=3$

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\mathrm{C}_n^k}$

Tout d'abord, remarquons que :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\mathrm{C}_n^k}=\frac{1}{\mathrm{C}_n^0}+\frac{1}{\mathrm{C}_n^n}+\frac{1}{\mathrm{C}_n^1}+\frac{1}{\mathrm{C}_n^{n-1}}+\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\mathrm{C}_n^k}$$

C'est à dire, comme $\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_n^{n-k}$:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\mathrm{C}_n^k}=2+\frac{2}{n}+\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\mathrm{C}_n^k}$$

Or, pour tout $k=2,\cdots,n-2$, $\mathrm{C}_n^2\leqslant\mathrm{C}_n^k$, et donc, pour tout $k=2,\cdots,n-2$, $\dfrac{1}{\mathrm{C}_n^k}\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{C}_n^2}$, c'est à dire $\dfrac{1}{\mathrm{C}_n^k}\leqslant\dfrac{2}{n\,(n-1)}$. Donc, $0\leqslant\displaystyle\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\mathrm{C}_n^k}\leqslant\frac{2\,(n-3)}{n\,(n-1)}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2\,(n-3)}{n\,(n-1)}=0$, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\mathrm{C}_n^k}=0$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0$, nous en déduisons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\mathrm{C}_n^k}=2$

Exercice 8 :

1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$*

$$v_n=\frac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1}$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Nous allons donc évaluer $v_{n+1} - v_n$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}}{n+2} - \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} \\
&= \frac{(n+1)(u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}) - (n+2)(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) + (n+1)u_{n+1} - (n+1)(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)u_{n+1} - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(u_{n+1} - u_0) + (u_{n+1} - u_1) + \cdots + (u_{n+1} - u_n)}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite croissante, nous avons, pour tout $k = 0, \cdots, n$, $u_{n+1} \geqslant u_k$, et donc $\dfrac{(u_{n+1} - u_0) + (u_{n+1} - u_1) + \cdots + (u_{n+1} - u_n)}{(n+1)(n+2)} \geqslant 0$, c'est à dire $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

On démontrerait de la même manière que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. *Etudier les variations de la la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$*

La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est du type :

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{n}$$

D'après la question précédente, cette suite est décroissante

Exercice 9 :

Etudier les variations des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$

Regardons, cette fois ci, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Si ce quotient est supérieur à 1, alors la suite est croissante ; si ce quotient est inférieur à 1, alors la suite est décroissante.

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2}
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{2n+1}{2n+2} < 1$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Pas très difficile!

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \\ &= \sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{2n+2-2n+1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1}-v_n>0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

D'autre part, comme, pour $k=1,\cdots,n$, nous avons $\dfrac{1}{n+n}\leqslant\dfrac{1}{n+k}\leqslant\dfrac{1}{n+1}$, en passant à la sommation, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leqslant\frac{1}{n+1}<1$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée. Croissante et majorée, on en déduit qu'elle est convergente.

3. $w_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+2k-1}$

Comme précédemment, nous allons évaluer $w_{n+1}-w_n$

$$\begin{aligned} w_{n+1}-w_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2(n+1)+2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2n+2k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2n+2(k+1)-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+2k-1} \\ &= \sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{2n+2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+2k-1} \\ &= \frac{1}{2n+2(n+1)-1}+\frac{1}{2n+2(n+2)-1}-\frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{(2n+1)(4n+3)+(4n+1)(2n+1)-(4n+1)(4n+3)}{(4n+1)(4n+3)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{(4n+1)(4n+3)(2n+1)} \end{aligned}$$

Donc $w_{n+1}-w_n>0$ et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Cherchons à savoir si elle est majorée

Pour tout $k=1,\cdots,n$, nous avons $\dfrac{1}{4n-1}\leqslant\dfrac{1}{2n+2k-1}\leqslant\dfrac{1}{2n+1}$, et donc, en passant à la sommation :

$$0<\frac{n}{4n-1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+2k-1}\leqslant\frac{n}{2n+1}<\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée par $\dfrac{1}{2}$. Croissante et majorée, elle est donc convergente.

Exercice 10 :

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Démontrer que c'est une suite convergente

- Nous allons montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Comme $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$, nous avons $U_{n+1} - U_n > 0$ et donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

- Montrons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Pour $k \geqslant 2$, nous avons $k^2 > k^2 - k$, et donc pour $k \geqslant 2$, nous avons $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2 - k}$. En passant à la sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - k}$$

Or, $\frac{1}{k^2 - k} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, et donc

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - k} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}$$

De telle sorte que $U_n < 2 - \frac{1}{n} < 2$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée par 2.

Nous avons démontré que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée ; elle est donc convergente.

8.9.2 Quelques exercices de synthèse sur les suites

Exercice 11 :

Déterminer la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $w_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}}$

Nous commençons par prendre le logarithme de w_n. Appelons donc $X_n = \ln w_n$. Alors :

$$\begin{aligned} X_n = & \sum_{k=1}^{n} \ln \left(\left(1 + \frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}} \right) \\ = & \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln \left(1 + \frac{2}{k}\right) \\ = & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \ln \left(1 + \frac{2}{k}\right) \end{aligned}$$

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ apparaît alors comme une somme de Césaro. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = n \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right)$, il suffit de connaître $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ pour connaître $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n$

$$n \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{2 \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}} = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = 2$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln w_n = 2$, et nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = e^2$

Exercice 12 :

1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}-u_n = l$ avec $l \in \mathbb{K}$.*
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = l$

   Nous appelons $x_n = u_{n+1}-u_n$ et $v_n = \dfrac{x_0+x_1+\cdots+x_n}{n+1}$. Par le théorème de Cesaro 8.1.6, nous pouvons dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.
   Regardons maintenant à quoi est égal v_n :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{x_0+x_1+\cdots+x_n}{n+1} \\ &= \frac{(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\cdots+(u_{n+1}-u_n)}{n+1} \\ &= \frac{u_{n+1}-u_0}{n+1} \end{aligned}$$

   C'est à dire $\dfrac{u_{n+1}}{n+1} = v_n + \dfrac{u_0}{n+1}$.
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_0}{n+1} = 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$, nous déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = l$.
   Ce que nous voulions

2. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{R}^{*+}$ (i.e. $x_n > 0$). Montrez que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l$ avec $l\in\mathbb{R}^+$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$*

   (a) Appliquer ce résultat à l'étude de :

   i. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{C_{2n}^n}$ ii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$ iii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

   (b) Montrer, par des contre-exemples, que la réciproque est fausse

8.9.3 Calculs de limites

Exercice 13 :

Pour $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$, on suppose $a^2-4b<0$, c'est à dire $b>0$ et $|a|<2\sqrt{b}$.
Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n}$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n} &= \frac{n^2+an+b-n}{\sqrt{n^2+an+b}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{n^2+(a-1)\,n+b}{\sqrt{n^2+an+b}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{n^2+(a-1)\,n+b}{\sqrt{n^2+an+b}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{n^2\left(1+\frac{(a-1)}{n}+\frac{b}{n^2}\right)}{n\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{n^2\left(1+\frac{(a-1)}{n}+\frac{b}{n^2}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \\ &= \frac{n\left(1+\frac{(a-1)}{n}+\frac{b}{n^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= n\times\frac{1+\frac{(a-1)}{n}+\frac{b}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n}}} \end{aligned}$$

Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n}}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{(a-1)}{n}+\frac{b}{n^2}=1$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}n\times\dfrac{1+\frac{(a-1)}{n}+\frac{b}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n}}}=+\infty$

En conclusion, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n}=+\infty$

Exercice 14 :

Etudier les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des suites suivantes :

1. $w_n=\sum\limits_{k=n}^{2n}e^{-\sqrt{k}}$

   De la décroissance de la fonction e^{-x}, nous avons pour tout $k=n,\cdots,2n$,

$$e^{-\sqrt{2n}}\leqslant e^{-\sqrt{k}}\leqslant e^{-\sqrt{n}}$$

   Et donc, en passant à la sommation :

$$(n+1)\,e^{-\sqrt{2n}}\leqslant\sum_{k=n}^{2n}e^{-\sqrt{k}}\leqslant(n+1)\,e^{-\sqrt{n}}$$

   Des résultats sur les croissances comparées, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\,e^{-\sqrt{2n}}=\lim_{n\to+\infty}(n+1)\,e^{-\sqrt{n}}=0$$

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n}e^{-\sqrt{k}}=0$

2. $u_n=\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(2-\frac{k}{n}\right)$

   Tout d'abord nous pouvons écrire $\left(2-\dfrac{k}{n}\right)=2\left(1-\dfrac{k}{2n}\right)$ et donc :

$$u_n=\prod_{k=0}^{n-1}\left(2-\frac{k}{n}\right)=2^n\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{2n}\right)$$

   A TERMINER

Exercice 15 :

Nous allons démontrer que la suite $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$ n'admet pas de limite

1. *Que pouvons nous dire si $\sin\alpha=0$?*

   Il est clair que $\sin\alpha=0\iff\alpha=k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et que $\cos n\alpha$ devient $\cos n\alpha=\cos nk\pi=(-1)^n$, suite qui n'admet pas de limite.

2. *On suppose maintenant que $\alpha\neq k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$*
   Nous voulons montrer que la suite $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite. On suppose le contraire et nous appelons l le nombre tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos n\alpha=l$.

   (a) *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n\alpha=l\times\dfrac{\cos\alpha-1}{\sin\alpha}$*

   Nous allons étudier $\cos(n+1)\,\alpha$.

   ▷ Tout d'abord, $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(n+1)\,\alpha=l$

▷ D'autre part, en utilisant les formules d'addition :

$$\cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha \cos\alpha - \sin n\alpha \sin\alpha \Longleftrightarrow \sin n\alpha = \frac{\cos n\alpha\cos\alpha - \cos(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

En passant à la limite, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n\alpha = \dfrac{l\cos\alpha - l}{\sin\alpha} = l \times \dfrac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}$

D'où le résultat

(b) *En considérant $\sin 2n\alpha$, montrer que $l = 0$ ou $l = \frac{1}{2}$*

Suivons donc ce qui est proposé :

$$\sin 2n\alpha = 2\sin n\alpha\cos n\alpha$$

Et donc, par passage à la limite, nous avons : $l = 2l^2$ d'où on tire $l = 0$ ou $l = \dfrac{1}{2}$

(c) *En considérant $\cos 2n\alpha$, montrer que $l = 2l^2 - 1$*

Toujours par les formules trigonométriques, $\cos 2n\alpha = 2\cos^2 n\alpha - 1$, et en passant à la limite, nous avons $l = 2l^2 - 1$

(d) *Conclure*

La limite l doit vérifier simultanément 2 équations du second degré ; pour l'une $l = 0$ ou $l = \dfrac{1}{2}$; ces valeurs ne vérifient pas le seconde équation

Donc, l'hypothèse de convergence de la suite $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est contradictoire. La suite $(\cos n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet donc pas de limite.

Exercice 16 :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle telle que :
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $x_n \geqslant 0$*
- *Il existe $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ avec $0 \leqslant \alpha + \beta < 1$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} \leqslant \alpha x_{n+2} + \beta x_n$*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on construite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par : $u_n = \max\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}$

Tout d'abord, par construction, on peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_n \leqslant u_n$.

1. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante*

▷ Tout d'abord, remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} \leqslant u_n$; en effet :

$$x_{n+3} \leqslant \alpha x_{n+2} + \beta x_n \leqslant \alpha u_n + \beta u_n \leqslant (\alpha+\beta)\,u_n \leqslant u_n$$

▷ Si $u_n = x_n$, alors :
$x_n \geqslant x_{n+1}$ et $x_n \geqslant x_{n+2}$; comme $x_{n+3} \leqslant u_n$, $x_n \geqslant x_{n+3}$ et donc $x_n \geqslant \max\{x_{n+1}; x_{n+2}; x_{n+3}\}$, c'est à dire $u_n \geqslant u_{n+1}$

▷ Si $u_n = x_{n+1}$ ou $u_n = x_{n+2}$, alors, de l'inégalité $x_{n+3} \leqslant u_n$, nous déduisons $x_{n+3} \leqslant x_{n+1}$ ou $x_{n+3} \leqslant x_{n+2}$.
Comme $u_{n+1} = \max\{x_{n+1}; x_{n+2}; x_{n+3}\}$, nous avons $u_{n+1} = x_{n+1}$ ou $u_{n+1} = x_{n+2}$, c'est à dire, en fait, $u_{n+1} = u_n$

Donc, de manière générale, nous avons $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

2. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} \leqslant (\alpha+\beta)\,u_n$*

▷ Nous avons $u_{n+3} = \max\{x_{n+3}; x_{n+4}; x_{n+5}\}$, et nous avons déjà montré, dans la question 1 que $x_{n+3} \leqslant (\alpha+\beta)\,u_n$

▷ Donc, $x_{n+4} \leqslant (\alpha+\beta)\,u_{n+1} \leqslant (\alpha+\beta)\,u_n$

▷ Et, $x_{n+5} \leqslant (\alpha+\beta)\,u_{n+2} \leqslant (\alpha+\beta)\,u_{n+1} \leqslant (\alpha+\beta)\,u_n$

Donc, $u_{n+3} \leqslant (\alpha+\beta)\,u_n$

3. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant (\alpha+\beta)^{\left[\frac{n}{3}\right]} u_0$ où le symbole $[\bullet]$ désigne la partie entière.*

Nous utilisons l'inégalité $u_{n+3} \leqslant (\alpha+\beta)\,u_n$ et allons envisager 3 cas. En fait, nous allons regarder les congruences modulo 3

▷ Si $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rl} u_3 \leqslant & (\alpha+\beta)\,u_0 \\ u_6 \leqslant & (\alpha+\beta)\,u_3 \\ u_9 \leqslant & (\alpha+\beta)\,u_6 \\ \vdots & \quad\vdots \\ u_{3k} \leqslant & (\alpha+\beta)\,u_{3(k-1)} \end{array}$$

En multipliant termes à termes, nous obtenons, après simplification : $u_{3k} \leqslant (\alpha+\beta)^k u_0$

▷ Si $n = 3k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rl} u_4 \leqslant & (\alpha+\beta)\,u_1 \\ u_7 \leqslant & (\alpha+\beta)\,u_4 \\ u_{10} \leqslant & (\alpha+\beta)\,u_7 \\ \vdots & \quad\vdots \\ u_{3k+1} \leqslant & (\alpha+\beta)\,u_{3(k-1)+1} \end{array}$$

En multipliant termes à termes, nous obtenons, après simplification : $u_{3k+1} \leqslant (\alpha+\beta)^k u_1$.
Comme $u_1 \leqslant u_0$, nous avons $u_{3k+1} \leqslant (\alpha+\beta)^k u_0$

▷ Si $n = 3k+2$ avec $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rl} u_5 \leqslant & (\alpha+\beta)\,u_2 \\ u_8 \leqslant & (\alpha+\beta)\,u_5 \\ u_{11} \leqslant & (\alpha+\beta)\,u_8 \\ \vdots & \quad\vdots \\ u_{3k+2} \leqslant & (\alpha+\beta)\,u_{3(k-1)+2} \end{array}$$

En multipliant termes à termes, nous obtenons, après simplification : $u_{3k+2} \leqslant (\alpha+\beta)^k u_2$.
Comme $u_2 \leqslant u_0$, nous avons $u_{3k+2} \leqslant (\alpha+\beta)^k u_0$

Si $n = 3k+p$, avec $p = 0,1,2$ $k = \left[\dfrac{n}{3}\right]$, nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant (\alpha+\beta)^{\left[\frac{n}{3}\right]} u_0$

4. *En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$*

Comme $0 \leqslant \alpha+\beta < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha+\beta)^{\left[\frac{n}{3}\right]} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Comme $x_n \leqslant u_n$, et d'après le théorème 8.3.1 de majoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

8.9.4 Variation des suites

Exercice 17 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. Montrer qu'il existe 2 suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'une croissante et l'autre décroissante, telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

La résolution de cet exercice est basée sur 2 faits très classiques :

— Le premier, c'est que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k - u_{k-1}$

— Le second, que $u_k - u_{k-1} = \max\{u_k - u_{k-1}; 0\} + \min\{u_k - u_{k-1}; 0\}$

De telle sorte que

$$u_n = u_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\max\{u_k - u_{k-1}; 0\} + \min\{u_k - u_{k-1}; 0\}\right) = u_0 + \sum_{k=1}^{n} \max\{u_k - u_{k-1}; 0\} + \sum_{k=1}^{n} \min\{u_k - u_{k-1}; 0\}$$

— Nous appelons $v_n = u_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \max\{u_k - u_{k-1}; 0\}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \min\{u_k - u_{k-1}; 0\}$

— La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

En effet, $v_{n+1} - v_n = \left(u_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \max\{u_k - u_{k-1}; 0\}\right) - \left(u_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \max\{u_k - u_{k-1}; 0\}\right) = \max\{u_{n+1} - u_n; 0\}$.

Or, $\max\{u_{n+1} - u_n; 0\} \geqslant 0$ et donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

— Nous démontrerions de même que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Nous avons ainsi prouvé l'existence de 2 suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'une croissante et l'autre décroissante, telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 18 :

1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante qui admet une limite l. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $x_n \leqslant l$*

   Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} > l$, c'est à dire $(x_{n_0} - l) > 0$
   Soit $\varepsilon = \dfrac{(x_{n_0} - l)}{2}$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$, alors $|x_n - l| \leqslant \dfrac{(x_{n_0} - l)}{2}$, c'est à dire que pour $n \geqslant N$:

   $$|x_n - l| \leqslant \frac{(x_{n_0} - l)}{2} \iff -\frac{(x_{n_0} - l)}{2} \leqslant x_n - l \leqslant \frac{(x_{n_0} - l)}{2} \implies x_n \leqslant \frac{(x_{n_0} + l)}{2} < x_{n_0}$$

   Ce qui contredit le fait que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ soit une suite croissante.
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $x_n \leqslant l$

2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ admet une suite extraite convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente*

   Soit $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction croissante telle que $v_n = u_{\sigma(n)}$; on appelle $l = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
   Soit $\varepsilon > 0$
   Il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|v_n - l| < \varepsilon$, c'est à dire, en fait, d'après la question 1, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $l - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant l$
   Donc, si $n \geqslant \sigma(N_\varepsilon)$, nous avons $\sigma(n) \geqslant n \geqslant \sigma(N_\varepsilon) \geqslant N_\varepsilon$ et donc, $l - \varepsilon \leqslant u_{\sigma(N_\varepsilon)} \leqslant u_n \leqslant u_{\sigma(n)} \leqslant l$, c'est à dire $|u_n - l| < \varepsilon$.
   Et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Exercice 19 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2u_n \leqslant u_{n+1} + u_{n-1}$.
On appelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$. Etudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

▷ La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante
En effet, $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$; or, d'après les hypothèses, $2u_{n+1} \leqslant u_{n+2} + u_n \iff u_{n+2} \geqslant 2u_{n+1} - u_n$, et donc :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant 2u_{n+1} - u_n - u_{n+1} \iff v_{n+1} \geqslant u_{n+1} - u_n = v_n$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est donc croissante

▷ La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée
Il suffit de considérer l'hypothèse qui nous dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite bornée et d'utiliser la valeur absolue pour montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite bornée :

$$|v_n| = |u_{n+1} - u_n| \leqslant |u_{n+1}| + |u_n| \leqslant 2M$$

▷ La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ admet pour limite $l = 0$
Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle est convergente, et soit l cette limite.
Supposons $l > 0$; alors, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_0$, alors $v_n > 0$, c'est à dire qu'à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est à dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée, elle admet donc une limite λ.
Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lambda - \lambda = 0$
La résolution aurait été semblable si nous avions supposé $l < 0$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Exercice 20 :

Etudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par :

- $u_0 = a$
- $v_0 = b$
- $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$
- $v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$

Nous allons procéder en plusieurs étapes :

1. **Supposons** $a = b$ Alors, en procédant par une rérécurrence simple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n = v_n = a$
2. **Supposons** $a = -b$ Dès $n = 1$, v_1 n'est pas défini ! ! Donc si $a = -b$, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas définies.
3. **Supposons** $a = 0$ **et** $b = 0$
   Alors, par une récurrence simple, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n = 0$ et $v_n = 0$, ce qui veut dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont la suite nulle
4. **Supposons** $a = 0$ **et** $b \neq 0$
   Nous allons montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est géométrique et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite nulle, c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{b}{2^n}$ et $v_n = 0$
   - C'est vrai pour $n = 1$: $u_1 = \dfrac{0+b}{2} = \dfrac{b}{2}$ et $v_1 = \dfrac{2\times 0\times b}{0+b} = 0$
   - Supposons que pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{b}{2^n}$ et $v_n = 0$
   - Alors :
   $$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{\frac{b}{2^n} + 0}{2} = \frac{b}{2^{n+1}} \text{ et } v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{2u_n \times 0}{u_n + v_n} = 0$$
   Ce que nous voulions.
5. **Supposons** $a \neq 0$ **et** $b = 0$
   Alors, $u_1 = \dfrac{a+0}{2} = \dfrac{a}{2}$ et $v_1 = \dfrac{2\times 0\times a}{0+a} = 0$ Nous pouvons montrer, en effectuant la même récurrence que précédement, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est géométrique et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite nulle, c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{a}{2^n}$ et $v_n = 0$
6. **Supposons** $a > 0$ **et** $b > 0$
   Nous allons montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   (a) Une récurrence simple montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$
   (b) Montrons que pour $n \geqslant 1$, nous avons $u_n \geqslant v_n$
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ &= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} \\ &= \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \end{aligned}$$
   Comme $\dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geqslant 0$, nous avons aussi $u_{n+1} - v_{n+1} \geqslant 0$; ce que nous voulions
   (c) Etudions les variations de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - v_n \\ &= \frac{2u_n v_n - u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n} \\ &= \frac{u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n} \\ &= \frac{v_n(u_n - v_n)}{u_n + v_n} \end{aligned}$$

Comme $u_n \geqslant v_n$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$, nous avons $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

(d) Etudions maintenant les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \\ &= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} \\ &= \frac{v_n - u_n}{2} \end{aligned}$$

Comme $u_n \geqslant v_n$, nous avons $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

(e) Démontrons maintenant que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$

Nous avons déjà calculé $u_{n+1} - v_{n+1}$; nous avons : $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$.

Or :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n}\right)(u_n - v_n)$$

Comme $-v_n \leqslant v_n$, nous avons $0 < u_n - v_n \leqslant u_n + v_n$, c'est à dire $0 < \dfrac{u_n - v_n}{u_n + v_n} < 1$, et donc

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(u_n - v_n)$$

De là, nous pouvons déduire par une récurrence simple que $0 < u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}(u_0 - v_0)$. Nous en déduisons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$

(f) Les 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. Soit l leur limite commune. D'après les études précédentes, nous avons $l \geqslant 0$.
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = u_n v_n$.

— Tout d'abord, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n \times \lim_{n\to+\infty} v_n = l^2$$

— Ensuite la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En effet :

$$w_{n+1} = u_{n+1}v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \times \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = u_n v_n$$

Ainsi, nous avons $w_n = w_0 = u_0 v_0 = ab$, de telle sorte que $l^2 = ab$, et comme $l > 0$, nous avons $l = \sqrt{ab}$

7. **Supposons** $a < 0$ **et** $b < 0$

(a) Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n < 0$ et $v_n < 0$. La démonstration se fait par récurrence.

▷ C'est trivialement vrai pour $n = 0$

▷ Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$ et $v_n < 0$

▷ Alors, $u_n + v_n < 0$ et $u_n v_n > 0$ et donc $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \leqslant 0$ et $v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \leqslant 0$

(b) Montrons que pour $n \geqslant 1$, nous avons $u_n \leqslant v_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ &= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} \\ &= \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \leqslant 0$, nous avons aussi $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant 0$; ce que nous voulions

(c) Etudions les variations de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}-v_n \\ &= \frac{2u_nv_n-u_nv_n-v_n^2}{u_n+v_n} \\ &= \frac{u_nv_n-v_n^2}{u_n+v_n} \\ &= \frac{v_n(u_n-v_n)}{u_n+v_n} \end{aligned}$$

Comme $u_n \leqslant v_n$ à partir de $n=1$, $u_n<0$ et $v_n<0$, nous avons $v_{n+1}-v_n \leqslant 0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n=1$

(d) Etudions maintenant les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{u_n+v_n}{2}-u_n \\ &= \frac{u_n+v_n-2u_n}{2} \\ &= \frac{v_n-u_n}{2} \end{aligned}$$

Comme $u_n \leqslant v_n$ à partir de $n=1$, nous avons $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir de $n=1$

(e) Démontrons maintenant que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

Nous avons déjà calculé $v_{n+1}-u_{n+1}$; nous avons : $v_{n+1}-u_{n+1} = -\dfrac{(v_n-u_n)^2}{2(u_n+v_n)}$.

Or :

$$v_{n+1}-u_{n+1} = -\frac{(v_n-u_n)^2}{2(u_n+v_n)} = \frac{-1}{2}\left(\frac{v_n-u_n}{u_n+v_n}\right)(v_n-u_n)$$

Comme $u_n \leqslant v_n \leqslant 0 \leqslant -v_n$, nous avons

$$u_n+v_n \leqslant u_n-v_n \leqslant 0 \iff 0 \leqslant v_n-u_n \leqslant -(u_n+v_n)$$

C'est à dire $0 < \dfrac{v_n-u_n}{u_n+v_n} \leqslant 1$, et donc

$$0 \leqslant v_{n+1}-u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n-u_n)$$

De là, nous pouvons déduire par une récurrence simple que $0 < v_n-u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}(v_0-u_0)$. Nous en déduisons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n-u_n)=0$

(f) Les 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. Soit l leur limite commune. D'après les études précédentes, nous avons $l \leqslant 0$.
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par : $w_n = u_nv_n$.
— Tout d'abord, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} u_nv_n = \lim_{n\to+\infty} u_n \times \lim_{n\to+\infty} v_n = l^2$$

— Ensuite la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En effet :

$$w_{n+1} = u_{n+1}v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \times \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} = u_nv_n$$

Ainsi, nous avons $w_n = w_0 = u_0v_0 = ab$, de telle sorte que $l^2 = ab$, et comme $l<0$, nous avons $l = -\sqrt{ab}$

8. **Reste le cas où** $ab<0$ C'est à dire que cas où a et b ont des signes contraires.En utilisant un petit programme, on s'aperçoit que les suites ont un comportement erratique. J'ai renoncé à les étudier.

Exercice 21 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls vérifiant : $(\forall m \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_{m+n} \leqslant u_m + u_n)$
Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$

1. Soient $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$; alors $u_{pq+r} \leqslant qu_p + u_r$
   Cette démonstration se fait par récurrence sur q
   C'est évidemment vrai pour $q = 0$ **:** Nous avons $u_{0\times p+r} = u_r \leqslant 0 \times u_p + u_r$
   Supposons que $u_{pq+r} \leqslant qu_p + u_r$
   Démontrons la relation à l'ordre $q+1$ Nous avons
   $$u_{p(q+1)+r} = u_{pq+p+r} \leqslant u_p + u_{pq+r} \leqslant u_p + qu_p + u_r = (q+1)\,u_p + u_r$$
   C'est à dire $u_{p(q+1)+r} \leqslant (q+1)\,u_p + u_r$; ce que nous voulions.
2. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \geqslant 0$, alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\dfrac{u_n}{n} \geqslant 0$. La suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc minorée et, la borne inférieure $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ existe.
   Soit $\lambda = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$
3. Soit $\varepsilon > 0$
   De la définition de la borne inférieure, il existe $p_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda \leqslant \dfrac{u_{p_\varepsilon}}{p_\varepsilon} \leqslant \lambda + \varepsilon$
4. Pour $m \in \mathbb{N}$, on effectue la division euclidienne de m par p_ε :
   $$m = qp_\varepsilon + r \text{ avec } 0 \leqslant r < p_\varepsilon$$
   Et donc : $u_m \leqslant qu_{p_\varepsilon} + u_r$. Donc, pour $m \in \mathbb{N}^*$,
   $$\begin{aligned} \frac{u_m}{m} &\leqslant \frac{q}{m} u_{p_\varepsilon} + \frac{u_r}{m} \\ &\leqslant \frac{qp_\varepsilon}{m}\frac{u_{p_\varepsilon}}{p_\varepsilon} + \frac{u_r}{m} \end{aligned}$$
   On peut déjà écrire que $\dfrac{qp_\varepsilon}{m} \leqslant 1$ et que, donc :
   $$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_{p_\varepsilon}}{p_\varepsilon} + \frac{u_r}{m}$$
5. Soit $M = \sup\{u_r \text{ avec } 0 \leqslant r < p_\varepsilon\}$. Ce M existe puisque l'ensemble $\{u_r \text{ avec } 0 \leqslant r < p_\varepsilon\}$ est fini.
   Nous avons donc $\dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{u_{p_\varepsilon}}{p_\varepsilon} + \dfrac{M}{m}$
   Soit $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $m \geqslant N_\varepsilon$ alors $\dfrac{M}{m} \leqslant \varepsilon$
   Alors, pour $m \geqslant N_\varepsilon$, $\lambda \leqslant \dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{u_{p_\varepsilon}}{p_\varepsilon} + \varepsilon \leqslant \lambda + 2\varepsilon$, c'est à dire : $\lambda \leqslant \dfrac{u_m}{m} \leqslant \lambda + 2\varepsilon$
   Ce qui termine de montrer que $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{u_m}{m} = \lambda$

Nous avons donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$

Exercice 22 :

Nous considérons les deux suites numériques réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

1. *Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont adjacentes*

   ▷ — Nous avons : $u_n - v_n = \dfrac{1}{n!} > 0$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$

   — Ensuite, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante ; en effet :

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

   Et donc, $u_{n+1} > u_n$

   — De plus, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante :

   $$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$$

   Donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ dès que $n \geqslant 1$, c'est à dire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang $n = 1$

   ▷ De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n!}\right) = 0$

   ▷ Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes

2. *Démontrer que leur limite commune l ne peut être rationnelle, c'est à dire que $l \notin \mathbb{Q}$*

   Soit donc l la limite commune à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et supposons $l \in \mathbb{Q}$. Pour plus de simplification, supposons $l = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$ et $q \geqslant 2$.

   Nous avons donc :

   $$u_q \leqslant l \leqslant v_q \iff u_q \leqslant \frac{p}{q} \leqslant v_q \iff u_q \leqslant \frac{p}{q} \leqslant u_q + \frac{1}{q!}$$

   Multiplions la dernière égalité par $q!$. Nous avons alors :

   $$u_q \leqslant \frac{p}{q} \leqslant u_q + \frac{1}{q!} \iff q!u_q \leqslant q!\frac{p}{q} \leqslant q!u_q + 1$$

   Nous avons :

   — $q!u_q \in \mathbb{N}$

   — $q!\dfrac{p}{q}u_q \in \mathbb{N}$

   Ce qui sous entend que $q!\dfrac{p}{q} \in \{q!u_q; q!u_q + 1\} \iff l \in \{u_q; v_q\}$

   Si $l = u_q$, alors, $u_q < u_{q+1} < u_{q+2} < \cdots < l = u_q$, ce qui est absurde.

   De même, si $l = v_q$, alors $l = v_q > v_{q+1} > v_{q+2} > \cdots > l = v_q$, ce qui est tout aussi absurde.

   Donc , $l \notin \mathbb{Q}$

8.9.5 Suites de Cauchy

Exercice 23 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n u_n}$$

Il faut montrer que cette suite est convergente

Nous allons montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy

1. Tout d'abord, on montre facilement, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$, puis, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante et que, donc, $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. En suite, nous utilisons le fait général que $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + u_0$

3. Alors, soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geqslant q$. Alors :

$$0 \leqslant u_p - u_q = \sum_{k=q}^{p-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=q}^{p-1} \frac{1}{2^k u_k} \leqslant \sum_{k=q}^{p-1} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^q}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p-q}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2^q} \times 2 = \frac{1}{2^{q-1}}$$

En effet, nous avons $\dfrac{1}{2^k u_k} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ car $u_k \geqslant 1$. Comme la suite $\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente et de limite 0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $q > N$, alors $0 < \dfrac{1}{2^{q-1}} \leqslant \varepsilon$

Et donc pour ce même $\varepsilon > 0$ il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, tout $q \in \mathbb{N}$, $p > q > N \Longrightarrow 0 \leqslant u_p - u_q \leqslant \varepsilon$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente.

Chapitre 9

Topologie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$

W.I.P. : Work In Progress

Introduction

Cette section a pour objet de voir ou revoir les notions fondamentales de topologie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ à l'éclairage des suites.

1. La topologie de $\mathbb{R}$ est celle induite par la relation d'ordre total « $\leqslant$ » compatible avec l'addition et la multiplication par un nombre positif.
2. S'il existe, dans $\mathbb{C}$ des relations d'ordre total, il n'existe pas, dans $\mathbb{C}$ relation d'ordre total « $\leqslant$ » compatible avec l'addition et la multiplication par un nombre positif.

   En effet, supposons qu'il en existe une telle relation d'ordre total « $\leqslant$ » compatible avec l'addition et la multiplication par un nombre positif. Alors, $i^2 \geqslant 0$, car i^2 est un carré. Donc $-1 \geqslant 0$, c'est à dire $1 \leqslant 0$; et comme $1 = 1^2 \geqslant 0$. De $1 \leqslant 0$ et $1 \geqslant 0$, on tire $1 = 0$, ce qui est absurde
3. La topologie de $\mathbb{C}$ ne peut donc pas être définie par une relation d'ordre total « $\leqslant$ » compatible avec l'addition et la multiplication par un nombre positif.
4. Dans cette section, nous essaierons autant que faire se peut, d'énoncer des résultats communs à $\mathbb{R}$ et à $\mathbb{C}$. Sinon, nous préciserons dans lequel des deux ensembles ces résultats sont valables
5. $\mathbb{K}$ est toujours mis pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

9.1 Intervalle ouvert, boule ouverte

1. Dans $\mathbb{R}$, on appelle intervalle ouvert, un ensemble $I =]a;b[$ avec $a < b$ défini par :

$$]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x < b\}$$

2. Dans $\mathbb{C}$, on appelle boule ouverte, de centre z_0 et de rayon $r > 0$ un ensemble $B(z_0, r)$ défini par :

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| < r\}$$

Remarque 1 :

Une autre forme d'écriture de $I =]a;b[$ est :

$$]a;b[= \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{|a-b|}{2}\right\}$$

Cette écriture se rapproche beaucoup de l'écriture de boule ouverte, l'intervalle $]a;b[$ devenant un intervalle de centre $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ et de rayon $r = \dfrac{|a-b|}{2}$

9.1.1 Proposition

1. Soit $]a;b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in]a;b[$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[\subset]a;b[$
2. Soit $B(z_0, \rho) \subset \mathbb{K}$ une boule ouverte de centre z_0 et de rayon $\rho > 0$. Alors, pour tout $z \in B(z_0, \rho)$, il existe $r > 0$ tel que $B(z, r) \subset B(z_0, \rho)$

Démonstration

Même si les démonstrations sont semblables, nous allons les démontrer séparément.

1. Démonstration du premier point

Figure 9.1 – L'intervalle $]a;b[$ et $x \in]a;b[$

L'illustration de la situation est dans la figure 9.1.

Soit $x \in]a;b[$. En prenant $\varepsilon = \min\left\{\dfrac{|x-a|}{2}; \dfrac{|x-b|}{2}\right\}$, nous avons $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[\subset]a;b[$

En effet,

▷ Si $\varepsilon = \dfrac{|x-a|}{2}$, alors $\varepsilon \leqslant \dfrac{|x-b|}{2}$, et de $a < x < b$, nous avons $\varepsilon = \dfrac{x-a}{2}$. Alors :

— $x - \varepsilon - a = x - \dfrac{x-a}{2} - a = \dfrac{2x - x + a - 2a}{2} = \dfrac{x-a}{2}$. De $a < x < b$, nous avons $\dfrac{x-a}{2} > 0$ et donc $x - \varepsilon > a$

— $x + \varepsilon - b \leqslant x + \dfrac{|x-b|}{2} - b = x + \dfrac{b-x}{2} - b = \dfrac{2x + b - x - 2b}{2} = \dfrac{x-b}{2}$. De $a < x < b$, nous avons $\dfrac{x-b}{2} < 0$ et donc $x + \varepsilon < b$

Nous avons donc : $a < x - \varepsilon < x + \varepsilon < b$, c'est à dire $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[\subset]a;b[$

▷ La démonstration est tout à fait semblable si $\varepsilon = \dfrac{|x-b|}{2}$

2. Démonstration du second point

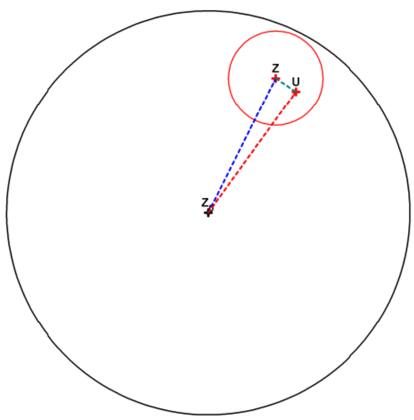

Figure 9.2 – La boule $B(z_0, \rho)$ et $z \in B(z_0, \rho)$

L'illustration de la situation de ce second point est dans la figure 9.2.

Nous choisissons $r < \rho - |z - z_0|$ et soit $u \in B(z, r)$. Alors :

$$|z_0 - u| \leqslant |z_0 - z| + |z - u| < |z_0 - z| + r < |z_0 - z| + \rho - |z_0 - z| = \rho$$

Donc $u \in B(z_0, \rho)$ et donc $B(z, r) \subset B(z_0, \rho)$

9.1.2 Définition de voisinage

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. V est dit voisinage de x, si V contient un intervalle ouvert $]a; b[\subset V$ tel que $x \in]a; b[$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. V est dit voisinage de z, si V contient une boule ouverte $B(u, \rho) \subset V$ telle que $x \in B(u, \rho)$
3. Pour $x \in \mathbb{K}$, on appelle $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x

9.1.3 Proposition

Soit $x \in \mathbb{K}$. Alors, si $V \in \mathcal{V}(x)$, tout sous-ensemble $W \subset \mathbb{K}$ tel que $V \subset W$ est tel que $W \in \mathcal{V}(x)$

Démonstration

Soient donc $x \in \mathbb{K}$, $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \subset \mathbb{K}$ tel que $V \subset W$.
Comme $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe un ouvert *(intervalle ouvert ou boule ouverte)* $\mathcal{O} \subset V$ tel que $x \in \mathcal{O}$. Donc, comme $V \subset W$, par transitivité, $\mathcal{O} \subset W$ et, donc, $W \in \mathcal{V}(x)$

9.1.4 Proposition

Soit $x \in \mathbb{K}$. Alors, si $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(x)$ alors $V \cap W \in \mathcal{V}(x)$

Démonstration

Bien qu'elles soient semblables *(même presque identiques !)*, nous différentions les démonstrations dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$

1. Soient $x \in \mathbb{R}$, $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(x)$.
   Alors, il existe un intervalle ouvert $I_1 \subset V$ tel que $x \in I_1$; de même, il existe un intervalle ouvert $I_2 \subset W$ tel que $x \in I_2$.
   D'après 9.1.1 il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $]x - \varepsilon_1 ; x + \varepsilon_1[\subset I_1$.
   De même, toujours d'après 9.1.1 il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que $]x - \varepsilon_2 ; x + \varepsilon_2[\subset I_2$
   Soit, maintenant $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 ; \varepsilon_2\}$.
   Alors $]x - \varepsilon ; x + \varepsilon[\subset]x - \varepsilon_2 ; x + \varepsilon_2[\subset I_2 \subset W$
   Et $]x - \varepsilon ; x + \varepsilon[\subset]x - \varepsilon_1 ; x + \varepsilon_1[\subset I_1 \subset V$
   Et donc $]x - \varepsilon ; x + \varepsilon[\subset V \cap W$. Ainsi, $V \cap W$ contient un intervalle ouvert contenant x. Et donc, $V \cap W$ est un voisinage de x.
2. Dans l'ensemble des nombres complexes, soient $x \in \mathbb{C}$, $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(x)$.
   Alors, il existe une boule ouverte $B_1(z_1, \rho_1) \subset V$ tel que $x \in B_1(z_1, \rho_1)$; de même, il existe une boule ouverte $B_2(z_2, \rho_2) \subset W$ tel que $x \in B_2(z_2, \rho_2)$
   D'après 9.1.1 il existe $r_1 > 0$ tel que la boule ouverte $B(x, r_1) \subset B_1(z_1, \rho_1)$.
   De même, toujours d'après 9.1.1 il existe $r_2 > 0$ tel que la boule ouverte $B(x, r_2) \subset B_2(z_2, \rho_2)$
   Soit, maintenant $r = \min\{r_1 ; r_2\}$.
   Alors $B(x, r) \subset B(x, r_1) \subset B_1(z_1, \rho_1) \subset V$
   Et $B(x, r) \subset B(x, r_2) \subset B_2(z_2, \rho_2) \subset W$
   Et donc $B(x, r) \subset V \cap W$. Ainsi, $V \cap W$ contient une boule ouverte contenant x. Et donc, $V \cap W$ est un voisinage de x.

Remarque 2 :

On peut généraliser en écrivant que toute intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x.

Exercice 1 :

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}$ et tout $y \in \mathbb{K}$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$ tels que $V \cap W = \emptyset$

9.1.5 Bases de voisinages

Soit $x \in \mathbb{K}$ et $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.
Une partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$ est dite base de voisinages si tout voisinage de x contient un élément de $\mathcal{B}$ c'est à dire si :

$$(\forall V \in \mathcal{V}(x))\,(\exists B \in \mathcal{B})\,(B \subset V)$$

Exemple 1 :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, la famille $\mathcal{B} = \{]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\text{ avec } \varepsilon > 0\}$ est une base de voisinage de x.
   En effet, soit $V \in \mathcal{V}(x)$; il existe alors un intervalle ouvert I tel que $I \subset V$ et $x \in I$. D'après 9.1.1 il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon\,;\, x + \varepsilon[\subset V$
   Ce que nous voulions ; $\mathcal{B}$ est bien une base de voisinage de x
2. De même, pour $x \in \mathbb{R}$, la famille $\mathcal{B}_1 = \left\{ \left]x - \dfrac{1}{n}; x + \dfrac{1}{n}\right[\text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est une base de voisinage de x.
3. Dans $\mathbb{C}$, les familles $\mathcal{B} = \{B(z, \varepsilon) \text{ avec } \varepsilon > 0\}$ et $\mathcal{B}_1 = \left\{ B\left(z, \dfrac{1}{n}\right) \text{ avec } n_i n \mathbb{N}^* \right\}$ sont des bases de voisinage de z

9.1.6 Limite de suites et voisinage

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $l \in \mathbb{K}$ et $\mathcal{B}$ une base de voisinages de l. Alors :
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ si et seulement si pour tout voisinage $V \in \mathcal{B}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Longrightarrow u_n \in V$

9.1.7 Généralisation de la notion d'ouvert

Soit $A \subset \mathbb{K}$. Alors, A est un ouvert de $\mathbb{K}$ si et seulement si A est voisinage de chacun de ses points

9.1.8 Proposition

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors A est un ouvert de $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon\,;\, x + \varepsilon[\subset A$
2. Soit $A \subset \mathbb{C}$. Alors A est un ouvert de $\mathbb{C}$ si et seulement si pour tout $z \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z, \varepsilon) \subset A$

Démonstration

La démonstration fait un peu « enfonçage de portes ouvertes » , mais, il faut le faire !!

1. Démonstration du premier point
   - ▷ Supposons que A soit un ouvert de $\mathbb{R}$
     Donc, par définition de l'ouvert, pour tout $x \in A$, $A \in \mathcal{V}(x)$; il existe donc un intervalle ouvert $]a; b[\subset A$ tel que $x \in]a; b[$. D'après 9.1.1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon\,;\, x + \varepsilon[\subset]a; b[$, et donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon\,;\, x + \varepsilon[\subset A$
   - ▷ Réciproquement supposons que pour tout $x \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon\,;\, x + \varepsilon[\subset A$; ceci veut donc dire que, pour tout $x \in A$, A contient un intervalle ouvert contenant x. Donc, A est voisinage de chaque $x \in A$, c'est à dire que A est voisinage de chacun de ses points.

2. Démonstration du second point
   - ▷ Supposons que A soit un ouvert de $\mathbb{C}$
     Donc, par définition de l'ouvert, pour tout $z \in A$, $A \in \mathcal{V}(z)$; il existe donc une boule ouverte $B(u, \rho) \subset A$ tel que $z \in B(u, \rho)$. D'après 9.1.1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z, \varepsilon) \subset B(u, \rho)$, et donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z, \varepsilon) \subset A$
   - ▷ Réciproquement supposons que pour tout $z \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z, \varepsilon) \subset A$; ceci veut donc dire que, pour tout $z \in A$, A contient une boule ouverte contenant z. Donc, A est voisinage de chaque $z \in A$, c'est à dire que A est voisinage de chacun de ses points.

Remarque 3 :

Il faut remarquer le rôle totalement semblable joué par les intervalles ouverts et les boules ouvertes.

Exemple 2 :

1. Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont des ouverts

   Par contre, l'intervalle $[a\,;b[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$, car il n'existe pas de nombre $\varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon\,; a + \varepsilon[\subset [a\,;b[$
2. Dans $\mathbb{C}$, les boules ouvertes $B(z, \rho)$ sont des ouverts.

9.1.9 Proposition

1. Toute réunion d'ouverts est un ouvert
2. Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert
3. $\emptyset$ et $\mathbb{K}$ sont des ouverts

Démonstration

1. Soient $\{O_i \text{ avec } i \in I\}$ une famille quelconque d'ouverts de $\mathbb{K}$. Démontrons que $\bigcup_{i\in I} O_i$ est aussi un ouvert de $\mathbb{K}$.
   Soit $x \in \bigcup_{i\in I} O_i$
   Il faut montrer qu'il existe une boule ouverte *(ou un intervalle ouvert)* tel que $B(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{i\in I} O_i$
   De $x \in \bigcup_{i\in I} O_i$, nous pouvons dire qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$. Comme O_{i_0} est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset O_{i_0}$; et donc, de $O_{i_0} \in \bigcup_{i\in I} O_i$, on en déduit que $B(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{i\in I} O_i$.
   $\bigcup_{i\in I} O_i$ est donc un ouvert
2. Nous allons démontrer que l'intersection de 2 ouverts de $\mathbb{K}$ est un ouvert de $\mathbb{K}$; la généralisation à n ouverts est facile et peut se faire par récurrence *(par exemple)*
   Soient O_1 et O_2, 2 ouverts de $\mathbb{K}$ et montrons que $O_1 \cap O_2$ est un ouvert de $\mathbb{K}$.
   Soit donc $x \in O_1 \cap O_2$; il faut montrer qu'il existe une boule ouverte *(ou un intervalle ouvert)* tel que $B(x, \varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$
   - ▷ O_1 est un ouvert ; il existe donc $\varepsilon_1 > 0$ tel que $B(x, \varepsilon_1) \subset O_1$
   - ▷ De même, O_2 est un ouvert ; il existe donc $\varepsilon_2 > 0$ tel que $B(x, \varepsilon_2) \subset O_2$
   - ▷ Soit $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1; \varepsilon_2\}$. Alors, $B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_2) \subset O_2$ et $B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_1) \subset O_1$
     Donc $B(x, \varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$ et $O_1 \cap O_2$ est un ouvert de $\mathbb{K}$
3. Que $\mathbb{K}$ soit un ouvert est évident, car $\mathbb{K}$ est voisinage de chacun de ses points ou est encore réunion (quelconque) d'ouverts :

   - ▷ $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n; +n[$
   - ▷ $\mathbb{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(0, n)$

4. L'ensemble vide est ouvert parce qu'on ne peut contredire la définition : « pour tout $x \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$ » vu qu'il n'y a pas d'élément x dans l'ensemble vide. Donc la définition est vraie pour $\emptyset$

Exemple 3 :

On ne peut pas avoir de résultat général pour l'intersection quelconque d'ouverts.

Par exemple, on appelle, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $O_n = \left] \frac{-1}{n} ; \frac{1}{n} \right[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, O_n est un ouvert, mais, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n = \{0\}$, lequel n'est pas du tout un ouvert [1].

Démontrons que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n = \{0\}$.

- ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\frac{-1}{n} < 0 < \frac{1}{n}$, c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $0 \in O_n$ et donc $\{0\} \subset O_n$, et donc $\{0\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$
- ▷ Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$.

  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in O_n \iff \frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n}$, et donc $x = 0$.

  En effet, nous ne pouvons pas avoir $x \neq 0$:

  — Si $x > 0$, il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{1}{n_0} < x$, et donc $x \notin O_{n_0}$ et donc $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$ [2]. Il y a donc contradiction

  — Pour les mêmes raisons, si $x < 0$ alors $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$

  Donc $x = 0$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n \subset \{0\}$

En conclusion, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n = \{0\}$

9.2 Intérieur d'un ensemble

9.2.1 Définition

Soit $A \subset \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{K}$

1. x est dit <u>intérieur</u> à A si $A \in \mathcal{V}(x)$
2. L'intérieur de A est l'ensemble des points intérieurs à A et est noté $\mathring{A}$

Remarque 4 :

Que $A \in \mathcal{V}(x)$ signifie qu'il existe une boule de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ *(ou un intervalle de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$)* telle que $B(x, \varepsilon) \subset A$.
Donc, d'après la proposition 9.1.8, $\mathring{A}$ est un ouvert.

Exemple 4 :

Dans $\mathbb{R}$, l'intérieur des intervalles $[a; b]$, $[a; b[$, $]a; b]$ est $]a; b[$

Tout d'abord $]a; b[$ étant un ouvert, est voisinage de chacun de ses points, et donc les intérieurs de $]a; b[[a; b]$, $[a; b[$, $]a; b]$ contiennent $]a; b[$

Or, a n'est pas intérieur à $[a; b]$, car pour tout $\varepsilon > 0$, $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[\not\subset [a; b]$; il en est de même pour b

Donc $\overset{\circ}{\widehat{[a;b]}} = \overset{\circ}{\widehat{[a;b[}} = \overset{\circ}{\widehat{]a;b]}} =]a; b[$

1. C'est, en fait un fermé, voir infra
2. En fait, nous avons $x \notin \bigcap_{n \geqslant n_0} O_n$

9.2.2 Proposition

Soit $A \subset \mathbb{K}$
Alors l'intérieur de A noté $\mathring{A}$ est la réunion des ouverts contenus dans A.
C'est le plus grand ouvert contenu dans A

Démonstration

On sait déjà que $\mathring{A}$ est un ouvert.
Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts contenus dans A, et nous appelons $\mathcal{B}$ la réunion de ces ouverts, autrement dit :

$$\mathcal{B} = \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O$$

$\mathcal{B}$ étant une réunion quelconque d'ouverts est aussi, d'après 9.1.9, un ouvert. ; c'est même le plus grand ouvert contenu dans A.
Nous allons démontrer que $\mathcal{B} = \mathring{A}$

▷ On montre que $\mathring{A} \subset \mathcal{B}$

Soit $x \in \mathring{A}$; alors A est un voisinage de x, et d'après la définition de voisinage 9.1.2, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$, et donc $B(x, \varepsilon)$ étant un ouvert, $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{B}$ et donc $x \in \mathcal{B}$, c'est à dire $\mathring{A} \subset \mathcal{B}$

▷ Réciproquement, montrons que $\mathcal{B} \subset \mathring{A}$

Soit $x \in \mathcal{B}$; $\mathcal{B}$ étant un ouvert est un voisinage de x, et comme $A \subset \mathcal{B}$, A est aussi un voisinage de x, et donc $x \in \mathring{A}$ et donc $\mathcal{B} \subset \mathring{A}$

D'où, nous avons bien $\mathcal{B} = \mathring{A}$

9.2.3 Proposition

Soient A et B 2 parties de $\mathbb{K}$. Alors :

1. $\mathring{A} \subset A$ et $\overset{\circ}{\widehat{\mathring{A}}} = \mathring{A}$
2. $A = \mathring{A}$ si et seulement si A est ouvert
3. Si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$
4. $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$

Démonstration

Les démonstrations sont évidentes, liées surtout au fait que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A. Les points 1 et 2 sont laissés en exercice.

— **Démontrons que si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$**

Supposons $A \subset B$.
Alors $\mathring{A}$ est un ouvert inclus dans A et donc dans B. Donc $\mathring{A} \subset B$. Or, $\mathring{B}$ est le plus grand ouvert inclus dans B, et donc $\mathring{A} \subset \mathring{B}$

— **Démontrons que $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$**

▷ Montrons que $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$

Soit $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$
$\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert, et donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$
Donc $B(x, r) \subset \mathring{A}$ et $B(x, r) \subset \mathring{B}$ et donc $B(x, r) \subset A$ et $B(x, r) \subset B$ et donc $B(x, r) \subset A \cap B$

$B(x, r)$ est un ouvert, et donc $B(x, r) \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$ car $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$ est le plus grand ouvert inclus dans $A \cap B$.

Et donc $x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$ et nous venons de démontrer que $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$

- ▷ <u>Montrons que $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$</u>

  De même, soit $y \in \overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}$; $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}$ étant un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B\left(y, r\right) \subset \overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}$.

  Comme $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} \subset A \cap B$, $B\left(y, r\right) \subset A \cap B$ et donc $B\left(y, r\right) \subset A$ et $B\left(y, r\right) \subset B$, c'est à dire que $B\left(y, r\right) \subset \mathring{A}$ et $B\left(y, r\right) \subset \mathring{B}$, et donc, en particulier, $y \in \mathring{A}$ et $y \in \mathring{B}$ et donc $y \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

  Nous venons de démontrer que $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}$

En conclusion, $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{\widehat{A\cap B}}$

— **Démontrons que** $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$
Soit $x \in \mathring{A} \cup \mathring{B}$; alors $x \in \mathring{A}$ ou $x \in \mathring{B}$

- ▷ Si $x \in \mathring{A}$, alors $\mathring{A}$ étant un ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B\left(x, \rho\right) \subset \mathring{A} \subset A$, et donc $B\left(x, \rho\right) \subset A \cup B$.

  $B\left(x, \rho\right)$ étant un ouvert, alors $B\left(x, \rho\right) \subset \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$; en particulier, $x \in \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$

- ▷ Si $x \in \mathring{B}$, par la même démonstration, on démontre que $x \in \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$

Et donc $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$

Remarque 5 :

L'inclusion $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A\cup B}}$ est stricte.

En effet, en prenant l'exemple d'intervalles de $\mathbb{R}$

— $[0;1[\cup [1;2[= [0;2[$, et donc $\overset{\circ}{\widehat{[0;1[\cup [1;2[}} = \overset{\circ}{\widehat{[0;2[}} =]0;2[$

— $\overset{\circ}{\widehat{[0;1[}} \cup \overset{\circ}{\widehat{[1;2[}} =]0;1[\cup]1;2[$

— Nous avons donc $\overset{\circ}{\widehat{[0;1[}} \cup \overset{\circ}{\widehat{[1;2[}} \subsetneq \overset{\circ}{\widehat{[0;1[\cup [1;2[}}$

9.3 Fermés de $\mathbb{K}$

9.3.1 Définition

Soit $A \subset \mathbb{K}$
Alors A est un <u>fermé</u> dans $\mathbb{K}$ si son complémentaire $A^C = \mathbb{K} \setminus A$ est un ouvert

Exemple 5 :

1. Dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $[a;b]$ est un fermé.

   En effet, $\left([a;b]\right)^C =]-\infty;a[\cup]b;+\infty[$. Or, $]-\infty;a[\cup]b;+\infty[$ est la réunion de 2 ouverts est donc un ouvert. Donc $\left([a;b]\right)^C$ est un ouvert, et donc $[a;b]$ est un fermé.
2. Dans $\mathbb{C}$, pour $r > 0$ et $x \in \mathbb{C}$, l'ensemble $B_F\left(x, r\right) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - x| \leqslant r\}$

   En effet, soit $z \notin B_F\left(x, r\right)$; il faut donc montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $B\left(z, \rho\right) \subset \left([a;b]\right)^C$.

   Choisissons $0 < \rho < \dfrac{|x - z| - r}{2}$; comme $z \notin B_F\left(x, r\right)$, alors $|x - z| > r$. Soit $z_1 \in B\left(z, \rho\right)$ *(cf figure 9.3)*

   Montrons que $z_1 \in \left([a;b]\right)^C$. Nous avons, par l'inégalité triangulaire :

$$|z_1 - x| \geqslant \left||z_1 - z| - |z - x|\right|$$

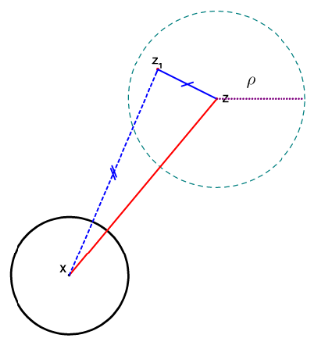

FIGURE 9.3 – La boule $B_F(x,r)$ est un fermé

Or, $||z_1-z|-|z-x|| = |z-x|-|z_1-z|$.
Nous avons $|z_1-z|<\rho$, et donc $-|z_1-z|>-\rho$, d'où :

$$|z_1-x| \geqslant |z-x|-|z_1-z| > |z-x|-\rho > |z-x|-\frac{|x-z|-r}{2} = \frac{|x-z|+r}{2} > r$$

Ce qui montre que $B(z,\rho)\subset([a;b])^C$

3. Il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés ; par exemple, dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $[0;1[$

Remarque 6 :

Par définition,$B(x,\rho)=\{z\in\mathbb{C}$ tel que $|z-x|<\rho\}$ est un ouvert. On notera, pour différencier :

$$\boxed{B_0(x,\rho)=\{z\in\mathbb{C} \text{ tel que } |z-x|<\rho\}}$$

Et nous aurons $B_F(x,r)=\{z\in\mathbb{C}$ tel que $|z-x|\leqslant r\}$ qui est un fermé.

9.3.2 Proposition

L'ensemble des fermés de $\mathbb{K}$ dérifie les propriétés suivantes :
1. $\emptyset$ et $\mathbb{K}$ sont des fermés
2. Une intersection de fermés est fermée
3. Une réunion finie de fermés est un fermé

Démonstration

Cette démonstration s'appuie sur les règles de Morgan.

1. Montrons qu'une intersection de fermés est fermée
Soit $\{F_i; i\in J\}$ une famille de fermés et considérons $\bigcap\limits_{i\in J} F_i$; pour montrer que c'est un fermé, il faut démontrer que $\left(\bigcap\limits_{i\in J} F_i\right)^C$ est un ouvert. Or, en utilisant les règles de Morgan :
$$\left(\bigcap_{i\in J} F_i\right)^C = \bigcup_{i\in J} F_i^C$$
Or, par hypothèse, F_i est un fermé et donc F_i^C est un ouvert et la réunion quelconque d'ouverts est un ouvert ; donc $\bigcup\limits_{i\in J} F_i^C$ est un ouvert, c'est à dire que $\left(\bigcap\limits_{i\in J} F_i\right)^C$ est un ouvert.
En conclusion $\bigcap\limits_{i\in J} F_i$ est un fermé

2. Montrons qu'une réunion finie de fermés est un fermé

   Soit $\{F_i ; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ une famille finie de fermés et considérons $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$; pour montrer que c'est un fermé, il faut démontrer que $\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^C$ est un ouvert. Or, en utilisant les règles de Morgan :

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^C = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^C$$

   Or, par hypothèse, F_i est un fermé et donc F_i^C est un ouvert et l'intersection finie d'ouverts est un ouvert ; donc $\bigcap_{i=1}^{n} F_i^C$ est un ouvert, c'est à dire que $\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^C$ est un ouvert.

   En conclusion $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est un fermé

Remarque 7 :

1. $\emptyset$ et $\mathbb{K}$ sont à la fois des fermés et des ouverts ; ce sont les seuls ensembles dans cette situation
2. Une réunion quelconque de fermés n'est pas forcément un fermé

   Exemple :

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la famille de fermés $\{F_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ où $F_n = \left[-2 + \dfrac{1}{n} \,; +2 - \dfrac{1}{n}\right]$.

   Nous avons :

$$\bigcup_{n \geqslant 1} F_n = \left]-2 \,; +2\right[$$

   Or, $]-2 \,; +2[$ est un ouvert. Nous avons ici une réunion quelconque de fermés qui est un ouvert.

   Il est intéressant de remarquer aussi que nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n \subset F_{n+1}$; la famille $\{F_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille croissante de fermés.

   Montrons que $\bigcup_{n \geqslant 1} F_n =]-2 \,; +2[$

   ▷ Montrons que $\bigcup_{n \geqslant 1} F_n \subset]-2 \,; +2[$

   Soit $x \in \bigcup_{n \geqslant 1} F_n$; il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in F_{n_0}$, c'est à dire tel que

$$-2 < -2 + \frac{1}{n_0} \leqslant x \leqslant +2 - \frac{1}{n_0} < +2$$

   Et donc $x \in]-2 \,; +2[$. Donc, $\bigcup_{n \geqslant 1} F_n \subset]-2 \,; +2[$

   ▷ Montrons que $]-2 \,; +2[\subset \bigcup_{n \geqslant 1} F_n$

   Soit donc x tel que $-2 < x < +2$. Alors, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \leqslant +2 - \dfrac{1}{n_1}$ et $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \geqslant -2 + \dfrac{1}{n_2}$, c'est à dire que nous avons : $-2 + \dfrac{1}{n_2} \leqslant x \leqslant +2 - \dfrac{1}{n_1}$

   Soit $N = \max\{n_1, n_2\}$. Alors $\dfrac{1}{N} \leqslant \dfrac{1}{n_1}$ et $\dfrac{1}{N} \leqslant \dfrac{1}{n_2}$ et donc $-2 + \dfrac{1}{N} \leqslant -2 + \dfrac{1}{n_2}$ et $+2 - \dfrac{1}{N} \geqslant 2 - \dfrac{1}{n_1}$

   Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $-2 + \dfrac{1}{N} \leqslant -2 + \dfrac{1}{n_2} \leqslant x \leqslant +2 - \dfrac{1}{n_1} \leqslant -2 + \dfrac{1}{N}$, c'est à dire tel que $x \in F_N$, et donc $x \in \bigcup_{n \geqslant 1} F_n$

   Donc $]-2 \,; +2[\subset \bigcup_{n \geqslant 1} F_n$

   Nous avons bien $\bigcup_{n \geqslant 1} F_n =]-2 \,; +2[$

9.3.3 Caractérisation des fermés par les suites

Soit $A \in \mathbb{K}$. Alors :
A est un fermé de $\mathbb{K}$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A (c'est à dire telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$) convergente, alors la limite l de cette suite est dans A

Démonstration

1. Supposons que A soit un fermé
   Soit maintenant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :
   — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \in A$
   — La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
   Supposons que $l \notin A$, c'est à dire que $l \in A^C$
   Comme A^C est un ouvert, il existe une boule ouverte $B_O(l,\rho) \subset A^C$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in N$, $n \geqslant N \Longrightarrow u_n \in B_O(l,\rho)$
   Et donc, à partir de ce rang N, $n \geqslant N \Longrightarrow u_n \notin A$
   Contradiction avec les hypothèses, et donc $l \in A$
2. Réciproquement
   Supposons que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente, alors la limite l de cette suite est dans A. Montrons que A est un fermé.
   Supposons, au contraire, que A ne soit pas fermé. De la même manière, A^C n'est pas un ouvert.
   En prenant la négation de la propriété des ouverts 9.1.8 :
   Il existe $x \in A^C$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, nous ayons $B_O(x,\varepsilon) \not\subset A^C$, ce qui veut dire que $B_O(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$
   Une autre forme de cette négation, plus utile, peut être donnée par :
   Il existe $x \in A^C$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $B_O\left(x,\dfrac{1}{n}\right) \not\subset A^C$, ce qui veut dire que
   $$B_O\left(x,\frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$$
   On construit alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in B_O\left(x,\dfrac{1}{n}\right) \cap A$. Nous avons donc :
   ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in A$
   ▷ Et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$
   Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A dont la limite n'est pas dans A. Il y a donc contradiction.
   Donc, A est un fermé

9.4 Adhérence d'une partie $A \subset \mathbb{K}$

9.4.1 Définition

Soit $A \subset \mathbb{K}$ et $a \in A$
- ▷ $a \in \mathbb{K}$ est dit adhérent à A si, pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(a)$, nous avons $V \cap A \neq \emptyset$
- ▷ L'ensemble des points adhérents à A est appelé adhérence de A et est noté $\overline{A}$

Remarque 8 :

1. En remplaçant $\mathcal{V}(a)$, une base de voisinage, la définition 9.4.1 peut s'écrire :
   a est adhérent à A si et seulement si :
   Pour tout $\varepsilon > 0$, les boules ouvertes $B_O(a,\varepsilon)$ sont telles que $B_O(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$
   C'est à dire si et seulement si :
   Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $y \in A$ tel que $y \in B_O(a,\varepsilon) \Longleftrightarrow |a-y| < \varepsilon$

2. Dans $\mathbb{R}$, si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie non vide et majorée, alors $\sup A$ existe et $\sup A \in \overline{A}$, car, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon < x < \sup A$, c'est à dire tel que $|\sup A - x| < \varepsilon$

   Nous avons même mieux :

   $a = \sup A$ **si et seulement si** a **est un majorant de** A **et** $a \in \overline{A}$

   Démonstration

   En effet :

   (a) Si $a = \sup A$, alors a est majorant de A *(définition de la borne supérieure)* et $a \in \overline{A}$.*(cf. supra)*

   (b) Réciproquement, si a est un majorant de A et $a \in \overline{A}$, alorq, comme $a \in \overline{A}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in A$ tel que :

   $$|a - y| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a - y < \varepsilon \Longrightarrow y - \varepsilon < a$$

   Comme a est un majorant de A, nous en déduisons que $a = \sup A$

3. Soit a un point adhérent à A :
   - ▷ Ou bien, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(a)$ de a tel que $V \cap A = \{a\}$, et alors $a \in A$ et est appelé point isolé de A
   - ▷ Ou bien, pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(a)$ de a, il existe $y \in A$ avec $y \neq a$. Alors $a \in A$ et est appelé point d'accumulation de A
     - — Si $x \notin A$, mais que $x \in \overline{A}$, alors x est un point d'accumulation de$A$
     - — x est un point d'accumulation de A si et seulement si tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$ de x contient une infinité de points de$A$

Exemple 6 :

1. Dans $\mathbb{R}$, l'adhérence de $]a; b]$ est $[a; b]$ et celle de $]a; +\infty[$ est $[a; +\infty[$
2. Dans $\mathbb{C}$, l'adhérence de $B_O(z, \rho)$ est $B_F(z, \rho)$

9.4.2 Propriétés

Soit $A \subset \mathbb{K}$. Alors :

1. $\left(\overline{A}\right)^C = \overset{\circ}{\widehat{(A^C)}}$
2. $\left(\overset{\circ}{A}\right)^C = \overline{(A^C)}$

Démonstration

1. Démontrons que $\left(\overline{A}\right)^C = \overset{\circ}{\widehat{(A^C)}}$

   (a) Montrons que $\left(\overline{A}\right)^C \subset \overset{\circ}{\widehat{(A^C)}}$

   Soit $x \in \left(\overline{A}\right)^C$; alors, par définition de $\overline{A}$, $x \notin \overline{A}$.

   D'après la définition 9.4.1 de l'adhérence, ici plutôt de la négation de 9.4.1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y \in A$, $y \notin B_O(x, \varepsilon)$, et donc $B_O(x, \varepsilon) \subset A^C$, ce qui sous-entend que A^C est un voisinage de x, et donc $x \in \overset{\circ}{\widehat{(A^C)}}$

   En conclusion, $\left(\overline{A}\right)^C \subset \overset{\circ}{\widehat{(A^C)}}$

(b) Montrons que $\overset{\circ}{\widehat{(A^C)}} \subset \left(\overline{A}\right)^C$

Soit $x \in \overset{\circ}{\widehat{(A^C)}}$; par la définition 9.2.1 de l'intérieur d'un ensemble, il existe une boule ouverte de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ telle que $B_O(x, \varepsilon) \subset A^C$

Il existe donc un voisinage de x, en l'occurence $B_O(x, \varepsilon)$ tel que $B_O(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, et donc $x \notin \overline{A}$, c'est à dire $x \in \left(\overline{A}\right)^C$

Nous avons donc $\overset{\circ}{\widehat{(A^C)}} \subset \left(\overline{A}\right)^C$

En conclusion $\left(\overline{A}\right)^C = \overset{\circ}{\widehat{(A^C)}}$

2. <u>Démontrons que $\left(\mathring{A}\right)^C = \overline{(A^C)}$</u>

(a) Montrons que $\overline{(A^C)} \subset \left(\mathring{A}\right)^C$

Soit $x \in \overline{(A^C)}$; alors, pour tout $\varepsilon > 0$, les boules ouvertes $B_O(x, \varepsilon)$ sont telles que $B_O(x, \varepsilon) \cap (A^C) \neq \emptyset$. Et donc A n'est pas un voisinage de x.

Comme $\mathring{A} \subset A$, $x \notin \mathring{A}$, c'est à dire $x \in \left(\mathring{A}\right)^C$

Ainsi, nous venons de démontrer que $\overline{(A^C)} \subset \left(\mathring{A}\right)^C$

(b) Réciproquement, montrons que $\left(\mathring{A}\right)^C \subset \overline{(A^C)}$

Soit $x \in \left(\mathring{A}\right)^C$, c'est à dire que $x \notin \mathring{A}$, c'est à dire que A n'est pas un voisinage de x, et donc, d'après la définition de voisinages 9.1.2, il n'existe pas de boule ouverte de centre x incluse dans A, c'est à dire :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(B_O(x, \varepsilon) \not\subset A) \iff (\forall \varepsilon > 0)\,\left(B_O(x, \varepsilon) \cap A^C \neq \emptyset\right)$$

Et donc $x \in \overline{(A^C)}$

En conclusion $\left(\mathring{A}\right)^C \subset \overline{(A^C)}$

Et donc $\left(\mathring{A}\right)^C = \overline{(A^C)}$

Remarque 9 :

De l'égalité $\left(\overline{A}\right)^C = \overset{\circ}{\widehat{(A^C)}}$, comme $\overset{\circ}{\widehat{(A^C)}}$ est un ouvert, on en déduit que l'adhérence d'un ensemble est un fermé

9.4.3 Propriétés

1. Soit $A \subset \mathbb{K}$. Alors : $A \subset \overline{A}$
2. Pour tout $A \subset \mathbb{K}$ et tout $B \subset \mathbb{K}$, nous avons : $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$
3. $\overline{A}$ l'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A
4. Nous avons et $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
5. Nous avons $\overline{A} = A$ si et seulement si A est un fermé
6. Nous avons : $A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$
7. Nous avons $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Démonstration

1. Pour $A \subset \mathbb{K}$, nous avons $A \subset \overline{A}$
   Soit $a \in A$; alors, Pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(a)$, nous avons $V \cap A \neq \emptyset$ puisque $a \in A$ et $a \in V$, et donc $a \in \overline{A}$
   Donc, $A \subset \overline{A}$
2. Montrons que pour tout $A \subset \mathbb{K}$ et tout $B \subset \mathbb{K}$, nous avons : $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$
   - ▷ Montrons que $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$
     Soit $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$; alors $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$
     Si $x \in \overline{A}$, alors, pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$, nous avons $V \cap A \neq \emptyset$. Pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe donc $y \in A$ tel que $y \in V \cap A$; si $y \in A$, alors $y \in A \cup B$, et donc, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, nous avons $V \cap (A \cup b) \neq \emptyset$
   - ▷ Montrons, maintenant, que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$
     Soit $x \in \overline{A \cup B}$; alors, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, nous avons $V \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Ainsi, il existe $y \in A \cup B$ tel que $y \in V \cap (A \cup B)$
     - Si $y \in A$, alors, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$ et $y \in \overline{A}$ et donc $y \in \overline{A} \cup \overline{B}$
     - Supposons que cette fois ci, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$ et que V ne contienne aucun point de A
3.

A TERMINER

Chapitre 10

Limites et continuité d'une fonction numérique

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à des fonctions ou applications de $\mathbb{R}$ ou d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ étant mis pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une telle application est dite **fonction numérique d'une variable réelle**

10.1 Introduction

10.1.1 Rappels

Soient E et F, deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$, une « correspondance » entre ces deux ensembles

1. f est une fonction si tous les éléments de E ont au plus une image
2. f est une application si tous les éléments de E ont exactement une image
3. Le graphe de f est l'ensemble $G \subset E \times F$ défini par :

$$G = \{(x, f(x)) \text{ où } x \in E\}$$

Remarque 1 :

1. Commençons par un exemple ; on considère la fonction suivante :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \sqrt{-x} \end{cases}$$

   f est bien une fonction puisque les nombres strictement positifs n'ont pas d'image, ni même le nombre -1

2. Pour que f soit une application, nous recherchons le domaine de définition de f, c'est à dire l'ensemble des nombres qui ont tous exactement un image. Si nous appelons $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f, ici, $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 0]$
3. En fait, qu'est qu'une fonction ?

   Une fonction f est la donnée d'un triplet (E, F, G) où E est l'ensemble de départ, F, l'ensemble d'arrivée, et G, le graphe de f.

   Ainsi, 2 fonctions *(ou applications)* f et g sont égales, si et seulement si :
   - Elles ont même ensemble de départ E
   - Elles ont même ensemble d'arrivée F
   - Pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$

10.1.2 Définition de restriction

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et $A \subset E$
Soit $\varphi : A \longrightarrow F$ une application telle que, pour tout $x \in A$, $\varphi(x) = f(x)$
φ est appellée restriction de f à A est est notée $\varphi = f_{/A}$

Remarque 2 :

Deux fonctions peuvent avoir la même restriction sur un ensemble, sans pour cela être égales :

Soient, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f[(x,y)] = x^2 + y \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & g[(x,y)] = x + y^2 \end{array}\right.$$

Sur la diagonale principale $\Delta = \{(x,y) \text{ tels que } y = x\}$ nous avons $f_{/\Delta} = g_{/\Delta}$ alors que $f \neq g$

10.2 Fonction numérique d'une variable réelle

10.2.1 Exemples de telles fonctions

1. Un premier exemple sont les suites numériques ; ce sont des fonctions numériques définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$

   On peut aussi voir certaines suites comme des restrictions à $\mathbb{N}$ de fonctions numériques, définies sur $\mathbb{R}$

   Exemple : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$ est la restriction à $\mathbb{N}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. Nous avons donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = f_{/\mathbb{N}}$

   L'intérêt d'une telle vision est d'étudier des propriétés sur $\mathbb{R}$ et de les transposer à $\mathbb{N}$

2. La fonction :
$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{Id} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Id}(x) = x \end{array}\right.$$
   est appelée l'application identique de $\mathbb{R}$

3. Pour $k \in \mathbb{K}$, la fonction
$$\left\{\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) = k \end{array}\right.$$
   est appelée fonction constante

4. Pour $b \in \mathbb{K}$, la fonction translation est définie par :
$$\left\{\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) = x + b \end{array}\right.$$

5. Pour $a \in \mathbb{K}$, la fonction homothétie est définie par :
$$\left\{\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) = ax \end{array}\right.$$

6. La fonction symétrie est définie par :
$$\left\{\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = -x \end{array}\right.$$

7. Pour $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$, nous appelons application affine, une fonction numérique du type :
$$\left\{\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) = ax + b \end{array}\right.$$

- ▷ On peut remarquer que si $a = 1$ et $b = 0$, nous obtenons l'application identique
- ▷ On peut remarquer que si $a = 0$, nous obtenons une application translation
- ▷ On peut remarquer que si $b = 0$, nous obtenons une application homothétie
- ▷ On peut remarquer que si $a = -1$ et $b = 0$, nous obtenons l'application symétrie

D'autre part, l'application $f(x) = ax + b$ est un polynôme du premier degré

8. Plus généralement, les polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{R}$, permettent de définir une fonction numérique à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array} \right.$$

9. Soient $A \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathbb{R}[X]$ 2 polynômes, et on suppose $f = \dfrac{A}{B}$ irréductible, f est alors appelée <u>fonction rationnelle</u>. Le domaine de définition de la fonction associée est donné par :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } B(x) \neq 0\}$$

Exemple : Soit $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

Nous avons :

— $x^4 - 1 = \left(x^2 + 1\right)\left(x^2 - 1\right)$

— $x^3 - 2x^2 - x + 2 = \left(x^2 - 1\right)(x - 2)$

De telle sorte que $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$ et est définie pour tout $x \neq 2$; nous avons, en particulier $f(1) = -2$

Remarque 3 :

Pour pouvoir être utilisées dans des exemples ou exercices, nous supposons connues les fonctions circulaires cos, sin et tan, l'exponentielle et les logarithmes.

Exercice 1 :

Donner les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$
2. $g(x) = \ln\left(\dfrac{2 + x}{2 - x}\right)$

Exercice 2 :

Construire les graphes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = |x - 3| + |x + 1|$
2. $g(x) = \sqrt{x - [x]}$
3. $h(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$

où $[x]$ est mis pour la partie entière.

Exercice 3 :

On considère les 2 fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} +1 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant +1 \\ 0 & \text{Sinon} \end{array} \right. \qquad g(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \dfrac{(x+1)^2}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant +1 \\ 0 & \text{Sinon} \end{array} \right.$$

Dessiner succinctement les graphes des fonctions ci-après à partir de celui des fonctions f et g

1. $f(x)$ et $g(x)$
2. $f(x+1)$ et $g(x-1)$
3. $f(2x)$ et $2g(x)$
4. $-f(x)$ et $g(-x)$
5. $xf(x)$ et $g(x)-1$
6. $\frac{x^2}{2}f(x+1)-g(x-1)$

10.2.2 Fonctions bornées dans $\mathbb{R}$

1. Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite majorée sur E si l'ensemble $f(E)$ est un ensemble majoré dans $\mathbb{R}$, c'est à dire, s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant A$
2. Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite minorée sur E si l'ensemble $f(E)$ est un ensemble minoré dans $\mathbb{R}$, c'est à dire, s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant B$
3. Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite bornée sur E si l'ensemble $f(E)$ est un ensemble à la fois majoré et minoré dans $\mathbb{R}$, c'est à dire, s'il existe $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in E$, $B \leqslant f(x) \leqslant A$

Remarque 4 :

1. Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est non majorée sur E si et seulement si, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) > A$.
   C'est très simplement la négation de la définition de fonction majorée sur E
2. De même, f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est non minorée sur E si et seulement si, pour tout $B \in \mathbb{R}$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) < B$.
   C'est toujours la négation de la définition de fonction minorée sur E
3. Si f est une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornée sur E, l'ensemble $f(E)$ admet une borne supérieure M et une borne inférieure m que nous notons :
   - $M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$
   - $m = \inf\limits_{x \in E} f(x)$
4. La borne supérieure M est caractérisée par les 2 propriétés suivantes :
   - Pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant M$
   - Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in E$ tel que $M - \varepsilon < f(x) \leqslant M$
5. De même, la borne inférieure m est caractérisée par les 2 propriétés suivantes :
   - Pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant m$
   - Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in E$ tel que $m \leqslant f(x) < m + \varepsilon$

Exercice 4 :

Démontrez que la fonction définie sur $]0;+1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas bornée sur $]0;+1]$

Exercice 5 :

Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre

1. Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornée sur E. Montrer que $\inf\limits_{x \in E} f(x) = -\sup\limits_{x \in E}(-f(x))$
2. Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornées sur E telle que pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$. Montrer que :
   $$\sup_{x \in E} f(x) \leqslant \sup_{x \in E} g(x) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in E} f(x) \leqslant \inf_{x \in E} g(x)$$
3. Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornée sur E et soit $A \subset E$. Montrer que :
   $$\sup_{x \in A} f(x) \leqslant \sup_{x \in E} f(x) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in A} f(x) \geqslant \inf_{x \in E} f(x)$$

4. Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornées sur E. Montrer que :
$$\sup_{x\in E}(f(x)+g(x)) \leqslant \sup_{x\in E} f(x) + \sup_{x\in E} g(x) \quad \text{et} \quad \sup_{x\in E} f(x) + \inf_{x\in E} g(x) \leqslant \sup_{x\in E}(f(x)+g(x))$$
5. Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornées sur E telle que pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$. Montrer que :
$$\sup_{x\in E}(f(x)g(x)) \leqslant \sup_{x\in E} f(x) \sup_{x\in E} g(x) \quad \text{et} \quad \sup_{x\in E} f(x) \inf_{x\in E} g(x) \leqslant \sup_{x\in E}(f(x)g(x))$$
6. Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornée sur E telle que pour tout $x \in E$, $f(x) > 0$. Montrer que :
$$\sup_{x\in E}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\inf\limits_{x\in E} f(x)}$$

10.2.3 Proposition

Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée sur E si et seulement si il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M$

Démonstration

1. Supposons f bornée sur E
   Alors, il existe $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in E$, $B \leqslant f(x) \leqslant A$. De cette inégalité, nous tirons $|f(x)| \leqslant \max\{|A|, |B|\}$
   En posant $M = \max\{|A|, |B|\}$, nous avons $M > 0$ et donc $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in E$
2. Réciproquement, supposons qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M$
   Alors, pour tout $x \in E$, $-M \leqslant f(x) \leqslant +M$, ce qui montre que f est bornée sur E

10.2.4 Définition de fonction bornée dans $\mathbb{C}$

Dans $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, il n'y a pas de relation d'ordre total compatible avec l'addition ou la multiplication ; nous ne pouvons donc pas parler de fonction majorée ou minorée. Nous avons, par contre la définition suivante :

Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite <u>bornée</u> sur E si l'ensemble $f(E)$ est un ensemble borné dans $\mathbb{C}$, c'est à dire, s'il existe $M > 0$ tels que, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M$

Remarque 5 :

Bien entendu, une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ n'est pas bornée sur E si pour tout $M > 0$, il existe $x \in E$ tel que $|f(x)| > M$

Exemple 1 :

Voici quelques exemples de fonctions bornées :
1. De manière très classique, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant +1$
2. De même, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < e^{-x^2} \leqslant +1$
3. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|e^{ix}\right| = 1$ et apparaît donc comme une fonction bornée.

10.2.5 Extremum local

Soit f une fonction numérique définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$
1. S'il existe $x_0 \in E$ et un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x_0 \in V$ alors $f(x) \leqslant f(x_0)$, on dit que la fonction f admet en x_0 <u>un maximum local</u>
2. De même, s'il existe $x_0 \in E$ et un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x_0 \in V$ alors $f(x) \geqslant f(x_0)$, on dit que la fonction f admet en x_0 <u>un minimum local</u>

10.2.6 Variations d'une fonction

Soit f une fonction numérique définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$

1. La fonction f est dite croissante sur E si, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, l'implication suivante est vraie :
$$x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$
2. La fonction f est dite décroissante sur E si, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, l'implication suivante est vraie :
$$x < y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$$
3. La fonction f est dite strictement croissante sur E si, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, l'implication suivante est vraie :
$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$
4. La fonction f est dite strictement décroissante sur E si, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, l'implication suivante est vraie :
$$x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$
5. La fonction f est dite monotone sur E si elle est croissante ou décroissante sur E
6. La fonction f est dite strictement monotone sur E si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur E

Remarque 6 :

1. Il est possible aussi d'utiliser le taux de variation $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Ainsi :
   - ▷ La fonction f est dite croissante sur E si, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, alors, $x < y \Longrightarrow \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \geqslant 0$
   - ▷ La fonction f est dite décroissante sur E si, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, alors, $x < y \Longrightarrow \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant 0$
2. Nous avons, bien ententendu *(et c'est facile à démontrer)*[1] :
   - Si f et g sont 2 fonctions croissantes alors $f+g$ est une fonction croissante
   - Si f et g sont 2 fonctions décroissantes alors $f+g$ est une fonction décroissante
   - Si f est une fonction croissante et si $\alpha \geqslant 0$ alors $\alpha \times f$ est une fonction croissante
   - La fonction f est croissante si et seulement si la fonction $-f$ est décroissante
   - Si f et g sont 2 fonctions croissantes **et positives** alors $f \times g$ est une fonction croissante

     Attention !!

     Il est important de prendre en compte la positivité de f et g

     Exemple :

     Soient $f(x) = g(x) = x$; toutes deux sont croissantes sur l'intervalle $[-1;+1]$, mais $h(x) = f(x) \times g(x) = x^2$ n'est pas du tout monotone sur $[-1;+1]$
   - Si f est une fonction croissante qui ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est une fonction décroissante
3. Si f et g sont 2 fonctions monotones, sans autre précision, on ne peut rien conclure pour $f+g$

10.2.7 Composition des applications

Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{K}$. Soient aussi $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{K}$ tels que $f(E) \cap F \neq \emptyset$
Nous pouvons alors construire $h : E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $h(x) = g[h(x)] = g \circ f(x)$
Nous écrivons $h = g \circ f$

1. Le faire !!

Remarque 7 :

1. Lorsque nous avons $f(E) \subset F$, la question est beaucoup plus simple.
2. Dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, nous créons une loi de composition $(f, g) \longrightarrow f \circ g$
3. La composition des applications **est associative**
4. Pour $A \subset \mathbb{R}$, et $h = g \circ f$, nous avons $h^{-1}(A) = f^{-1}\left[g^{-1}(A)\right]$

   En effet :
$$\begin{aligned} f^{-1}\left[g^{-1}(A)\right] &= \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) \in g^{-1}(A)\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } g[f(x)] \in A\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } h(x) \in A\} \\ &= h^{-1}(A) \end{aligned}$$

Exemple 2 :

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = x + 1$. Alors :

- ▷ $g \circ f(x) = g[f(x)] = f(x) + 1 = \dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{x+1}{x}$
- ▷ $f \circ g(x) = f[g(x)] = \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{x+1}$

Nous remarquons que nous avons $g \circ f \neq f \circ g$. La composition des applications n'est pas commutative.

Exercice 6 :

On donne les fonctions f et g définies par :

- ▷ $f(x) = \sin x$
- ▷ $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

Déterminer les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$

Exercice 7 :

Montrer que l'ensemble des 6 fonctions :

1. $f_1(x) = x$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$
3. $f_3(x) = 1 - x$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{1-x}$
5. $f_5(x) = \dfrac{x-1}{x}$
6. $f_6(x) = \dfrac{x}{x-1}$

Est un groupe pour la loi de composition des applications. Etablir la table du groupe
Existe-t-il des sous groupes ?

Exercice 8 :

1. Pour tout $x \neq \dfrac{1}{2}$ on définit $g(x) = \dfrac{x-1}{2x-1}$. Démontrer que $g \circ g(x) = x$
2. Démontrer qu'il n'existe aucune application $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}\right)\left(f(x) \times f \circ g(x) = x^2 + x + 1\right)$$

Exercice 9 :

1. On définit $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ par , pour $x \neq -1$, $\varphi(x) = \dfrac{-1}{x+1}$. Nous appelons $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ et $\varphi^3 = \varphi^2 \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^2 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$.
   Démontrer que, pour tout $x \neq -1$, $\varphi^3(x) = x$
2. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que
$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\})\,(f(x) + f \circ \varphi(x) = 3x + 2)$$

10.2.8 Fonctions paires

1. Soit $\alpha > 0$ et $f :]-\alpha\,;\,+\alpha[\longrightarrow \mathbb{R}$. f est dite paire si : $(\forall x \in]-\alpha\,;\,+\alpha[)\,(f(x) = f(-x))$
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. f est dite symétrique par rapport à la droite $x = x_0$ si : $(\forall h \in \mathbb{R})\,(f(x_0 + h) = f(x_0 - h))$

Remarque 8 :

Une fonction paire est une fonction qui admet donc l'axe des ordonnées comme axe de symétrie

Exemple 3 :

1. La fonction $\cos x$ est une fonction paire ; voir la figure 10.1

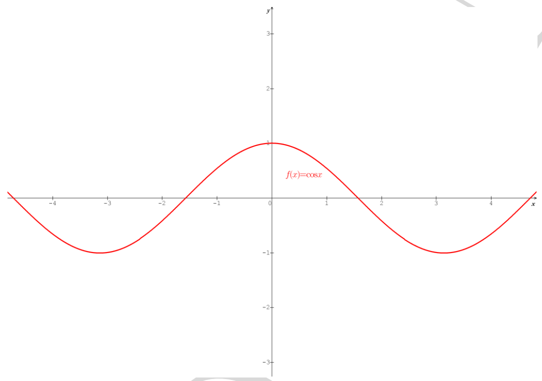

FIGURE 10.1 – Le graphe de $f(x) = \cos x$, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

2. Autres exemples de fonctions paires : les fonctions $f(x) = x^2$ (courbe 10.2) et $f(x) = x^4 - 2$ (courbe 10.3)
3. Les paraboles $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont toutes symétriques par raport à la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ (cf figure 10.3).
   En effet, en utilisant la forme canonique des lycées, nous avons : $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x - \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$; il suffit ensuite, pour le démontrer, d'utiliser la définition

10.2.9 Fonctions impaires

1. Soit $\alpha > 0$ et $f :]-\alpha\,;\,+\alpha[\longrightarrow \mathbb{R}$. f est dite impaire si : $(\forall x \in]-\alpha\,;\,+\alpha[)\,(-f(x) = f(-x))$
2. Soit $\Omega(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. f est dite symétrique par rapport au point Ω si : $(\forall h \in \mathbb{R})\,(y_0 - f(x_0 - h) = f(x_0 + h) - y_0)$

Remarque 9 :

Une fonction impaire est une fonction qui admet donc l'origine $O(0,0)$ comme centre de symétrie

Exemple 4 :

1. La fonction $\sin x$ est une fonction impaire ; voir la figure 10.5
2. Autres exemples de fonctions impaires : les fonctions $f(x) = x^3$ (courbe 10.6)
3. La fonction $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 28$ est symétrique par rapport au point $S(3; -1)$ (cf figure 10.7)

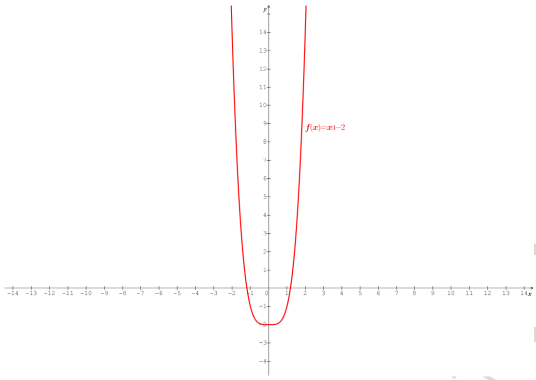

FIGURE 10.2 – Le graphe de $f(x) = x^2$

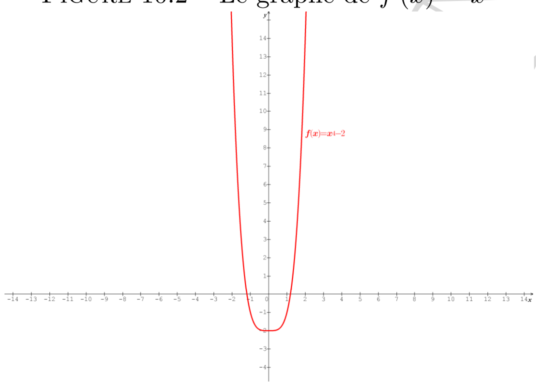

FIGURE 10.3 – Le graphe de $f(x) = x^4 - 2$

Exercice 10 :

Démontrez que le graphe de la fonction $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 28$ est symétrique par rapport au point $S(3; -1)$

Remarque 10 :

1. Le contraire d'une fonction paire n'est pas une fonction impaire
2. **Question :**[2] *L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ?*
   Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas paire si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq f(-x)$

   Bien entendu l'affirmation fausse.
   Reprenons la définition de fonction paire :
   f est dite paire sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons $f(x) = f(-x)$
   Donc f n'est pas paire sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

   $$\text{NON}\,[\text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ nous avons } f(x) = f(-x)] \iff \text{ il existe } x \in \mathbb{R} \text{ tel que} f(x) \neq f(-x)$$

   L'affirmation est donc fausse ; c'est une question de négation du quantificateur universel

10.2.10 Fonctions périodiques

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$, une fonction numérique d'une variable réelle. f est dite périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$

2. Question posée au CAPES de Math 2023

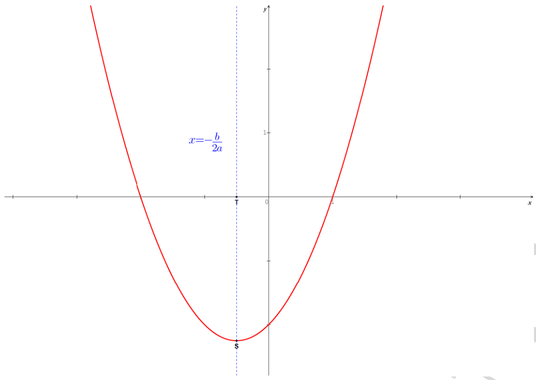

FIGURE 10.4 – Le graphe de $f(x) = ax^2 + bx + c$, symétrique par rapport à la droite $x = -\dfrac{b}{2a}$

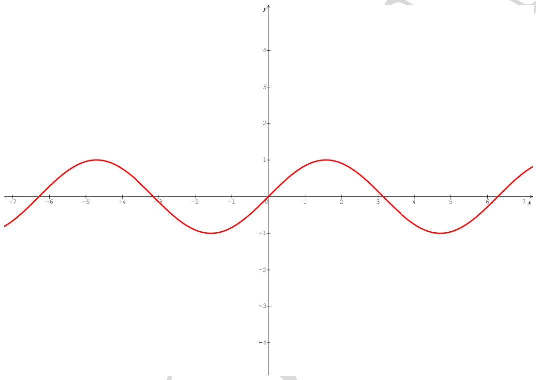

FIGURE 10.5 – Le graphe de $f(x) = \sin x$, symétrique par rapport à l'origine

Remarque 11 :

1. Si la fonction f admet une période T, alors, elle en admet une infinité.

   En effet, nous avons $f(x+2T) = f(x+T+T) = f(x+T) = f(x)$, et donc $2T$ est une période. Plus généralement, et en utilisant le raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f(x+nT) = f(x)$

   f admet donc une infinité dénombrale de périodes.
2. Si la fonction f admet comme période T, alors, elle en admet aussi $-T$ comme période.

   En effet, $f(x-T) = f(x-T+T) = f(x)$

   Et donc, plus généralement, et toujours par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x-nT) = f(x)$
3. On peut donc conclure que si T est une période de f, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(x+nT) = f(x)$
4. Si T' est une autre période de f, alors $T+T'$ et $T-T'$ sont des périodes de f

   En effet :
   - ▷ $f(x+T+T') = f(x+T) = f(x)$
   - ▷ $f(x+T-T') = f(x+T) = f(x)$

   De telle sorte que l'ensemble des périodes d'une fonction f forme un groupe additif
5. On appelle période le plus petit nombre positif T tel que $f(x+T) = f(x)$

Exemple 5 :

1. De manière très classique, les fonctions $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$ sont périodique et de période 2π

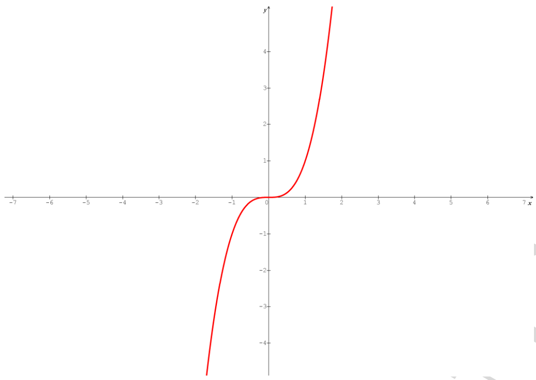

FIGURE 10.6 – Le graphe de $f(x) = x^3$

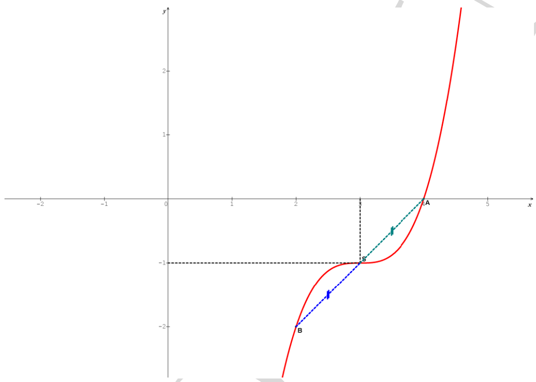

FIGURE 10.7 – Le graphe de $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 28$, symétrique par rapport au point $S(3; -1)$

2. Un autre exemple de fonction périodique est :

$$\begin{cases} \exp : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad x & \longmapsto & \exp(x) = e^{ix} \end{cases}$$

   exp est périodique et de période 2π
3. La fonction $f(x) = x - [x]$ est périodique et de période 1 (cf figure 10.8)

   En effet
   Si $x \in [n\,;\, n+1[$, alors $f(x) = x - n$; $x + 1 \in [n+1\,;\, n+2[$ et $f(x+1) = x + 1 - (n+1) = x - n = f(x)$

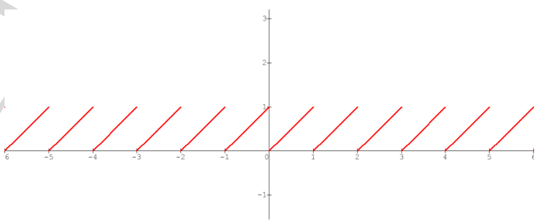

FIGURE 10.8 – Le graphe de $f(x) = x - [x]$, périodique et de période 1

4. La fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x + \cos\left(x\sqrt{2}\right)$ **n'est pas périodique**

   En effet

Supposons le contraire et supposons que g soit périodique et de période T, nous avons donc $g(x+T) = g(x)$, c'est à dire :

$$\cos x + \cos\left(x\sqrt{2}\right) = \cos(x+T) + \cos\left((x+T)\sqrt{2}\right)$$

Cette égalité est en particulier vraie pour $x = 0$, et donc $2 = \cos T + \cos\left(T\sqrt{2}\right)$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\cos x \leqslant 1$, nous avons $\cos T \leqslant 1$ et $\cos\left(T\sqrt{2}\right) \leqslant 1$.

La seule possibilité pour que $2 = \cos T + \cos\left(T\sqrt{2}\right)$ est donnée par $\cos T = 1$ et $\cos\left(T\sqrt{2}\right) = 1$, c'est à dire :

$$T = 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}^* \text{ et } T\sqrt{2} = 2l\pi \text{ avec } l \in \mathbb{Z}^*$$

Alors en remplaçant T, nous obtenons $2k\pi\sqrt{2} = 2l\pi$, c'est à dire $\sqrt{2} = \dfrac{l}{k}$ et nous aurions $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est impossible.

Donc, g n'est pas périodique

Exercice 11 :

Cet exercice est le prolongement de l'exemple ci-dessus

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

1. La fonction $F(x) = \cos x + \cos \alpha x$ est-elle périodique ?
2. La fonction $G(x) = \sin x + \sin \alpha x$ est-elle périodique ?

Exercice 12 :

Quelle est la période de la fonction, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\mathrm{EXP}(x) = \rho e^{2i\pi x}$ où $\rho > 0$ *(facile)*

10.2.11 Somme de 2 fonctions

Soit $E \subset \mathbb{R}$. On appelle $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^E$, l'ensemble des fonctions numériques définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On définit, dans $\mathbb{K}^E$ une addition par :

$$\begin{cases} \mathbb{K}^E \times \mathbb{K}^E & \longrightarrow & \mathbb{K}^E \\ (f, g) & \longmapsto & f + g \end{cases}$$

Où $f + g$ est définie, pour tout $x \in E$ par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Exemple 6 :

Voici un exemple très simple :

- Soit $f : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = \ln x$
- Soit $g : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$ par $g(x) = x^2$

Alors, $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \ln x + x^2$

Remarque 12 :

L'ensemble $\mathcal{F}(E, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^E$ muni de l'opération d'addition des fonctions est un groupe abélien

- Le neutre est la fonction nulle $\mathcal{O}$ qui, à tout $x \in E$ fait correspondre $\mathcal{O}(x) = 0$
- Le symétrique de la fonction $f \in \mathbb{K}^E$ est la fonction notée $-f$ qui, à tout $x \in E$ fait correspondre $(-f)(x) = -f(x)$

La structure de groupe de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^E$ est intrinsèquement liée à celle de $\mathbb{K}$

10.2.12 Multiplication d'une fonction par un scalaire

Soit $E \subset \mathbb{R}$. On définit, dans $\mathbb{K}^E$ une multiplication par un scalaire par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^E & \longrightarrow & \mathbb{K}^E \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \lambda f \end{array} \right.$$

Où λf est définie, pour tout $x \in E$ par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Exemple 7 :

Si nous considérons la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x) = e^{2i\pi x}$, alors, la fonction $(1+i) f$ est définie par :

$$((1+i) f)(x) = (1+i) f(x) = (1+i) e^{2i\pi x}$$

Remarque 13 :

1. **Voici une remarque importante :**
   $\mathcal{F}(E, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^E$ muni de l'addition des fonctions définies en 10.2.11 et de la multiplication par un scalaire définie en 10.2.12 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *(ou sur un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0)*, à valeurs dans $\mathbb{K}$ peut être décomposée en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
   En effet ; posons $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$. On montre facilement que g est paire et que h est impaire et que $f = g + h$
3. La composition des applications est distributive à droite par rapport à l'addition, c'est à dire :

$$\left(\forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{R}}\right) \left(\forall g \in \mathbb{K}^{\mathbb{R}}\right) \left(\forall h \in \mathbb{K}^{\mathbb{R}}\right) ((f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h)$$

   En effet :
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} (f+g) \circ h(x) = & & (f+g)[h(x)] \\ & = & f[h(x)] + g[h(x)] \ \text{(par définition)} \\ & = & f \circ h(x) + g \circ h(x) \end{array}$$

4. Nous n'avons, par contre, pas la distributivité à gauche.
   En effet, soient $f(x) = 2x$, $g(x) = x$ et $h(x) = x^2$
   ▷ $h \circ (f+g)(x) = h[(f+g)(x)] = h[f(x) + g(x)] = h[3x] = 9x^2$
   ▷ $[h \circ f](x) + [h \circ g](x) = h[f(x)] + h[g(x)] = 4x^2 + x^2 = 5x^2$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $[h \circ f](x) + [h \circ g](x) \neq h \circ (f+g)(x)$, c'est à dire $h \circ (f+g) \neq h \circ f + h \circ g$
   La loi $\circ$ n'est donc pas distributive à gauche par rapport à l'addition

Exercice 13 :

Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0
On appelle $\mathrm{P}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions paires définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$. De même, nous définissons $\mathrm{I}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions impaires définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrez que $\mathrm{P}(E, \mathbb{K})$ et $\mathrm{I}(E, \mathbb{K})$ sont des sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^E$
2. Démontrez que $\mathrm{P}(E, \mathbb{K})$ et $\mathrm{I}(E, \mathbb{K})$ sont des sous-espace vectoriel supplémentaires de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^E$

10.2.13 Multiplication de 2 fonctions

Soit $E \subset \mathbb{R}$. On appelle toujours $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^E$, l'ensemble des fonctions numériques définies sur E et à valeurs dans K. On définit, dans $\mathbb{K}^E$ une multiplication par :

$$\begin{cases} \mathbb{K}^E \times \mathbb{K}^E & \longrightarrow & \mathbb{K}^E \\ (f, g) & \longmapsto & f \times g \end{cases}$$

Où $f \times g$ est définie, pour tout $x \in E$ par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

Remarque 14 :

1. Il existe un élément neutre pour la multiplication ; c'est la fonction constante qui à tout $x \in E$ fait correspondre le nombre 1 :

$$\begin{cases} \mathrm{Un} : E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Un}(x) = 1 \end{cases}$$

2. Muni de la multiplication définie en 10.2.13 et de l'addition définie en 10.2.11, $\mathbb{K}^E$ est un anneau commutatif et unitaire

10.2.14 Inverse d'une fonction

Soit $E \subset \mathbb{R}$. Pour $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$, on appelle $E^* = \{x \in E \text{ tels que } f(x) \neq 0\}$
On définit, dans $\mathbb{K}^{E^*}$ l'inverse de f par :

$$\begin{cases} \mathbb{K}^{E^*} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{E^*} \\ f & \longmapsto & \dfrac{1}{f} \end{cases}$$

Où $\dfrac{1}{f}$ est définie, pour tout $x \in E^*$ par $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

Remarque 15 :

Il est clair que nous pouvons définir, sur E^* le quotient de 2 fonctions : $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = g(x) \times \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{g(x)}{f(x)}$

Exercice 14 :

On considère 2 fonctions f et g toutes deux définies sur $\mathbb{R}^*$:

- ▷ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
- ▷ $g(x) = x + 1$

Calculer $f \circ g(x)$ et $(f \times g)(x)$

10.2.15 Valeur absolue d'une fonction

Soit $E \subset \mathbb{R}$. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$. On définit, dans $\mathbb{K}^E$ la valeur de f par :

$$\begin{cases} \mathbb{K}^E & \longrightarrow & \mathbb{K}^E \\ f & \longmapsto & |f| \end{cases}$$

Où $|f|$ est définie, pour tout $x \in E$ par $(|f|)(x) = |f(x)|$

Remarque 16 :

1. La notation $|f|$ désigne la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ et le module complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
2. De cette définition, nous tirons :
   - $|f| = \mathcal{O} \Longleftrightarrow f = \mathcal{O}$
   - Pour tout $f \in \mathbb{K}^E$ et tout $g \in \mathbb{K}^E$, $|fg| = |f|\,|g|$
   - **Inégalité triangulaire :** pour tout $f \in \mathbb{K}^E$ et tout $g \in \mathbb{K}^E$:

$$|f+g| \leqslant |f| + |g| \quad \text{et} \quad ||f| - |g|| \leqslant |f-g|$$

10.2.16 Relation d'ordre

Soit $E \subset \mathbb{R}$. On définit, dans $\mathbb{R}^E$ <u>une relation d'ordre</u> par :

$$(f \leqslant g) \Longleftrightarrow ((\forall x \in E)\,(f(x) \leqslant g(x)))$$

Remarque 17 :

1. Il faut remarquer que, dans cette définition, nous nous restreignons à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
2. Il n'est pas difficile de démontrer que c'est une relation d'ordre dans $\mathbb{R}^E$
3. Ce n'est pas une relation d'ordre total : il y a des fonctions qui ne sont pas comparables ; prenons les fonctions $f(x) = -x^2 + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$, alors nous avons $f(-2) = -3$ et $g(-2) = 3$ et donc $f(-2) \leqslant g(-2)$ et nous avons $f(0) = +1$ et $g(0) = -1$ et $f(0) \geqslant g(0)$. *(Pour cette relation d'ordre, notez l'importance du quantificateur)*

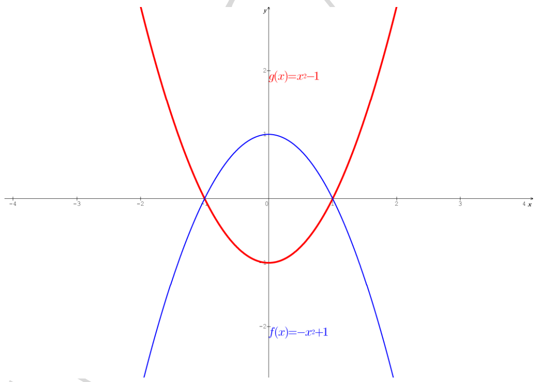

FIGURE 10.9 – Les graphes de $f(x) = -x^2 + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$ montre que ces deux fonctions ne sont pas comparables sur $\mathbb{R}$

10.2.17 Définition

Dans cette définition, nous ne considérons que les fonctions numériques <u>à valeurs réelles</u>

1. Soit $E \subset \mathbb{R}$. Dans $\mathcal{F}(E, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^E$, on définit, <u>l'enveloppe supérieure de 2 fonctions f et g</u> par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^E & \longrightarrow & \mathbb{R}^E \\ (f, g) & \longmapsto & h = \sup(f, g) \end{array} \right.$$

   Où h est définie, pour tout $x \in E$ par $h(x) = \sup(f(x), g(x))$
2. Soit $E \subset \mathbb{R}$. Dans $\mathcal{F}(E, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^E$, on définit, <u>l'enveloppe inférieure de 2 fonctions f et g</u> par : :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^E & \longrightarrow & \mathbb{R}^E \\ (f, g) & \longmapsto & i = \inf(f, g) \end{array} \right.$$

   Où i est définie, pour tout $x \in E$ par $i(x) = \inf(f(x), g(x))$

Exemple 8 :

Prenons les fonctions $f(x) = -x^2 + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$

1. L'enveloppe supérieure de f et g est donnée par :

$$\sup(f(x), g(x)) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x \leqslant -1 \\ -x^2 + 1 \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant +1 \\ x^2 - 1 \text{ si } x \geqslant +1 \end{cases}$$

2. L'enveloppe inférieure de f et g est donnée par :

$$\inf(f(x), g(x)) = \begin{cases} -x^2 + 1 \text{ si } x \leqslant -1 \\ x^2 - 1 \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant +1 \\ -x^2 + 1 \text{ si } x \geqslant +1 \end{cases}$$

Remarque 18 :

1. Si nous considérons une famille finie de n fonctions numériques réelles à valeur dans $\mathbb{R}$ $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$, l'enveloppe supérieure des $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ est donnée par $h = \sup(f_1, f_2, \cdots, f_n)$, c'est à dire telle que, pour tout $x \in E$, $h(x) = \sup(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$
2. De même, l'enveloppe inférieure des $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ est donnée par $i = \inf(f_1, f_2, \cdots, f_n)$, c'est à dire telle que, pour tout $x \in E$, $i(x) = \inf(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$
3. Dans la suite, nous poserons souvent, pour $f \in \mathbb{R}^E$, $f^+ = \sup(f, \mathcal{O})$ et $f^- = \sup(-f, \mathcal{O})$

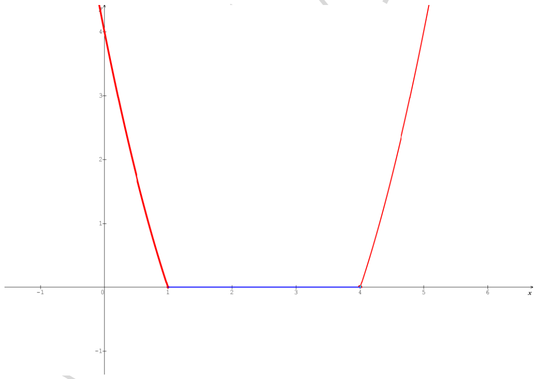

FIGURE 10.10 – En considérant $f(x) = x^2 - 5x + 4$ vous avez, ici le graphe de f^+

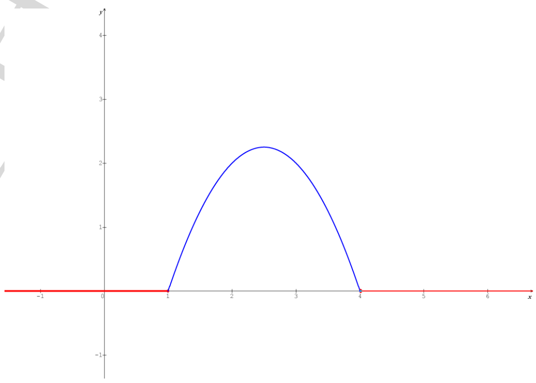

FIGURE 10.11 – En considérant $f(x) = x^2 - 5x + 4$ vous avez, ici le graphe de f^-

4. Nous avons donc, pour tout $f \in \mathbb{R}^E$, $f = f^+ - f^-$

Exercice 15 :

Soient $f \in \mathbb{R}^E$ et $g \in \mathbb{R}^E$

1. Montrez que $\sup(f, g) = f + (g - f)^+ = g + (f - g)^+ = \dfrac{(f+g) + |f-g|}{2}$
2. Montrez que $\inf(f, g) = \dfrac{(f+g) - |f-g|}{2}$

10.2.18 Fonctions en escalier

1. Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On appelle subdivision de $[a; b]$ toute suite finie $(x_i)_{i=0,\cdots,n}$ croissante telle que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$$

2. Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. on dit qu'une fonction $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est en escalier sur $[a; b]$ s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts de la subdivision de $[a; b]$, c'est à dire :

$$(\forall i = 0, \cdots, n)\,(\forall x \in]x_i; x_{i+1}[)\,(f(x) = \lambda_i) \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{K}$$

Exemple 9 :

Un exemple simple de fonction en escalier est la fonction « **Partie entière** » $f(x) = [x]$

Remarque 19 :

1. Plutôt que de parler de fonctions en escalier, la littérature utilise aussi la notion de **fonction étagée**
2. Une fonction en escalier ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs, mais la réciproque est fausse, c'est à dire qu'une fonction qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs ne peut pas être une fonction en escalier.

   Par exemple, la fonction $f = 1_{\mathbb{Q}}$ [3] qui est la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ qui est telle que $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon, n'est pas une fonction en escalier sur $[0; +1]$; l'ensemble des rationnels étant dense dans $[0; +1]$, il n'existe pas d'intervalle inclus dans $[0; +1]$ sur lequel la fonction f est constante.
3. Si $\mathcal{E}([a; b])$ est l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a; b]$, si on munit cet ensemble de l'addition des fonctions et de la multiplication des fonctions par un scalaire, alors $\mathcal{E}([a; b])$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
4. On démontre aussi très facilement que si $f \in \mathcal{E}([a; b])$ et $g \in \mathcal{E}([a; b])$ alors $f \times g \in \mathcal{E}([a; b])$ et que $|f| \in \mathcal{E}([a; b])$.
   En fait, $\mathcal{E}([a; b])$ est un anneau

10.2.19 Exercices complémentaires

Exercice 16 :

Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle définies sur $[0 ; +1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$
Démontrez la proposition suivante :

$$(\exists (x, y) \in [0 ; +1] \times [0 ; +1]) \left(|xy - f(x) - g(y)| \geqslant \frac{1}{4}\right)$$

3. Cette fonction est aussi appelée **Fonction de Dirichlet**

Exercice 17 :

Equations fonctionnelles
Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ vérifiant les équations suivantes :

1. $(\forall x\in\mathbb{R})\,(\forall y\in\mathbb{R})\,(|f(x)-f(y)|=|x-y|)$
2. $(\forall x\in\mathbb{R})\,(\forall y\in\mathbb{R})\,(|f(x)+f(y)|=|x+y|)$
3. $(\forall x\in\mathbb{R})\,(\forall y\in\mathbb{R})\,(f(x)\,f(y)-f(xy)=x+y)$
4. $(\forall x\in\mathbb{R})\,(\forall y\in\mathbb{R})\,(f(x+y)-f(x-y)=4xy)$

Exercice 18 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que, pour tout $\lambda\in[0\,;+1]$ et tout $x\in I$ et tout $y\in I$,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)\,y)=\lambda f(x)+(1-\lambda)\,f(y)$$

Démontrer qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$ tels que, pour tout $x\in I$, $f(x)=\alpha x+\beta$

10.3 Limite d'une fonction

10.3.1 Fonction définie au voisinage d'un point

Soient $x_0\in\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}$ et $f:E\longrightarrow\mathbb{K}$ une fonction numérique à valeurs dans $\mathbb{K}$
On dit que f est définie au voisinage de x_0 s'il existe un intervalle ouvert I, contenant x_0 tel que $I\subset E$

Remarque 20 :

1. E est le domaine de définition de f
2. On peut remplacer l'expression « s'il existe un intervalle ouvert I, contenant x_0 » par **s'il existe un intervalle ouvert** I **de centre** x_0. Ou encore par **:s'il existe** $\lambda>0$ **tel que** $]x_0-\lambda\,;x_0+\lambda[\subset E$. Ces définitions sont équivalentes

Exemple 10 :

La fonction $f(x)=\sqrt{x-1}$ est définie au voisinage de tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $x>+1$. Si elle est définie en $x=+1$, et nous avons même $f(+1)=0$, elle n'est, par contre, par définie au voisinage de $x=1$: il n'esxiste pas de $\lambda>0$ tel que l'intervalle $]1-\lambda\,;1+\lambda[$ soit inclus dans le domaine de définition, lequel est $[+1\,;+\infty[$

Remarque 21 :

Nous aurons à considérer, dans la suite, des fonctions dont l'ensemble de définition contient, **un intervalle** I **de centre** x_0**, mais pas** x_0, et nous serons donc amenés à étudier la fonction sur un tel intervalle privé de x_0

Exemple : la fonction $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

10.3.2 Définition

Soit $f:E\longrightarrow\mathbb{K}$ définie au voisinage de x_0, sauf, peut-être en x_0
On dit que la fonction f est bornée au voisinage de x_0 s'il existe un intervalle I, de centre x_0 et un nombre $A>0$ tel que :

$$(\forall x\in I)\,(|f(x)|\leqslant A)$$

Exemple 11 :

Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; pour $x \in]-\pi\,;\,+\pi[$, nous avons :$|\sin x| \leqslant |x|$ et donc $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1$. La fonction f est donc bornée sur $]-\pi\,;\,+\pi[$.

Remarque 22 :

f n'est pas bornée en x_0 si :

$$(\forall A > 0)\,(\forall \alpha > 0)\,(\exists x \in]x_0 - \alpha\,;\,x_0 + \alpha[)\,(|f(x)| > A)$$

Exemple 12 :

Par exemple, la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'est pas bornée au voisinage de 0.

En effet,
Pour $n \in \mathbb{N}$, nous remarquons que

$$f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right) = \left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}\right)\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}\right) = \left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = \frac{\pi}{2}+2n\pi$$

Soit $A > 0$ et $\alpha > 0$
- ▷ Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$;, alors $0 < \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} < \alpha$
- ▷ Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2}+2n\pi = +\infty$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$;, alors $\dfrac{\pi}{2}+2n\pi > A$

En posant $N = \max\{N_1, N_2\}$, si $n > N$, alors $0 < \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} < \alpha$ et $\dfrac{\pi}{2}+2n\pi > A$.

On peut donc écrire qu'il existe $x_0 \in]-\alpha\,;\,+\alpha[$ tel que $|f(x)| > A$, et donc la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'est pas bornée au voisinage de 0

10.3.3 Définition de la limite d'une fonction

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est définie en x_0, sauf peut-être en x_0.
On dit que f admet une limite $l \in \mathbb{K}$ finie quand x tend vers x_0 si, pour tout intervalle ouvert J de centre l, il existe un intervalle pointé I de centre x_0 tel que $f(I) \subset J$
Autrement dit,

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon > 0)\,/\,(0 < |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)}$$

On écrit alors

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) = l}$$

Exemple 13 :

Lorsqu'on écrit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = +1$, cela signifie que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ admet au point 0, le nombre $+1$ comme limite.

Remarque 23 :

1. La négation de la définition 10.3.3 est donnée par :

$$(\forall l \in \mathbb{K})\,(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \eta > 0)\,(0 < |x - x_0| < \eta \text{ et } |f(x) - l| > \varepsilon)$$

2. Dans la définition 10.3.3, nous n'avons pas supposé que $x_0 \in E$, mais, si $x_0 \in E$, alors $f(x_0)$ est bien défini, mais nous pouvons avoir $f(x_0) \neq l$
3. Nous avons, bien entendu, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l \iff \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} f(x_0 + h) = l$; la démonstration en est très simple.

10.3.4 Limite d'une fonction numérique à valeurs complexes

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous écrivons $f = \mathrm{Reel}(f) + i\mathrm{Im}(f)$, où $\mathrm{Reel}(f)$ est la partie réelle de f et $\mathrm{Im}(f)$ est la partie imaginaire de f.
On suppose que f est définie en x_0, sauf peut-être en x_0
f admet, en x_0, une limite $l = l_{reel} + il_{imaginaire}$ si et seulement si
$\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{Reel}(f)(x) = l_{reel}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{Im}(f)(x) = l_{imaginaire}$

Démonstration

La démonstration est simple, classique et basée sur l'inégalité triangulaire

Exercice 19 :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est définie en x_0, sauf peut-être en x_0 et que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$

Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire, et en particulier celle vraie pour tout $x \in \mathbb{K}$ et tout $y \in \mathbb{K}$:

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

10.3.5 Proposition

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est définie en x_0, sauf peut-être en x_0 et que f admette, en x_0, une limite l finie
Alors, f est bornée au voisinage de x_0

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l$, il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < \eta$ alors $|f(x) - l| < \varepsilon$, et donc si $x \in]x_0 - \eta\,; x_0 + \eta[$, alors $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.
Ce qui montre que f est bornée au voisinage de x_0

10.3.6 Proposition

1. Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est définie en x_0, sauf peut-être en x_0 et que f admette, en x_0, une limite l finie
Alors, cette limite est unique
2. Soit f et g 2 fonctions numériques d'une variable réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f et g sont définie en x_0, sauf peut-être en x_0 et que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_f$ et que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_g$
Alors
   (a) La limite de la somme est la somme des limites, c'est à dire : $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = l_f + l_g$
   (b) La limite du produit est le produit des limites, c'est à dire : $\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x) = l_f \times l_g$
   (c) Si $l_g \neq 0$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{l_f}{l_g}$

Démonstration

LES DÉMONSTRATIONS SONT TOUTES FAITES DANS LE TRAVAIL L_0

10.3.7 Limites et relation d'ordre

1. Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique à valeurs réelles telle que $(\forall x \in E)\,(f(x) \geqslant 0)$
   On suppose que, pour $x_0 \in I$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l$
   Alors, $l \geqslant 0$
2. Soient $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques à valeurs réelles et telles que $(\forall x \in E)\,(f(x) \leqslant g(x))$
   On suppose que, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = l_2$
   Alors, $l_1 \leqslant l_2$

Démonstration

Remarquez que, pour pouvoir parler d'ordre, les fonctions sont à valeurs réelles.
LES DÉMONSTRATIONS SONT TOUTES FAITES DANS LE TRAVAIL L_0

10.3.8 Théorème des limites par encadrements

Soient f, g et h trois fonctions numériques définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que

$$(\forall x \in E)\,(f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x))$$

On suppose que, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} h(x) = l$

Alors, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = l$

Démonstration

Remarquez que, pour pouvoir parler d'ordre, les fonctions sont à valeurs réelles.
LES DÉMONSTRATIONS SONT TOUTES FAITES DANS LE TRAVAIL L_0

10.3.9 Limite infinie en $x_0 \in \mathbb{R}$

Dans ce paragraphe, nous distinguons 2 situations : les fonctions numériques à valeurs réelles $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et les fonctions numériques à valeurs complexes, c'est à dire les fonctions $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$. En effet, $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre total alors que ce n'est pas le cas de $\mathbb{C}$

1. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique à valeurs réelles.
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f n'est pas forcément définie en x_0
   (a) On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0, et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si et seulement si :
   $$(\forall A > 0)\,(\exists \eta_A > 0)\,((0 < |x - x_0| < \eta_A) \Longrightarrow (f(x) > A))$$
   (b) On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers x_0, et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si et seulement si :
   $$(\forall A > 0)\,(\exists \eta_A > 0)\,((0 < |x - x_0| < \eta_A) \Longrightarrow (f(x) < -A))$$
2. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction numérique à valeurs complexes.
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f n'est pas forcément définie en x_0
   On dit que f tend vers ∞ lorsque x tend vers x_0, et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si et seulement si :
   $$(\forall A > 0)\,(\exists \eta_A > 0)\,((0 < |x - x_0| < \eta_A) \Longrightarrow (|f(x)| > A))$$

Exemple 14 :

Par exemple, nous avons $\lim\limits_{x \to +1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

Soit $A > 0$.
Alors, pour que $\dfrac{1}{(x-1)^2} > A$, nous devons avoir $(x-1)^2 < \dfrac{1}{A}$, c'est à dire $|x-1| < \dfrac{1}{\sqrt{A}}$.
Ainsi, pour tout $A > 0$, il existe $\eta_A = \dfrac{1}{\sqrt{A}} > 0$ tel que si $0 < |x-1| < \eta_A$ alors $\dfrac{1}{(x-1)^2} > A$
Et donc, $\lim\limits_{x \to +1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

Remarque 24 :

1. Dans cet item, nous ne nous intéressons qu'aux fonctions numériques à valeurs réelles $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$
   (a) On déduit de la définition 10.3.9 que si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x_0 tel que, pour tout $x \in \mathcal{U}$, alors $f(x) > 0$
   (b) De la même manière, on déduit de la même définition 10.3.9 que si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ alors, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que, pour tout $x \in \mathcal{V}$, alors $f(x) < 0$
   (c) Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
   En effet, soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors pour $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$, il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < \eta_A$, alors $f(x) > A$, c'est à dire $f(x) > \dfrac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow 0 < \dfrac{1}{f(x)} < \varepsilon$.
   Nous obtenons en fait 2 choses :
   - ▷ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
   - ▷ Et, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0, tel que si $x \in \mathcal{V}$, alors $\dfrac{1}{f(x)} > 0$

   (d) De même, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, et il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0, tel que si $x \in \mathcal{V}$, alors $\dfrac{1}{f(x)} < 0$
   (e) i. Il est facile de démontrer que si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ et que s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x_0 tel que, pour tout $x \in \mathcal{U}$, alors $f(x) < 0$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

ii. La question est identique si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ et que s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x_0 tel que, pour tout $x \in \mathcal{U}$, alors $f(x) > 0$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

2. Supposons maintenant que f soit à valeurs complexes, c'est à dire $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$

   (a) On peut aussi tout à fait démontrer que si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$. *(Le fait que f soit à valeurs complexes ne rend pas la démonstration plus difficile)*

   (b) De même, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

10.3.10 Limite à droite, limite à gauche

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique.

1. Fonction définie à droite, fonction définie à gauche

   (a) La fonction f est dite définie à droite de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]x_0\,;\, x_0 + \alpha[\subset E$

   (b) La fonction f est dite définie à gauche de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que l'intervalle ouvert $]x_0 - \alpha\,;\, x_0[\subset E$

2. Limite à droite, limite à gauche

   (a) La fonction f, définie à droite de x_0 admet pour limite l_d, à droite de x_0, et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d$ si et seulement si :

   $$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon > 0) \text{ tel que } (x_0 < x < x_0 + \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l_d| < \varepsilon)$$

   (b) La fonction f, définie à gauche de x_0 admet pour limite l_g, à gauche de x_0, et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_g$ si et seulement si :

   $$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon > 0) \text{ tel que } (x_0 - \eta_\varepsilon < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l_g| < \varepsilon)$$

Exemple 15 :

1. Comme premier exemple, très simple : la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ est définie à droite de $+1$

2. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ admet une limite à droite de 0 et une limite à gauche de 0 :

   ▷ Pour $x > 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} - 1 = +\infty$, et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = 0$, c'est à dire : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$

   ▷ Pour $x < 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} - 1 = -1$, et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = -1$, c'est à dire : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -1$

   Cette fonction f admet donc 2 limites différentes à gauche et à droite de 0. Voir le graphe 10.12

10.3.11 Proposition

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique définie sur un intervalle E et $x_0 \in \mathbb{R}$
On suppose que f n'est pas forcément définie en x_0
f admet une limite en x_0, si et seulement si, elle admet une limite droite de x_0 notée l_d , et une limite à gauche de x_0 notée l_g, et si ces limites sont égales $l_d = l_g = l$

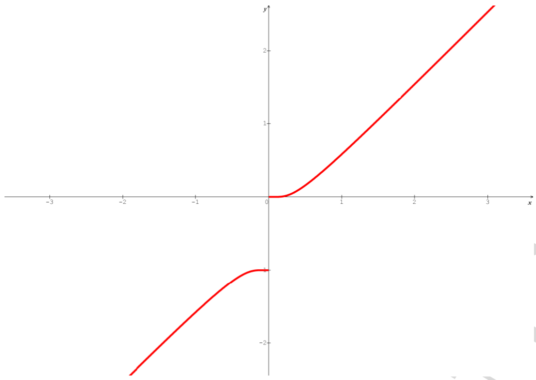

FIGURE 10.12 – Le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ au voisinage de 0

Démonstration

1. Supposons que f admette pour limite l en x_0
   Remarquons tout d'abord que $0 < |x - x_0| < \eta \Longleftrightarrow x_0 - \eta < x < x_0$ ou $x_0 < x < x_0 + \eta$
   Ecrivons que f admet une limite en x_0 :
   Soit $\varepsilon > 0$; alors, il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < \eta$ alors $|f(x) - l| < \varepsilon$.
   Donc, si $x_0 - \eta < x < x_0$, alors alors $|f(x) - l| < \varepsilon$, ce qui montre que f admet une limite à gauche de x_0, et que cette limite est l.
   De même, f admet une limite à droite de x_0, et que cette limite est l.
   Ainsi, si f admet une limite l en x_0, alors f admet une limite droite l_d,et une limite à gauche l_g, et ces 2 limites sont égales $l_d = l_g = l$
2. Réciproquement, supposons que f admette une limite droite l_d,une limite à gauche l_g et que $l_d = l_g = l$
   Soit $\varepsilon > 0$.
   — Ecrivons que f admet une limite à droite :
   $$\left(\exists \eta_\varepsilon^0 > 0\right) \text{ tel que } \left(x_0 < x < x_0 + \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)$$
   — Ecrivons maintenant que f admet une limite à gauche :
   $$\left(\exists \eta_\varepsilon^1 > 0\right) \text{ tel que } \left(x_0 - \eta_\varepsilon^1 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)$$
   En posant $\eta = \inf\left\{\eta_\varepsilon^0 ; \eta_\varepsilon^1\right\}$, si $0 < |x - x_0| < \eta$, alors $x_0 - \eta_\varepsilon^1 < x < x_0$ et $x_0 < x < x_0 + \eta_\varepsilon^0$, et donc $|f(x) - l| < \varepsilon$, c'est à dire $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l$

Exemple 16 :

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ n'admet donc pas de limite en 0

10.3.12 Limites en l'infini

1. Limite finie en l'infini
   (a) Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intevalle $[a\,;\,+\infty[$ soit inclus dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$; On dit que f tend vers $l \in \mathbb{K}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ si :
   $$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists A > 0)\,((x > A) \Longrightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon))$$
   (b) Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intevalle $]-\infty\,;\,a]$ soit inclus dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$; On dit que f tend vers $l \in \mathbb{K}$ lorsque x tend vers $-\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ si :
   $$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists A > 0)\,((x < -A) \Longrightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon))$$
2. Limite infinie en l'infini d'une fonction numérique à valeurs réelles
   (a) Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intevalle $[a\,;\,+\infty[$ soit inclus dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$; On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si :
   $$(\forall A > 0)\,(\exists B > 0)\,((x > B) \Longrightarrow (f(x) > A))$$
   (b) Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intevalle $[a\,;\,+\infty[$ soit inclus dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$; On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si :
   $$(\forall A > 0)\,(\exists B > 0)\,((x > B) \Longrightarrow (f(x) < -A))$$
   (c) Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intevalle $]-\infty\,;\,a]$ soit inclus dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$; On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si :
   $$(\forall A > 0)\,(\exists B > 0)\,((x < -B) \Longrightarrow (f(x) > A))$$
   (d) Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intevalle $]-\infty\,;\,a]$ soit inclus dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$; On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si :
   $$(\forall A > 0)\,(\exists B > 0)\,((x < -B) \Longrightarrow (f(x) < -A))$$
3. Limite infinie en l'infini d'une fonction numérique à valeurs complexes
   (a) Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intevalle $[a\,;\,+\infty[$ soit inclus dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$; On dit que f tend vers ∞ lorsque x tend vers $+\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ si :
   $$(\forall A > 0)\,(\exists B > 0)\,((x > B) \Longrightarrow (|f(x)| > A))$$
   (b) Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intevalle $]-\infty\,;\,a]$ soit inclus dans E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$; On dit que f tend vers ∞ lorsque x tend vers $-\infty$, et on écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ si :
   $$(\forall A > 0)\,(\exists B > 0)\,((x < -B) \Longrightarrow (|f(x)| > A))$$

Remarque 25 :

1. Lorsque f et g tendent vers une limite finie $l_f \in \mathbb{K}$ et $l_g \in \mathbb{K}$ lorsque x tend vers l'infini, on retrouve tous les théorèmes sur somme, produits et quotients.
2. **Pour les fonctions numériques à valeurs réelles, attention aux cas d'indétermination !!**
   (a) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, alors $f - g$, fg et $\dfrac{f}{g}$ peuvent avoir tous les comportements possibles au voisinage de x_0

(b) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, alors fg peut avoir tous les comportements possibles au voisinage de x_0

(c) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, alors $\dfrac{f}{g}$ peut avoir tous les comportements possibles au voisinage de x_0

Exemples :

(a) Soit f et g, 2 fonctions numériques à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}\setminus\{+1\}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ et $g(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3}$ Nous avons :

▷ $\lim\limits_{x\to+1} \dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

▷ $\lim\limits_{\substack{x\to+1\\x>1}} \dfrac{1}{(x-1)^3}=+\infty$

Alors $g(x)-f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3}-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{(x-1)^3}(1-x+1)=\dfrac{2-x}{(x-1)^3}$

Et nous avons donc $\lim\limits_{\substack{x\to+1\\x>1}} g(x)-f(x)=+\infty$

(b) Soit f et g, 2 fonctions numériques à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}+1}$ et $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$ Nous avons :

▷ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$

▷ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)=+\infty$

Alors $f(x)-g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x}+1}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}$

Et nous avons donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)-g(x)=0$

(c) Soit f et g, 2 fonctions numériques à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ par : $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x$ Nous avons :

▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

▷ $\lim\limits_{+\infty} g(x)=+\infty$

Alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Et nous avons donc $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

Soit f et g, 2 fonctions numériques à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x$ et $g(x)=2x+1$ Nous avons :

▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

▷ $\lim\limits_{+\infty} g(x)=+\infty$

Alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x}{2x+1}=\dfrac{1}{2+\frac{1}{x}}$

Et nous avons donc $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{2}$

Exercice 20 :

Soit x_0 un nombre réel et $\alpha>0$, un nombre réel strictement positif. On considère une fonction f, définie sur l'intervalle ouvert $]x_0-\alpha\,;\,x_0+\alpha[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Démontrer que si $f(x_0+h)$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0, alors $\lim\limits_{h\to0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$. La réciproque est-elle vraie ?

10.3.13 Suites et limite d'une fonction numérique

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique définie sur un intervalle E et $x_0 \in \mathbb{R}$
On suppose que f n'est pas forcément définie en x_0
f admet une limite l en x_0, si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ admet pour limite l

Démonstration

1. Supposons que f admette une limite l en x_0
   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers x_0 ; nous allons montrer que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ admet pour limite l.
   Soit $\varepsilon > 0$
   - ▷ Comme $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
   - ▷ Comme $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $|x_n - x_0| < \eta_\varepsilon$

   Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $|x_n - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon$
   On vient donc de montrer que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$
2. Supposons que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$
   Nous allons donc démontrer $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$. Nous allons plutôt démontrer la contraposée, c'est à dire que nous allons supposer que $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq l$ et que nous allons trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+_infty} x_= x_0$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq l$
   Supposons donc que $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq l$
   - ▷ Ecrivons donc que $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq l$
     Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in E$, $x \neq x_0$ tel que $|x - x_0| < \eta$ et $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$
   - ▷ Considérons la suite de nombres $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
     Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$ tel que $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - l| \geqslant \varepsilon$

   — Nous venons de construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq l$
   Donc, si f admet une limite l en x_0, alors, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ admet pour limite l

Remarque 26 :

Ce résultat sur les suites vaut beaucoup pour sa contraposée

Exemple : la fonction $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ admet-elle une limite lorsque x tend vers 0 ?
Considérons 2 suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par :

- $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$
- $y_n = \dfrac{1}{2n\pi}$

Nous avons, de manière évidente, $\lim_{n\to+\infty} x_n = y_n = 0$
Et :

- $f(x_n) = \cos\dfrac{1}{x_n} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0$
- $f(y_n) = \cos\dfrac{1}{y_n} = \cos 2n\pi = 1$

Nous avons $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = 1$

Nous venons de construire 2 suites, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui toutes deux convergent vers 0, mais telles que les suites $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ aient des limites différentes

La fonction $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ n'admet donc pas de limite lorsque x tend vers 0.*(cf graphe 10.13)*

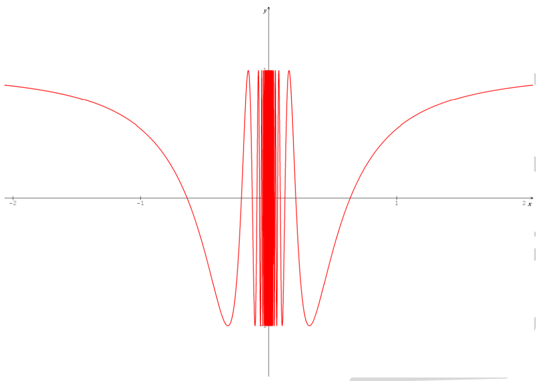

FIGURE 10.13 – Le graphe de la fonction $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0

Remarque 27 :

Nous avons un résultat analogue lorsque x tend $+\infty$ *(resp $-\infty$)* :

> La fonction f admet une limite l lorsque x tend vers $+\infty$ *(resp $-\infty$)*, si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ tendant vers $+\infty$ *(resp $-\infty$)*, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ admet pour limite l

10.3.14 Le critère de Cauchy

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$
f admet une limite finie en x_0 si et seulement si :

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\eta > 0)\,(\forall x \in E)\,(\forall x' \in E)\,((0 < |x - x_0| < \eta \text{ et } 0 < |x' - x_0| < \eta) \Longrightarrow (|f(x) - f(x')| < \varepsilon))$$

Démonstration

1. Supposons que f admette une limite finie l en x_0

   Soit $\varepsilon > 0$; alors, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $0 < |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Soient $x \in E$ et $x' \in E$ tels que $0 < |x - x_0| < \eta_\varepsilon$ et $0 < |x' - x_0| < \eta_\varepsilon$. Alors,

   $$|f(x) - f(x')| \leqslant |f(x) - l| + |l - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   Ce que nous voulions

2. Réciproquement

   Soit $\varepsilon > 0$
   Alors, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in E$ et tout $x' \in E$ si $0 < |x - x_0| < \eta_\varepsilon$ et $0 < |x' - x_0| < \eta_\varepsilon$ alors $|f(x) - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

   Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{N} < \eta_\varepsilon$. Alors pour tout entier m et n tels que $m > N$ et $n > N$, nous avons $0 < \left|\left(x_0 + \dfrac{1}{m}\right) - x_0\right| < \eta_\varepsilon$ et $0 < \left|\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right) - x_0\right| < \eta_\varepsilon$, et donc, d'après l'hypothèse, $\left|f\left(x_0 + \dfrac{1}{m}\right) - f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $y_n = f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right)$ est donc une suite de Cauchy, et d'après 8.6.6 est une suite convergente dans $\mathbb{K}$.
Appelons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right)$. Il existe donc un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier n, si $n > N_\varepsilon$, alors $\left|f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right) - l\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
Alors, pour $x \in E$ tel que $0 < |x - x_0| < \eta_\varepsilon$, et pour $n \geqslant \max\{N, N_\varepsilon\}$, nous avons :

$$|f(x) - l| \leqslant \left|f(x) - f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)\right| + \left|f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - l\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) = l$

Remarque 28 :

Nous avons le même critère lorsque x tend vers ∞ :
La fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ *(resp $-\infty$)* si et seulement si
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $x' \in \mathbb{R}$, si $x > A$ et $x' > A$ *(resp $x < -A$ et $x' < -A$)* alors $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$

Exemple 17 :

On considère la fonction f, définie sur $[+1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{[x]}$$

Il faut montrer que f ne vérifie pas le critère de Cauchy lorsque x tend vers $+\infty$
Soit $x \geqslant +1$
Considérons $f(2x) - f(x) = \displaystyle\sum_{k=[x]+1}^{[2x]} \frac{1}{k}$
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ tels que $[x] + 1 \leqslant k \leqslant [2x]$, nous avons $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{[2x]}$, et donc :

$$f(2x) - f(x) = \sum_{k=[x]+1}^{[2x]} \frac{1}{k} \geqslant \frac{[2x] - [x]}{[2x]}$$

▷ Si $[x] \leqslant x < [x] + \dfrac{1}{2}$, alors, $2[x] \leqslant 2x < 2[x] + 1$, et donc $[2x] = 2[x]$ et donc,

$$f(2x) - f(x) \geqslant \frac{2[x] - [x]}{2[x]} = \frac{1}{2}$$

▷ Si $[x] + \dfrac{1}{2} \leqslant x < [x]$, alors $2[x] + 1 \leqslant 2x < 2[x]$ et alors, $[2x] = 2[x] + 1$
Donc $\dfrac{[2x] - [x]}{[2x]} = \dfrac{2[x] + 1 - [x]}{2[x] + 1} = \dfrac{[x] + 1}{2[x] + 1} > \dfrac{1}{2}$ [4]

Ainsi, il existe $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ tel que, pour tout $A > 0$, il existe $x > A$ et $x' = 2x > A$ et $|f(x) - f(x')| > \varepsilon = \dfrac{1}{2}$.
f ne vérifie donc pas le critère de Cauchy

4. Pour montrer que $\dfrac{[x]+1}{2[x]+1} > \dfrac{1}{2}$, il suffit de calculer $\dfrac{[x]+1}{2[x]+1} - \dfrac{1}{2}$, et on trouve que $\dfrac{[x]+1}{2[x]+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2[x]+1} > 0$

10.3.15 Théorème

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{K}$ tels que $f(E) \subset F$
On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = l$ avec $l \in \mathbb{K}$.
Alors, $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = l$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$
- Il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $y \in F$ si $0 < |y - y_0| < \eta_\varepsilon$, alors $|g(y) - l| < \varepsilon$
- Pour cet $\eta_\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in E$ si $0 < |x - x_0| < \alpha$, alors $|f(x) - y_0| < \eta_\varepsilon$

Ainsi, pour tout $x \in E$ tel que $0 < |x - x_0| < \alpha$, alors $|f(x) - y_0| < \eta_\varepsilon$ qui implique que $|g(f(x)) - l| < \varepsilon$
Nous avons donc $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = l$

Remarque 29 :

Ce résultat est aussi valable lors que x tend vers ∞

Exemple 18 :

1. Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{t \to +1} \ln t = 0$, ce qui nous permet d'écrire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$
   Ce résultat permet de résoudre des formes indéterminées :
   (a) **Calculons** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$**.**
   Nous sommes devant une indétermination du type $\dfrac{\infty}{\infty}$
   En utilisant les propriétés du logarithme, nous avons :
   $$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\ln x} = \frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$$
   Finalement : $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$.
   D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = 1$
   (b) **Calculons :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) - \ln x$**.**
   Cette fois ci, nous sommes devant une indétermination du type $\infty - \infty$
   Nous avons
   $$\ln(x+1) - \ln x = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) - \ln(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
   Finalement $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) - \ln(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$
2. **Soit à calculer :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^x + 1) - x$**.**
   Une nouvelle fois, nous sommes devant une indétermination du type $\infty - \infty$
   Nous avons :
   $$\ln(e^x+1) - x = \ln\left(e^x\left(1+e^{-x}\right)\right) - x = \ln e^x + \ln\left(1+e^{-x}\right) - x = \ln(1+e^{-x})$$
   Finalement : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^x+1) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$.

Exercice 21 :

1. Etudiez $\lim\limits_{x\to 1} \sin\left(\dfrac{\pi\left(x^2-x\right)}{x^2-1}\right)$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$ puis $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$
3. Donner $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\sqrt{\dfrac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^4}+1}}\right)$

10.3.16 Exercices sur les limites d'une fonction

Exercice 22 :

Pour $x \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés, donner $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$

Exercice 23 :

Donner $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}+1} - \sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}-1}$

Exercice 24 :

On considère la fonction $Q(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$
où $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ et pour $i = 0, \ldots, n$, $a_i \in \mathbb{K}$ et pour $j = 0, \ldots, m$, $b_j \in \mathbb{K}$ avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$
Donner $\lim\limits_{x\to +\infty} Q(x)$

Exercice 25 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. Quelle est $\lim\limits_{x\to 0} g\circ f(x)$?

Exercice 26 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ où $\overset{\circ}{I}$ est l'intérieur de l'intervalle I. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions telles que : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_f$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_g$
Démontrer que $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ admettent une limite finie en x_0 et les calculer.

Exercice 27 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique périodique. On suppose qu'elle admet une limite finie l lorsque x tens vers $+\infty$. Montrer que f est constante.
2. La fonction $f(x) = \sin x$ a-t-elle une limite lorsque x tend vers $+\infty$?

Exercice 28 :

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n = \dfrac{1}{(P_n)^2+1}$. Etablir que la famille $\{f_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 29 :

Soit $\alpha > 0$.
Soient $f :]0;\alpha[\longrightarrow \mathbb{K}$ et $g :]0;\alpha[\longrightarrow \mathbb{K}$, 2 fonctions numériques.
On suppose $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = L$ avec $L \in \mathbb{K}$ et on suppose de plus que pour tout $x \in]0;\alpha[$ et tout $y \in]0;\alpha[$,

$$|g(x) - g(y)| \leqslant |f(x) - f(y)|$$

Démontrer que g admet une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

Exercice 30 :

Calculez les limites suivantes :

1. Dans toute cette partie, $[x]$ désigne la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x] \leqslant x < [x]+1$

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} x \left[\dfrac{1}{x}\right]$

   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left[\dfrac{1}{x}\right]$

   (c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \sqrt{x} \left[\dfrac{1}{x}\right]$

   (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{[x]}{x}$

   (e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left[\dfrac{1}{x}\right]+x}{\left[\dfrac{1}{x}\right]-x}$

   (f) $\lim\limits_{x \to 0} x \left[x - \dfrac{1}{x}\right]$

2. (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)\right)$

   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)$

   (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{4}} \left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right)$

Exercice 31 :

Nous avons toujours $[x]$ qui désigne la partie entière de x. La fonction $f(x) = \dfrac{x^x}{[x]^{[x]}}$ définie pour $x \geqslant 1$ admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 32 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = \lim\limits_{m \to +\infty} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} \left((\cos(n!\pi x))^{2m}\right)\right)$ Démontrer que $f = 1_{\mathbb{Q}}$ où $1_{\mathbb{Q}}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathbb{Q}$

10.4 Fonction continue en un point

10.4.1 Définition

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $x_0 \in E$. f est dite <u>continue</u> en x_0 si et seulement si :
- $f(x_0)$ existe
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Remarque 30 :

1. La définition peut donc se traduire par :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_{\varepsilon\,;\,x_0} > 0)\,((|x-x_0| < \eta_{\varepsilon\,;\,x_0}) \Longrightarrow (|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon))$$

   La notation $\eta_{\varepsilon\,;\,x_0}$ signifie que cette valeur dépend de x_0 et du choix de ε.
   La définition utilisant la limite en un point, beaucoup de résultats résulteront de l'étude des limites des fonctions en un point.

2. Une autre version de la définition de fonction continue peut être donnée en utilisant les intervalles :

   La fonction f définie sur un voisinage de $x_0 \in E$ est continue en x_0 si et seulement si à tout intervalle ouvert J de centre $f(x_0)$, on peut faire correspondre un intervalle ouvert I de centre x_0 tel que $f(I) \subset J$

3. Si une fonction définie au voisinage de x_0 n'est pas continue en x_0, on dit qu'elle est **discontinue**

   Pour formaliser la discontinuité d'une fonction en un point x_0, il suffit de nier le formalisation de la définition :

$$(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \eta > 0)\,(\exists x \in \mathbb{R})\,((|x-x_0| < \eta) \text{ et } (|f(x)-f(x_0)| \geqslant \varepsilon))$$

10.4.2 Théorème

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $x_0 \in E$. On suppose que f est bien définie au voisinage de x_0 f est continue en x_0 si et seulement si l'image réciproque de tout voisinage de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0

Démonstration

1. Supposons f continue en x_0
   Nous allons donc démontrer que l'image réciproque de tout voisinage de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0
   Soit V un voisinage de $f(x_0)$
   Il existe donc un intervalle ouvert de centre $f(x_0)$ noté $I_{f(x_0)}$ tel que $I_{f(x_0)} \subset V$. Or *(voir l'exercice qui suit)* :
   $$I_{f(x_0)} \subset V \Longrightarrow f^{-1}\left[I_{f(x_0)}\right] \subset f^{-1}(V)$$
   f étant continue en x_0, il existe un intervalle J_{x_0}, de centre x_0 tel que $f(J_{x_0}) \subset I_{f(x_0)}$. Or, *(voir une nouvelle fois l'exercice qui suit)* :
   $$f(J_{x_0}) \subset I_{f(x_0)} \Longleftrightarrow J_{x_0} \subset f^{-1}\left[I_{f(x_0)}\right]$$
   Et donc $J_{x_0} \subset f^{-1}(V)$, ce qui montre que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0
2. Réciproquement, supposons que l'image réciproque de tout voisinage de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0
   Montrons que f est continue en x_0
   Soit $I_{f(x_0)}$ un intervalle ouvert de centre $f(x_0)$; c'est bien un voisinage de $f(x_0)$. Ainsi, l'image réciproque de $I_{f(x_0)}$, $f^{-1}\left[I_{f(x_0)}\right]$ est un voisinage de x_0. Il existe donc un intervalle J_{x_0} de centre x_0 tel que $J_{x_0} \subset f^{-1}\left[I_{f(x_0)}\right]$ ou , de manière équivalente, tel que $f(J_{x_0}) \subset I_{f(x_0)}$
   f est donc continue en x_0

Exercice 33 :

Soit E et F 2 ensembles quelconques et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soient $A \subset F$ et $B \subset F$. Démontrez que nous avons l'implication :
   $$A \subset B \Longrightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$
2. Soient $I \subset E$ et $J \subset F$. Démontrer que nous avons l'équivalence :
   $$f(I) \subset J \Longleftrightarrow I \subset f^{-1}(J)$$

Exemple 19 :

Des exemples de fonctions continues

1. **La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$**
   Soit $\varepsilon > 0$. Il faut majorer $||x| - |x_0||$
   Or, $||x| - |x_0|| \leqslant |x - x_0|$. Donc, si $|x - x_0| \leqslant \varepsilon$ alors $||x| - |x_0|| \leqslant \varepsilon$
   Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_{\varepsilon\,;\,x_0} = \varepsilon$ tel que si $|x - x_0| \leqslant \eta_{\varepsilon\,;\,x_0}$, alors $||x| - |x_0|| \leqslant \varepsilon$
   La fonction valeur absolue est donc continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$
2. **La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$ est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$**
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et nous allons utiliser les classiques formules d'addition de la trigonométrie :
   $$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}$$
   De telle sorte que :
   $$|\sin x - \sin x_0| \leqslant 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right|$$

En utilisant l'inégalité classique $|\sin x| \leqslant |x|$, nous obtenons l'inégalité :

$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x - x_0|$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$.
Si $|x - x_0| \leqslant \varepsilon$, alors $|\sin x - \sin x_0| \leqslant \varepsilon$. Donc, la fonction $f(x) = \sin x$ est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$
On démontrerait de même que $g(x) = \cos x$ est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$

3. **La fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}^+$**
   Soit $\varepsilon > 0$
   ▷ Si $x_0 = 0$, nous devons majorer $\left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| = \sqrt{x}$ par ε. Il suffit donc que $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon^2$ pour que $\sqrt{x} \leqslant \varepsilon$
   ▷ Supposons maintenant $x_0 > 0$. Alors :

$$\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

   De telle sorte que : $\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$
   Comme $\sqrt{x} + \sqrt{x_0} \geqslant \sqrt{x_0}$, nous avons $\dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leqslant \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$, et donc nous avons

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leqslant \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} \leqslant \varepsilon$$

   dès que $|x - x_0| \leqslant \varepsilon\sqrt{x_0}$
   Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_{\varepsilon\,;\,x_0} > 0$ tel que si $|x - x_0| \leqslant \eta_{\varepsilon\,;\,x_0}$ alors $\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| \leqslant \varepsilon$
   On peut remarquer que $\eta_{\varepsilon\,;\,x_0} = \varepsilon\sqrt{x_0}$ dépend bien de ε et de x_0

Exemple 20 :

Des exemples de fonctions discontinues

1. Soit f définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ et $f(0) = 0$. Cette fonction n'est pas continue en 0
   * Parce que, d'une part $\sin\dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0
   * Et que, d'autre part, en utilisant la formalisation, il suffit de voir que la suite $x_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$ qui est une suite qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et qui a le bonheur d'être telle que $f(x_n) = \sin\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi = 1$.
     Ainsi, il existe $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ tel que, pour tout $\eta > 0$ nous ayons $0 < x_n < \eta$ et $f(x_n) > \dfrac{1}{2}$
2. Une fonction f qui a une limite en x_0 différente de $f(x_0)$ n'est pas continue en x_0
   Soit f définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $f(0) = 0$. Cette fonction n'est pas continue en 0 puisque $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $1 \neq 0$

Exercice 34 :

1. Soit f une fonction continue et positive sur un voisinage V de x_0. Démontrer que la fonction $F(x) = \sqrt{f(x)}$ est continue en x_0
2. Soit g une fonction définie et continue sur un voisinage V de x_0. Démontrer que la fonction $G(x) = |g(x)|$ est continue en x_0

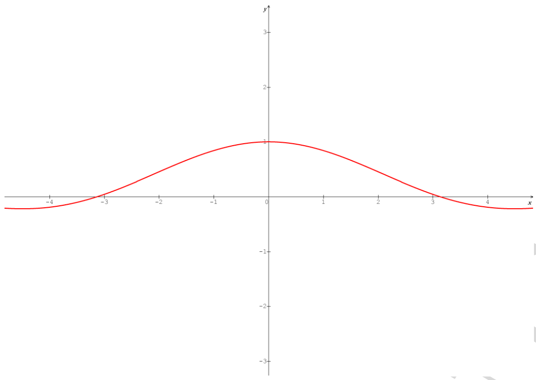

FIGURE 10.14 – Le graphe de $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

10.4.3 Théorème

Soit $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $F \subset \mathbb{R}$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{K}$.
On suppose :
- $f(E) \subset F$
- f est continue en x_0
- g est continue en $f(x_0)$

Alors, $g \circ f$ est continue en x_0

Démonstration

Soit V un voisinage de $g \circ f(x_0)$.
g étant continue en $f(x_0)$, $g^{-1}(V)$ est un voisinage de $f(x_0)$.
De même, f étant continue en x_0, $f^{-1}\left[g^{-1}(V)\right]$ est un voisinage de x_0.
Or, $f^{-1}\left[g^{-1}(V)\right]$ est l'image réciproque, par $g \circ f$ de V.
Ainsi, $g \circ f$ est bien continue en x_0

Remarque 31 :

Grâce à ce théorème, il est possible de montrer que :

1. Si f est une fonction continue et positive sur un voisinage V de x_0, alors la fonction $F(x) = \sqrt{f(x)}$ est continue en x_0
2. Si g est une fonction définie et continue sur un voisinage V de x_0, alors la fonction $G(x) = |g(x)|$ est continue en x_0

10.4.4 Continuité en un point d'une fonction numérique à valeurs complexes

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous écrivons $f = \mathrm{Reel}(f) + i\mathrm{Im}(f)$, où $\mathrm{Reel}(f)$ est la partie réelle de f et $\mathrm{Im}(f)$ est la partie imaginaire de f.
Alors, f est continue en x_0 si et seulement si
$\mathrm{Reel}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en x_0

Démonstration

La démonstration utilise les résultats sur les limites 10.3.4

10.4.5 Opérations sur les fonctions continues

Soients $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$,$f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{K}$
On suppose f et g continues en x_0. Alors :

1. La fonction somme $f + g$ est continue en x_0
2. La fonction produit $f \times g$ est continue en x_0
3. En particulier, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, la fonction λf est continue en x_0
4. Si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0

Démonstration

Ce théorème est l'application stricte du théorème 10.3.6 sur les limites de fonctions.

Remarque 32 :

Il n'est pas inintéressant de faire remarquer que si $g(x_0) \neq 0$, alors, il existe un voisinage V de x_0 tel que si $x \in V$, alors $g(x) \neq 0$ et $g(x)$ est du même signe que $g(x_0)$

Exemple 21 :

- La fonction identité $\mathrm{Id}(x) = x$ est continue pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$
- En utilisant le résultat sur les produits, les fonctions puissances $E_n(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ sont aussi continues pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$
- Et donc, plus généralement, toute fonction polynôme $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_k \in \mathbb{K}$ est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$

Exercice 35 :

1. Soient f et g, 2 fonctions définies et continues sur un voisinage V de x_0. Démontrez que $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont aussi des fonctions continues en x_0
2. Soit f une fonction continue en x_0 et g une fonction discontinue en x_0. Montrer que la fonction $f + g$ est discontinue en x_0
3. *(Question facile !...Prendre un exemple)* La fonction $f + g$ peut-elle être continue en x_0 si les fonctions f et g sont discontinues en x_0 ?

10.4.6 Suites et fonctions continues

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique définie sur un intervalle E et $x_0 \in \mathbb{R}$
f est continue en x_0, si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E convergeant vers x_0, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ admet pour limite $f(x_0)$

Démonstration

C'est l'application du théorème 10.3.13 sur les limites de fonctions et suites numériques

Exemple 22 :

1. La fonction $f = 1_{\mathbb{Q}}$ qui est la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ qui est telle que $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon, n'est pas continue.

   En effet

   Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors $f(x) = 0$. $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$. Alors, nous avons : $f(r_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = 1$.

Nous venons donc d'exhiber une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$ et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) \neq f(x)$ f n'est donc pas continue.

2. Soit $\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que il existe } (\alpha, n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \text{ tels que } x = \dfrac{\alpha}{2^n} \right\}$. Δ est l'ensemble des dyadiques, dense dans $\mathbb{R}$. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ s'annule sur Δ, alors, f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$

   En effet

   Si $x \in \mathbb{R}$ alors, x est limite d'une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de dyadiques. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(d_n) = 0$
   f étant continue et $x = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n$, nous avons $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(d_n) = 0$

10.4.7 Continuité à droite, continuité à gauche

Soient $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$

1. f est dite continue à droite de x_0 si :
   - ▷ $f(x_0)$ existe
   - ▷ Et si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$
2. f est dite continue à gauche de x_0 si :
   - ▷ $f(x_0)$ existe
   - ▷ Et si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$

Remarque 33 :

1. Ecrivons la définition 10.4.7 de manière formalisée :
   - $*$ f est dite continue à droite de x_0 si :

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\eta > 0)\,((x \in [x_0; x_0 + \eta[) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))$$

   - $*$ f est dite continue à gauche de x_0 si :

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\eta > 0)\,((x \in]x_0 - \eta; x_0]) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))$$

2. Si une fonction f est continue à droite et à gauche de x_0, alors elle est continue en x_0
3. Une fonction qui a des limites différentes à droite et à gauche de x_0 n'est pas continue en x_0

   Exemple : la fonction $f(x) = x - [x]$ n'est pas continue en $n \in \mathbb{Z}$ *(cf figure 10.15)*

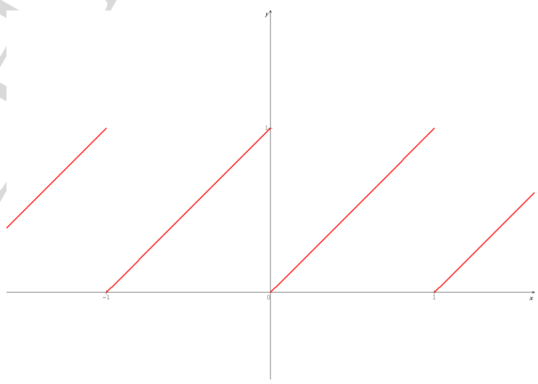

FIGURE 10.15 – Le graphe de $f(x) = x - [x]$

10.4.8 Prolongement par continuité

Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{K}$ une fonction numérique d'une variable réelle. On considère x_0 qui n'est pas dans E, mais adhérent à E. On suppose $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. On construit la fonction g par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g : E \cup \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & g(x) = \left\{\begin{array}{l} f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ l \text{ si } x = x_0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Alors, g est continue en x_0. On dit que g est le prolongement par continuité de f en x_0

Exemple 23 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. La fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \left\{\begin{array}{l} f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

   est une fonction déduite de la fonction f par prolongement par continuité de f en 0

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $g(x) = x \ln x$. La fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \psi(x) = \left\{\begin{array}{l} x \ln x \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

   est une fonction déduite de la fonction g par prolongement par continuité de g en 0 *(Cf figure 10.16)*

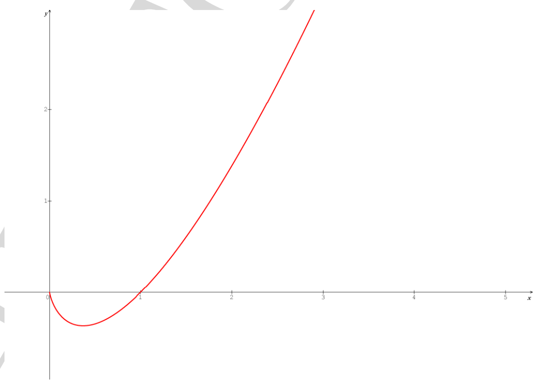

FIGURE 10.16 – Le graphe de $f(x) = x \ln x$

10.4.9 Exercices complémentaires

Exercice 36 :

Pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $\mathrm{Mil}(a, b, c)$ le point intermédiaire parmi a, b et c.
Par exemple, si $a \leqslant c \leqslant b$, alors $\mathrm{Mil}(a, b, c) = c$
Soient $E \subset \mathbb{R}$ et 3 fonctions f, g et h, définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continues en $x_0 \in E$.
Nous définissons la fonction $\mathrm{Mil}(f, g, h)(x)$ par :

$$\mathrm{Mil}(f, g, h)(x) = \mathrm{Mil}(f(x), g(x), h(x))$$

Montrez que la fonction $\mathrm{Mil}(f, g, h)$ est continue en x_0

Exercice 37 :

Est-il possible de prolonger par continuité les fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

1. $f(x)=\dfrac{1}{2x}\left[(1+x)^n-1\right]$ avec $n\in\mathbb{N}$
2. $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$
3. $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$
4. $f(x)=x\left[\dfrac{1}{x}\right]$

Exercice 38 :

Etudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

1. $f(x)=\sqrt{x-[x]}$
2. $g(x)=[x]+\sqrt{x-[x]}$
3. $h(x)=[x]+(x-[x])^2$

Exercice 39 :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur l'intervalle ouvert $]-1;+1[$

1. On suppose qu'il existe un nombre $k\geqslant 0$ tel que, pour tout $x\in\,]-1;+1[\,\setminus\{0\}$ nous ayons $|f(x)|\leqslant k|x|$. Quelle valeur faut-il donner à $f(0)$ pour que f soit continue sur $]-1;+1[$?
2. Plus généralement, on suppose qu'il existe 2 fonctions g et h définies et continues sur l'intervalle $]-1;+1[$ et vérifiant :
   — $h(0)=g(0)$
   — Et, pour tout $x\in\,]-1;+1[\,\setminus\{0\}$ nous avons $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$
   Quelle valeur faut-il donner à $f(0)$ pour que f soit continue sur $]-1;+1[$?

Exercice 40 :

On considère la fonction f définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x)=\left\{\begin{array}{l} x^2 \text{ si } x\in\mathbb{Q}\\ x \text{ si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Montrer que f n'est pas continue pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Exercice 41 :

C'est un exercice assez difficile

La **fonction de Thomae** est ainsi définie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x)=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{q} \text{ si } x\in\mathbb{Q}^* \text{ et } x=\dfrac{p}{q} \text{ avec } p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}^* \text{ et } \operatorname{pgcd}(p,q)=1\\ 1 \text{ si } x=0\\ 0 \text{ si } x\notin\mathbb{Q}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

1. Montrer que f est périodique et de période 1
2. On se restreint maintenant à l'intevalle $[0;1]$
   (a) Montrer que f n'est pas continue sur $\mathbb{Q}$
   (b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Exercice 42 :

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction appelée fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, c'est à dire telle que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x)=\left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 \text{ si } x\notin\mathbb{Q}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Il faut montrer que f n'est continue en aucun point.

Exercice 43 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue en 0 et telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$.
Il faut montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$

10.5 Continuité sur un ensemble

10.5.1 Définition

Soit f une fonction numérique définie sur $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et soit $I \subset E$
On dit que f est continue sur I, si et seulement si $(\forall x_0 \in I)$ f est continue en x_0

Remarque 34 :

1. En formalisant, la propriété de continuité sur I se traduit par :

$$(\forall x_0 \in I)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_{\varepsilon\,;\,x_0} > 0)\,((|x - x_0| < \eta_{\varepsilon\,;\,x_0}) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))$$

2. Lorsque nous dirons que f est continue sur un intervalle $[a;b]$, cela voudra dire que :
   - ▷ Ou bien que f est continue sur l'intervalle ouvert $]a;b[$ et continue à droite de a et continue à gauche de b
   - ▷ Ou bien que la fonction f est définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ qui contient un voisinage ouvert V de chaque point de $[a;b]$ et qu'elle est continue pour chaque $x \in V$

10.5.2 Fonctions continues par morceaux

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique
Soit $[a;b] \subset E$ un intervalle fermé borné inclus dans E
f est dite continue par morceaux sur $[a;b]$, s'il existe une subdivision de $[a;b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_{=}b$$

telle que les restrictions de f sur les intervalles $]x_i;x_{i+1}[$ notées $f_{|]x_i;x_{i+1}[}$ soient continues sur l'intervalle $]x_i;x_{i+1}[$

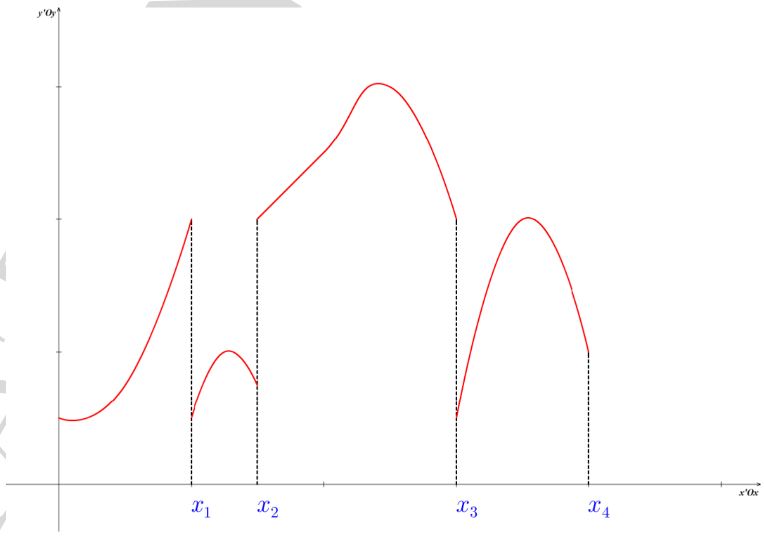

FIGURE 10.17 – Le graphe d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux

Exemple 24 :

Les fonctions en escalier sont des exemples de fonctions continues par morceaux

10.5.3 Théorème

Soient $f : E \to \mathbb{K}$ et $g : F \to \mathbb{K}$ deux fonctions numériques d'une variable réelle continues sur $\mathcal{U} \subset (E \cap F)$.
Alors :

1. Somme de fonctions continues : $f + g$ est continue sur $\mathcal{U}$
2. Produit de fonctions continues : $f \times g$ est continue sur $\mathcal{U}$
3. Produit par un scalaire : $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $\lambda \times f$ est continue sur $\mathcal{U}$
4. Quotient de fonctions continues : Si, pour tout $x \in \mathcal{U}$, $g(x) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en $\mathcal{U}$

Exemple 25 :

Exemples et contre-exemples de fonctions continues sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

1. $\tan x$ est continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; +\dfrac{\pi}{2}\right[$ mais pas sur $[0; \pi]$ puisque $\tan x$ n'est pas définie en $x_0 = +\dfrac{\pi}{2}$
2. $[x]$ est continue sur $]0, 1[$, mais pas sur $[0, 1]$ *(Attention aux bornes)*
3. $\dfrac{1}{x}$ n'est pas continue sur $[-1; +1]$; en effet, $\dfrac{1}{x}$ n'est pas définie en 0.

10.5.4 Théorème

Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue sur E si et seulement si pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{K}$, l'image réciproque de $\mathcal{U}$ notée $f^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de E

Démonstration

1. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur E
   Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{K}$ une ouvert de $\mathbb{K}$, $x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})$ et $y_0 = f(x_0)$. Nous avons donc $y_0 \in \mathcal{U}$
   $\mathcal{U}$ étant un ouvert, il existe une boule ouverte $B_O(y_0, \varepsilon)$ [5] telle que $B_O(y_0, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$
   f étant continue, pour ce ε, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$,
   $$|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon$$
   Donc, $f(E \cap]x_0 - \eta; x_0 + \eta[) \subset B_O(y_0, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$, et donc $E \cap]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\subset f^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de E
2. Réciproquement, supposons que pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{K}$, $f^{-1}(\mathcal{U})$ soit un ouvert de E
   Démontrons que, pour tout $x_0 \in E$, f est continue en x_0
   Soit donc $x_0 \in E$ et $\varepsilon > 0$
   Alors, $B_O(f(x_0), \varepsilon)$ est un ouvert de $\mathbb{K}$, et donc $f^{-1}[B_O(f(x_0), \varepsilon)]$ est un ouvert de E. il existe donc $\eta > 0$ tel que $E \cap]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\subset f^{-1}[B_O(f(x_0), \varepsilon)]$.
   Ainsi, si $x \in E$ et si $|x - x_0| < \eta$, alors $f(x) \in B_O(f(x_0), \varepsilon)$, c'est à dire $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
   f est donc continue en x_0

5. Rappel : $B_O(y_0, \varepsilon) = \{z_i n\mathbb{K}$ tels que $|z - y_0| < \varepsilon\}$

Exemple 26 :

Applications de 10.5.4

1. **Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Soit $N = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0\}$. Montrer que N est un ouvert de $\mathbb{R}$**

   Soient $N_1 = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > 0\}$ et $N_2 = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < 0\}$. Evidemment, $N = N_1 \cup N_2$

   Nous pouvons écrire $N_1 = f^{-1}(]0; +\infty[)$.

   Comme $]0; +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, que f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(]0; +\infty[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

   De la même manière, nous démontrerions que N_2 est un ouvert.

   Ainsi, N, réunion finie d'ouverts est un ouvert.

2. **Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Soit $M = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > g(x)\}$. Montrer que M est un ouvert de $\mathbb{R}$**

   Construisons une fonction auxiliaire $h = f - g$; h est continue comme somme de fonctions continues et :

$$\begin{aligned} M &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) > g(x)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) - g(x) > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } h(x) > 0\} \\ &= h^{-1}(]0; +\infty[) \end{aligned}$$

   Pour les mêmes raisons que la question ci-dessus, $h^{-1}(]0; +\infty[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. M est donc un ouvert de $\mathbb{R}$

Exercice 44 :

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.
Montrer que f est continue si et seulement si l'image réciproque de tout fermé est un fermé.

Exercice 45 :

Dans tout cet exercice, f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$, une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que si x est un point adhérent à A *(c'et à dire $x \in \overline{A}$)* alors $f(x)$ est adhérent à $f(A)$
2. Démontrer que, pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$, nous avons $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$

10.5.5 Continuité uniforme

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$
On dit que f est uniformément continue si :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon > 0)\,(\forall x \in I)\,(\forall y \in I)\,(|x - y| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)$$

Remarque 35 :

1. Si f est uniformément continue sur I, alors elle est continue sur I, mais la réciproque est fausse.
2. Dans la définition, la grande différence avec la définition de fonction continue, c'est que le nombre $\eta_\varepsilon >$ ne dépend que de ε et non pas de $x \in I$.

   Par exemple, la fonction affine $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

   Soit $\varepsilon > 0$; alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ $|g(x) - g(y)| = |(ax + b) - (ay + b)| = |a(x - y)| = |a|\,|(x - y)|$

   Ainsi, si $|(x - y)| < \dfrac{\varepsilon}{|a|}$, alors $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$, et donc g est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$

Exemple 27 :

Exemple de fonctions uniformément continues : les fonctions Lipschitziennes

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$, une fonction numérique.
f est dite k-lispschitzienne sur $E \subset \mathbb{R}$ s'il existe $k > 0$ tel que :

$$(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)\,(|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|)$$

Il est facile de démontrer qu'une fonction k-lispschitzienne sur E est uniformément continue sur E

Exercice 46 :

Démontrer qu'une fonction k-lispschitzienne sur E y est uniformément continue

10.5.6 Exercices sur la continuité sur un ensemble

Exercice 47 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous notons φ_n l'application :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi_n(x) = \left\{\begin{array}{ll} -n & \text{si } x \leqslant -n \\ x & \text{si } -n \leqslant x \leqslant n \\ +n & \text{si } x \geqslant +n \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Démontrer que, pour toute application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f est continue si et seulement si $\varphi_n \circ f$ est continue

Exercice 48 :

1. Ecrire la négation de la définition de fonction uniformément continue.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$. Montrer que f n'est pas uniformément continue sur $[0; +\infty[$
3. Démontrer que, par contre, $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur tout intervalle $[a, b]$ où $a < b$ *(sans utiliser le théorème de Heine)*

Exercice 49 :

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est lipschitzienne sur I si et seulement si il existe $K_f > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leqslant K_f\,|x - y|$. Montrer que f est uniformément continue sur I.

Exercice 50 :

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur l'intervalle $]0, 1]$

Exercice 51 :

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $y \in \mathbb{R}^+$, nous avons $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x - y|}$
2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 52 :

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. Démontrez, par contre que la fonction $f(x) = x \ln x$ est uniformément continue sur l'intervalle $]0, 1]$

Exercice 53 :

1. La fonction $\sin \dfrac{1}{x}$ est-elle uniformément continue sur $]0,1]$?
2. Même question pour la fonction $\sin x^2$.

Exercice 54 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $a > 0$, $b > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant ax + b$

Exercice 55 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

On appelle, pour simplifier, $a = f(1)$.

1. Donner $f(0)$; en déduire que f est une fonction impaire
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$
3. En déduire que :
   (a) Pour tout entier $q > 0$, $f\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{a}{q}$
   (b) Pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$
   (c) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$

Exercice 56 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(x-y) = f(x) - f(y)$$

Comme tout à l'heure, on appelle, pour simplifier, $a = f(1)$.

1. Donner $f(0)$; en déduire que f est une fonction impaire
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$
3. En déduire que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$

Exercice 57 :

1. Nous appelons $\mathcal{A}_1$, l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(\forall \lambda \in \mathbb{R})\,(f(\lambda x + (1-\lambda)\,y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\,f(y))$$

   (a) Montrer que $\mathcal{A}_1$, muni de l'addition des fonctions est un groupe abélien
   (b) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et $f(x) = f(y) = 0$. Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 0$, c'est à dire que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$
   (c) Soit $h(x) = ax + b$. Démontrer que $h \in \mathcal{A}_1$
   (d) Soit $g \in \mathcal{A}_1$ et $f \in \mathcal{A}_1$ tel que $f(x) = g(x) + (g(0) - g(1))\,x - g(0)$. Démontrer que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$
   (e) En déduire que les seuls éléments de $\mathcal{A}_1$ sont les applications affines du type $g(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$
2. Nous allons, dans cette question, alléger les conditions de l'hypothèse, en passant de $\lambda \in \mathbb{R}$ à $\lambda \in [0;1]$
   Nous appelons $\mathcal{A}_2$, l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(\forall \lambda \in [0;1])\,(f(\lambda x + (1-\lambda)\,y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\,f(y))$$

(a) Montrer que $\mathcal{A}_2$, muni de l'addition des fonctions est un groupe abélien

(b) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et $f(x) = f(y) = 0$. Démontrer que pour tout $t \in [x; y]$, $f(t) = 0$.

(c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $t \in [x; y]$, $f(t + n(y - x)) = 0$

(d) En déduire que f est nulle sur $\mathbb{R}$

(e) En déduire que les seuls éléments de $\mathcal{A}_2$ sont les applications affines du type $g(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$

Exercice 58 :

Soit $f : [0; +1] \longrightarrow [0; +1]$, une fonction numérique d'une variable réelle, définie et continue sur $[0; +1]$ et à valeurs dans $[0; +1]$. On suppose que $f(0) = 0$ et que pour tout $x \in [0; +1]$ et tout $y \in [0; +1]$, nous avons $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$

1. Soit $x \in [0; +1]$. On construit une suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ Montrer que cette suite est convergente.
2. On appelle l la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Démontrer que $f(l) = l$
3. Déduire de tout ce qui précède que, pour tout $x \in [0; +1]$, $f(x) = x$

Exercice 59 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $0 < k < 1$ tel que pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ nous ayions :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite l vérifie $l = f(l)$

Exercice 60 :

Soient $a \in \mathbb{R}^+$ un nombre réel positif et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels définie par :

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$$

Démontrer que cette suite est convergente et calculer sa limite

Exercice 61 :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ un nombre réel non nul et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels définie par :

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1$$

Etudier la convergence de cette suite et calculer son éventuelle limite

10.6 Continuité sur un intervalle

10.6.1 Théorème

Soit f une fonction numérique continue définie sur l'intervalle fermé borné $[a; b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$
Alors, f est bornée sur $[a; b]$, c'est à dire qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in [a; b]$, nous ayions $m \leqslant f(x) \leqslant M$

Démonstration

Supposons le contraire, c'est à dire que l'ensemble $f([a;b])$ ne soit pas un ensemble borné.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre $x_n \in [a;b]$ tel que $|f(x_n)| \geqslant n$.
Nous créons ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de l'intervalle $[a;b]$.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass 8.5.5, il nous est possible de construire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un nombre $\lambda \in [a;b]$; c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \lambda$
f étant continue sur $[a;b]$ l'est en particulier en λ ; nous écrivons que f est continue en λ.
Soit $\varepsilon > 0$.
Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [a;b]$, nous ayions l'implication :

$$|x-\lambda| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(\lambda)| < \varepsilon$$

Pour cet $\alpha > 0$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \lambda$, il existe $N_\alpha \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_\alpha \Longrightarrow \left|x_{\varphi(n)} - \lambda\right| \leqslant \alpha$
Ainsi, $n \geqslant N_\alpha \Longrightarrow \left|x_{\varphi(n)} - \lambda\right| \leqslant \alpha \Longrightarrow \left|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f(\lambda)\right| < \varepsilon$, ce qui est en totale contradiction avec le fait que $\left|f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right| \geqslant \varphi(n) \geqslant n$
Donc, l'hypothèse que l'ensemble $f([a;b])$ ne soit pas un ensemble borné est contradictoire.
Donc, f est bornée sur $[a;b]$

Remarque 36 :

1. En fait, M est la **borne supérieure** de f sur $[a;b]$, c'est à dire : $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, tout comme m en est la **borne inférieure** ie $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$
2. Si f est une fonction numérique continue sur $[a;b]$ alors, $f([a;b])$ est un ensemble borné

Exercice 62 :

Soient a et b 2 nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction uniformément continue sur $]a;b[$.
Démontrer qu'il est possible de prolonger f en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[a;b]$. En déduire qu'elle est bornée sur $]a;b[$

10.6.2 Théorème

Soit f une fonction numérique continue définie sur l'intervalle fermé borné $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$
Alors, f est bornée sur $[a;b]$, et atteint ses bornes c'est à dire qu'il existe $\alpha \in [a;b]$ et $\beta \in [a;b]$ tels que :

$$f(\alpha) = \inf_{x\in[a;b]} f(x) \text{ et } f(\beta) = \sup_{x\in[a;b]} f(x)$$

Démonstration

Le fait que f soit bornée a été démontré en 10.6.1.
Nous allons, maintenant, démontrer que f atteint ses bornes.

1. Nous appelons donc m la borne inférieure de $f([a;b])$.
   De la défintion de borne inférieure, nous tirons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un nombre $y_n \in f([a;b])$ tel que $m \leqslant y_n \leqslant m + \dfrac{1}{n}$.
   On construit ainsi une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $f([a;b])$; pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc $x_n \in [a;b]$ tel que $y_n = f(x_n)$
   Comme $[a;b]$ est un intervalle fermé, on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers un nombre $\alpha \in [a;b]$; nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \alpha$
   De la continuité de f, nous déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(\alpha)$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = f(\alpha)$.

De l'inégalité, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $m \leqslant y_n \leqslant m + \frac{1}{n}$, nous déduisons $y_{\varphi(n)} \leqslant m + \frac{1}{\varphi(n)}$, et, par passage à la limite, $f(\alpha) \leqslant m$.
De l'hypothèse $m \leqslant f(\alpha)$, nous déduisons $m = f(\alpha)$

2. Nous démontrerions de la même manière, l'existence d'un nombre $\beta \in [a;b]$ tel que $f(\beta) = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$

Remarque 37 :

1. Nous venons de démontrer que pour une fonction f définie sur un intervalle fermé borné $[a;b]$, la continuité est une condition nécessaire pour que cette fonction f soit bornée et atteine ses bornes. Ce n'est, par contre, pas une condition suffisante.

   Exemples :

   (a) Sur $\mathbb{R}$, la fonction $f(x) = x - [x]$ est discontinue pour toutes les valeurs entières de x. Sur l'intervalle $[0;1]$, nous avons $\inf\limits_{x \in [0;1]} f(x) = 0$ et $\sup\limits_{x \in [0;1]} f(x) = +1$. Si la borne inférieure est atteinte (nous avons $f(0) = f(1) = 0$), par contre, jamais la borne supérieure n'est atteinte : pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $f(x) \neq +1$; nous avons même $f(x) < +1$

   (b) Considérons maintenant la fonction g définie sur $[0;1]$ par :

   $$g(0) = 0 \quad g(1) = 1 \text{ et } (\forall x \in]0;+1[)\,(g(x) = 1 - x)$$

   g n'est évidemment pas continue sur $[0;1]$, mais la borne supérieure et la borne inférieure sont atteintes.

2. Nous venons aussi de démontrer que l'image, par une fonction numérique f continue d'un intervalle fermé borné $[a;b]$, est un intervalle fermé borné $[m;M]$; nous avons donc : $f([a;b]) = [m;M]$

10.6.3 Théorème

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $E \subset [a;b]$ un sous-ensemble fermé de $[a;b]$
Alors, $f(E)$ est un fermé

Démonstration

1. Si $f(E)$ est un ensemble fini, il est fermé
2. Supposons $f(E)$ infini.
   Comme $f(E) \subset f([a;b]) = [m;M]$, $f(E)$ est un ensemble borné.
   Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers une limite l ; il faut montrer que $l \in f(E)$
   Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $y_n \in f(E)$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E tels que $y_n = f(x_n)$.
   Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $x_n \in E$ et que $E \subset [a;b]$, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a;b]$. De la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, nous pouvons extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un nombre $l_x \in [a;b]$, mais, comme E est fermé et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $x_{\varphi(n)} \in E$, nous avons aussi $l_x \in E$
   f étant continue, $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(l_x)$, ce qui peut être traduit par : $\lim\limits_{n \to +\infty} y_{\varphi(n)} = f(l_x)$
   La suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, laquelle est une suite convergente telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = l$; donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_{\varphi(n)} = l$ et, ainsi, $l = f(l_x)$ avec $l_x \in E$, et donc $l \in f(E)$
   $f(E)$ est donc fermé

Exemple 28 :

1. L'image du segment $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par la fonction $f(x) = \sin x$ est l'intervalle $[0; +1]$
2. Par contre, si nous considérons la fonction $f(x) = x - [x]$ sur l'intervalle $[0; +1]$, elle n'y est pas continue et l'image du segment $[0; +1]$ n'est pas un ensemble fermé : c'est l'intervalle semi-ouvert $[0; +1[$

Remarque 38 :

La condition de de continuité d'une fonction est une condition suffisante pour que l'image d'un ensemble fermé soit fermée, mais, elle n'est pas nécessaire, c'est à dire que l'image d'un ensemble fermé par une fonction non continue peut être un ensemble fermé.

Exemple :
Soit g, la fonction définie sur $[0; +1]$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g : [0; +1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} g(0) = 0 \text{ et } g(1) = 1 \\ g(x) = 1 - x \text{ si } 0 < x < 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

g n'est pas continue sur $[0; +1]$, mais $g([0; +1]) = [0; +1]$

10.6.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$.
Alors, tout élément y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image, par f d'un élément $c \in [a; b]$

Démonstration

1. Quitte à remplacer f par $-f$, nous supposons $f(a) \leqslant f(b)$
2. Il faut donc montrer que, pour tout $y \in]f(a); f(b)[$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = y$
   Soit donc $y \in]f(a); f(b)[$
   (a) Soit $X_y = \{x \in [a; b] \text{ tel que } f(x) \leqslant y\}$
      i. Nous avons $X_y \neq \emptyset$, car comme $f(a) < y$, nous avons $a \in X_y$
      ii. D'autre part, X_y est majoré, car, pour tout $t \in X_y$, nous avons $t \leqslant b$
      X_y étant non vide et majoré admet une borne supérieure. Appelons $c = \sup X_y$
   (b) c étant la borne supérieure de X_y, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in X_y$ tel que $c - \dfrac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant c$.
   Nous créons ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de X_y telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = c$
   (c) f étant continue sur $[a; b] \subset I$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(c)$, et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $x_n \in X_y$ et donc $f(x_n) \leqslant y$, et donc, par passage à la limite, $f(c) \leqslant y$
   (d) Soit $x \in [c; b]$; alors, $x \geqslant c$ et $x \notin X_y$, et donc $f(x) > y$.
   f étant continue, $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x) = f(c)$, et donc, en utilisant les théorèmes sur limites et relation d'ordre, nous avons $f(c) \geqslant y$
   (e) En conclusion, $f(c) = y$

Remarque 39 :

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$; alors $f([a; b]) = [m; M]$, et donc, pour tout $y \in [m; M]$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = y$

10.6.5 Synthèse

L'énoncé ci-après fait la synthèse des précédnts résultats.

Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a; b]$ est bornée ; elle atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure et toute valeur comprise entre ses bornes

10.6.6 Corollaire

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \times f(b) < 0$. Alors, il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = 0$

Démonstration

Que nous ayions $f(a) \times f(b) < 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont non nulles et de signe contraire.
Pour simplifier, supposons $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$
Alors, $[f(b); f(a)] \subset f([a; b])$ et $0 \in [f(b); f(a)]$. D'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe $c \in [a; b]$ (en fait $c \in]a; b[$ puisque $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$
Ce que nous voulions

Remarque 40 :

Ce résultat est très utilisé en analyse numérique pour localiser les racines d'une équation du type $f(x) = 0$ avec f qui est une fonction continue

Exemple 29 :

1. Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair possède une racine réelle.

   En effet
   Soit $P(X) = a_{2n+1}X^{2n+1} + a_{2n}X^{2n} + \cdots + a_1 X + a_0$, et supposons $a_{2n+1} > 0$ *(le problème serait le même si $a_{2n+1} < 0$)*
   A ce polynôme, on peut aussi associer la fonction polynômiale réelle :

   $$f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1 x + a_0$$

   C'est une fonction continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
   Soit alors $A > 0$
   Il existe $X_A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant X_A \Longrightarrow f(x) > A$ et $X'_A \in \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant X'_A \Longrightarrow f(x) < -A$
   Nous avons alors $0 \in [f(X'_A); f(X_A)]$; f étant continue, il existe $x_0 \in [X'_A; X_A]$ tel que $f(x_0) = 0$
   Nous venons de démontrer que le polynôme P admet donc au moins une racine réelle

2. Une conséquence du point ci-dessus est que, si n est un nombre impair, tout nombre réel admet une racine n-ième

   Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il suffit de considérer la fonction $f(x) = x^n - a = x^{2p+1} - a$

3. Soit $f : [a; b] \longrightarrow [a; b]$ une fonction continue ; alors, il existe $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

   En effet
   Soit $g(x) = f(x) - x$; g est continue sur l'intervalle $[a; b]$ et est telle que :

   - ▷ $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$
   - ▷ $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$

   Nous avons donc $0 \in [g(b); g(a)]$; il existe donc $\alpha \in [a; b]$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est à dire tel que $f(\alpha) = \alpha$
   Ce que nous voulions

4. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $[a;b] \subset f([a;b])$; alors, il existe $\alpha \in [a;b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

En effet

Nous prenons toujours $g(x) = f(x) - x$ et nous supposons qu'il n'existe pas de nombre $\alpha \in [a;b]$ tel que $g(\alpha) = 0$

Alors, la fonction g étant continue, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $g(x) > 0$ ou bien $g(x) < 0$

Supposons, pour simplifier que $g(x) > 0$

Comme $[a;b] \subset f([a;b])$ et f étant continue, il existe $x_0 \in [a;b]$ tel que $f(x_0) = a$. Comme $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = a - x_0 \leqslant 0$, il y a donc contradiction.

Il existe donc $\alpha \in [a;b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

10.6.7 Exercices

Exercice 63 :

Soit $f(x) = x^2 \cos x + x \sin x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$

Exercice 64 :

Soient $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que

$$(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) < 0$$

Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que $f(c) = g(c)$

Exercice 65 :

Soient $p > 0$ et $q > 0$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \neq f(b)$. Démontrer qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que : $pf(a) + qf(b) = (p+q) f(c)$

Exercice 66 :

Soit $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f : [0;1] & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 - x \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \\ x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. La fonction f est-elle continue sur $[0;1]$
2. Montrer que f prend toutes les valeurs comprises entre 0 et 1

Exercice 67 :

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, une application continue telle que $f(0) = f(1)$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, il existe un nombre $\alpha_n \in [0;1]$ tel que $f(\alpha_n) = f\left(\alpha_n + \dfrac{1}{n}\right)$

10.6.8 Théorème

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, l'image de tout intervalle $I \subset E$ par f est un intervalle

Ainsi, si I est un intervalle et f fonction continue, alors $f(I)$ est un intervalle

Démonstration

Rappellons que I est un intervalle si et seulement si :

$$(\forall x \in I)\,(\forall y \in I)\,(x \leqslant y \Longrightarrow [x;y] \subset I)$$

Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et I un intervalle inclus dans E
Soient $y_1 \in f(I)$ et $y_2 \in f(I)$ tels que $y_1 < y_2$; il faut donc montrer que $[y_1; y_2] \subset f(I)$
Il existe $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$
Nous pouvons dire que l'intervalle fermé borné $[f(x_1); f(x_2)] =\subset f([x_1; x_2])$
D'après le théorème de la valeur intermédiaire, pour tout $\beta \in [y_1; y_2]$, il existe $\alpha \in [x_1; x_2]$ tel que $f(\alpha) = \beta$. I étant un intervalle, nous avons $[x_1; x_2] \subset I$, et donc $f(\alpha) = \beta \in f(I)$ et donc $[y_1; y_2] \subset f(I)$.
Ainsi, $f(I)$ est un intervalle.

Remarque 41 :

L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue, si c'est un intervalle, n'est pas forcément un intervalle ouvert. L'image directe *(sauf pour les fermés bornés)* peut ne pas être de même nature.
Par exemple :

1. Si nous prenons la fonction $f(x) = x^2$ *(cf figure 10.18)*

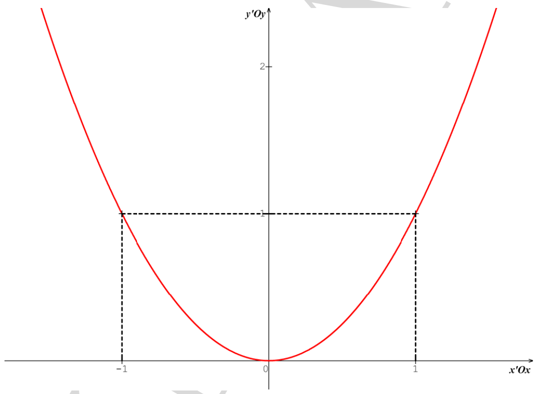

FIGURE 10.18 – Le graphe de $f(x) = x^2$

L'image de l'ouvert $]-1; +1[$ par f est l'intervalle semi-ouvert $[0; +1[$

2. Si nous prenons la fonction $f(x) = \sin x$ *(cf figure 10.19)*

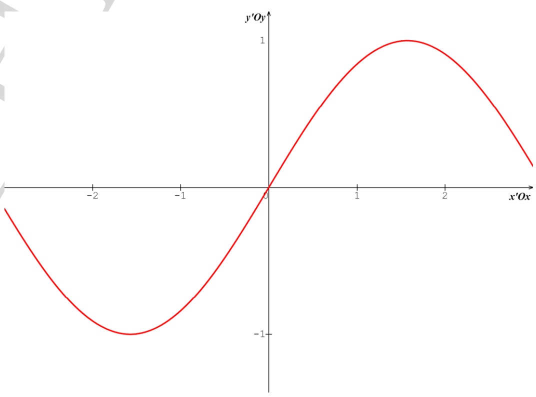

FIGURE 10.19 – Le graphe de $f(x) = \sin x$

— L'image de l'intervalle $[0; \pi[$ est $[0; +1]$
— L'image de l'intervalle $]-2\pi; +2\pi[$ *(intervalle ouvert)* est $[-1; +1]$ *(intervalle fermé)*

10.6.9 Théorème de Heine

Toute fonction f continue sur un intervalle fermé borné $[a;b]$ est uniformément continue sur $[a;b]$

Démonstration

1. Supposons que f ne soit pas uniformément continue sur l'intervalle $[a;b]$
   Soit $x \in [a;b]$
   Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\eta > 0$ il existe $x \in [a;b]$ et il existe $y \in [a;b]$ nous ayions $|x-y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$
   Donc, pour ce $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $x_n \in [a;b]$ et il existe $y_n \in [a;b]$ nous ayions $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$.
2. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [a;b]$, de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on peut extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = l$
   Nous allons démontrer que la suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers l. Nous avons :
   $$\left|y_{\varphi(n)} - l\right| \leqslant \left|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right| + \left|x_{\varphi(n)} - l\right|$$
   Comme, $\varphi(n) \geqslant n$, nous avons $\dfrac{1}{\varphi(n)} \leqslant \dfrac{1}{n}$
   Soit $\alpha > 0$.
   Il existe $N_\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_\alpha \Longrightarrow \left|x_{\varphi(n)} - l\right| < \dfrac{\alpha}{2}$
   Soit N_α^1 tel que $\dfrac{1}{N_\alpha^1} < \dfrac{\alpha}{2}$.
   Si $n \geqslant \sup\left(N_\alpha, N_\alpha^1\right)$, alors $\dfrac{1}{\varphi(n)} \leqslant \dfrac{1}{n} < \dfrac{\alpha}{2}$, et donc, pour $n \geqslant \sup\left(N_\alpha, N_\alpha^1\right)$:
   $$\left|y_{\varphi(n)} - l\right| \leqslant \left|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right| + \left|x_{\varphi(n)} - l\right| < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$
   Ainsi, $\left|y_{\varphi(n)} - l\right| < \alpha$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = l$
3. f n'est pas continue en l
   En effet, si f est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(y_{\varphi(n)}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f(l)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(y_{\varphi(n)}\right) - f\left(x_{\varphi(n)}\right) = 0$ or, c'est impossible puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\left|f\left(y_{\varphi(n)}\right) - f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right| \geqslant \varepsilon$
   f n'est donc pas continue en l

Il y a donc contradiction avec l'hypothèse, et nous concluons que f est donc uniformément continue sur $[a;b]$

Remarque 42 :

La clef de la démonstration ci-dessus est que l'intervalle $[a;b]$ est un fermé borné et que de toute suite d'éléments de $[a;b]$ on peut en extraire une sous-suite convergente

10.6.10 Exercices

Exercice 68 :

Soient a et b 2 réels tels que $a \leqslant b$
Soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ toutes deux continues et telles que, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f(x) > g(x)$
Démontrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$, nous ayions $f(x) \geqslant g(x) + \lambda$

Exercice 69 :

Démontrer que toute fonction continue et périodique est bornée

Exercice 70 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que f admette des maxima locaux en x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$.
Démontrer que f admet un minimum local en un point $c \in]x_1; x_2[$

Exercice 71 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que pour tout $x \geqslant 0$, nous ayions $f(x) < x$

1. Démontrer que $f(0) = 0$
2. Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$ tels que $0 < a < b$.
   Montrer qu'il existe $M \in [0; 1[$ tel que pour tout $x \in [a; b]$, nous ayions $f(x) \leqslant Mx$

Exercice 72 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ une fonction continue. Il faut montrer que f est constante

Exercice 73 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Il faut montrer que f est uniformément continue

10.7 Monotonie et continuité

Nous ne reviendrons pas dans cette partie sur les définitions de la monotonie donnée en 10.2.6

10.7.1 Proposition

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors, f est bornée sur $[a; b]$

Démonstration

Visualisons, par la figure 10.20 ce qu'est une fonction monotone non forcément continue

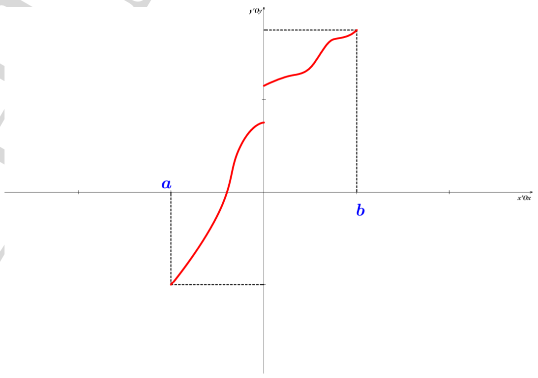

FIGURE 10.20 – Visualisation, d'une fonction monotone *(ici, croissante)*

C'est assez simple ; supposons, pour simplifier que f soit croissante, alors pour tout $x \in [a; b]$, nous avons $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, ce qui montre que f est bornée.

Remarque 43 :

Si nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : [0;+1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x-1} \end{array}\right.$$

f est croissante sur $[0;+1[$, mais n'y est pas bornée, puisque l'intervalle $[0;+1[$, s'il est borné, **n'est pas fermé**

10.7.2 Proposition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors, pour tout $x_0 \in [a;b]$, f admet une limite à gauche de x_0, c'est à dire $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ existe

Démonstration

Supposons f croissante sur $[a;b]$ et soit $x_0 \in [a;b]$
Soit $A = \{y = f(x) \text{ où } a \leqslant x < x_0\}$
Nous avons $A \subset f([a;b])$, et comme d'après 10.7.1 $f([a;b])$ est aussi bornée, l'ensemble A est borné. On appele $\mu = \sup_{x \in A} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x)$.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y' \in A$ tel que $\mu - \varepsilon < y' \leqslant \mu$, c'est à dire qu'il existe $x_1 < x_0$ tel que $f(x_1) = y'$ et $\mu - \varepsilon < f(x_1) \leqslant \mu$
f étant coissante, pour tout $x \in]x_1;x_0[$, nous avons $\mu - \varepsilon < f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant \mu$
Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, $\eta = x_0 - x_1$ tel que si $x_0 - \eta \leqslant x < x_0$ alors $\mu - \varepsilon < f(x) \leqslant \mu$, ce qui montre que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \mu$

Remarque 44 :

De la même manière, on démontrerait que f admet une limite à droite pour tout $x_0 \in [a;b]$

10.7.3 Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction injective et continue. Alors, f est strictement monotone sur I

Démonstration

Supposons que f ne soit pas strictement monotone sur I. ce qui veut dire qu'il existe
- ▷ $x_1 < x_2$ et $f(x_1) \leqslant f(x_2)$
- ▷ $x_3 < x_4$ et $f(x_3) \geqslant f(x_4)$

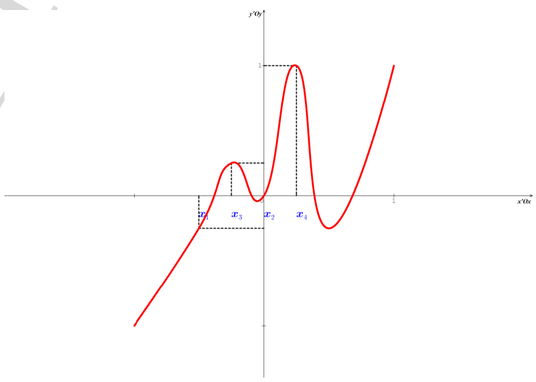

FIGURE 10.21 – Visualisation, par un graphe du fait que f ne soit pas monotone

Soit $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in [0;1]$,

$$g(t) = f(tx_1 + (1-t)x_3) - f(tx_2 + (1-t)x_4)$$

Alors, g est continue comme composée et somme de fonctions continues, nous avons :
- ▷ $g(0) = f(x_3) - f(x_4) \geqslant 0$
- ▷ $g(1) = f(x_1) - f(x_2) \leqslant 0$

Il existe donc $\lambda \in [0;1]$ tel que $g(\lambda) = 0$
Soit $x_5 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$ et $x_6 = \lambda x_2 + (1-\lambda)x_4$
Alors, $x_5 \in [x_1; x_3]$ et $x_6 \in [x_2; x_4]$, et comme I est un intervalle, nous avons $[x_1; x_3] \subset I$ et $[x_2; x_4] \subset I$ et donc $x_5 \in I$ et $x_6 \in I$
Des hypothèses $x_1 < x_2$ et $x_3 < x_4$ nous déduisons $\lambda x_1 \leqslant \lambda x_2$ et $(1-\lambda)x_3 \leqslant (1-\lambda)x_4$; l'une des deux inégalités au moins étant stricte, nous déduisons $x_5 < x_6$
Comme $g(\lambda) = f(x_5) - f(x_6) = 0$, nous avons $f(x_5) = f(x_6)$ alors que $x_5 \neq x_6$; il y a donc contradiction avec le fait que f soit injective.
f est donc strictement monotone.

10.7.4 Théorème

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur E. Soit $I \subset E$ un intervalle sur lequel f est strictement monotone. Alors :
1. f est bijective de I vers $f(I)$
2. La fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur $f(I)$ et de même sens de variation que f

Démonstration

Soit f continue et strictement monotone sur I ; pour simplifier, supposons f strictement croissante.
1. Démontrons que f est bijective de I sur $f(I)$
   (a) f est injective, puisque si $x \in I$ et $y \in I$ tels que $x \neq y$, nous avons $x < y$ ou $y < x$.
      — Si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$
      — Si $y < x$ alors $f(y) < f(x)$
      A chaque fois, donc $f(y) \neq f(x)$. f est donc bien injective
   (b) f est clairement surjective de I sur $f(I)$
   (c) f étant injective et surjective, f est bien bijective
2. f^{-1} est de même sens de variations que f
   Nous avons supposé f strictement croissante ; démontrons que f^{-1} est strictement croissante.
   Soient $y_1 \in f(I)$ et $y_2 \in f(I)$ tels que $y_1 < y_2$
   Il existe $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1) \Longleftrightarrow x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $y_2 = f(x_2) \Longleftrightarrow x_2 = f^{-1}(y_2)$
   f étant strictement croissante, nous avons
   $$y_1 < y_2 \Longleftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Longleftrightarrow x_1 < x_2 \Longleftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$
   f^{-1} est donc strictement croissante.
3. L'image d'un ouvert par f est un ouvert
   Soit donc $]a;b[\subset I$ un intervalle ouvert.
   f étant continue, $f(]a;b[)$ est un intervalle de $f(I)$, et donc, en particulier $]f(a); f(b)[\subset f(]a;b[)$
   Soit $y \in f(]a;b[)$; il existe $x \in]a;b[$ tel que $y = f(x)$; de $x \in]a;b[$, nous avons $a < x < b$ et donc $f(a) < f(x) < f(b)$, et donc $y \in]f(a); f(b)[$, et nous avons donc $f(]a;b[) \subset]f(a); f(b)[$
   D'où, nous avons $f(]a;b[) =]f(a); f(b)[$ et donc $f(]a;b[)$ est un intervalle ouvert de I
4. f^{-1} est une fonction continue sur $f(I)$
   La démonstration de cet item, elle non plus, n'a rien d'évidente
   Soit $y_0 \in f(I)$ et $\varepsilon > 0$.
   Nous allons démontrer que f^{-1} est continue en y_0. Il existe $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$

(a) **Si $x_0 \in \mathring{I}$, c'est à dire si x_0 est intérieur à I**

▷ Il existe $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta; x_0 + \eta[\subset I$; on peut même choisir $\eta < \varepsilon$

▷ f étant strictement croissante, pour tout $x \in]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$, nous avons :

$$f(x_0 - \eta) < f(x) < f(x_0 + \eta)$$

Et, en particulier

$$f(x_0 - \eta) < f(x_0) < f(x_0 + \eta) \iff f(x_0 - \eta) < y_0 < f(x_0 + \eta)$$

▷ On appelle :

⋆ $\alpha_1 = f(x_0) - f(x_0 - \eta) = y_0 - f(x_0 - \eta)$ ⋆ $\alpha_2 = f(x_0 + \eta) - f(x_0) = f(x_0 + \eta) - y_0$

Et $\alpha = \min\{\alpha_1; \alpha_2\}$

▷ Soit $y \in]y_0 - \alpha; y_0 + \alpha[$, c'est à dire $y \in f(I)$ tel que $|y - y_0| < \alpha \iff y_0 - \alpha < y < y_0 + \alpha$
De $\alpha \leqslant \alpha_1 \iff -\alpha_1 < -\alpha$ et $\alpha \leqslant \alpha_2$, nous tirons :

$$\begin{aligned} y_0 - \alpha_1 \leqslant y_0 - \alpha < y < y_0 + \alpha \leqslant y_0 + \alpha_2 &\iff y_0 - (y_0 - f(x_0 - \eta)) < y < y_0 + f(x_0 + \eta) - y_0 \\ &\iff f(x_0 - \eta) < y < f(x_0 + \eta) \end{aligned}$$

▷ f étant strictement croissante, f^{-1} l'est aussi sur $f(I)$. Donc :

$$\begin{aligned} f(x_0 - \eta) < y < f(x_0 + \eta) &\iff f^{-1}(f(x_0 - \eta)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(x_0 + \eta)) \\ &\iff x_0 - \eta < f^{-1}(y) < x_0 + \eta \\ &\iff \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| < \eta \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $y \in f(I)$, $|y - y_0| < \alpha \Longrightarrow \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| < \varepsilon$

(b) **Si $x_0 \in I \setminus \mathring{I}$**

Il existe alors $\eta > 0$ tel que $[x_0; x_0 + \eta[\subset I$ ou $]x_0 - \eta; x_0] \subset I$. Et la démonstration est semblable à celle qui précède

Remarque 45 :

Il faut remarquer que nous n'utilisons pas la continuité de f, mais la stricte monotonie de f

10.7.5 Définition d'homéomorphisme

1. Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ 2 intervalles et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$
   f est un homéomorphisme de I sur J si :
   (a) $f : I \longrightarrow J$ est bijective et continue
   (b) Et $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est, elle aussi, bijective et continue
2. 2 intervalles I et J sont dits homéomorphes s'il existe un homéomorphisme entre I et J

Exemple 30 :

1. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est un homéomorphisme de $]0; 1]$ sur $[+1; +\infty[$
2. deux intervalles ouverts non vides sont homéomorphes
   Pour le montrer, il suffit de montrer qu'un intervalle ouvert non vide $]a; b[$est homéomorphe à $]0; 1[$; pour cela, il suffit de prendre l'application affine $f(x) = \dfrac{x - a}{b - a}$
   De la même manière, pour $a > 0$, la fonction $\Phi(x) = \dfrac{a}{x}$ est un homéomorphisme de $]0; 1[$ sur $]a; +\infty[$

3. Il est assez facile de voir que 2 intervalles fermés bornés sont homéomorphes, tout comme deux intervalles semi-ouverts.
4. Un intervalle fermé borné ne peut pas être homéomorphe à un intervalle semi-ouvert, car l'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné.
5. Bien entendu, les fonctions décrites dans 10.7.4 sont des homéomorphismes.

10.7.6 Exemples de fonctions réciproques

Nous donnons ici quelques exemples de telles fonctions; elle feront toutes l'objet d'une étude plus approfondie dans le chapitre des fonctions transcendantes

1. **Les fonctions puissances**
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que $f(x) = x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$; cette fonction f admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ notée $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
   Voir les graphes en figure 10.22

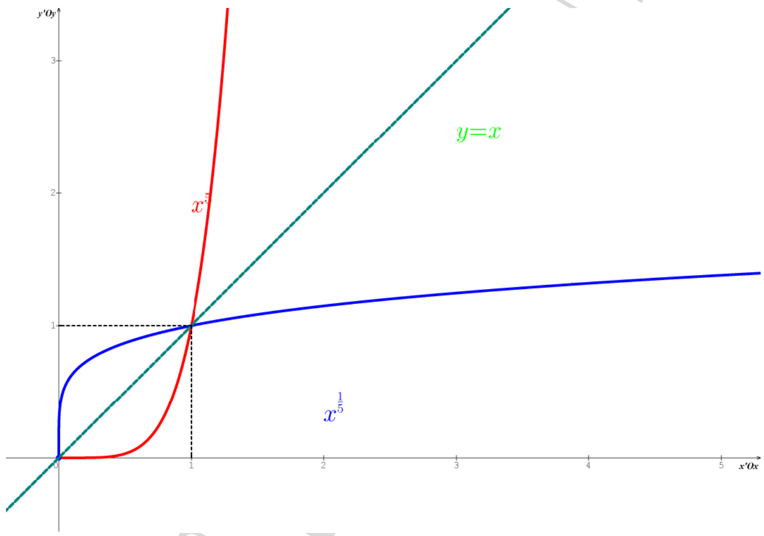

FIGURE 10.22 – Par exemple, voici les graphes des fonctions x^5 et $x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$, symétriques par rapport à la première bissectrice

2. **La fonction** $\arcsin x$
   La fonction sin de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ **n'est pas bijective**; cependant, si nous restreignons l'intervalle dans lequel sin est strictement monotone, nous obtenons une fonction bijective.
   La fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right] \Longrightarrow [-1, +1]$ est continue et strictement croissante; elle y est donc bijective, et admet, dans ces conditions, une application réciproque notée arcsin
   Nous avons donc : $\arcsin : [-1, +1] \Longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$; cette fonction est continue et croissante sur $[-1, +1]$
   Il faut absolument remarquer que :

$$\boxed{y = \arcsin x \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ x \in [-1, +1] \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}}$$

   Voir les graphes en figure 10.23
3. **La fonction** $\arccos x$

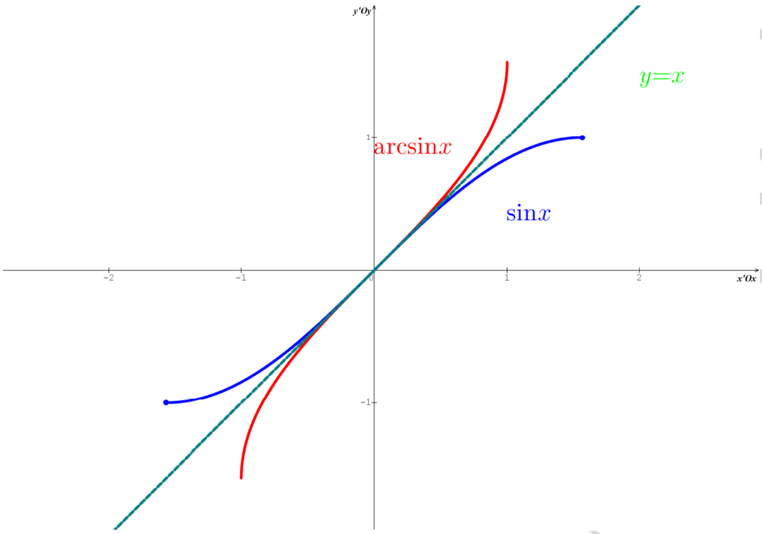

FIGURE 10.23 – Les graphes des fonctions $\arcsin x$ et $\sin x$, symétriques par rapport à la première bissectrice

La fonction cos de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas bijective ; cependant, si nous restreignons l'intervalle dans lequel cos est strictement monotone, nous obtenons une bijection.
La fonction $\cos : [0; +\pi] \rightarrow [-1, +1]$ est continue et strictement décroissante ; elle y est donc bijective, et admet, dans ces conditions, une application réciproque notée arccos
Nous avons donc : $\arccos : [-1, +1] \rightarrow [0, +\pi]$; cette fonction est continue et décroissante sur $[-1, +1]$
Il faut absolument remarquer que :

$$\boxed{y = \arccos x \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ x \in [-1, +1] \\ y \in [0, +\pi] \end{cases}}$$

Voir les graphes en figure 10.24

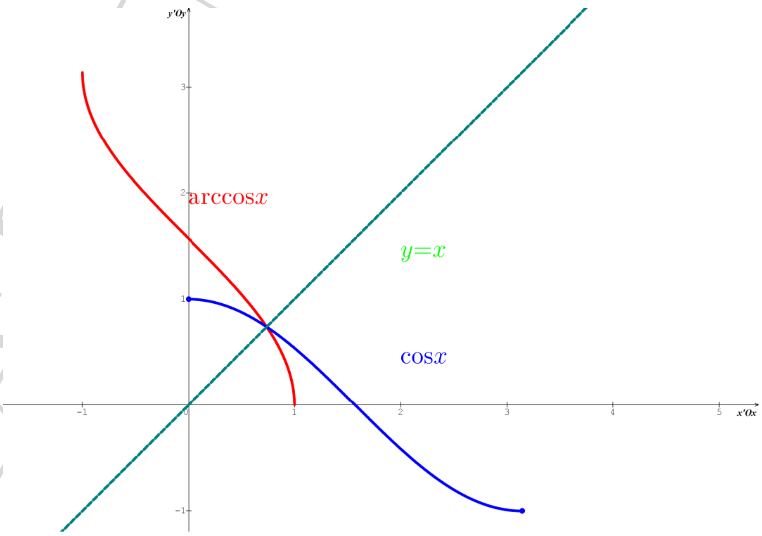

FIGURE 10.24 – Le graphe de la fonction $\arccos x$ et de la fonction $\cos x$

4. **La fonction** $\arctan x$

   La fonction tan de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas bijective; elle n'est même pas définie pour tous les x de $\mathbb{R}$: les nombres $\left\{\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right) k \in \mathbb{Z}\right\}$ n'existent pas.

   Cependant, si nous restreignons l'intervalle dans lequel tan est strictement monotone, nous obtenons une bijection.

   Ainsi, la fonction tan : $\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante; elle y est donc bijective, et admet, dans ces conditions, une application réciproque notée arctan

   Nous avons donc : $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$; cette fonction est continue et croissante sur $\mathbb{R}$

   Il faut absolument remarquer que :

$$\boxed{y = \arctan x \iff \begin{cases} x = \tan y \\ x \in \mathbb{R} \\ y \in \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}}$$

   Voir les graphes en figure 10.25

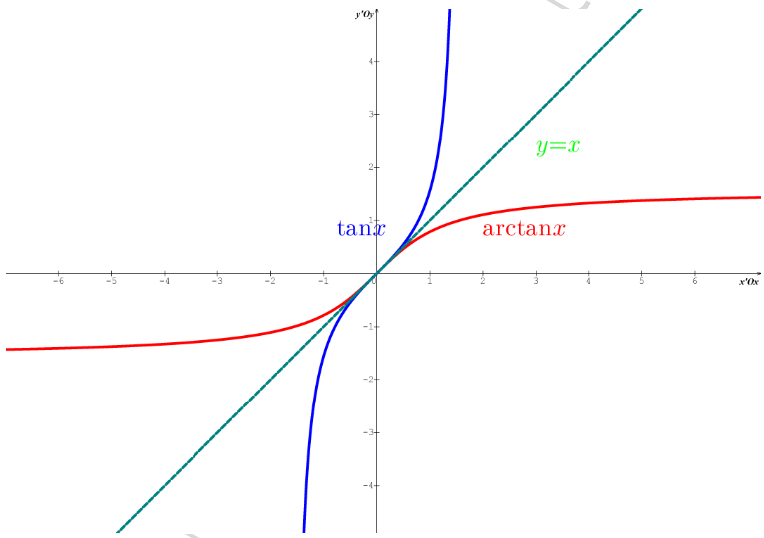

FIGURE 10.25 – Le graphe de la fonction $\arctan x$ et de la fonction $\tan x$

Exercice 74 :

Voici quelques questions simples :

1. Quel est le domaine de définition de $\arcsin(x+1)$?
2. Et celui de $\arcsin\left(x^2+1\right)$?
3. Et celui de $\arcsin\left(x^4+2\right)$?

Et quelques questions moins simples :

1. Montrer que $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
2. Montrer que $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
3. Montrer que $\arcsin x + \arccos x = +\dfrac{\pi}{2}$

10.7.7 Théorème de synthèse

Soit $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $I \subset E$ un intervalle.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue et injective
2. f est continue et strictement monotone sur I
3. f est strictement monotone sur I et $f(I)$ est un intervalle

Démonstration

1. **Supposons f est continue et injective et démontrons que f est continue et strictement monotone sur I**
   C'est très simplement l'énoncé du théorème 10.7.3.
   Nous venons de montrer que l'assertion (1) implique l'assertion (2)
2. **Supposons f est continue et strictement monotone sur I et démontrons que f est strictement monotone sur I et $f(I)$ est un intervalle**
   C'est très simplement le théorème de la valeur intermédiaire.
   Nous venons de montrer que l'assertion (2) implique l'assertion (3)
3. **Supposons f est strictement monotone sur I et $f(I)$ est un intervalle et démontrons que f est continue et injective**
   - ▷ Nous avons déjà montré que si f est strictement monotone, alors f est injective*(cf 10.7.4)*
   - ▷ Démontrons que f est continue
     Par hypothèse, $f(I)$ est un intervalle, et supposons, pour simplifier, que f soit strictement croissante
     - ⋆ D'après 10.7.2, pour tout $x_0 \in \mathring{I}$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ existe et est finie ; notons $l_{x_0}^-$ cette limite.
       De même, toujours d'après 10.7.2, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ existe et nous la notons $l_{x_0}^+$.
       Nous avons même, $l_{x_0}^- \leqslant f(x_0) \leqslant l_{x_0}^+$ [6]
     - ⋆ Supposons f non continue sur I
       Il existe donc $x_0 \in I$ tel que $x_0 \neq \inf I$ et $l_{x_0}^- < f(x_0)$ ou $f(x_0) < l_{x_0}^+$. Les démonstrations étant semblables, supposons $l_{x_0}^- < f(x_0)$
     - ⋆ Nous allons montrer que $l_{x_0}^- \in f(I)$
       Comme $\inf I < x_0$, il existe $t \in I$ tel que $\inf I \leqslant t < x_0$, et comme $t \in I$, nous avons $f(t) \in f(I)$; $f(I)$ étant un intervalle, et f étant croissante, nous avons : $[f(t) ; f(x_0)] \subset f(I)$
       Nous avons aussi $f(t) \leqslant l_{x_0}^- < f(x_0)$, donc $l_{x_0}^- \in [f(t) ; f(x_0)]$ et donc $l_{x_0}^- \in f(I)$
     - ⋆ Soit $y \in \left]l_{x_0}^- ; f(x_0)\right[$ [7]
       $f(I)$ étant un intervalle, $\left]l_{x_0}^- ; f(x_0)\right[\subset f(I)$ et il existe donc $x \in I$ tel que $y = f(x)$;
       - ∘ Si $x \geqslant x_0$, alors, de la stricte croissance, $f(x) = y \geqslant f(x_0)$; contradiction
       - ∘ Si $x < x_0$, alors, de la limite, $f(x) < l_{x_0}^-$; il y a toujours contradiction

     f est donc continue sur I

10.7.8 Corollaire

Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ 2 intervalles
Les homéomorphismes de I sur J sont les fonctions f srictement monotones telles que $f(I) = J$

10.7.9 Quelques exercices

La résolution de ces exercices nécessite de bien connaître les formules trigonométriques, et, surtout, de revenir aux définitions des fonctions trigonométriques réciproques.

6. S'il y a égalité, alors f est continue en x_0
7. Cet intervalle n'est pas vide, mais, si nous sommes cohérents avec la supposition de départ, $\left]l_{x_0}^- ; f(x_0)\right[\subsetneq f(I)$; nous allons donc arriver à une contradiction)

Exercice 75 :

1. Calculer, pour $ab \neq 1$, $\arctan a + \arctan b$
2. Calculer, pour $x \neq 0$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$

Exercice 76 :

Démontrer les égalités :

1. $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
2. $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Exercice 77 :

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$, simplifier $\arcsin(2\sin x \cos x)$

10.8 Suites de fonctions

10.8.1 Définition

Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$. $\mathbb{K}^E$ est l'ensemble des fonctions numériques, définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Une suite de fonctions numériques est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}^E$

Remarque 46 :

Comme pour les suites numériques :

1. On désigne par f_n, la fonction image de l'entier n
2. La notation $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite elle-même

Exemple 31 :

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} f_n : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \qquad x & \longmapsto & f_n(x) = x^n \end{cases}$$

2. Ou encore, cette suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} g_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \qquad x & \longmapsto & g_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{n} \end{cases}$$

Remarque 47 :

Il y a plusieurs questions qui se posent avec les suites de fonctions.
Le premier problème est lié à **la convergence**. Que veut dire, par exemple, qu'une suite de fonctions converge ?
On peut penser qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, pour tout $x \in E$, la suite numérique dépendant de x, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre l_x, et si nous posons $f(x) = l_x$, on dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f. Voici la définition formalisée

10.8.2 Définition de la convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs de $\mathbb{K}$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et admet pour limite la fonction f si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, c'est à dire

$$(\forall x \in E)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geqslant N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Remarque 48 :

1. L'entier N dépend de ε et aussi de $x \in E$
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente si et seulement si, pour tout $x \in E$, la suite numérique dépendant de x, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, c'est à dire :

$$(\forall x \in E)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall p \in \mathbb{N})\,(\forall q \in \mathbb{N})\,(p > q \geqslant N \Longrightarrow |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon)$$

Exemple 32 :

1. Prenons $E = [0;1]$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$\begin{cases} f_n : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f_n(x) = \dfrac{x}{x+n} \end{cases}$$

Pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{x+n} = 0$. La limite de cette suite de fonctions est donc la fonction nulle sur $[0;1]$; f est une fonction continue

2. Prenons toujours $E = [0;1]$, et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$\begin{cases} g_n : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & g_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} \end{cases}$$

Pour tout $x \in [0;1]$, $x \neq 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{1+nx} = 1$.
Pour $x = 0$, nous avons $g_n(0) = 0$ La limite de cette suite de fonctions est donc la fonction g définie par $g(x) = 1$ pour $x \in]0;+1]$ et $g(0) = 0$.
Cette fois-ci, g n'est pas une fonction continue, alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions g_n sont continues.*(Voir la figure 10.26)*

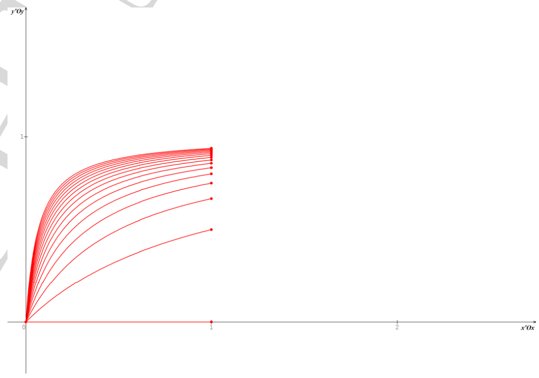

FIGURE 10.26 – Une représentation des fonctions g_n pour $n = 0, \cdots, 10$

Exercice 78 :

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, chaque fonction f_n est croissante. Démontrer que f est croissante

10.8.3 Définition de la convergence uniforme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs de $\mathbb{K}$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément et admet pour limite la fonction f si et seulement si,

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,((n \geqslant N) \Longrightarrow ((\forall x \in E)\,(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)))$$

Remarque 49 :

1. Il faut remarquer la place du quantificateur $(\forall x \in E)$
2. Il est tout à fait possible d'écrire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément et admet pour limite la fonction f si et seulement si,
$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\left((n \geqslant N) \Longrightarrow \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right)$$
C'est, le plus souvent, l'outil que nous utiliserons pour démontrer la convergence uniforme
3. Une autre façon de voir les choses est de dire que la suite numérique $\left(\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang, converge vers 0
4. Ce qui signifie que, à partir d'un certain rang *(en fait, le rang N)* le graphe des f_n se trouve dans « un tube » $f + \varepsilon \longleftrightarrow f - \varepsilon$; cf la figure 10.27

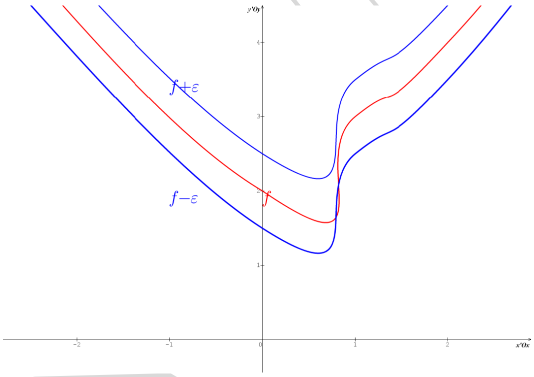

FIGURE 10.27 – Le « tube » dans lequel se trouvent les f_n

10.8.4 Proposition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs de $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers f
Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f

Démonstration

C'est très facile.
Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n > N$, alors $\sup_{t\in E} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$.
En particulier, si $n > N$, alors $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers f

Remarque 50 :

Et, évidemment, la réciproque est fausse ! !
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in \left[0; \dfrac{1}{n}\right] \\ -n\left(x - \dfrac{2}{n}\right) & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n}; \dfrac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\dfrac{2}{n}; 1\right] \end{cases}$$

Pour $x \in [0;1]$ fixé, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{2}{n} < x$, et donc si $n \geqslant N_0$, alors $f_n(x) = 0$; la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

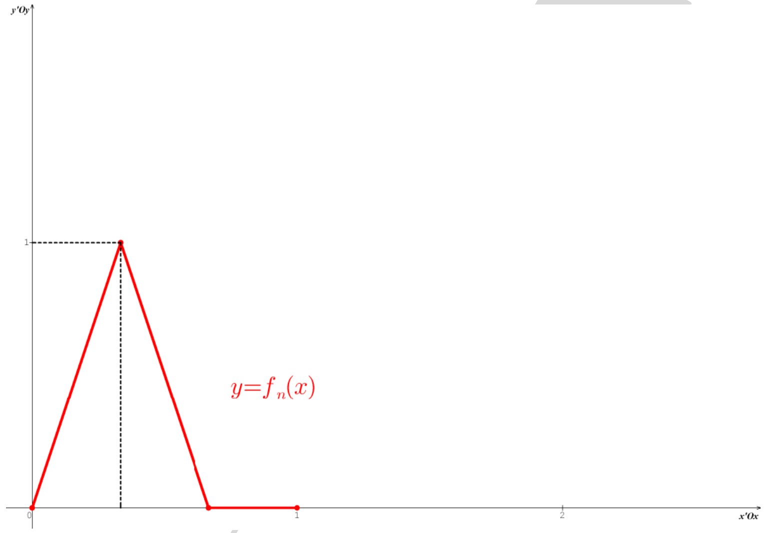

FIGURE 10.28 – Représentation graphique d'une fonction f_n

converge donc simplement vers 0.
Mais, elle ne converge pas uniformément vers 0. En effet, $\sup\limits_{x\in[0;1]} |f_n(x)| = 1$.

Exemple 33 :

Exemple de suite de fonctions qui converge uniformément :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = x\sqrt{n}e^{-nx}$$

En faisant une étude classique, on remarque que f_n admet un maximum en $x_0 = \dfrac{1}{n}$ et $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{e\sqrt{n}}$.

Donc, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \dfrac{1}{e\sqrt{n}}$; et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{e\sqrt{n}} = 0$, la suite converge donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle *(Voir la figure 10.29)*

10.8.5 Définition de suite uniformément de Cauchy pour les fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$
On dit que cette suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite uniformément de Cauchy si et seulement si :

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon)\,(\forall p \in \mathbb{N})\,(\forall q \in \mathbb{N})\left(((p \geqslant N_\varepsilon) \text{ et } (q \geqslant N_\varepsilon \in \mathbb{N})) \Longrightarrow \left(\sup_{x\in E} |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \varepsilon\right)\right)$$

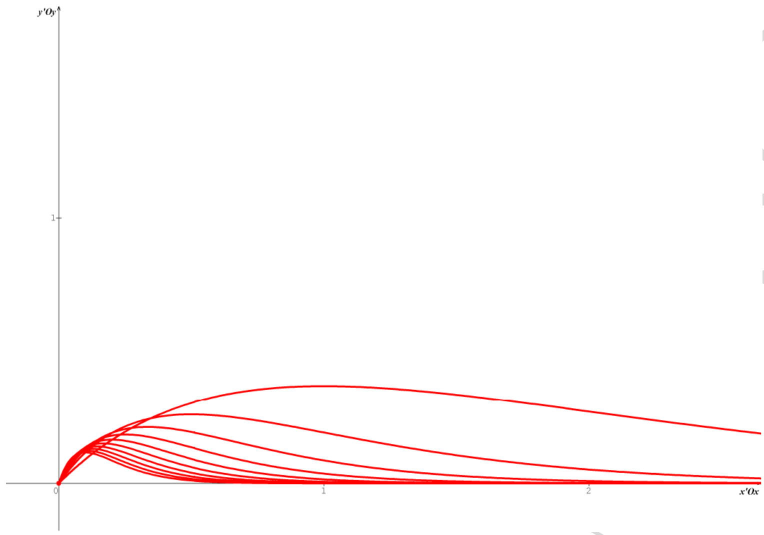

FIGURE 10.29 – Représentation graphique des fonction $f_n(x) = x\sqrt{n}e^{-nx}$ pour $n = 1, \cdots, 10$

10.8.6 Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur E si et seulement si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite uniformément de Cauchy sur E

Démonstration

1. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur E
   Nous allons démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite uniformément de Cauchy sur E
   Nous appelons f, la fonction limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   Soit $\varepsilon > 0$
   Alors, il existe un nombre entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$
   Pour $p \geqslant N_\varepsilon$ et $q \geqslant N_\varepsilon$, nous avons :
   $$|f_p(x) - f_q(x)| \leqslant |f_p(x) - f(x)| + |f_q(x) - f(x)|$$
   Et donc :
   $$\sup_{x\in E} |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \sup_{x\in E} |f_p(x) - f(x)| + \sup_{x\in E} |f_q(x) - f(x)|$$
   Donc, pour $p \geqslant N_\varepsilon$ et $q \geqslant N_\varepsilon$, nous avons :
   $$\sup_{x\in E} |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \sup_{x\in E} |f_p(x) - f(x)| + \sup_{x\in E} |f_q(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite uniformément de Cauchy sur E
2. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite uniformément de Cauchy sur E
   Nous allons démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur E
   De la définition de suite de Cauchy, on peut déduire que pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, lequel est complet, et donc convergente vers une limite que nous notons $f(x)$.
   Nous définissons ainsi une fonction f qui est limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Montrons que cette convergence est uniforme
   Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in E$.

Pour n'importe quel $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$|f_p(x) - f(x)| \leqslant |f_p(x) - f_q(x)| + |f_q(x) - f(x)|$$

Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geqslant N_\varepsilon$ et $q \geqslant N_\varepsilon$, nous avons :

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme f est limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $N_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ tel que si $q \geqslant N_\varepsilon^1$, alors :

$$|f_q(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc, pour $p \geqslant \sup\left\{N_\varepsilon^1; N_\varepsilon\right\}$ et $q \geqslant \sup\left\{N_\varepsilon^1; N_\varepsilon\right\}$ nous avons :

$$|f_p(x) - f(x)| \leqslant |f_p(x) - f_q(x)| + |f_q(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi, à tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$, indépendant de $x \in E$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > N$ $|f_p(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers f

10.8.7 Théorème d'interversion des limites

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$ adhérent à D. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D telles que :

$\Longrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x) = l_n$

$\Longrightarrow$ La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f définie sur D

Alors

$\longrightarrow$ La suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \mathbb{K}$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = l$

$\longrightarrow$ La fonction f admet une limite lorsque x tend vers a, plus précisément : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x) = l$

Nous avons donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x)\right) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$$

Démonstration

1. **On démontre que la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée**
   Nous allons montrer que la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée est bornée en utilisant le critère de Cauchy.
   En effet, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f, elle est donc uniformément de Cauchy.
   Il existe donc $N_0 \in \mathbb{N}$ telque, si $n \geqslant N_0$, alors, pour tout $x \in D$, $|f_n(x) - f_{N_0}(x)| \leqslant 1$
   Par passage à la limite, nous avons aussi $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} |f_n(x) - f_{N_0}(x)| \leqslant 1$, c'est à dire $|l_n - l_{N_0}| \leqslant 1$
   Donc, pour $n \geqslant N_0$, nous avons $|l_n| = |l_n - l_{N_0} + l_{N_0}| \leqslant |l_n - l_{N_0}| + |l_{N_0}| \leqslant 1 + |l_{N_0}|$
   En conséquence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|l_n| \leqslant \max\{|l_0|, |l_1|, \cdots, |l_{N_0-1}|, 1 + |l_{N_0}|\}$
   Nous venons de démontrer que la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
2. La $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, d'après le théorme de Bolzano-Weierstrass, on peut en exraire une suite $\left(l_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite l. Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} l_{\varphi(n)} = l$
3. **Montrons que** $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x) = l$
   Soit $\varepsilon > 0$
   Pour commencer, nous avons :

$$\begin{array}{rl} |f(x) - l| = & \left|\left(f(x) - f_{\varphi(n)}(x)\right) + \left(f_{\varphi(n)}(x) - l_{\varphi(n)}\right) + \left(l_{\varphi(n)} - l\right)\right| \\ \leqslant & \left|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)\right| + \left|f_{\varphi(n)}(x) - l_{\varphi(n)}\right| + \left|l_{\varphi(n)} - l\right| \end{array}$$

- ▷ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers** f
  Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors, pour tout $x \in E$, nous avons $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.
  Nous avons φ qui est une fonction croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$, et donc, si $n \geqslant N$, alors $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$, et donc $\left|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$
- ▷ **Nous avons** $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f_{\varphi(n)}(x) = l_{\varphi(n)}$
  Pour ce $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - a| < \eta$, alors $\left|f_{\varphi(n)}(x) - l_{\varphi(n)}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$
- ▷ **La suite** $\left(l_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **est telle que** $\lim\limits_{n\to+\infty} l_{\varphi(n)} = l$
  Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N_1$ alors $\left|l_{\varphi(n)} - l\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$
- ▷ pour $n \geqslant \sup(N, N_1)$, nous avons $\left|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ et $\left|l_{\varphi(n)} - l\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - a| < \eta$, alors $|f(x) - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Nous avons donc $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x) = l$

4. **La suite** $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** l
   Après celles que nous venons de faire, cette démonstration est des plus classiques !
   Pour y arriver, nous allons passer par un point intermédiaire bien choisi $x_0 \in D$
   Soit $\varepsilon > 0$
   $\longrightarrow$ Nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x) = l_n$
   Il existe donc $\eta_1 > 0$ tel que si $|x - a| < \eta_1$ alors $|l_n - f_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$
   $\longrightarrow$ De même, nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x) = l$
   Il existe donc $\eta_2 > 0$ tel que si $|x - a| < \eta_2$ alors $|l - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$
   $\longrightarrow$ Ainsi, en posant $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, si $|x - a| < \eta$ alors $|l - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ et $|l_n - f_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$
   $\longrightarrow$ On choisit $x_0 \in D$ tel que $|x_0 - a| < \eta$, alors nous avons $|l - f(x_0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ et $|l_n - f_n(x_0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$
   $\longrightarrow$ La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f définie sur D, il existe donc $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N$, alors, pour tout $x \in D$, nous avons $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.
   En particulier, si $n \geqslant N$, alors, $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$
   Nous avons $|l_n - l| \leqslant |l_n - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - l|$
   Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N$, alors $|l_n - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$
   Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = l$

Remarque 51 :

1. C'est un sujet très délicat que ces questions d'interversion des limites
2. Le théorème 10.8.7 reste encore valable si $a = +\infty$ ou $a = -\infty$
3. Cette démonstration est aussi valable pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

10.8.8 Proposition

Soit $E \subset \mathbb{R}$, f une fonction numérique définie sur E. On suppose qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f
On suppose, de plus, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur E
Alors, f est continue sur E

Démonstration

Soit $x_0 \in E$ et $\varepsilon > 0$
Pour commencer, nous avons :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| = & \; |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - f(x_0))| \\ \leqslant & \; |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \end{aligned}$$

- ▷ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers** f
  Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors, pour tout $x \in E$, nous avons $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$; en particulier, $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$
- ▷ **Pour tout** $n \in \mathbb{N}$**,** f_n **est continue en** x_0
  Pour ce $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$, alors $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$, alors $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$
f est donc continue en x_0

Remarque 52 :

1. Dit autrement : **La limite d'une suite de fonctions continues convergeant uniformément est continue**
2. Il y a deux mots importants à retenir : convergence uniforme et fonctions continues

Exercice 79 :

Soit $E \subset \mathbb{R}$, f une fonction numérique définie sur E. On suppose qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f. On suppose, de plus, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est uniformément continue sur E. Démontrer que f est uniformément continue sur E
(Pour résoudre cet exercice, utiliser la démonstration de 10.8.8)

10.8.9 Corollaire

Soit $E \subset \mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur E telles que :
- ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur E
- ▷ La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f définie sur E

Alors, pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$; il faut donc évaluer la différence $|f_n(x_n) - f(x)|$
Pour commencer, nous avons :

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| = & \; |(f_n(x_n) - f(x_n)) + (f_n(x_n) - f(x))| \\ \leqslant & \; |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f_n(x_n) - f(x)| \end{aligned}$$

- ▷ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers** f
  Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors, pour tout $x \in E$, nous avons $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
- ▷ **Pour tout** $n \in \mathbb{N}$**, la fonction** f_n **est continue**
  De la convergence uniforme des $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, nous déduisons que f est continue.
  Pour ce $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x_n - x| < \eta$, alors $|f(x_n) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$
- ▷ **La suite** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est telle que** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$
  Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_1$ alors $|x_n - x| \leqslant \eta$
- ▷ pour $n \sup(N, N_1)$, nous avons $|x_n - x| \leqslant \eta$ et $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$,$N_0 = \sup(N, N_1)$, tel que si $n \geqslant N_0$, alors $|f_n(x_n) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$

Exemple 34 :

Reprenons l'exemple où $E = [0;1]$, et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g_n : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} \end{array}\right.$$

Pour tout $x \in [0;1]$, $x \neq 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{1+nx} = 1$.
La limite simple de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la fonction g telle que $g(0) = 0$ et si $x \neq 0$, $g(x) = 1$

1. g n'est pas continue sur $E = [0;1]$, la convergence de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être uniforme
2. D'autre part, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite d'éléments de $[0;1]$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{1}{n}$, nous avons $g_n(x_n) = \dfrac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x_n) = \dfrac{1}{2}$, soit, bien différente de $g(0) = 0$. La convergence ne peut donc pas être uniforme.

Remarque 53 :

Il y a des fonctions continues qui peuvent être limite uniforme de suites de fonctions non continues. C'est ce que nous allons voir dans la proposition qui suit.

10.8.10 Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors :

1. Il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en escalier sur $[a;b]$, qui converge uniformément vers f
2. Il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, affines par morceaux sur $[a;b]$, qui converge uniformément vers f

Démonstration

1. **Il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en escalier sur $[a;b]$, qui converge uniformément vers f**
   - ⋆ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous considérons la subdivision de $[a;b]$:

     $$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \text{ où, pour } k = 0,\ldots,n-1 \text{ nous avons } x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$$

     C'est donc une subdivision à pas constant, puisque $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$
   - ⋆ A partir de cette subdivision, nous construisons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $[a;b]$ par :

     $$\left\{\begin{array}{l} f_n(x) = f(x_k) \text{ si } x \in [x_k; x_{k+1}[\text{ pour } k = 0,\ldots,n-1 \\ f_n(b) = f(b) \end{array}\right.$$

   - ⋆ Nous disons que cette suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en escalier sur $[a;b]$ converge uniformément vers f

     Soit $\varepsilon > 0$
     - ▷ f étant continue sur l'intervalle $[a;b]$ y est uniformément continue *(Théorème de Heine 10.6.9)*
       Il existe donc $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$ et tout $y \in [a;b]$, si $|x-y| < \eta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$
     - ▷ Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n \geqslant N$, alors $0 < \dfrac{b-a}{n} < \eta$
       Soit donc $n \geqslant N$ et $x \in [a;b]$
       Il existe $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$ tel que $x \in [x_k; x_{k+1}[$; alors $|x - x_k| < \dfrac{b-a}{n}$ et donc $|f(x) - f(x_k)| < \varepsilon$
       Or, $f_n(x) = f(x_k)$

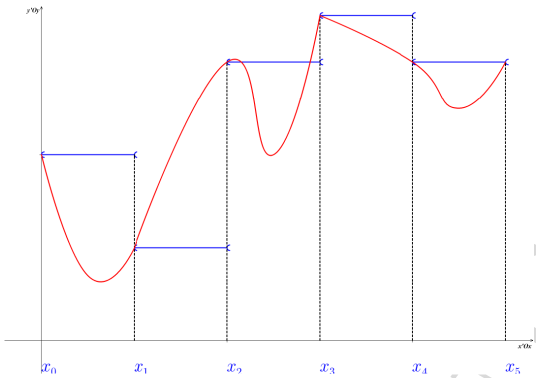

FIGURE 10.30 – Le graphe de la fonction f et le graphe de la fonction en escalier pour un n particulier

▷ Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$, pour tout $x \in [a; b]$, nous avons $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

La suite de fonctions en escaliers sur $[a; b]$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers f

2. **Il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, affines par morceaux sur $[a; b]$, qui converge uniformément vers f**

La démonstration de ce point est très semblable à celle du point ci-dessus

⋆ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous considérons toujours la subdivision de $[a; b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \text{ où, pour } k = 0, \ldots, n-1 \text{ nous avons } x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$$

⋆ A partir de cette subdivision, nous construisons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions affines par morceaux sur $[a; b]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x_k) = f(x_k) \\ \text{Si } x \in [x_k; x_{k+1}] \text{ alors } f_n(x) = \left(\dfrac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{\frac{b-a}{n}}\right)(x - x_k) + f(x_k) \end{cases}$$

C'est à dire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est affine sur l'intervalle $[x_k; x_{k+1}]$ et pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, nous avons $f_n(x_k) = f(x_k)$.

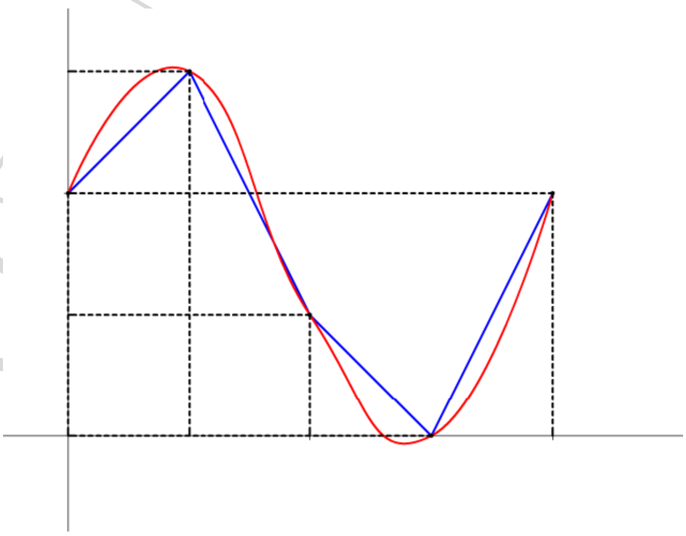

FIGURE 10.31 – Le graphe de la fonction f et le graphe de la fonction affines par morceaux pour un n particulier

⋆ Nous disons que cette suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en escalier sur $[a;b]$ converge uniformément vers f

Soit $\varepsilon > 0$

▷ f étant continue sur l'intervalle $[a;b]$ y est uniformément continue *(Théorème de Heine 10.6.9)*

Il existe donc $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$ et tout $y \in [a;b]$, si $|x-y| < \eta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

▷ Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n \geqslant N$, alors $0 < \dfrac{b-a}{n} < \eta$

Soit donc $n \geqslant N$ et $x \in [a;b]$

Il existe $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$ tel que $x \in [x_k; x_{k+1}[$; alors $|x - x_k| < \dfrac{b-a}{n}$ et donc $|f(x) - f(x_k)| < \varepsilon$

▷ Or,

$$\begin{array}{rl} |f_n(x) - f(x)| = & |f_n(x) - f(x_k) + f(x_k) - f(x)| \\ \leqslant & |f_n(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \end{array}$$

⟶ Comme $|x_k - x| < \dfrac{b-a}{n} < \eta$, nous avons $|f(x_k) - f(x)| < \varepsilon$

⟶ Ensuite,

$$|f_n(x) - f(x_k)| = \left|\left(\frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{\frac{b-a}{n}}\right)(x - x_k)\right| = |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \left(\frac{|x-x_k|}{\frac{b-a}{n}}\right)$$

Comme $x \in [x_k; x_{k+1}[$ alors $|x - x_k| < \dfrac{b-a}{n}$ et $\left(\dfrac{|x-x_k|}{\frac{b-a}{n}}\right) \leqslant 1$ et donc :

$$|f_n(x) - f(x_k)| \leqslant |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \varepsilon$$

▷ Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $|f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon$

La suite de fonctions affines par morceaux sur $[a;b]$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers f

Remarque 54 :

1. Le théorème 10.8.10 vaut aussi pour des fonctions continues par morceaux.
2. Le théorème ci-après est souvent donné en exercice ; il a cependant une grande importance théorique, c'est pourquoi je le présente ici. Sa démonstration se rapproche de 10.8.10

10.8.11 Le théorème de Dini

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a;b]$.

On suppose que :

▷ La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n \leqslant f_{n+1} \iff (\forall x \in [a;b])\,(f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x))$$

▷ La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f, laquelle est continue sur $[a;b]$

Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f

Démonstration

Remarque

Avant de commencer, et d'après les résultats sur les suites numériques, il faut voir que, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = g(x)$, nous avons, pour tout $x \in [a;b]$, $f_n(x) \leqslant g(x)$.

Mieux, nous avons $g(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$

Soit $\varepsilon > 0$

1. f est continue sur l'intervalle $[a;b]$; donc, d'après le théorème de Heine, elle y est uniformément continue. Il existe donc $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$ et tout $y \in [a;b]$, nous ayons $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$
2. Soit $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de l'intervalle $[a;b]$ telle que :
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \text{ et } x_k = a + \frac{k(b-a)}{n} \text{ avec } k = 0, \cdots, n$$
Nous choisissons $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors $\dfrac{(b-a)}{n} < \eta_\varepsilon$
3. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f. Alors, il existe un entier $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_2$, pour tout $k = 0, \cdots, n$, on ait $|f_n(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon$
4. Soit $n \geqslant \sup\{N_1; N_2\}$ et soit $x \in [a;b]$
   - Il existe $k \in \{0, \cdots, n\}$ tel que $x \in [x_k; x_{k+1}]$, et alors $|x - x_k| \leqslant \dfrac{(b-a)}{n} < \eta_\varepsilon$ et donc $|f(x) - f(x_k)| < \varepsilon$
   - Donc, dès que $n \geqslant \sup\{N_1; N_2\}$, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons :
$$\begin{array}{rl} |f(x) - f_n(x)| \leqslant & |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f_n(x)| \text{ (inégalité triangulaire)} \\ \leqslant & \varepsilon + \varepsilon + (f_n(x) - f_n(x_k)) \text{ Continuité uniforme, convergence simple et croissance de } f_n \\ \leqslant & 2\varepsilon + (f_n(x_{k+1}) - f_n(x_k)) \text{ car } f_n \text{ est croissante et } x \leqslant x_{k+1} \\ \leqslant & 2\varepsilon + (f_n(x_{k+1}) - f(x_{k+1}) + f(x_{k+1}) - f(x_k) + f(x_k) - f_n(x_k)) \\ \leqslant & 2\varepsilon + |f_n(x_{k+1}) - f(x_{k+1})| + |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_k) - f_n(x_k)| \text{ Inégalité triangulaire} \\ \leqslant & 5\varepsilon \text{ par convergence simple et continuité uniforme} \end{array}$$

   On vient donc de montrer que la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme vers f

10.8.12 Exercices

Exercice 80 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions définies sur l'intervalle fermé borné $[0;1]$ par :

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$
2. $g_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$

Exercice 81 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$

Exercice 82 :

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = x^n$ pour $x \in [0;1]$.

1. Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0;h]$ avec $0 < h < 1$
2. Qu'en est-il de la convergence uniforme sur $[0;1]$?

Exercice 83 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $x \in [0;1]$ par $f_n(x) = x^n(1-x)$

Exercice 84 :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définires sur l'intervalle fermé borné $[0;1]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = & n^2 x(1-nx) \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ f_n(x) = & 0 \text{ si } \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 85 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = & \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ f_n(x) = & 0 \text{ si } x > n \end{cases}$$

Exercice 86 :

1. Soient $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur E et à valeurs dans F qui converge uniformément vers une fonction f. Soit $g : F \longrightarrow \mathbb{K}$ une application uniformément continue. Démontrer que la suite de fonctions $(g\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g\circ f$
2. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions défnies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f. Démontrez que la suite de fonctions $\left(\dfrac{f_n}{1+f_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $\dfrac{f}{1+f^2}$

Exercice 87 :

Soient $E \subset \mathbb{R}$
On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f,bornée et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite de fonctions définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction g, bornée elle aussi.
Démontrer que la suite de fonctions $(g_n\times f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g\times f$

Exercice 88 :

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui <u>converge uniformément sur $\mathbb{R}$</u> vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme

Exercice 89 :

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_0(x) = 0 \text{ et } (\forall n\in\mathbb{N})\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)\left(f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(e^{-2x} - f_n^2(x)\right)\right)$$

1. (a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, nous avons :

$$e^{-x} - f_{n+1}(x) = \left(e^{-x} - f_n(x)\right)\phi(x) \text{ où } \phi(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}f_n(x)$$

   (b) Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}^+$, nous avons $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-x}$. En déduire que, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente. Préciser sa limite.
2. Soit $a\in\mathbb{R}^+$

(a) Montrer qu'il existe $k_a \in]0;1[$ tel que, pour tout $x \in [0;a]$:

$$e^{-x} - f_{n+1}(x) \leqslant k_a \left(e^{-x} - f_n(x)\right)$$

(b) En déduire la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}^{*+}$

3. On pose $U_n = 1 - f_n(0)$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2^{1-2^n}$

(b) On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} U_k$. Etudier la convergence de la suite numérique $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

10.9 Quelques exercices corrigés

10.9.1 Fonction numérique d'une variable réelle

Exercice 1 :

Donner les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$
   Pas exactement difficile ; nous devons toujours avoir $\sin 2x \geqslant 0$, c'est à dire $2k\pi \leqslant 2x \leqslant (2k+1)\pi$, c'est à dire $k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Donc, le domaine D est donné par :
   $$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k\pi\,;\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$$
2. $g(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$
   Ici, il faut avoir $\dfrac{2+x}{2-x} > 0$, c'est à dire $-2 < x < +2$, et donc le domaine de définition est donc : $]-2\,;\,+2[$

Exercice 2 :

Construire les graphes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = |x-3| + |x+1|$
   C'est assez simple ; il suffit d'exprimer différemment les valeurs absolue sen fonction des valeurs de x. Ecrivons ceci dans un tableau :

x		-1		3	
$\|x-3\|$	$3-x$	4	$3-x$	0	$x-3$
$\|x+1\|$	$-1-x$	0	$x+1$	4	$x+1$
$f(x)$	$-2x+2$	4	4	4	$2x-2$

   D'où le graphe. f est une **fonction affine par morceaux**

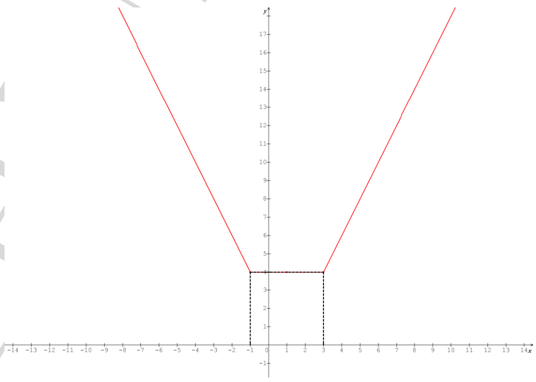

FIGURE 10.32 – Le graphe de $f(x) = |x-3| + |x+1|$

2. $g(x) = \sqrt{x - [x]}$
   Pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle $n = [x]$; ainsi, sur l'intervalle $[n\,;\,n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}$, nous avons $g(x) = \sqrt{x-n}$, d'où nous obtenons le graphe 10.33
3. $h(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$
   Comme tout à l'heure nous étudions h sur $[n\,;\,n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}$; alors, clairement, sur cet intervalle, $h(x) = n + \sqrt{x-n}$, d'où le graphe 10.34

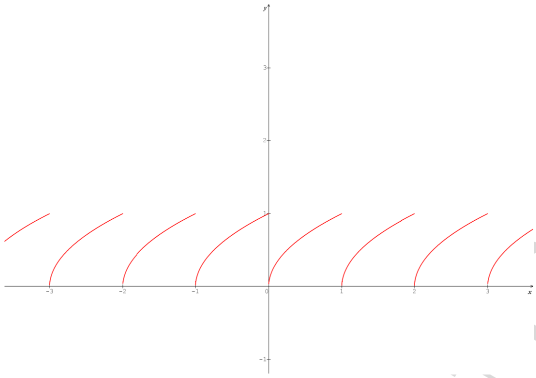

FIGURE 10.33 – Le graphe de $g(x) = \sqrt{x - [x]}$

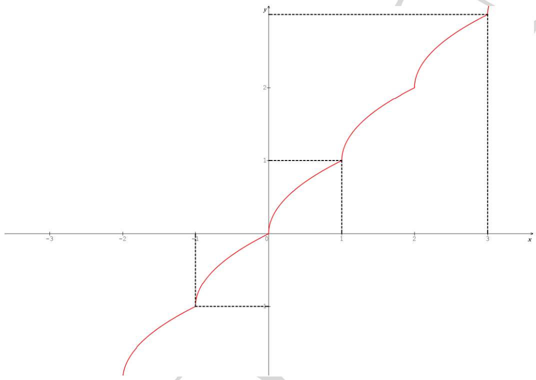

FIGURE 10.34 – Le graphe de $h(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$

Exercice 3 :

Démontrez que la fonction définie sur $]0; +1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas bornée sur $]0; +1]$

Cet exercice ne pose aucune difficulté : il suffit d'utiliser la définition de fonction non majorée.
Soit donc $A > 0$; alors, dès que $0 < x < \dfrac{1}{A}$, nous avons $\dfrac{1}{x} > A$.
Ainsi, $f(x)$ n'est pas bornée sur $]0; +1]$

Exercice 4 :

1. *Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornée sur E. Montrer que $\inf_{x \in E} f(x) = -\sup_{x \in E}(-f(x))$*

   On appelle $m = \inf_{x \in E} f(x)$

   D'après l'énoncé, pour tout $x \in E$, nous avons $m \leqslant f(x)$, et donc, pour tout $x \in E$,$-f(x) \leqslant -m$.
   Ainsi, $-m = \sup_{x \in E}(-f(x))$.

   Nous avons donc bien $\inf_{x \in E} f(x) = -\sup_{x \in E}(-f(x))$

2. *Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornées sur E telle que pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$. Montrer que : $\sup_{x \in E} f(x) \leqslant \sup_{x \in E} g(x)$ et $\inf_{x \in E} f(x) \leqslant \inf_{x \in E} g(x)$*

   C'est assez simple : pour tout $x \in E$, nous avons $f(x) \leqslant g(x) \leqslant \sup_{x \in E}(g(x))$; et, en particulier, nous avons $\sup_{x \in E}(f(x)) \leqslant \sup_{x \in E}(g(x))$

   La démonstration est la même pour prouver que $\inf_{x \in E} f(x) \leqslant \inf_{x \in E} g(x)$

3. *Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornée sur E et soit $A \subset E$. Montrer que : $\sup_{x\in A} f(x) \leqslant \sup_{x\in E} f(x)$ et $\inf_{x\in A} f(x) \geqslant \inf_{x\in E} f(x)$*

   C'est assez simple : comme $A \subset E$, si $x \in A$, alors $x \in E$, et donc, pour tout $x \in A$, $f(x) \leqslant \sup_{x\in E} f(x)$, et, en particulier, $\sup_{x\in A} f(x) \leqslant \sup_{x\in E} f(x)$.
   La justification est semblable pour l'inf

4. *Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornées sur E . Montrer que : $\sup_{x\in E}(f(x)+g(x)) \leqslant \sup_{x\in E} f(x) + \sup_{x\in E} g(x)$ et $\sup_{x\in E} f(x) + \inf_{x\in E} g(x) \leqslant \sup_{x\in E}(f(x)+g(x))$*

   - ▷ Pour tout $x \in E$, nous avons :

   $$f(x)+g(x) \leqslant f(x) + \sup_{x\in E} g(x) \leqslant \sup_{x\in E} f(x) + \sup_{x\in E} g(x)$$

     Nous en concluons que $\sup_{x\in E}(f(x)+g(x)) \leqslant \sup_{x\in E} f(x) + \sup_{x\in E} g(x)$
   - ▷ Pour tout $x \in E$, nous avons : $\inf_{x\in E} g(x) \leqslant g(x)$, et donc, pour tout $x \in E$,

   $$f(x) + \inf_{x\in E} g(x) \leqslant f(x)+g(x) \leqslant \sup_{x\in E}(f(x)+g(x))$$

     En particulier $\sup_{x\in E} f(x) + \inf_{x\in E} g(x) \leqslant \sup_{x\in E}(f(x)+g(x))$

   De cette question, nous pouvons déduire que, pour tout $x \in E$:

   $$\sup_{x\in E} f(x) + \inf_{x\in E} g(x) \leqslant \sup_{x\in E}(f(x)+g(x)) \leqslant \sup_{x\in E} f(x) + \sup_{x\in E} g(x)$$

5. *Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornées sur E telle que pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$. Montrer que : $\sup_{x\in E}(f(x)g(x)) \leqslant \sup_{x\in E} f(x) \sup_{x\in E} g(x)$ et $\sup_{x\in E} f(x) \inf_{x\in E} g(x) \leqslant \sup_{x\in E}(f(x)g(x))$*

   - ▷ Pour tout $x \in E$, nous avons $g(x) \leqslant \sup_{x\in E} g(x)$ et $f(x) \leqslant \sup_{x\in E} f(x)$.
     Par compatibilité de la relation d'ordre avec la multiplication par un nombre positif, nous avons : $f(x)g(x) \leqslant \sup_{x\in E} f(x) \sup_{x\in E} g(x)$, et, en particulier $\sup_{x\in E}(f(x)g(x)) \leqslant \sup_{x\in E} f(x) \sup_{x\in E} g(x)$
   - ▷ Démontrer que $\sup_{x\in E} f(x) \inf_{x\in E} g(x) \leqslant \sup_{x\in E}(f(x)g(x))$ est semblable aux points précédents et ne pose pas de difficultés.

6. *Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ bornée sur E telle que pour tout $x \in E$, $f(x) > 0$. Montrer que : $\sup_{x\in E}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{\inf_{x\in E} f(x)}$*

   Dans cette question, il faut utiliser le fait que f est strictement positive, et que si $0 < x \leqslant y$, alors $0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$

Exercice 6 :

Montrer que l'ensemble des 6 fonctions :

1. $f_1(x) = x$
2. $f_2(x) = \frac{1}{x}$
3. $f_3(x) = 1 - x$
4. $f_4(x) = \frac{1}{1-x}$
5. $f_5(x) = \frac{x-1}{x}$
6. $f_6(x) = \frac{x}{x-1}$

Est un groupe pour la loi de composition des applications. Etablir la table du groupe
Existe-t-il des sous groupes ?

Nous allons tout de suite construire la table de composition ; on peut remarque que f_1 est l'application identique $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ qui est l'élément neutre pour la composition des applications.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_2	f_6	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_6	f_2	f_1

On trouve comme sous-groupes :

- ▷ Le sous groupe trivial d'ordre 1 : $H_1 = \{f_1\}$
- ▷ Des sous-groupes d'ordre 2 :
  - $H_2^1 = \{f_1, f_2\}$
  - $H_2^2 = \{f_1, f_3\}$
  - $H_2^3 = \{f_1, f_6\}$
- ▷ Un sous-groupe d'ordre 3 $H_3 = \{f_1, f_4, f_5\}$

Autre remarque, le groupe n'est pas commutatif puisque $f_2 \circ f_6 = f_5$ et $f_6 \circ f_2 = f_4$; donc, $f_2 \circ f_6 \neq f_6 \circ f_2$

Exercice 7 :

1. *Pour tout $x \neq \frac{1}{2}$ on définit $g(x) = \frac{x-1}{2x-1}$. Démontrer que $g \circ g(x) = x$*

   C'est un calcul très simple :

$$g \circ g(x) = \frac{g(x) - 1}{2g(x) - 1} = \frac{\frac{x-1}{2x-1} - 1}{2\frac{x-1}{2x-1} - 1} = \frac{x - 1 - 2x + 1}{2x - 2 - 2x + 1} = \frac{-x}{-1} = x$$

2. *Démontrer qu'il n'existe aucune application $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) \left(f(x) \times f \circ g(x) = x^2 + x + 1\right)$$

   Nous avons aussi $f(g(x)) \times f \circ g^2(x) = g(x)^2 + g(x) + 1 \iff f(x) \times f \circ g(x) = g(x)^2 + g(x) + 1$, ce qui nous autorise à écrire :

$$g(x)^2 + g(x) + 1 = x^2 + x + 1 \iff \left(\frac{x-1}{2x-1}\right)^2 + \frac{x-1}{2x-1} + 1 = x^2 + x + 1$$

   On voit de suite que la dernière égalité est impossible.

   En effet, pour $x = 0$, $\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)^2 + \frac{x-1}{2x-1} + 1 = 3$, alors que, pour $x = 0$, $x^2 + x + 1 = 1$

   Il n'existe donc pas de fonction f telle que $f(x) \times f \circ g(x) = x^2 + x + 1$

Exercice 8 :

1. *On définit $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ par , pour $x \neq -1$, $\varphi(x) = \frac{-1}{x+1}$. Nous appelons $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ et $\varphi^3 = \varphi^2 \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^2 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$.*
   Démontrer que, pour tout $x \neq -1$, $\varphi^3(x) = x$

   C'est facile parce que uniquement calculatoire

2. *Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que*

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}) \left(f(x) + f \circ \varphi(x) = 3x + 2\right)$$

   La méthode sera la même que celle utilisée dans l'exercice précédent.

- ▷ On part de l'équation de base : $f(x) + f \circ \varphi(x) = 3x + 2$, et donc $f(x) = 3x + 2 - f \circ \varphi(x)$
- ▷ Ensuite, en remplaçant x par $\varphi(x)$, nous avons : $f(\varphi(x)) + f \circ \varphi^2(x) = 3\varphi(x) + 2$, et donc $f(\varphi(x)) = 3\varphi(x) + 2 - f \circ \varphi^2(x)$, et donc
$$f(x) = 3x + 2 - 3\varphi(x) - 2 + f \circ \varphi^2(x) \iff f(x) = 3x - 3\varphi(x) + f \circ \varphi^2(x)$$
- ▷ Et, pour terminer, en remplaçant x par $\varphi^2(x)$, nous avons : $f\left(\varphi^2(x)\right) + f(x) = 3\varphi^2(x) + 2$, d'où $f\left(\varphi^2(x)\right) = 3\varphi^2(x) + 2 - f(x)$ et donc :
$$f(x) = 3x - 3\varphi(x) + 3\varphi^2(x) + 2 - f(x) \iff f(x) = 1 + \frac{3}{2}\left(x - \varphi(x) + \varphi^2(x)\right)$$

D'où nous trouvons $f(x) = 1 + \dfrac{3}{2}\left(x + \dfrac{1}{x+1} - 1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1 + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x^3 - x - 1}{x(x+1)}\right)$

Exercice 11 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

1. *La fonction $F(x) = \cos x + \cos \alpha x$ est-elle périodique ?*

   On suppose F périodique et de période $T > 0$.
   Alors $F(x+T) = F(x)$, et, en particulier, $F(T) = F(0)$.
   Or, $F(0) = 2$ et donc $\cos T + \cos \alpha T = 2$. Les seules possibilités pour que $\cos T + \cos \alpha T = 2$ sont que $\cos T = \cos \alpha T = 1$. Alors :
$$\begin{cases} T = 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \alpha T = 2k_1\pi \text{ avec } k_1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff 2k\pi = \frac{2k_1\pi}{\alpha} \iff \alpha = \frac{k_1}{k}$$
   Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   Donc, F n'est pas périodique
2. *La fonction $G(x) = \sin x + \sin \alpha x$ est-elle périodique ?*

   Cette fois-ci, ce n'est pas aussi simple !!
   On suppose toujours G périodique et de période $T > 0$.
   Les dérivées successives de G sont aussi périodiques et de période T. Ainsi
$$G'(x) = \cos x + \alpha \cos \alpha x \text{ et } G''(x) = -\sin x - \alpha^2 \sin \alpha x$$
   sont aussi périodiques et de période $T > 0$.
   Donc $(G + G'')(x)$ est périodique et de période T. Or :
$$(G+G'')(x) = \left(1-\alpha^2\right)\sin \alpha x = (G+G'')(x+T) = \left(1-\alpha^2\right)\sin \alpha(x+T) = \left(1-\alpha^2\right)\sin(\alpha x + \alpha T)$$
   Nous avons donc $\alpha T = 2k\pi$
   De même $\left(\alpha^2 G + G''\right)(x)$ est périodique et de période T. Or :
$$\left(\alpha^2 G + G''\right)(x) = \left(\alpha^2 - 1\right)\sin x = \left(\alpha^2 G + G''\right)(x+T) = \left(\alpha^2 - 1\right)\sin(x+T)$$
   Nous avons donc $T = 2k_1\pi$
   D'où nous tirons : $\dfrac{2k\pi}{\alpha} = 2k_1\pi \iff \alpha = \dfrac{k}{k_1}$
   Ce qui est aussi en contradiction avec l'hypothèse où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 15 :

Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle définies sur $[0\,;+1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$
Démontrez la proposition suivante : $(\exists(x,y) \in [0\,;+1] \times [0\,;+1])\left(|xy - f(x) - g(y)| \geqslant \dfrac{1}{4}\right)$

Voilà une question qui m'a semblé difficile.
Supposons le contraire, c'est à dire que pour tout $x \in [0\,;+1]$ et tout $y \in [0\,;+1]$, nous ayions $|xy - f(x) - g(y)| < \dfrac{1}{4}$
Alors :

- Pour $x = 0$ et $y = 0$, nous avons : $|f(0) + g(0)| < \frac{1}{4}$
- Pour $x = 0$ et $y = 1$, nous avons : $|f(0) + g(1)| < \frac{1}{4}$
- Pour $x = 1$ et $y = 0$, nous avons : $|f(1) + g(0)| < \frac{1}{4}$
- Pour $x = 1$ et $y = 1$, nous avons : $|1 - (f(1) + g(1))| < \frac{1}{4}$

Nous utilisons l'inégalité triangulaire $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$
D'après cette inégalité, nous avons donc :$|1 - (f(1) + g(1))| \geqslant |1 - |f(1) + g(1)||$ Or :

$$\begin{aligned} f(1) + g(1) = & \ f(1) + f(0) - f(0) + g(0) - g(0) + g(1) \\ = & \ (f(1) + g(0)) + (f(0) + g(1)) - (f(0) + g(0)) \end{aligned}$$

Et donc, $|f(1) + g(1)| \leqslant |f(1) + g(0)| + |f(0) + g(1)| + |f(0) + g(0)| < \frac{3}{4}$, d'où, $-|f(1) + g(1)| > \frac{-3}{4}$, et donc $|1 - |f(1) + g(1)|| > 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Il y a donc une contradiction avec le fait que $|1 - (f(1) + g(1))| < \frac{1}{4}$.

Donc, $(\exists (x, y) \in [0\,;\,+1] \times [0\,;\,+1]) \left(|xy - f(x) - g(y)| \geqslant \frac{1}{4} \right)$

Exercice 16 :

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les équations suivantes :

1. $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(|f(x) - f(y)| = |x - y|)$

   Pour $y = 0$, nous avons $|f(x) - f(0)| = |x|$.
   Posons $g(x) = f(x) - f(0)$, alors, nous avons : $|g(x)| = |x|$, d'où nous déduisons que $g(x) = x$ ou $g(x) = -x$, de telle sorte que $f(x) = x + f(0)$ ou $f(x) = -x + f(0)$
   En conclusion, il existe 2 familles de solutions à l'équation :
   - $S_1 = \{f_\alpha$ telle que $f_\alpha(x) = x + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}\}$
   - $S_1 = \{f_\alpha$ telle que $f_\alpha(x) = -x + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}\}$
2. $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(|f(x) + f(y)| = |x + y|)$

   En faisant $x = 0$ et $y = 0$, nous obtenons $|2f(0)| = 0$ et donc $f(0) = 0$.
   De là, nous obtenons : $|f(x) + f(0)| = |x + 0| \Longleftrightarrow |f(x)| = |x|$, et donc, l'équation admet deux solutions $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = -x$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(f(x)\,f(y) - f(xy) = x + y)$

   Tout d'abord, en faisant $x = y = 0$, nous obtenons $f(0)^2 - f(0) = 0$, d'où nous tirons $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$
   D'autre part, nous pouvons dire, au vu de l'équation, que f est un polynôme de degré 1. Donc, $f(x) = ax$ ou $f(x) = ax + 1$.
   - Si $f(x) = ax$, alors :

   $$f(x)\,f(y) - f(xy) = x + y \Longleftrightarrow a^2xy - axy = x + y$$

     Equation qui est impossible
   - Si $f(x) = ax + 1$, alors :

   $$f(x)\,f(y) - f(xy) = x + y \Longleftrightarrow (ax + 1)(ay + 1) - (axy + 1) = x + y \Longleftrightarrow \left(a^2 - a\right) xy + a(x + y) = x + y$$

     Cette dernière égalité nous tirons $a^2 - a = 0$ et $a = 1$
     Donc, nous avons $f(x) = x + 1$

   La seule solution à l'équation $f(x)\,f(y) - f(xy) = x + y$ est la fonction $f(x) = x + 1$

4. $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(f(x+y) - f(x-y) = 4xy)$

   En faisant $x = 0$, nous obtenons $f(y) - f(-y) = 0$, ce qui montre que f est paire. D'autre part, le terme rectangle en xy, laisse suggérer que f est un polynôme du second degré. Posons donc $f(x) = ax^2 + c$ (nous avons $b = 0$ du fait de la parité). Alors :

   $$f(x+y) - f(x-y) = 4xy \iff 4axy = 4xy \iff a = 1$$

   Une famille de solutions est donc donnée par la famille de solutions $f(x) = x^2 + c$ où $c \in \mathbb{R}$.
   Réciproquement, soit f une solution quelconque et $g(x) = f(x) - x^2$. Nous allons montrer que g est une fonction constante.

   $$g(x+y) - g(x-y) = f(x+y) - f(x-y) - (x+y)^2 + (x-y)^2 = 4xy - 4xy = 0$$

   Ce qui sous-entend que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $g(x+y) = g(x-y)$, c'est à dire que g est une fonction constante, c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = c$, et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + c$, avec $c \in \mathbb{R}$

Exercice 17 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\lambda \in [0\,;+1]$ et tout $x \in I$ et tout $y \in I$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\,y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\,f(y)$$

Démontrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \alpha x + \beta$

Soient $x \in I$ et $y \in I$; alors, pour tout $t \in [x\,;y]$, il existe $\lambda \in [0\,;1]$ tel que $t = \lambda x + (1-\lambda)\,y$, et alors $f(t) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\,f(y)$.
De $t = \lambda x + (1-\lambda)\,y$, on tire $\lambda = \dfrac{y-t}{y-x}$, et donc :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{y-t}{y-x} f(x) + \left(1 - \frac{y-t}{y-x}\right) f(y) \\ &= \frac{t\,(f(y) - f(x))}{y-x} + \frac{yf(x) - xf(y)}{y-x} \end{aligned}$$

Soit $x \in I$; alors, il existe $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, $x_3 \in I$, $x_4 \in I$, avec $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, tels que $x_1 < x_2 < x << x_3 < x_4$, c'est à dire que $x \in [x_1\,;x_4]$ et $x \in [x_2\,;x_3]$ et donc :

$$f(x) = ax + b \qquad \text{et } f(x) = cx + d$$

avec a et b dépendanants de x_1 et x_4 et c et d dépendants de x_2 et x_3
Donc, $a = c$ et $b = d$ et donc $f(x) = ax + b$

Exercice 19 :

Soit x_0 un nombre réel et $\alpha > 0$, un nombre réel strictement positif. On considère une fonction f, définie sur l'intervalle ouvert $]x_0 - \alpha\,;x_0 + \alpha[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Démontrer que si $f(x_0 + h)$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0, alors $\lim\limits_{h\to 0} [f(x_0+h) - f(x_0-h)] = 0$. La réciproque est-elle vraie ?

1. **On suppose que $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = l$ où l est finie**

   (a) Première méthode
   Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = l$, il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < |h| < \eta$ alors $|f(x_0+h) - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
   De la même manière, si $0 < |h| < \eta$ alors $|f(x_0-h) - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Or $f(x_0+h)-f(x_0-h)=(f(x_0+h)-l)+(l-f(x_0-h))$ et donc :

$$|f(x_0+h)-f(x_0-h)|\leqslant|f(x_0+h)-l|+|l-f(x_0-h)|$$

Ainsi, si $0<|h|<\eta$ alors :

$$|f(x_0+h)-f(x_0-h)|\leqslant|f(x_0+h)-l|+|l-f(x_0-h)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Ce qui montre que $\lim\limits_{h\to0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$

(b) Seconde méthode

Nous avons : $\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to0}f(x_0-h)=l$ et donc :

$$\lim_{h\to0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=\lim_{h\to0}f(x_0+h)-\lim_{h\to0}f(x_0-h)=l-l=0$$

2. **La réciproque est fausse**

Soit $f:]-1\,;+1[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f:]-1\,;+1[& \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad\quad x & \longmapsto \quad f(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x=0\\ \dfrac{1}{x^2} \text{ sinon}\end{cases}\end{cases}$$

Nous avons $f(0+h)-f(0-h)=\dfrac{1}{h^2}-\dfrac{1}{(-h)^2}=0$, alors que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

Exercice 20 :

1. *Etudiez* $\lim\limits_{x\to1}\sin\left(\dfrac{\pi\left(x^2-x\right)}{x^2-1}\right)$

▷ Dans un premier temps, nous avons, pour $x\neq\pm1$

$$\frac{\pi\left(x^2-x\right)}{x^2-1}=\frac{\pi x\left(x^2-1\right)}{x^2-1}=\pi x$$

▷ De telle sorte que, pour $x\neq\pm1$, nous ayons $\sin\left(\dfrac{\pi\left(x^2-x\right)}{x^2-1}\right)=\sin\pi x$

▷ D'où $\lim\limits_{x\to1}\sin\left(\dfrac{\pi\left(x^2-x\right)}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to+1}\sin\pi x=0$

2. (a) *Etude de* $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$

Tout d'abord, il faut remarquer que $\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{x+1}{x-3}$ pour $x\neq+1$

Etudions maintenant le signe de $\dfrac{x+1}{x-3}$:

▷ Si $x\in[-1\,;+3[$, alors $\dfrac{x+1}{x-3}\leqslant0$

▷ Et si $x\notin[-1\,;+3[$, alors $\dfrac{x+1}{x-3}>0$

De telle sorte qu'il est licite de calculer la limite de l'expression à gauche de -1. Et nous avons : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}=0$

(b) *Etudier* $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$

Par contre, cette limite qui se situe à droite de -1 ne peut être calculée, puisque l'expression qui est sous la racine est négative si $x>-1$

3. *Donner* $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\sqrt{\dfrac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^4}+1}}\right)$

   Dans notre cas, il n'y a aucune difficulté; il faut, pour commencer, simplifier $\dfrac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^4}+1}$, et nous avons :

   $$\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^4}+1} = \frac{x^2\left(1+x^2\right)}{1+x^4}$$

   Expression toujours positive et qui a le bonheur de tendre vers 0 lorsque x tend vers 0. Donc, $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\sqrt{\dfrac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^4}+1}}\right) = 0$

Exercice 21 :

Pour $x \in \mathbb{K}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *fixés, donner* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$

C'est une question classique, mais néanmoins importante que nous retrouverons dans la dérivation. Nous allons la résoiudre à petits pas

- ▷ Tout d'abord, $(x+h)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{n-k} h^k = x^n + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{n-k} h^k$
- ▷ Donc, $(x+h)^n - x^n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{n-k} h^k = \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} h + \sum\limits_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{n-k} h^k = n x^{n-1} h + h \sum\limits_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{n-k} h^{k-1}$

  En appelant $\varepsilon(h) = \sum\limits_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{n-k} h^{k-1}$, nous avons $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et $(x+h)^n - x^n = n x^{n-1} h + h\varepsilon(h)$
- ▷ De telle sorte que $\dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = \dfrac{n x^{n-1} h + h\varepsilon(h)}{h} = n x^{n-1} + \varepsilon(h)$

Et donc, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = n x^{n-1}$

Exercice 22 :

Donner $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x} + 1} - \sqrt{\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x} - 1}$

Un changement de variables apparaît ici évident; le changement $X = \dfrac{1}{x}$, de telle sorte que lorsque x tend vers 0, X tend vers ∞. Nous sommes donc obligés de regarder 2 situations : la première, lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, et la seconde lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives.

1. Supposons $x > 0$. Nous faisons donc le changement de variables $X = \dfrac{1}{x}$ et nous avons :

   $$\sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} - 1} = \sqrt{X^3 + X + 1} - \sqrt{X^3 + X - 1}$$

   et nous allons étudier

   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} - 1} = \lim_{X\to +\infty} \sqrt{X^3 + X + 1} - \sqrt{X^3 + X - 1}$$

   Or, en utilisant la quantité conjuguée :

   $$\begin{aligned}\sqrt{X^3+X+1} - \sqrt{X^3+X-1} &= \frac{\left(\sqrt{X^3+X+1} - \sqrt{X^3+X-1}\right)\left(\sqrt{X^3+X+1} + \sqrt{X^3+X-1}\right)}{\sqrt{X^3+X+1} + \sqrt{X^3+X-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{X^3+X+1} + \sqrt{X^3+X-1}}\end{aligned}$$

Comme $\lim_{X\to+\infty} X^3+X+1 = \lim_{X\to+\infty} X^3+X-1 = +\infty$, nous avons

$$\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X^3+X+1} = \lim_{X\to+\infty} \sqrt{X^3+X-1} = +\infty$$

Et donc $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X^3+X+1} + \sqrt{X^3+X-1} = +\infty$.

D'où, $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+1} - \sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{X^3+X+1}+\sqrt{X^3+X-1}} = 0$

Et comme $\frac{1}{\sqrt{X^3+X+1}+\sqrt{X^3+X-1}} > 0$, lorsque X tend vers $+\infty$, l'expression

$$\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+1} - \sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-1}$$

tend vers 0 par valeurs positives.

2. Supposons $x<0$. Nous faisons à nouveau le changement de variables $X = \frac{1}{x}$ et nous avons :

$$\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+1} - \sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-1} = \sqrt{X^3+X+1} - \sqrt{X^3+X-1}$$

Cette fois ci, nous devrons étudier $\lim_{X\to-\infty} \sqrt{X^3+X+1} - \sqrt{X^3+X-1}$. Or, $\lim_{X\to-\infty} X^3+X+1 = \lim_{X\to-\infty} X^3+X-1 = -\infty$; ce qui montre que cette limite n'existe pas.

Donc, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+1} - \sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-1}$ n'existe pas.

Exercice 23 :

On considère la fonction $Q(x) = \dfrac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0}$
où $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$ *et pour* $i=0,\dots,n$, $a_i\in\mathbb{K}$ *et pour* $j=0,\dots,m$, $b_j\in\mathbb{K}$ *avec* $a_n\neq 0$ *et* $b_m\neq 0$
Donner $\lim_{x\to+\infty} Q(x)$

C'est une question classique qui nous amène à un résultat connu et beaucoup utilisé.

1. En premier, nous factorisons par le terme de plus haut degré ; c'est possible puisque $a_n\neq 0$ et $b_m\neq 0$:

$$Q(x) = \frac{a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\times\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\times\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}\times\frac{1}{x^n}\right)}{b_mx^m\left(1+\frac{b_{m-1}}{b_m}\times\frac{1}{x}+\frac{b_{m-2}}{b_m}\times\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{b_1}{b_m}\times\frac{1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{b_m}\times\frac{1}{x^m}\right)}$$

C'est à dire que :

$$Q(x) = \frac{a_nx^n}{b_mx^m}\times\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\times\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\times\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}\times\frac{1}{x^n}}{1+\frac{b_{m-1}}{b_m}\times\frac{1}{x}+\frac{b_{m-2}}{b_m}\times\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{b_1}{b_m}\times\frac{1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{b_m}\times\frac{1}{x^m}}$$

2. Ensuite, nous avons, pour $i=1,\cdots,n$ et $j=1,\cdots,m$: $\lim_{x\to+\infty}\frac{a_i}{a_n}\times\frac{1}{x^{n-i}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{b_j}{b_m}\times\frac{1}{x^{m-j}} = 0$, et donc, d'après les théorème d'addition et de quotient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\times\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\times\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}\times\frac{1}{x^n}}{1+\frac{b_{m-1}}{b_m}\times\frac{1}{x}+\frac{b_{m-2}}{b_m}\times\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{b_1}{b_m}\times\frac{1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{b_m}\times\frac{1}{x^m}} = 1$$

De telle sorte que

$$\lim_{x\to+\infty} Q(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$$

3. (a) Si $n > m$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{n-m} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = \text{signe}\left(\frac{a_n}{b_m}\right)\infty$
   (b) Si $n < m$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{n-m} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = 0$
   (c) Si $n = m$ alors $x^{n-m} = 1$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = \frac{a_n}{b_m}$

Nous retiendrons donc qu'un rapport de polynôme tend vers $+\infty$ comme le rapport de ses termes de plus haut degré

Exercice 24 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. Quelle est $\lim\limits_{x \to 0} g \circ f(x)$?

1. Premièrement, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

   En effet, $|f(x)| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$; comme $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, par les théorèmes de majoration, nous en déduisons que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
2. Par construction, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$
3. Considérons, maintenant 2 suites :
   - ▷ La première suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Alors $f(x_n) = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi = 0$ et donc $g \circ f(x_n) = 0$
     Nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} g \circ f(x_n) = 0$
   - ▷ La seconde suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Alors $f(y_n) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \neq 0$ et donc $g \circ f(y_n) = 1$
     Nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} g \circ f(y_n) = 1$

Nous avons donc trouvé 2 suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui, toutes deux tendent vers 0, mais telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} g \circ f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} g \circ f(y_n) = 1$
La fonction $g \circ f$ n'admet donc pas de limite en 0.

Exercice 25 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ où $\overset{\circ}{I}$ est l'intérieur de l'intervalle I. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions telles que : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_f$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_g$
Démontrer que $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ admettent une limite finie en x_0 et les calculer.

On montre facilement que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $\sup(x, y) = \frac{(x + y) + |x - y|}{2}$ et $\inf(x, y) = \frac{(x + y) - |x - y|}{2}$.
Ainsi, $\sup(f, g) = \frac{(f + g) + |f - g|}{2}$.
D'après les théorèmes sur les limites *(sommes, quotient, composition)*, $\lim\limits_{x \to x_0} \sup(f, g)(x)$ existe et :

$$\lim_{x \to x_0} \sup(f, g)(x) = \frac{(l_f + l_g) + |l_f - l_g|}{2} = \sup(l_f, l_g)$$

De même, $\lim\limits_{x \to x_0} \inf(f, g)(x)$ existe et $\lim\limits_{x \to x_0} \inf(f, g)(x) = \inf(l_f, l_g)$

Exercice 26 :

1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique périodique. On suppose qu'elle admet une limite finie l lorsque x tens vers $+\infty$. Montrer que f est constante.*

   Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction numérique périodique et de période T avec $T > 0$
   - Si f est constante, f est bien périodique. Et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $f(x) = l$
   - Supposons f non constante et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

     f étant non constante, il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) \neq f(x_2)$, c'est à dire tels que $|f(x_1) - f(x_2)| > 0$
     Soit $\varepsilon = \dfrac{|f(x_1) - f(x_2)|}{3}$.
     Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = l$, il existe $A > 0$ tel que si $t > A$, alors $|f(t) - l| < \varepsilon$.
     $\mathbb{R}$ est un corps archimédien, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x_1 + n_1 T > A$, et $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $x_2 + n_2 T > A$.
     Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, tels que $n > \sup(n_1, n_2)$, alors $x_1 + nT > A$ et $x_2 + nT > A$ et donc $|f(x_1 + nT) - l| < \varepsilon$ et $|f(x_2 + nT) - l| < \varepsilon$, c'est à dire, par périodicité, $|f(x_1) - l| < \varepsilon$ et $|f(x_2 +) - l| < \varepsilon$. Ainsi, :

     $$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - l + l - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - l| + |l - f(x_2)| < 2\varepsilon = \frac{2|f(x_1) - f(x_2)|}{3}$$

     C'est à dire que nous avons : $|f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{2|f(x_1) - f(x_2)|}{3}$, ce qui est impossible.
     Donc f ne peut pas être non-constante.

   Ainsi, une fonction périodique qui admet une limite finie est constante

2. *La fonction $f(x) = \sin x$ a-t-elle une limite lorsque x tend vers $+\infty$?*

   On n'apprendra à personne que la fonction $f(x) = \sin x$ est périodique et de période 2π, non constante ; elle ne peut donc admettre de limite en $+\infty$.
   Il en est de même des fonctions $g(x) = \cos x$ et $h(x) = e^{2i\pi x}$

Exercice 27 :

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg P_n = n$
Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n = \dfrac{1}{(P_n)^2 + 1}$. Etablir que la famille $\{f_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Nous allons démontrer ce résultat en deux temps.
Premièrement, il faut remarquer que comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(P_n(x))^2 + 1 > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est définie sur $\mathbb{R}$ en entier. Remarquons aussi que $(P_n(x))^2 + 1$ est un polynôme de degré $2n$
Nous appellons toujours $\mathcal{O}$ la fonction nulle, c'est à dire celle qui à tout $x \in \mathbb{R}$, fait correspondre $\mathcal{O}(x) = 0$

1. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, n réels tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = \mathcal{O}$, ce qui signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0$, ce qui est équivalent à écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$\lambda_1 \frac{1}{(P_1(x))^2 + 1} + \lambda_2 \frac{1}{(P_2(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_n \frac{1}{(P_n(x))^2 + 1} = 0$$

   - En multipliant l'expression ci dessus par x^2, nous avons :

   $$\begin{cases} \lambda_1 \dfrac{1}{(P_1(x))^2 + 1} + \lambda_2 \dfrac{1}{(P_2(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_n \dfrac{1}{(P_n(x))^2 + 1} = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ \lambda_1 \dfrac{x^2}{(P_1(x))^2 + 1} + \lambda_2 \dfrac{x^2}{(P_2(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_n \dfrac{x^2}{(P_n(x))^2 + 1} = 0 \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $2 \leqslant k \leqslant n$, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{(P_k(x))^2 + 1} = 0$ et donc

$$\lim_{x \to +\infty} \lambda_1 \frac{x^2}{(P_1(x))^2 + 1} + \lambda_2 \frac{x^2}{(P_2(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_n \frac{x^2}{(P_n(x))^2 + 1} = \frac{\lambda_1}{a_1^2} = 0$$

Et donc, $\lambda_1 = 0$

- Nous venons donc de montrer que si $\lambda_1 \dfrac{1}{(P_1(x))^2 + 1} + \lambda_2 \dfrac{1}{(P_2(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_n \dfrac{1}{(P_n(x))^2 + 1} = 0$, alors $\lambda_1 = 0$, c'est à dire :

$$\lambda_2 \frac{1}{(P_2(x))^2 + 1} + \lambda_3 \frac{1}{(P_3(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_n \frac{1}{(P_n(x))^2 + 1} = 0$$

Multiplions maintenant l'expression ci-dessus par x^4. Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda_2 \dfrac{1}{(P_2(x))^2 + 1} + \lambda_3 \dfrac{1}{(P_3(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_n \dfrac{1}{(P_n(x))^2 + 1} = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ \lambda_2 \dfrac{x^4}{(P_2(x))^2 + 1} + \lambda_3 \dfrac{x^4}{(P_3(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_n \dfrac{x^4}{(P_n(x))^2 + 1} = 0 \end{array} \right.$$

Et de la même manière que ci-dessus, nous montrons que $\lambda_2 = 0$

- En itérant ce procédé, nous démontrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, ce qui montre que la famille $\{f_k ; 1 \leqslant k \leqslant n\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

2. Mais, la démonstration ci-dessus n'est pas suffisante pour démontrer que la famille $\{f_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. La définition précise dit :

   La famille $\{f_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ si et seulement si, toute famille finie $\{f_{n_k} ; 1 \leqslant k \leqslant p\}$ extraite de la famille $\{f_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

   Soit donc $\{f_{n_k} ; 1 \leqslant k \leqslant p\}$ une famille finie extraite de $\{f_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$. Nous supposons, pour simplifier, que $n_1 < n_2 < \cdots < n_p$

   Pour démontrer qu'elle est libre, il faut démontrer que pour tout réel $\lambda_{n_1}, \cdots, \lambda_{n_p}$, l'implication :

$$\lambda_{n_1} f_{n_1} + \lambda_{n_2} f_{n_2} + \cdots + \lambda_{n_p} f_{n_p} = \mathcal{O} \Longrightarrow \lambda_{n_1} = \lambda_{n_2} = \cdots = \lambda_{n_p} = 0$$

   La démonstration est semblable à celle que nous avons faite dans le point 1 : nous commençons par multiplier l'expression par x^{2n_1}

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda_{n_1} f_{n_1} + \lambda_{n_2} f_{n_2} + \cdots + \lambda_{n_p} f_{n_p} = \mathcal{O} \\ \Longleftrightarrow \\ \lambda_{n_1} \dfrac{1}{(P_{n_1}(x))^2 + 1} + \lambda_{n_2} \dfrac{1}{(P_{n_2}(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_{n_p} \dfrac{1}{\left(P_{n_p}(x)\right)^2 + 1} = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ \lambda_{n_1} \dfrac{x^{2n_1}}{(P_{n_1}(x))^2 + 1} + \lambda_{n_2} \dfrac{x^{2n_1}}{(P_{n_2}(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_{n_p} \dfrac{x^{2n_1}}{\left(P_{n_p}(x)\right)^2 + 1} = 0 \end{array} \right.$$

   De la même manière, pour $2 \leqslant k \leqslant p$, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{2n_1}}{(P_{n_k}(x))^2 + 1} = 0$ et donc

$$\lim_{x \to +\infty} \lambda_{n_1} \frac{x^{2n_1}}{(P_{n_1}(x))^2 + 1} + \lambda_{n_2} \frac{x^{2n_1}}{(P_{n_2}(x))^2 + 1} + \cdots + \lambda_{n_p} \frac{x^{2n_1}}{\left(P_{n_p}(x)\right)^2 + 1} = \frac{\lambda_{n_1}}{a_{n_1}^2} = 0$$

   Et donc, $\lambda_{n_1} = 0$

   Et comme au-dessus, nous itérons pour obtenir $\lambda_{n_1} = \lambda_{n_2} = \cdots = \lambda_{n_p} = 0$, ce qui montre que la famille $\{f_{n_k} ; 1 \leqslant k \leqslant p\}$ extraite de la famille $\{f_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

   Et donc la famille dénombrable $\{f_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 28 :

Soit $\alpha > 0$. Soient $f :]0;\alpha[\longrightarrow \mathbb{K}$ et $g :]0;\alpha[\longrightarrow \mathbb{K}$, 2 fonctions numériques. On suppose $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = L$ avec $L \in \mathbb{K}$ et on suppose de plus que pour tout $x \in]0;\alpha[$ et tout $y \in]0;\alpha[$,

$$|g(x) - g(y)| \leqslant |f(x) - f(y)|$$

Démontrer que g admet une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

C'est simplement une application du critère de Cauchy pour les fonctions.
Soit $\varepsilon > 0$
f admettant une limite en 0 par valeurs positives, f vérifie donc le critère de Cauchy pour les fonctions. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]0;\alpha[$ et tout $y \in]0;\alpha[$ tels que $|x-y| \leqslant \eta$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
De l'hypothèse, $|g(x) - g(y)| \leqslant |f(x) - f(y)|$, on peut écrire que pour tout $x \in]0;\alpha[$ et tout $y \in]0;\alpha[$ tels que $|x-y| \leqslant \eta$, alors $|g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$.
Ce qui montre que g vérifie le critère de Cauchy pour les fonctions et que donc, g admet une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

Exercice 29 :

Calculez les limites suivantes :

1. (a) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$

   Nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left[\dfrac{1}{x}\right] \leqslant \dfrac{1}{x} < \left[\dfrac{1}{x}\right] + 1$

   ▷ <u>Si $x > 0$</u>, nous avons :

   $$\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1 \Longrightarrow x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant 1 < x\left[\frac{1}{x}\right] + x$$

   C'est à dire : $1 - x < x\left[\dfrac{1}{x}\right] \leqslant 1$

   Par le théorème des limites par encadrements, nous déduisons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = +1$

   ▷ <u>Si $x < 0$</u>, nous avons :

   $$\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1 \Longrightarrow x\left[\frac{1}{x}\right] + x < 1 \leqslant x\left[\frac{1}{x}\right]$$

   C'est à dire : $1 \leqslant x\left[\dfrac{1}{x}\right] < 1 - x$

   Par le théorème des limites par encadrements, nous déduisons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = +1$

   En conclusion, $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = 1$

   (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$

   Si $x > 1$, alors $0 < \dfrac{1}{x} < 1$ et $\left[\dfrac{1}{x}\right] = 0$, et donc, pour tout $x > 1$, $x\left[\dfrac{1}{x}\right] = 0$ d'où nous déduisons que $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left[\dfrac{1}{x}\right] = 0$

   (c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\left[\dfrac{1}{x}\right]$

Comme toujours, nous avons, pour tout $x > 0$, $\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1$, et en multipliant par $\sqrt{x}$:

$$\sqrt{x}\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} < \sqrt{x}\left[\frac{1}{x}\right] + \sqrt{x} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} < \sqrt{x}\left[\frac{1}{x}\right]$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = +\infty$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\left[\frac{1}{x}\right] = +\infty$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x}$

Il y a deux méthodes de résolution pour cette question :

▷ La première qui consiste à utiliser l'encadrement classique et qui nous fait aboutir à l'inégalité :

$$1 - \frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \leqslant 1$$

▷ La seconde méthode consiste à faire le changement de variables $X = \frac{1}{x}$ et nous avons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = \lim_{\substack{X\to 0\\ X>0}} X\left[\frac{1}{X}\right] = +1$$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = +1$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left[\frac{1}{x}\right] + x}{\left[\frac{1}{x}\right] - x}$

Nous avons, pour $x \neq 0$: $\dfrac{\left[\frac{1}{x}\right] + x}{\left[\frac{1}{x}\right] - x} = \dfrac{x\left[\frac{1}{x}\right] + x^2}{x\left[\frac{1}{x}\right] - x^2}$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$, nous avons $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] + x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] - x^2 = 1$, et donc,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left[\frac{1}{x}\right] + x}{\left[\frac{1}{x}\right] - x} = 1$$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[x - \frac{1}{x}\right]$

Nous avons toujours : $\left[x - \frac{1}{x}\right] \leqslant x - \frac{1}{x} < \left[x - \frac{1}{x}\right] + 1$

▷ Si $x > 0$, alors $x\left[x - \frac{1}{x}\right] \leqslant x^2 - 1 < x\left[x - \frac{1}{x}\right] + x$, inégalité qui est équivalente à :

$$x^2 - 1 - x < x\left[x - \frac{1}{x}\right] \leqslant x^2 - 1$$

Ce qui donne $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ x > 0}} x\left[x - \frac{1}{x}\right] = -1$

▷ Cette fois ci, si $x < 0$, alors $x\left[x - \frac{1}{x}\right] + x < x^2 - 1 \leqslant x\left[x - \frac{1}{x}\right]$, ce qui donne, de manière équivalente :

$$x^2 - 1 \leqslant x\left[x - \frac{1}{x}\right] < x^2 - 1 - x$$

Et nous avons toujours $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x\left[x - \frac{1}{x}\right] = -1$

En conclusion, $\lim\limits_{x\to 0} x\left[x - \frac{1}{x}\right] = -1$

2. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} - (x+1)\right)$

Nous sommes, ici, devant une indétermination qu'il faut lever, de manière classique :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x+1} - (x+1) &= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - (x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+x+1} + (x+1)\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + (x+1)} \\
&= \frac{x^2+x+1-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+x+1} + (x+1)} \\
&= \frac{-x}{\sqrt{x^2+x+1} + (x+1)} \\
&= -\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + x\left(\frac{1}{x}+1\right)} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \left(\frac{1}{x}+1\right)}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right) = 1$, nous avons :

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \left(\frac{1}{x}+1\right)} = -\frac{1}{2}$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} - (x+1)\right) = -\frac{1}{2}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)$

Comme tout à l'heure :

$$\begin{aligned}
x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right) &= x \times \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)} \\
&= x \times \frac{x+\sqrt{x+1} - x - \sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)} \\
&= x \times \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)} \\
&= x \times \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)} \\
&= x \times \frac{2}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)} \\
&= \frac{2x}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)}
\end{aligned}$$

Maintenant, nous nous intéressons au dénominateur :

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)$$
$$=$$
$$\left(\sqrt{x+x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{x+x\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)$$
$$=$$
$$\left(\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)\times\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)$$
$$=$$
$$x\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)$$

De telle sorte que :

$$\begin{aligned}
x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right) &= \frac{2x}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}\\
&= \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}\\
&= \frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=2$, de telle sorte que $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)=\frac{1}{2}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right)$

Nous allons, dans un premier temps, nous intéresser à $\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1} &= \frac{\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right)\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}\right)}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}}\\
&= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}}\\
&= \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}\\
&= \frac{2}{\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}
\end{aligned}$$

Regardons, maintenant, le dénominateur :

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right) &= x^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}\right)\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)\\
&= x^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)
\end{aligned}$$

De telle sorte que :

$$x^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right)=\frac{2x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}$$
$$=\frac{2}{\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=4$,

nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right)=\frac{1}{2}$

Exercice 30 :

La fonction $f(x)=\dfrac{x^x}{[x]^{[x]}}$ définie pour $x\geqslant 1$ admet-elle une limite en $+\infty$?

- ▷ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $x_n=n$; alors $f(x_n)=\dfrac{n^n}{n^n}=1$.
  Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=1$
- ▷ Soit, maintenant, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $y_n=n+\dfrac{1}{2}$.
  Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=+\infty$ et $[y_n]=n$

  Maintenant, $f(y_n)=\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n^n}=\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^n}{n^n}\times\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^n}{n^n}\times\sqrt{n+\frac{1}{2}}$

  - Tout d'abord, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+\frac{1}{2}}=+\infty$
  - Ensuite, $\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^n}{n^n}=\left(\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n}\right)^n=\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$.

  Or, $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}=e^{\frac{1}{2}\times 2n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}=e^{\frac{1}{2}\times\frac{\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}}}$.

  Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}}=1$ *(limite remarquable)*, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n=\sqrt{e}$

  Nous en déduisons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)=+\infty$

En conclusion, nous avons trouvé 2 suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui toutes deux tendent vers $+\infty$ et telles que les limites en $+\infty$ de $f(x_n)$ et $f(y_n)$ sont différentes.
La fonction f n'admet donc pas de limite en $+\infty$

Exercice 31 :

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie, pour tout $x\in\mathbb{R}$ par : $f(x)=\lim\limits_{m\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\left((\cos(n!\pi x))^{2m}\right)\right)$ Démontrer que $f=1_{\mathbb{Q}}$ où $1_{\mathbb{Q}}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathbb{Q}$

1. Supposons $x\in\mathbb{Q}$; alors, il existe $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ tels que $x=\dfrac{p}{q}$. Pour $n\geqslant q$, alors $n!x\in\mathbb{Z}$ et $\cos(n!\pi x)=\pm 1$ et $(\cos(n!\pi x))^2=1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos(n!\pi x))^2=1$.

Comme $(\cos(n!\pi x))^{2m} = \left((\cos(n!\pi x))^2\right)^m$, pour $n \geqslant q$ et tout $m \in \mathbb{N}$, $(\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$ et donc si $x \in \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{m \to +\infty}\left(\lim\limits_{n \to +\infty}\left((\cos(n!\pi x))^{2m}\right)\right) = 1$

2. Si $x \notin \mathbb{Q}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant (\cos(n!\pi x))^2 < 1$ et donc $\lim\limits_{m \to +\infty}\left((\cos(n!\pi x))^2\right)^m = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{m \to +\infty}\left(\lim\limits_{n \to +\infty}\left((\cos(n!\pi x))^{2m}\right)\right) = 0$

Vous avons donc bien $f = 1_{\mathbb{Q}}$

10.9.2 Fonctions continues

Exercice 32 :

Cet exercice n'est pas typique des fonctions continues, mais a plutôt sa place dans la théorie des ensembles. Mais, je le maintiens ici, parce que, justement, nous l'utilisons.

Soit E et F 2 ensembles quelconques et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soient $A \subset F$ et $B \subset F$. Démontrez que nous avons l'implication :

$$A \subset B \Longrightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$

Soit $x \in f^{-1}(A)$
Alors $f(x) \in A$. Comme $A \subset B$, nous avons $f(x) \in B$, et donc $x \in f^{-1}(B)$
D'où $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

2. Soient $I \subset E$ et $J \subset F$. Démontrer que nous avons :

$$f(I) \subset J \Longleftrightarrow I \subset f^{-1}(J)$$

Tout d'abord, il faut faire remarquer que $f^{-1}(J) = \{x \in E \text{ tels que } f(x) \in J\}$ et que

$$f(I) = \{y \in F \text{ tels que il existe } x \in I \text{ tels que } f(x) = y\}$$

D'autre part, pour tout $y \in F$, $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$ est un ensemble ; c'est l'ensemble :

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E \text{ tels que } y = f(x)\}$$

On ne connaît rien de f, ni si elle est surjective, injective ou bijective

1. Supposons $f(I) \subset J$
Nous allons montrer que $I \subset f^{-1}(J)$
Soit donc $x \in I$.
Alors, $y = f(x)$ est tel que $y \in f(I)$ et donc $y \in J$, c'est à dire que $f(x) \in J$, et donc $x \in f^{-1}(J)$
Donc, $I \subset f^{-1}(J)$

2. Réciproquement, supposons $I \subset f^{-1}(J)$
Nous allons donc démontrer que $f(I) \subset J$
Soit donc $y \in f(I)$
Il existe donc $x \in I$ tel que $y = f(x)$; comme, par hypothèse, $I \subset f^{-1}(J)$, alors $f(x) \in J$ et donc $y \in J$.
Nous avons bien $f(I) \subset J$

Exercice 33 :

1. *Soit f une fonction continue et positive sur un voisinage V de x_0. Démontrer que la fonction $F(x) = \sqrt{f(x)}$ est continue en x_0*

   Soit $\varepsilon > 0$
   Il faut donc majorer $\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}\right|$. La démonstration est en tout point semblable à celle faite en 10.4.2
   - Si $f(x_0) = 0$, alors la quantité $\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}\right|$ devient $\sqrt{f(x)}$ et $\sqrt{f(x)} \leqslant \varepsilon$ si et seulement si $0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon^2$
     f étant continue en x_0, pour ε^2, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$ alors $0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon^2$.
     Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$ alors $\sqrt{f(x)} \leqslant \varepsilon$
   - Supposons maintenant $f(x_0) > 0$. Alors,

   $$\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}\right| = \frac{\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}\right|\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}\right)}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}} = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)}}$$

   Comme $\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(x_0)} \geqslant \sqrt{f(x_0)}$, nous avons $\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}\right| \leqslant \dfrac{|f(x) - f(x_0)|}{\sqrt{f(x_0)}}$.
   f étant continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$ alors $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon \times \sqrt{f(x_0)}$
   Ainsi, si $|x - x_0| < \eta$ alors $\left|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}\right| \leqslant \dfrac{|f(x) - f(x_0)|}{\sqrt{f(x_0)}} \leqslant \dfrac{\varepsilon \times \sqrt{f(x_0)}}{\sqrt{f(x_0)}} = \varepsilon$

   Nous avons donc $F(x) = \sqrt{f(x)}$ continue en x_0

2. *Soit g une fonction définie et continue sur un voisinage V de x_0. Démontrer que la fonction $G(x) = |g(x)|$ est continue en x_0*

   Soit $\varepsilon > 0$.
   La démonstration suit toujours celle faite en 10.4.2. Elle est basée sur le fait que :

   $$||g(x)| - |g(x_0)|| \leqslant |g(x) - g(x_0)|$$

   g étant continue en x_0, il existe donc $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$ alors $|g(x) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon$, et donc, si $|x - x_0| < \eta$ alors $||g(x)| - |g(x_0)|| \leqslant \varepsilon$.
   Ainsi, la fonction $G(x) = |g(x)|$ est elle continue en x_0

Exercice 35 :

Soient $E \subset \mathbb{R}$ et 3 fonctions f, g et h, définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continues en $x_0 \in E$. Nous définissons la fonction $\operatorname{Mil}(f, g, h)(x)$ par :

$$\operatorname{Mil}(f, g, h)(x) = \operatorname{Mil}(f(x), g(x), h(x))$$

Montrez que la fonction $\operatorname{Mil}(f, g, h)$ est continue en x_0

Il suffit de remarquer que $\operatorname{Mil}(a, b, c) = a + b + c - \sup(a, b, c) - \inf(a, b, c)$ et que donc

$$\operatorname{Mil}(f, g, h) = a + b + c - \sup(f, g, h) - \inf(f, g, h)$$

Nous en déduisons que, puisque $f + g + h$ est continue en x_0, que $\sup(f, g, h)$ et $\inf(f, g, h)$ sont continues en x_0, que $\operatorname{Mil}(f, g, h)$ est continue en x_0

Exercice 36 :

Est-il possible de prolonger par continuité les fonctions suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

1. $f(x) = \dfrac{1}{2x}\left[(1 + x)^n - 1\right]$ *avec* $n \in \mathbb{N}$

   Exercice déjà résolu !!

Il suffit de voir que $(1+x)^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k = nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k = nx + x^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{k-2}$

Donc, $\frac{1}{2x}\left[(1+x)^n - 1\right] = \frac{n}{2} + \frac{x}{2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{k-2}$

Ainsi, $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{n}{2}$ et nous prolongeons par continuité en 0, en posant $f(0) = \frac{n}{2}$

2. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

   Pas grande difficulté, puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|$ et donc $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, et on pose alors $f(0) = 0$

   Le graphe de $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ explique bien ce qui se passe au voisinage de 0

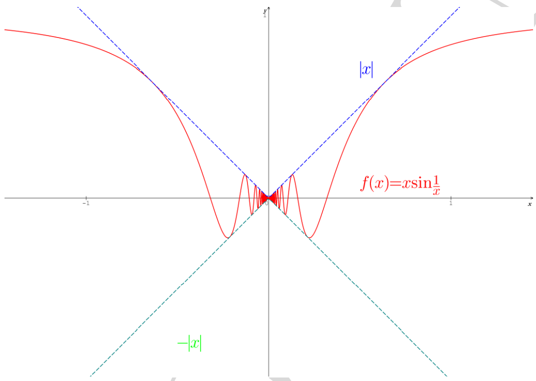

FIGURE 10.35 – Le graphe de $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ encadré par les graphe de $|x|$ et $-|x|$

3. $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$

   Il est clair qu'il est impossible de prolonger cette fonction en 0 puisqu'elle n'y admet pas de limite.

   * Soit $x_n = \frac{1}{n\pi}$;
     Alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $f(x_n) = n\pi \sin n\pi = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$
   * Soit $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$;
     Alors $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ et $f(y_n) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$. Donc $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = +\infty$

   f n'admet donc pas de limite en 0 et ne peut y être continue.

4. $f(x) = x \left[\frac{1}{x}\right]$

   On a déjà démontré que $\lim_{x\to 0} x \left[\frac{1}{x}\right] = 1$; donc, c'est fini

Exercice 37 :

Etudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

1. $f(x) = \sqrt{x - [x]}$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Si $x \in [n; n+1[$ alors $f(x) = \sqrt{x-n}$ et est continue pour tout $x_0 \in [n; n+1[$
   Le problème se pose essentiellement en $x_0 = n$ où $n \in \mathbb{N}^*$; nous allons étudier f à droite et à gauche de n

- ▷ Si $x \geqslant n$, c'est à dire si $x \in [n; n+1[$ et donc, comme $f(x) = \sqrt{x-n}$, $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} f(x) = 0 = f(n)$.
  f est donc continue à droite de n
- ▷ Maintenant, si $x < n$, c'est à dire si $x \in [n-1; n[$ alors $f(x) = \sqrt{x-(n-1)}$, $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x < n}} f(x) = 1 \neq f(n)$.
  f n'est donc pas continue à gauche de n

f n'est pas continue en $x = n$. *Il aurait été tout à fait facile de généraliser à $x \in \mathbb{Z}$*

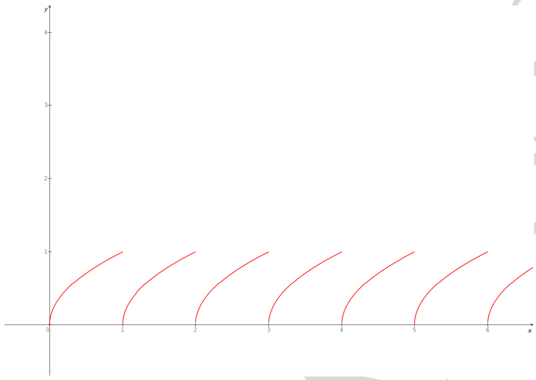

FIGURE 10.36 – Le graphe de $f(x) = \sqrt{x - [x]}$

2. $g(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Si $x \in [n; n+1[$ alors $g(x) = n + \sqrt{x-n}$ et est continue pour tout $x_0 \in [n; n+1[$
   Le problème se pose essentiellement en $x_0 = n$ où $n \in \mathbb{N}^*$; nous allons étudier g à droite et à gauche de n
   - ▷ Si $x \geqslant n$, c'est à dire si $x \in [n; n+1[$ et donc, comme $g(x) = n + \sqrt{x-n}$, $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} g(x) = n = g(n)$.
     g est donc continue à droite de n
   - ▷ Maintenant, si $x < n$, c'est à dire si $x \in [n-1; n[$ alors $g(x) = n - 1 + \sqrt{x-(n-1)}$, $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x < n}} g(x) = n = g(n)$.
     g est donc continue à gauche de n

   g est donc continue en $x = n$ *(Visualisez le graphe de $g(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ sur la figure 10.37)*

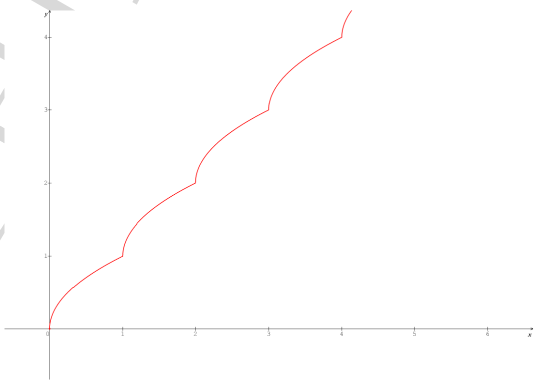

FIGURE 10.37 – Le graphe de $g(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$

3. $h(x) = [x] + (x - [x])^2$

   Et on recommence ! ! ! ! ! Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Si $x \in [n; n+1[$ alors $h(x) = n + (x-n)^2$ et est continue pour tout $x_0 \in [n; n+1[$

Le problème se pose essentiellement en $x_0 = n$ où $n \in \mathbb{N}^*$; nous allons étudier h à droite et à gauche de n

- ▷ Si $x \geqslant n$, c'est à dire si $x \in [n; n+1[$ et donc, comme $h(x) = n + (x-n)^2$, $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} h(x) = n = h(n)$.
  h est donc continue à droite de n
- ▷ Maintenant, si $x < n$, c'est à dire si $x \in [n-1; n[$ alors $h(x) = n-1+(x-n+1)^2$, $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x < n}} h(x) = n = h(n)$.
  h est donc continue à gauche de n

h est donc continue en $x = n$

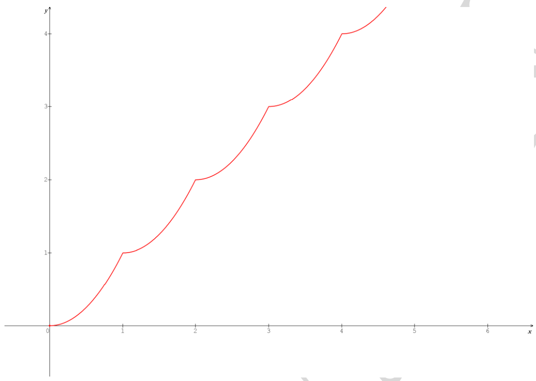

FIGURE 10.38 – Le graphe de $h(x) = [x] + (x - [x])^2$

Exercice 38 :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur l'intervalle ouvert $]-1; +1[$

1. *On suppose qu'il existe un nombre $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in]-1; +1[\setminus \{0\}$ nous ayons $|f(x)| \leqslant k|x|$. Quelle valeur faut-il donner à $f(0)$ pour que f soit continue sur $]-1; +1[$?*

   C'est très simple ; comme, pour tout $x \in]-1; +1[\setminus \{0\}$, nous avons $|f(x)| \leqslant k|x|$ et comme $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
   Pour que f soit continue sur $]-1; +1[$, il faut que $f(0) = 0$

2. *Plus généralement, on suppose qu'il existe 2 fonctions g et h définies et continues sur l'intervalle $]-1; +1[$ et vérifiant :*
   — *$h(0) = g(0)$*
   — *Et, pour tout $x \in]-1; +1[\setminus \{0\}$ nous avons $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$*
   Quelle valeur faut-il donner à $f(0)$ pour que f soit continue sur $]-1; +1[$?

   De l'inégalité $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ vraie pour tout $x \in]-1; +1[\setminus \{0\}$, nous tirons :

   $$0 \leqslant f(x) - g(x) \leqslant h(x) - g(x)$$

   Comme g et h sont continues sur $]-1; +1[$, nous avons $\lim\limits_{x \to 0} (h(x) - g(x)) = h(0) - g(0) = 0$, et donc, par encadrement, $\lim\limits_{x \to 0} (f(x) - g(x)) = 0$.
   Ainsi, pour que f soit continue sur $]-1; +1[$, il faut que $f(0) = g(0) = h(0)$

Exercice 39 :

On considère la fonction f définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{l} x^2 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ x \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer que f n'est pas continue pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f(r_n) = r_n^2$
Si f est continue, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = f(x) \iff x^2 = f(x)$, c'est à dire, si f est continue, $x^2 = x$, ce qui est impossible, sauf si $x = 0$ ou $x = 1$
f n'est donc pas continue pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Exercice 40 :

La fonction de Thomae est ainsi définie :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} \text{ si } x \in \mathbb{Q}^* \text{ et } x = \dfrac{p}{q} \text{ avec } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \text{ et } \operatorname{pgcd}(p,q) = 1 \\ 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases}$$

1. *Montrer que f est périodique et de période 1*
   - ▷ Si $x \notin \mathbb{Q}$, alors, nous avons aussi $x+1 \notin \mathbb{Q}$, et donc $f(x) = f(x+1) = 0$
   - ▷ Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$. Donc $f(x) = \dfrac{1}{q}$
     Or, $x + 1 = \dfrac{p}{q} + 1 = \dfrac{p+q}{q}$. Si, $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$, alors $\operatorname{pgcd}(p+1,q) = 1$ [8] et donc
     $$f(x+1) = \frac{1}{q} = f(x)$$

   f est bien périodique et de période 1
2. *Montrer que f n'est pas continue sur $\mathbb{Q}$*

   De la périodicité de f, nous allons étudier la continuité de f sur $[0;1] \cap \mathbb{Q}$
   On utilise le fait que si $\mathbb{Q}$ est dense dans $[0;1]$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans $[0;1]$.
   - ▷ Si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = \dfrac{1}{q}$ avec $\dfrac{1}{q} > 0$
     Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 0$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc converger vers $f(x)$.
     f est donc discontinue si $x \in \mathbb{Q}$
   - ▷ Si $x = 0$, alors $f(x) = 1$. De la même manière, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 0$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc converger vers 1.
     f n'est donc pas continue en $x = 0$

   Donc, de manière générale f n'est pas continue sur $\mathbb{Q}$
3. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*

   Nous travaillons toujours sur l'intervalle $[0;1]$
   Soit $x_0 \in [0;1] \setminus \mathbb{Q}$, alors $f(x_0) = 0$.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Nous appelons S_ε l'ensemble suivant :
   $$S_\varepsilon = \left\{ r \in \mathbb{Q} \text{ tels que } r \in [0;1]\ ,\ r = \frac{p}{q} \text{ avec } \operatorname{pgcd}(p,q) = 1\ ,\ q \in \left\{1, 2, \cdots, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\} \text{ et } |r - x_0| \leqslant 1 \right\}$$
   $\mathbb{Q}$ est dénombrable et S_ε est fini.
   S_ε étant fini, il existe $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\cap S_\varepsilon = \emptyset$

8. Revoir le cours d'arithmétique

- ▷ Soit $y \in \left]x_0 - \delta; x_0 + \delta\right[\setminus \mathbb{Q}$; alors $f(y) = 0$ et $|f(y) - f(x_0)| = 0$
  Ainsi, dans ce cas, si $|y - x_0| < \delta$ alors $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$
- ▷ Soit maintenant, $y \in \left]x_0 - \delta; x_0 + \delta\right[\cap \mathbb{Q}$, c'est à dire $y = \dfrac{p}{q}$ avec $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$.
  Comme $\left]x_0 - \delta; x_0 + \delta\right[\cap S_\varepsilon = \emptyset$, nous avons $q > \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, c'est à dire $q \geqslant \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, et donc, $q > \dfrac{1}{\varepsilon} \iff \dfrac{1}{q} < \varepsilon$
  Nous avons, alors $|f(y) - f(x_0)| = \dfrac{1}{q}$
  Dans notre cas, si $|y - x_0| < \delta$ alors $|f(y) - f(x_0)| = \dfrac{1}{q} < \varepsilon$

Nous venons donc de montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Exercice 41 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction appelée fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, c'est à dire telle que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Il faut montrer que f n'est continue en aucun point.

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; alors $f(x) = 0$.
   $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$; il existe donc une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = 1$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(r_n) = 1$, alors que $f(x) = 0$.
   f n'est donc pas continue en $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
2. Soit $x \in \mathbb{Q}$; alors $f(x) = 1$.
   $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$; il existe donc une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = x$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(t_n) = 0$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(t_n) = 0$, alors que $f(x) = 1$.
   f n'est donc pas continue en $x \in \mathbb{Q}$

Exercice 42 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue en 0 et telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$. Il faut montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$; alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
   Nous allons le démontrer par récurrence :
   ↦ C'est vrai pour $n = 0$
   ↦ Supposons qu'au rang n, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$
   ↦ Démontrons le au rang $n + 1$:
   $$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$
   Et donc $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$
   Ce que nous voulions
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$, et donc, f étant continue en 0, $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(0)$
   Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$, nous avons $f(x) = f(0)$. f est donc constante.

Exercice 43 :

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. Montrer que f est continue si et seulement si l'image réciproque de tout fermé est un fermé.

Pour ne pas confondre avec l'adhérence d'ensembles, pour tout ensemble E et tout sous-ensemble $X \subset E$, X^C est le complémentaire de X dans E

1. Nous allons démontrer le résultat auxilaire suivant :
   Pour toute application $f : E \longrightarrow F$ et tout sous ensemble $X \subset F$, nous avons
$$f^{-1}\left(X^C\right) = \left(f^{-1}(X)\right)^C$$
   — Soit $x \in f^{-1}\left(X^C\right)$; alors $f(x) \in X^C$, c'est à dire
$$f(x) \notin X \Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(X) \Longleftrightarrow x \in \left(f^{-1}(X)\right)^C$$
   Dnc, si $x \in f^{-1}\left(X^C\right)$ alors $x \in \left(f^{-1}(X)\right)^C$ et nous avons $f^{-1}\left(X^C\right) \subset \left(f^{-1}(X)\right)^C$
   — Réciproquement, supposons $x \in \left(f^{-1}(X)\right)^C$. Nous avons alors $x \notin f^{-1}(X)$ c'est à dire $f(x) \notin X$, donc $f(x) \in X^C$ et $x \in f^{-1}\left(X^C\right)$
   Ainsi, si $x \in \left(f^{-1}(X)\right)^C$, alors $x \in f^{-1}\left(X^C\right)$. Donc $\left(f^{-1}(X)\right)^C \subset f^{-1}\left(X^C\right)$

   En conclusion, $f^{-1}\left(X^C\right) = \left(f^{-1}(X)\right)^C$
2. Supposons f continue sur $\mathbb{R}$
   Soit $F \subset \mathbb{K}$ un fermé de $\mathbb{K}$; alors F^C est un ouvert de $\mathbb{K}$, et comme f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, $f^{-1}\left(F^C\right)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   Or, $f^{-1}\left(F^C\right) = \left(f^{-1}(F)\right)^C$, donc, $\left(f^{-1}(F)\right)^C$ est un ouvert, ce qui montre que $f^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathbb{R}$
3. Réciproquement, supposons que l'image réciproque de tout fermé de $\mathbb{K}$ est un fermé de $\mathbb{R}$
   Montrons que f est continue
   Soit O un ouvert de $\mathbb{K}$; alors, O^C est un fermé de $\mathbb{K}$ et donc $f^{-1}\left(O^C\right)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
   Comme $f^{-1}\left(O^C\right) = \left(f^{-1}(O)\right)^C$, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, et f est donc continue sur $\mathbb{R}$

Nous venons donc de démontrer l'équivalence demandée.

▷ Cette démonstration peut se transposer dans n'importe quel espace topologique

▷ Si la théorie de la continuité s'appuie sur les ouverts, elle aurait très bien pu le faire sur les fermés.

Exercice 44 :

Dans tout cet exercice, f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

1. *Soit $A \subset \mathbb{R}$, une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que si x est un point adhérent à A (c'est à dire $x \in \overline{A}$) alors $f(x)$ est adhérent à $f(A)$*
   Soit $x \in \overline{A}$. Il existe alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A *(c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$)* tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
   Par continuité de f, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$; or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f(x_n) \in f(A)$. Il existe donc une suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $f(A)$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$, et donc $f(x) \in \overline{f(A)}$, c'est à dire que $f(x)$ est adhérent à $f(A)$
2. *Démontrer que, pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$, nous avons $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$*
   Soit $y \in f\left(\overline{A}\right)$. Il existe donc $x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in \overline{A}$, il existe alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

Par continuité de f, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x) = y$; or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f(x_n) \in f(A)$. Il existe donc une suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $f(A)$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = y$, et donc $y \in \overline{f(A)}$, c'est à dire que $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$

Exercice 46 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous notons φ_n l'application :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi_n(x) = \left\{\begin{array}{ll} -n & \text{si } x \leqslant -n \\ x & \text{si } -n \leqslant x \leqslant n \\ +n & \text{si } x \geqslant +n \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Démontrer que, pour toute application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f est continue siet seulement si $\varphi_n \circ f$ est continue

Rigoureusement, voilà un exercice qui ne porte pas très haut!!!...Admettons que ce soit un exercice d'entraînement

1. Pour commencer, φ_n est trivialement continue sur $\mathbb{R}$
2. Ensuite, si f est continue, par le théorème de composition des fonctions, $\varphi_n \circ f$ est continue
3. Maintenant, supposons que $\varphi_n \circ f$ soit continue et démontrons que f est continue.
   Soit $]a; b[\subset \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$, et nous allons montrer que $f^{-1}(]a; b[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $]a; b[\subset [-n_0; n_0]$ *(Il suffit de choisir $n_0 \geqslant \max\{|a|; |b|\}$)* et alors, $f^{-1}(]a; b[) = (\varphi_n \circ f)^{-1}(]a; b[)$.
   $\varphi_n \circ f$ étant continue, $(\varphi_n \circ f)^{-1}(]a; b[)$ est un ouvet de $\mathbb{R}$; donc $f^{-1}(]a; b[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   Donc, f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 47 :

1. *Ecrire la négation de la définition de fonction uniformément continue.*

   C'est une classique question de logique élémentaire.

   $$(\exists\varepsilon > 0)\,(\forall\eta > 0)\,(\exists x \in I)\,(\exists y \in I)\,(|x - y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon)$$

2. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$. Montrer que f n'est pas uniformément continue sur $[0; +\infty[$*

   Le problème se pose en $+\infty$. Soit $\varepsilon = 1$ et $\alpha > 0$ quelconque. On peut donc trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} < \alpha$.

   En posant $x_n = n + \dfrac{1}{n}$ et $y_n = n$, nous avons $|x_n - y_n| = \dfrac{1}{n} < \alpha$ et

   $$\left|x_n^2 - y_n^2\right| = \left|n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2\right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 1$$

   Il existe donc $\varepsilon = 1$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x - y| < \alpha$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$

3. *Démontrer que, par contre, $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur tout intervalle $[a, b]$ où $a < b$*

   Pour tout $x \in [a, b]$ et tout $y \in [a, b]$, nous avons :

   $$\left|x^2 - y^2\right| = |x + y| \times |x - y| \leqslant (|x| + |y|) \times |x - y|$$

   Comme nous avons $a \leqslant x \leqslant b$, nous avons $|x| \leqslant \max(|a|, |b|)$.
   De même,$|y| \leqslant \max(|a|, |b|)$, et donc,$\left|x^2 - y^2\right| \leqslant 2\max(|a|, |b|) \times |x - y|$
   Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\eta_\varepsilon > 0$, choisi comme $\eta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{2\max(|a|, |b|)}$, tels que si $|x - y| < \eta_\varepsilon$, nous avons $\left|x^2 - y^2\right| \leqslant 2\max(|a|, |b|) \times \dfrac{\varepsilon}{2\max(|a|, |b|)} = \varepsilon$

Exercice 49 :

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur l'intervalle ouvert $]0,1]$

Soit $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$; pour $\alpha > 0$, il est possible de trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} < \alpha$. En posant $x_n = \dfrac{1}{2n}$ et $y_n \dfrac{1}{n}$, nous avons : $|x_n - y_n| = \left|\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{1}{2n} < \alpha$ et $|f(x_n) - f(y_n)| = n > \dfrac{1}{2}$

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in]0,1]$ et $y \in]0,1]$ tels que $|x-y| < \alpha$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$

Exercice 50 :

1. *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $y \in \mathbb{R}^+$, nous avons $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}$*

   Supposons, dans un premier temps $y \geqslant x \geqslant 0$. Nous allons montrer que $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y-x}$
   - Nous avons dans un premier temps, $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = x + y - 2\sqrt{xy}$
   - Dans un second temps, $x + y - 2\sqrt{xy} - (y - x) = 2x - 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) \leqslant 0$
   - Ce qui montre que $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \leqslant y - x$, c'est à dire $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y-x}$

   De la même manière, si $x \geqslant y \geqslant 0$, nous aurions $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x-y}$

   Donc, en synthèse, , pour tout $x \geqslant 0$ et tout $y \geqslant 0$, nous avons $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}$
2. *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$*

   Soit $\varepsilon > 0$. En posant $\eta_\varepsilon = \varepsilon^2$, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $y \geqslant 0$ tels que $|x - y| < \eta_\varepsilon$, nous avons $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$

   Donc, $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 51 :

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

Soit $\varepsilon = 1$; pour $\alpha > 0$, il est possible de trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} < \alpha$. En posant $x_n = \dfrac{1}{n}$ et $y_n \dfrac{1}{3n}$, nous avons : $|x_n - y_n| = \left|\dfrac{1}{3n} - \dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{2}{3n} < \alpha$.

D'autre part, $|f(x_n) - f(y_n)| = |\ln x_n - \ln y_n| = \left|\ln \dfrac{x_n}{y_n}\right| = \ln 3 > 1$

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $y \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $|x - y| < \alpha$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$

$\ln x$ n'est donc pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

Exercice 52 :

La fonction $\sin \dfrac{1}{x}$ est-elle uniformément continue sur $]0,1]$?

Cet exercice est la répétition (volontaire) de celui qui le précède.

Si nous choisissons $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, et $y_n = \dfrac{1}{\frac{-\pi}{2} + 2n\pi}$ alors $\sin \dfrac{1}{x_n} = 1$ et $\sin \dfrac{1}{y_n} = -1$, de telle sorte que $\left|\sin \dfrac{1}{x_n} - \sin \sin \dfrac{1}{y_n}\right| = 2$ et que cette différence ne pourra jamais être rendue aussi petite que l'on souhaite.

D'autre part, $|x_n - y_n| = \dfrac{4}{\pi} \times \dfrac{1}{16n^2 - 1}$ *(Calculs élémentaires)* et donc, pour tout $\alpha > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{4}{\pi} \times \dfrac{1}{16n^2 - 1} < \alpha$

Ainsi, pour $\varepsilon = 1$, pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in]0,1]$ et $y \in]0,1]$ tels que $|x - y| < \alpha$ et $\left|\sin \dfrac{1}{x} - \sin \dfrac{1}{y}\right| = 2 > 1$

Exercice 53 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Montrer qu'il existe $a > 0$, $b > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant ax + b$

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Alors,
pour $\varepsilon = 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $y \in \mathbb{R}^+$, nous ayons l'implication

$$|x - y| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 1$$

Soit $x > 0$. On subdivise le segment $[0, x]$ en sous-segments de longueur α. Soit donc $n = \left[\dfrac{x}{\alpha}\right]$. Nous avons :

$$\begin{array}{rl} |f(0) - f(\alpha)| & \leqslant 1 \\ |f(\alpha) - f(2\alpha)| & \leqslant 1 \\ |f(2\alpha) - f(3\alpha)| & \leqslant 1 \\ \vdots & \vdots \\ |f((n-1)\alpha) - f(n\alpha)| & \leqslant 1 \end{array}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| = & \ |(f(x) - f(n\alpha)) + (f(n\alpha) - f((n-1)\alpha)) + \cdots + (f(2\alpha) - f(\alpha)) + (f(\alpha) - f(0))| \\ \leqslant & \ |f(x) - f(n\alpha)| + \sum_{k=0}^{n-1} |f(k\alpha) - f((k+1)\alpha)| \\ \leqslant & \ 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n + 1 \end{aligned}$$

En résumé, nous venons de prouver que, pour tout $x > 0$, $|f(x) - f(0)| \leqslant n + 1$
En utilisant l'inégalité vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$ qui implique que $|x| \leqslant |x - y| + |y|$, nous avons :

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leqslant n + 1 + |f(0)|$$

Or, $n + 1 + |f(0)| = \left[\dfrac{x}{\alpha}\right] + 1 + |f(0)| \leqslant \dfrac{x}{\alpha} + 1 + |f(0)|$
En posant $a = \dfrac{1}{\alpha}$ et $b = 1 + |f(0)|$, nous avons le résultat

Exercice 54 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

On appelle, pour simplifier, $a = f(1)$.

1. *Donner $f(0)$; en déduire que f est une fonction impaire*

   En fait, f est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe additif $(\mathbb{K}, +)$. Aussi :
   - ▷ L'image de l'ément neutre de $(\mathbb{R}, +)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{K}, +)$, et donc $f(0) = 0$
   - ▷ L'image du symétrique de x est le symétrique de l'image, et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$

2. *Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$*

   Soit $x \in \mathbb{R}$
   - ▷ Pour $n \in \mathbb{N}$, nous allons démontrer, par récurrence sur n que $f(nx) = nf(x)$

     C'est vrai pour $n = 0$ En effet, $f(0 \times x) = 0 = 0 \times f(x)$

     Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$**,** $f(nx) = nf(x)$

     Démontrons à l'ordre $n + 1$

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$

▷ Si n est un entier négatif, c'est à dire si $n \in \mathbb{Z}^-$, alors $f(nx) = f((-n) \times -x) = (-n) f(-x)$ car $-n \in \mathbb{N}$.
f étant impaire, $f(-x) = -f(x)$ et donc $(-n) f(-x) = nf(x)$.
Ce que nous voulions

Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$

3. *En déduire que :*

(a) *Pour tout entier $q > 0$, $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{a}{q}$*

Soit q, entier, tel que $q > 0$.

Alors : $f(1) = f\left(q \times \frac{1}{q}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right)$

Donc $a = qf\left(\frac{1}{q}\right) \iff f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{a}{q}$

(b) *Pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$*

Soit $r \in \mathbb{Q}$; alors $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q > 0$.

Donc
$$f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p \times \frac{1}{q}\right) = p \times f\left(\frac{1}{q}\right) = p \times \frac{a}{q} = a \times \frac{p}{q} = ar$$

(c) *Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$*

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tels que $\lim_{n\to+\infty} r_n = x$

f étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f(r_n) = f(x)$, c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} ar_n = f(x)$.

Or, $\lim_{n\to+\infty} ar_n = a \lim_{n\to+\infty} r_n = ax$, et donc $f(x) = ax$

On pourrait conclure que le seul homomorphisme f du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe additif $(\mathbb{K}, +)$ qui soit continu est du type $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{K}$

Exercice 55 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$:
$$f(x-y) = f(x) - f(y)$$
Comme tout à l'heure, on appelle, pour simplifier, $a = f(1)$.

1. *Donner $f(0)$; en déduire que f est une fonction impaire*

Très simple :

▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = f(x-x) = f(x) - f(x) = 0$, et donc $f(0) = 0$

▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(0-x) = f(0) - f(x) = 0 - f(x)$, et donc $f(-x) = -f(x)$ et f est donc impaire

2. *Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$*

Nous allons utiliser l'imparité de f.

▷ Nous commençons par le démontrer pour $n \in \mathbb{N}$, et nous allons le faire par récurrence :

C'est vrai pour $n = 0$ En effet, $f(0 \times x) = f(0) = 0 = 0 \times f(x)$

Supposons que la propriété vraie jusque l'ordre n

Démontrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$ Nous avons :
$$f(nx) = f((n+1)x - x) = f((n+1)x) - f(x)$$
C'est à dire que nous avons :
$$f(nx) = nf(x) = f((n+1)x) - f(x) \iff f((n+1)x) = nf(x) + f(x) = (n+1) f(x)$$
Ce que nous voulions

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$

▷ Maintenant, si n est un entier négatif, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n = -n_1$. Ainsi :

$$f(nx) = f((-n_1)x) = f(n_1(-x)) = n_1 f(-x) = -n_1 f(x) = nf(x)$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons $f(nx) = nf(x)$

3. *En déduire que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$*

La démonstration est semblable à l'exercice précédent :

▷ On démontre que pour tout entier $q > 0$, $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{a}{q}$

▷ Puis, que pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$

▷ Et pour terminer, que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$

Exercice 56 :

1. *Nous appelons $\mathcal{A}_1$, l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que :*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\forall \lambda \in \mathbb{R})(f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$$

(a) *Montrer que $\mathcal{A}_1$, muni de l'addition des fonctions est un groupe abélien*

C'est très simple ! ! Nous allons démontrer que $\mathcal{A}_1$ est un sous groupe additif du groupe des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

▷ Premièrement, $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$ puisque la fonction nulle $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ est bien un élément de $\mathcal{A}_1$

▷ Soient $f \in \mathcal{A}_1$ et $g \in \mathcal{A}_1$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(f-g)(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda x + (1-\lambda)y) - g(\lambda x + (1-\lambda)y)\\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \lambda g(x) - (1-\lambda) g(y)\\ &= \lambda f(x) - \lambda g(x) + (1-\lambda) f(y) - (1-\lambda) g(y)\\ &= \lambda(f(x) - g(x)) + (1-\lambda)(f(y) - g(y))\\ &= \lambda(f-g)(x) + (1-\lambda)(f-g)(y)\end{aligned}$$

Donc, $f - g \in \mathcal{A}_1$

Ainsi, $\mathcal{A}_1$, muni de l'addition des fonctions est un groupe abélien

(b) *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et $f(x) = f(y) = 0$. Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 0$, c'est à dire que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$*

Soit $t \in \mathbb{R}$; alors, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $t = \lambda_0 x + (1-\lambda_0) y$ (il suffit de prendre $\lambda_0 = \frac{t-y}{x-y}$), et donc :

$$f(t) = f(\lambda_0 x + (1-\lambda_0)y) = \lambda_0 f(x) + (1-\lambda_0) f(y) = 0$$

Ainsi, f est bien la fonction nulle sur $\mathbb{R}$

(c) *Soit $h(x) = ax + b$. Démontrer que $h \in \mathcal{A}_1$*

Réponse simple : juste calculatoire ! !

(d) *Soit $g \in \mathcal{A}_1$ et $f \in \mathcal{A}_1$ tel que $f(x) = g(x) + (g(0) - g(1))x - g(0)$. Démontrer que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$*

Il suffit de vérifier que $f(0) = f(1) = 0$, et d'après la question ci-dessus, f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$

(e) *En déduire que les seuls éléments de $\mathcal{A}_1$ sont les applications affines du type $g(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$*

Cette question est la réciproque de la question 1-c : l'ensemble des fonctions affine est inclus dans $\mathcal{A}_1$

Nous venons de montrer que si $g \in \mathcal{A}_1$, alors g est affine. Donc, les éléments de $\mathcal{A}_1$ sont les seules applications affines.

2. *Nous appelons $\mathcal{A}_2$, l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que :*

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(\forall \lambda \in [0;1])\,(f(\lambda x + (1-\lambda)\,y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\,f(y))$$

(a) *Montrer que $\mathcal{A}_2$, muni de l'addition des fonctions est un groupe abélien*

Il n'y a rien à ajouter par rapport à la question 1-a

(b) *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et $f(x) = f(y) = 0$. Démontrer que pour tout $t \in [x;y]$, $f(t) = 0$.*

Tout élément $t \in [x;y]$ s'écrit $t = \lambda x + (1-\lambda)\,y$ avec $\lambda \in [0;1]$. Donc,

$$f(t) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\,f(y) = 0$$

Donc, f est nulle sur l'intervalle $[x;y]$

(c) *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $t \in [x;y]$, $f(t + n(y-x)) = 0$* Nous allons le démontrer en 2 temps : le premier pour les entiers n positifs, c'est à dire tels que $n \in \mathbb{N}$, le second pour les entiers négatifs, c'est à dire les entiers n tels que $n \in \mathbb{Z}^-$

▷ **Nous allons démontrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $t \in [x;y]$ et tout k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, nous avons** $f(t + k(y-x)) = 0$

C'est trivialement vrai pour $n = 0$

Supposons vraie la propriété jusque l'ordre n

Démontrons cette propriété à l'ordre $n+1$ Comme $y > x$, nous avons

$$(n-1)(y-x) < n(y-x) < (n+1)(y-x)$$

et donc

$$t + (n-1)(y-x) < t + n(y-x) < t + (n+1)(y-x)$$

Il existe donc $\lambda \in]0;1[$ tel que

$$t + n(y-x) = \lambda(t + (n-1)(y-x)) + (1-\lambda)(t + (n+1)(y-x))$$

Donc :

$$\begin{array}{rl} f(t + n(y-x)) = & \lambda f(t + (n-1)(y-x)) + (1-\lambda)\,f(t + (n+1)(y-x)) \\ 0 & 0 + (1-\lambda)\,f(t + (n+1)(y-x)) \end{array}$$

Et donc,$f(t + (n+1)(y-x)) = 0$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $t \in [x;y]$, $f(t + n(y-x)) = 0$

▷ Soit, maintenant n entier négatif, c'est à dire $n \in \mathbb{Z}^-$. Il existe un entier $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n = -n_1$.

Une récurrence semblable à celle que nous venons d'effectuer montrerait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout tout $t \in [x;y]$, $f(t - n(y-x)) = 0$

Nous venons donc de démontrer que f est périodique et de période $y - x$

(d) *En déduire que f est nulle sur $\mathbb{R}$*

Nous avons $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} [x + n(y-x)\,;y + n(y-x)]$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha \in [x + n_0(y-x)\,;y + n_0(y-x)]$.

Il existe donc $\lambda \in [0;1]$ tel que $\alpha = \lambda(x + n_0(y-x)) + (1-\lambda)(y + n_0(y-x))$, et alors :

$$f(\alpha) = \lambda f(x + n_0(y-x)) + (1-\lambda)\,f(y + n_0(y-x)) = 0$$

par la périodicité de f. f est donc la fonction nulle sur $\mathbb{R}$

(e) *En déduire que les seuls éléments de $\mathcal{A}_2$ sont les applications affines du type $g(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$*

Il suffit de recopier ce qui a été fait dans la question 1.

Exercice 57 :

Soit $f : [0; +1] \longrightarrow [0; +1]$, une fonction numérique d'une variable réelle, définie et continue sur $[0; +1]$ et à valeurs dans $[0; +1]$. On suppose que $f(0) = 0$ et que pour tout $x \in [0; +1]$ et tout $y \in [0; +1]$, nous avons $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$

1. *Soit $x \in [0; +1]$. On construit une suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ Montrer que cette suite est convergente.*

   Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $x_n \in [0; +1]$ *(démonstration simple, par récurrence, en utiisant le fait que f est à valeurs dans $[0; +1]$)*
   - Montrons que cette suite est croissante
     Toujours pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x_n) - f(0)| \geqslant |x_n - 0|$. De $f(0) = 0$ et de $x_{n+1} = f(x_n)$, nous avons $|x_{n+1}| \geqslant |x_n|$ et de $x_n \in [0; +1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous tirons $x_{n+1} \geqslant x_n$
   - Cette suite est majorée
     En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0; +1]$, et donc, en particulier, $x_n \leqslant 1$
   - $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite croissante et majorée est donc convergente
2. *On appelle l la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Démontrer que $f(l) = l$*

   Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$. Comme f est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(l)$.
   Comme $x_{n+1} = f(x_n)$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ et donc $l = f(l)$
3. *Déduire de tout ce qui précède que, pour tout $x \in [0; +1], f(x) = x$*

   Soit $x \in [0; +1]$
   - De $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$, nous déduisons $|f(x) - f(0)| \geqslant |x - 0|$. Comme $f(0) = 0$, nous avons $|f(x)| \geqslant |x-|$, et comme $x \in [0; +1]$ et $f(x) \in [0; +1]$, nous avons $f(x) \geqslant x$
   - Démontrons que $f(x) \leqslant x$
     Supposons le contraire, c'est à dire $f(x) > x$
     On construit la suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Cette suite est croissante, majorée donc convergente et admet pour limite l telle que $f(l) = l$
     De $f(x) > x$ et $f(l) = l$, nous avons $f(l) - f(x) < l - x$
     De $x_0 = x$, nous avons $x_1 = f(x) \geqslant x_0 = x$ et $l \geqslant f(x)$ d'où :
     — $f(l) - f(x) = |f(l) - f(x)|$
     — $l - x = |l - x|$
     Il y a contradiction avec l'hypothèse faite sur f, à savoir que $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$ pour tout $x \in [0; +1]$ et tout $y \in [0; +1]$
     Et donc, $f(x) \leqslant x$
   - Donc, de $f(x) \leqslant x$ et $f(x) \geqslant x$, nous déduisons $f(x) = x$

   Ainsi, la fonction identité $f(x) = x$ est la seule fonction continінue sur $[0; +1]$ telle que pour tout $x \in [0; +1]$ et tout $y \in [0; +1]$, nous avons $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$

Exercice 58 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $0 < k < 1$ tel que pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ nous ayions :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

Soita $\in \mathbb{R}$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite l vérifie $l = f(l)$

1. f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$
2. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc convergente

   En effet, nous avons $|f(x_{n+1} - f(x_n))| \leqslant k|x_{n+1} - x_n|$ avec $0 < k < 1$, c'est à dire :

   $$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leqslant k|x_{n+2} - x_{n+1}|$$

   Et nous avons démontré qu'un suite de ce type est une suite de Cauchy donc convergente dans $\mathbb{R}$

3. Soit l la limite de cette suite
   f étant continue, nous avons $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(l)$
   De $x_{n+1} = f(x_n)$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$, c'est à dire $l = f(l)$

Cet exercice détermine un algorithme de résolution de l'équation $x = f(x)$, ou du moins d'une approximation de la solution de l'équation $x = f(x)$
QUESTION : *Que se passe-t-il si, au lieu d'être une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nous avons une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$?*

Exercice 59 :

Soient $a \in \mathbb{R}^+$ un nombre réel positif et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels définie par :

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$$

Démontrer que cette suite est convergente et calculer sa limite

1. Il nous est impossible d'avoir $a < 0$ puisque si $a < 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie à partir de $n = 1$
2. D'autre part, pour $n \geqslant 1$, nous avons $u_n \geqslant 1$ puisque $u_n = 1 + \sqrt{u_{n-1}} \geqslant 1$
3. Etudions les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) Les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépendent du signe de $u_{n+1} - u_n$. Nous avons : $u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{u_n} - u_n$
   Faisons le changement de variables $T = \sqrt{u_n}$. Nous avons alors $1 + \sqrt{u_n} - u_n = 1 + T - T^2$.
   La factorisation de $-T^2 + T + 1$ est facile :
   $$-T^2 + T + 1 = -\left(T - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(T - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(T - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(-T - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$
   Et donc :
   $$u_{n+1} - u_n = \left(\sqrt{u_n} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(-\sqrt{u_n} - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$
   Comme nous avons $-\sqrt{u_n} - \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) < 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ ne dépend que du signe de $\sqrt{u_n} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ainsi :
   - ▷ Si $\sqrt{u_n} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \geqslant 0$, alors la suite est décroissante.
     Or, $\sqrt{u_n} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \geqslant 0 \iff \sqrt{u_n} \geqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \iff u_n \geqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
   - ▷ Si $\sqrt{u_n} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant 0$, alors la suite est croissante
     De même, $\sqrt{u_n} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant 0 \iff \sqrt{u_n} \leqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \iff u_n \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

   Posons $(T_0)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$; d'après l'étude ci-dessus, nous avons $(T_0)^2 = 1 + T_0$

   (b) Démontrons que si $a \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors , pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
   Nous le faisons par récurrence.
   C'est évidemment vrai pour $n = 0$
   Supposons qu'au rang n, nous ayions $u_n \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Démontrons le à l'ordre $n+1$ Nous avons :

$$u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n} \leqslant 1 + \sqrt{u_n} \leqslant 1 + \sqrt{(T_0)^2} = 1 + T_0 = (T_0)^2$$

Et donc, $u_{n+1} \leqslant (T_0)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Ce que nous voulions

Donc, si $a \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors , pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Ainsi, nous démontrons que si $a \leqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et est donc convergente.

(c) Démontrons que si $a \geqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \geqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

La démonstration de ce résultat est donc la jumelle de la démonstration ci-dessus. Ainsi, si $a \geqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors , pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \geqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Ainsi, nous démontrons que si $a \geqslant \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et est donc convergente.

4. Soit l la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 1 + \sqrt{x}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$ et nous avons $u_{n+1} = f(u_n)$. f étant continue, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.

   D'autre part, de la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la limite l vérifie l'équation $l = f(l)$.
   Résolvons l'équation $x = 1 + \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} x = 1 + \sqrt{x} &\iff x - 1 = \sqrt{x} \\ &\iff (x-1)^2 = x \text{ et } x > 0 \\ &\iff x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ et } x > 0 \end{aligned}$$

   Les solutions de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$ sont $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ qui, toutes deux sont positives.
   La limite l est donc l'une des deux valeurs x_1 ou x_2. Or, nous avons montré que, pour tout $n \geqslant 1$, nous avons $u_n \geqslant 1$, et donc, en utilisant les relations d'ordre et limites, nous avons $l \geqslant 1$.

   Seule $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = (T_0)^2$ est supérieure à 1.

   Donc, $l = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 60 :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ un nombre réel non nul et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels définie par :

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1$$

Etudier la convergence de cette suite et calculer son éventuelle limite

1. **Supposons** $a < 0$
   (a) Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n < 0$
   La démonstration se fait par une récurrence simple

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

En effet, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$. Comme $u_n < 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} - 1 < 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \leqslant -n$

▷ Commençons par les premiers termes :

— $u_1 - (-1) = u_1 + 1 = a + \dfrac{1}{a} < 0$ et donc $u_1 \leqslant -1$

— $u_2 - (-2) = u_2 + 2 = u_1 + \dfrac{1}{u_1} + 1$. Nous avons $u_1 + 1 \leqslant 0$ et $\dfrac{1}{u_1} < 0$ et donc $u_2 - (-2) \leqslant 0$. Ainsi, $u_2 \leqslant -2$

▷ Supposons qu'à l'ordre n, nous ayions $u_n \leqslant -n$

▷ Démontrons le à l'ordre $n+1$

$$u_{n+1} - (-n-1) = u_{n+1} + n + 1 = u_n + \frac{1}{u_n} - 1 + n + 1 = u_n + n + \frac{1}{u_n}$$

Par hypothèse de récurrence, $u_n + n \leqslant 0$ et, comme $u_n \leqslant 0$, nous avons $\dfrac{1}{u_n} \leqslant 0$ et donc $u_{n+1} - (-n-1) \leqslant 0$, c'est à dire $u_{n+1} \leqslant -n-1$

Donc, si $a < 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant -n$

(d) De l'inégalité $u_n \leqslant -n$, nous tirons que si $a < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

2. **Supposons** $a > 0$

(a) Etudions la différence $u_{n+1} - u_n$.

Nous avons : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$, montrant ainsi la valeur importante qu'est 1

(b) Montrons que si $a > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n > 0$

Nous allons faire cette démonstration par récurrence.

▷ C'est trivialement vrai pour $n = 0$

▷ Supposons donc que si $a > 0$, alors $u_n > 0$

▷ Démontrons le à l'ordre $n+1$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} - 1 = \frac{u_n^2 + 1 - u_n}{u_n} = \frac{\left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{u_n}$$

On remarque que $\left(u_n - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ est une expression positive et que le signe de u_{n+1} ne dépend que de celui de u_n, lequel est positif, par hypothèse de récurrence.

Donc, $u_{n+1} > 0$

Ainsi, si $a > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n > 0$

(c) Démontrons que si $a > 0$, alors pour $n \geqslant 1$ $u_n \geqslant 1$

En effet, nous devons regarder à partir de $n = 1$, puisque a peut prendre n'importe quelle valeur strictement positive.

Pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - 1 = u_n + \dfrac{1}{u_n} - 1 - 1 = u_n + \dfrac{1}{u_n} - 2 = \dfrac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{u_n} = \dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n}$

Or, $\dfrac{(u_n-1)^2}{u_n} \geqslant 0$ et donc $u_{n+1} - 1 \geqslant 0$, c'est à dire $u_{n+1} \geqslant 1$

(d) Si $a > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante à partir de $n = 1$

En effet, de $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$, nous tirons $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ puisque $\dfrac{1}{u_n} \leqslant 1$. Ainsi $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n = 1$

(e) Si $a > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

En effet, elle est décroissante et minorée par 1 ; donc convergente

(f) La fonction $f(x) = x + \dfrac{1}{x} - 1$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettant pour définition $u_{n+1} = f(u_n)$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convegente, sa limite l vérifie $l = f(l)$.
Résolvons donc l'équation $x = f(x)$ avec $x > 0$

$$x = f(x) \iff x = x + \frac{1}{x} - 1 \iff \frac{1}{x} - 1 = 0 \iff x = 1$$

La seule limite possible est donc $l = +1$

3. **Conclusion :**
   ⊗ Si $a < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
   ⊗ Si $a > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

10.9.3 Fonctions continues sur un intervalle

Exercice 61 :

Soit $f(x) = x^2\cos x + x\sin x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$

C'est très facile ! ! Il suffit de vérifier qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Or :
- ▹ $f(0) = 1$
- ▹ $f(\pi) = \pi^2\cos\pi + \pi\sin\pi + 1 = -\pi^2 + 1 < 0$

Il existe donc $x_0 \in]0;\pi[$ tel que $f(x_0) = 0$

En fait, il existe une infinité de solutions à cette équation ; il suffit de remarquer que :
- ⋆ $f\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 + \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi > 0$
- ⋆ $f(\pi + 2n\pi) = -(\pi + 2n\pi)^2 + 1 < 0$

Et il y en a d'autres ! !

Exercice 62 :

Soient a et b 2 nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction uniformément continue sur $]a;b[$. Démontrer qu'il est possible de prolonger f en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[a;b]$. En déduire qu'elle est bornée sur $]a;b[$

1. **Nous allons montrer que f admet une limite à droite de a notée l_a**
   Nous allons démontrer que f vérifie les conditions du critère de Cauchy pour les fonctions à droite du point a *(c.f. 10.3.14)*
   Soit $\varepsilon > 0$
   Comme f est uniformément continue sur $]a;b[$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que $(\forall x \in]a;b[)$ et $(\forall y \in]a;b[)$, nous avons l'implication $|x - y| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
   Soient $x \in]a;b[$ et $y \in]a;b[$ tels que $0 < |x - a| < \eta_\varepsilon$ et $0 < |y - a| < \eta_\varepsilon$. Alors, dans ce cas, ces inégalités sont équivalentes à $0 < x - a < \eta_\varepsilon$ et $0 < y - a < \eta_\varepsilon$ et donc à $-\eta_\varepsilon < x - y < \eta_\varepsilon \iff |x - y| < \eta_\varepsilon$, d'où nous déduisons que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$
   f vérifie donc bien le critère de Cauchy pour les fonctions à droite de a et donc $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ existe.
   Nous notons $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = l_a$.
2. **De la même manière, on démontre que f admet une limite à gauche de b notée l_b**
3. **f se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[a;b]$**
   Soit $\tilde{f} : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
   $$\tilde{f}(a) = l_a \qquad \tilde{f}(b) = l_b \text{ et } (\forall x \in]a;b[)\left(\tilde{f}(x) = f(x)\right)$$
   $\tilde{f}$ est donc continue sur $[a;b]$ et apparaît donc comme le prolongement par continuité de f en a et en b. $\tilde{f}$ est donc bornée sur $[a;b]$, et donc f est bornée sur $]a;b[$
4. **$\tilde{f}$, continue sur $[a;b]$ est donc uniformément continue sur $[a;b]$ (théorème de Heine)**
   f, uniformément continue sur $]a;b[$ peut donc être prolongée en une fonction uniformément continue $\tilde{f}$ sur $[a;b]$

Exercice 63 :

Soient $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que $(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) < 0$ Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que $f(c) = g(c)$

Nous construisons, comme toujours *(ou souvent!!)* la fonction auxiliaire $h(x) = f(x) - g(x)$ et nous avons, bêtement $h(1) \times h(0) < 0$, et donc, d'après 10.6.6 , il existe $c \in]0;+1[$ tel que $h(c) = 0$, c'est à dire tel que $f(c) = g(c)$

Exercice 64 :

Soient $p > 0$ et $q > 0$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \neq f(b)$. Démontrer qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que : $pf(a) + qf(b) = (p+q) f(c)$

Comme $f(a) \neq f(b)$, nous supposons $f(a) < f(b)$.
f étant continue, f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$. Or

$$f(a) < \frac{pf(a) + qf(b)}{p+q} < f(b)$$

Il existe donc $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = \dfrac{pf(a) + qf(b)}{p+q}$, c'est à dire tel que $pf(a) + qf(b) = (p+q) f(c)$

Exercice 65 :

Soit $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : [0;1] & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 - x \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \\ x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. *La fonction f est-elle continue sur $[0;1]$*

   Nous allons étudier cette continuité dans deux cas : $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{Q}$
   - ▷ Supposons $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
     Alors, il existe une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels *(c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n \in \mathbb{N}$)* tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = x$
     Si f est continue, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(q_n) = f(x)$.
     Or, $f(q_n) = q_n$ et $f(x) = 1 - x$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = x$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} f(q_n) \neq f(x)$[9]
     Donc, f n'est pas continue si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   - ▷ Supposons maintenant que $x \in \mathbb{Q}$
     Si $\mathbb{Q}$ est dense dans $[0;1]$, il en est de même de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Il existe donc une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *(c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)* tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$
     Si f est continue, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(r_n) = f(x)$.
     Or, $f(r_n) = 1 - r_n$ et $f(x) = x$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} f(r_n) = 1 - x \neq f(x)$
     Donc, f n'est pas continue si $x \in \mathbb{Q}$

   Donc, f n'est pas continue sur $[0;1]$
2. *Montrer que f prend toutes les valeurs comprises entre 0 et 1*

   Soit $y \in [0;1]$
   - ▷ Si $y \in \mathbb{Q}$, alors $f(y) = y$
   - ▷ Si $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors si $x = 1 - y$, alors $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1 - x = 1 - (1 - y) = y$

   Ainsi, tout $y \in [0;1]$ admet un antécédent dans $[0;1]$

Ainsi, f n'est pas continue mais atteint toutes les valeurs de $[0;1]$

9. Sauf si $x = \dfrac{1}{2}$, mais $\dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}$

Exercice 66 :

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, une application continue telle que $f(0) = f(1)$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, il existe un nombre $\alpha_n \in [0;1]$ tel que $f(\alpha_n) = f\left(\alpha_n + \dfrac{1}{n}\right)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$

Considérons la fonction $g : \left[0; 1 - \dfrac{1}{n}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \left[0; 1 - \dfrac{1}{n}\right]$, par : $g(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)$; g est, par construction, continue.

Supposons que,pour tout $x \in \left[0; 1 - \dfrac{1}{n}\right]$, nous ayions $g(x) > 0$; alors :

$$\begin{aligned}
g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + g\left(\frac{n-1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= f(1) - f(0) \\
&= 0 \text{ puisque } f(0) = f(1)
\end{aligned}$$

Or, ceci est en contradiction avec avec le fait que nous avons supposé que,pour tout $x \in \left[0; 1 - \dfrac{1}{n}\right]$, nous ayions $g(x) > 0$, et nous aurions dû avoir $g(0) + g\left(\dfrac{1}{n}\right) + g\left(\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + g\left(\dfrac{n-1}{n}\right) > 0$

Il existe donc $\alpha_n \in \left[0; 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ tel que $g(\alpha_n) = 0$. Ainsi, il existe un nombre $\alpha_n \in [0;1]$ tel que $f(\alpha_n) = f\left(\alpha_n + \dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 67 :

Soient a et b 2 réels tels que $a \leqslant b$ Soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ toutes deux continues et telles que, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f(x) > g(x)$ Démontrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$, nous ayions $f(x) \geqslant g(x) + \lambda$

Soit h, la fonction définie sur l'intervalle $[a;b]$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
Alors h est continue sur $[a;b]$ et, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $h(x) > 0$
h est bornée sur $[a;b]$ et y atteint ses bornes. Si $\lambda = \inf\limits_{x \in [a;b]} h(x)$, il existe $c \in [a;b]$ tel que $h(c) = \lambda$, et d'après l'hypothèse, $\lambda > 0$.
Donc, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f(x) \geqslant g(x) + \lambda$

Exercice 68 :

Démontrer que toute fonction continue et périodique est bornée

Nous appelons T, avec $T > 0$ la période de f.
Alors, f est bornée sur l'intervalle $[0;T]$.
Posons : $m = \inf\limits_{x \in [0;T]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x \in [0;T]} f(x)$; donc, pour tout $x \in [0;T]$, nous avons $m \leqslant f(x) \leqslant M$
Soit $x \in \mathbb{R}$; alors, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [nT; (n+1)T]$

En effet, si nous prenons $n = \left[\dfrac{x}{T}\right]$, nous avons :

$$\left[\frac{x}{T}\right] \leqslant \frac{x}{T} < \left[\frac{x}{T}\right] + 1 \Longleftrightarrow T\left[\frac{x}{T}\right] \leqslant x < T\left[\frac{x}{T}\right] + T \Longleftrightarrow nT \leqslant x < nT + T$$

Et donc : $nT \leqslant x < nT + T \Longleftrightarrow 0 \leqslant x - nT < T$
De telle sorte que $m \leqslant f(x - nT) \leqslant M$.
De la périodicité de f, nous avons $f(x - nT) = f(x)$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $m \leqslant f(x) \leqslant M$
Ainsi, toute fonction périodique et continue est-elle bornée.

Exercice 69 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que f admette des maxima locaux en x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$. Démontrer que f admet un minimum local en un point $c \in]x_1; x_2[$

POUR TOUT DIRE, CE N'EST PAS UN EXERCICE TRÈS FACILE
Tout d'abord, visualisons la situation :*(figure 10.39)*

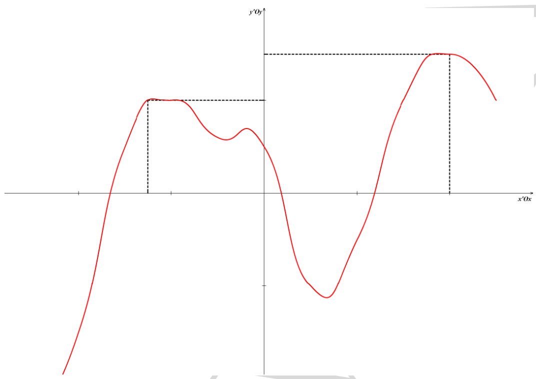

FIGURE 10.39 – Visualisation, par un graphe de deux maxima locaux

f étant continue sur l'intervalle $[a; b]$, l'est, en particulier sur l'intervalle $[x_1; x_2] \subset [a; b]$. Il existe donc $c \in [x_1; x_2]$ tel que $f(c) = \inf\limits_{x \in [x_1; x_2]} f(x)$

- ▷ Supposons que $c = x_1$ ou $c = x_2$
  x_1 *(donc c)* étant un maximum local, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $|x - x_1| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant f(x_1)$, en particulier, $x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant f(x_1)$
  Comme $c = x_1$, x_1 est aussi la borne inférieure de f sur l'intervalle $[x_1; x_2]$, c'est à dire que, pour tout x tel que $x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + \eta$, alors $f(x) \geqslant f(x_1)$, ce qui signifie que f est constante sur $[x_1; x_1 + \eta]$, et qu'en choisissant $c = x_1 + \dfrac{\eta}{2}$, c est bien un minimum local tel que $c \in]x_1; x_2[$
  La démonstration est la même si nous supposons $c = x_2$
- ▷ Supposons que $c \neq x_1$ et $c \neq x_2$
  Alors $f(c) < \inf(f(x_1), f(x_2))$ *(sinon, $f(c)$ ne serait pas la borne inférieure sur l'intervalle $]x_1; x_2[$)* et donc $c \in]x_1; x_2[$
  Soit $\eta > 0$ tel que $\eta = \inf(c - x_1, x_2 - c)$. Alors, pour tout $x \in]c - \eta; c + \eta[$, nous avons $f(x) \geqslant f(c)$ *(puisque $f(c)$ est l'inf sur $[x_1; x_2]$)*
  f admet donc un minimum local en $c \in]x_1; x_2[$

Exercice 70 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que pour tout $x \geqslant 0$, nous ayions $f(x) < x$

1. *Démontrer que $f(0) = 0$*

   f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0)$

   D'autre part, f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et donc, pour tout $x \geqslant 0$, nous avons $f(x) \geqslant 0$. De l'inégalité $f(x) < x$, nous déduisons que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$

   Donc $f(0) = 0$

2. *Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$ tels que $0 < a < b$. Montrer qu'il existe $M \in [0;1[$ tel que pour tout $x \in [a;b]$, nous ayions $f(x) \leqslant Mx$*

   Soit la fonction g, définie sur l'intervalle $[a;b]$, par : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$
   La fonction g est continue sur $[a;b]$ et est telle que pour tout $x \in [a;b]$, $0 \leqslant g(x) < 1$
   Soit $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} g(x)$; il existe $c \in [a;b]$ tel que $g(c) = M$, et de l'inégalité $f(c) < c$, nous déduisons $M < 1$.
   Donc, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $0 \leqslant g(x) \leqslant M < +1$, c'est à dire que, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $0 \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant M \Longleftrightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant Mx$

Exercice 71 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ une fonction continue. Il faut montrer que f est constante

Supposons le contraire, c'est à dire que f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.
Il existe donc $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$ et $f(a) \neq f(b)$, et nous avons $f(a) \in \mathbb{Z}$ et $f(b) \in \mathbb{Z}$.
Posons $f(a) = m$ et $f(b) = n$. D'après le théorème de la valeur intermédiaire, pour tout $c \in [m;n]$, il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = c$; or, c'est impossible.
Donc, f n'est pas constante.

Exercice 72 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Il faut montrer que f est uniformément continue

Soit$\varepsilon > 0$

1. On écrit d'abord que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

   Il existe donc $A > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x > A \Longrightarrow |f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
2. Maintenant, f est continue sur l'intervalle fermé $[0; A+1]$ et y est donc, d'après le théorème de Heine 10.6.9 uniformément continue.

   Il existe donc $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [0; A+1]$ et $y \in [0; A+1]$, nous ayions $|x - y| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
3. On choisit, maintenant $\alpha' = \min\{\alpha; 1\}$
   Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ tels que $|x - y| \leqslant \alpha'$; on suppose $y > x$
   - ▷ L'inégalité $|x - y| \leqslant \alpha'$ signifie $|x - y| \leqslant \alpha$ et $|x - y| \leqslant 1$
   - ▷ Si $x \in [0; A]$, alors $x \in [0; A+1]$ et $y \in [0; A+1]$, et comme $|x - y| \leqslant \alpha$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$
   - ▷ Si $x \geqslant A$ et donc $y \geqslant A$, et comme $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

10.9.4 Les fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 73 :

Pour résoudre cette question, il suffit de revenir aux définitions et de bien connaître les formules trigonométriques

1. *Montrer que $\arcsin(-x) = -\arcsin x$*

$$y = \arcsin(-x) \iff \begin{cases} -x = \sin y \\ -x \in [-1, +1] \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \sin -y \\ x \in [-1, +1] \\ -y \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$
$$\iff -y = \arcsin x$$
$$\iff y = -\arcsin x$$

Nous avons bien $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

2. *Montrer que* $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

   Nous itérons :

$$y = \arccos(-x) \iff \begin{cases} -x = \cos y \\ -x \in [-1, +1] \\ y \in [0, +\pi] \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = -\cos y = \cos(\pi - y) \\ x \in [-1, +1] \\ \pi - y \in [0, +\pi] \end{cases}$$
$$\iff \pi - y = \arccos x$$
$$\iff y = \pi - \arccos x$$

   Nous avons donc $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

3. *Montrer que* $\arcsin x + \arccos x = +\frac{\pi}{2}$

   Comme d'habitude, posons $y = \arcsin x$. Alors :

$$y = \arcsin x \iff \begin{cases} x = \sin y \\ x \in [-1, +1] \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

   Or, $\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ et donc, nous avons :

$$y = \arcsin x \iff \begin{cases} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \\ x \in [-1, +1] \\ \frac{\pi}{2} - y \in [0, \pi] \end{cases}$$

   Et donc $\frac{\pi}{2} - y = \arccos x \iff \frac{\pi}{2} = \arccos x + y \iff \arcsin x + \arccos x = +\frac{\pi}{2}$

Exercice 74 :

1. *Calculer, pour* $ab \neq 1$, $\arctan a + \arctan b$

   ⋆ Premièrement rappelons que, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\tan\alpha \tan\beta \neq 1$:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

   Et comme la fonction tan est périodique et de période π, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$$

   ⋆ D'autre part :

$$y = \arctan a \iff \begin{cases} a = \tan y \\ a \in \mathbb{R} \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \quad \text{et} \quad z = \arctan b \iff \begin{cases} b = \tan z \\ b \in \mathbb{R} \\ z \in \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

   Des équivalences précédentes, nous avons $-\pi < y + z < \pi$

- ⋆ <u>Supposons $-\pi < y+z < -\dfrac{\pi}{2}$</u>

  Alors $0 < y+z+\pi < \dfrac{\pi}{2}$

  Et $U = \tan(y+z+\pi) \iff y+z+\pi = \arctan U$

  Or,$\tan(y+z+\pi) = \tan(y+z) = \dfrac{\tan y + \tan z}{1 - \tan z \tan y} = \dfrac{a+b}{1-ab}$ D'où, si $-\pi < y+z < -\dfrac{\pi}{2}$ alors $y+z+\pi = \arctan U = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) \iff y+z = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) - \pi$

  Donc, si $-\pi < \arctan a + \arctan b < -\dfrac{\pi}{2}$, alors $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) - \pi$

- ⋆ <u>Supposons $-\dfrac{\pi}{2} < y+z < +\dfrac{\pi}{2}$</u>

  Alors, plus simplement, $U = \tan(y+z) \iff y+z = \arctan U$, et en utilisant les résultats ci-dessus, nous avons donc si $-\dfrac{\pi}{2} < y+z < +\dfrac{\pi}{2}$, alors $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)$

- ⋆ <u>Supposons $\dfrac{\pi}{2} < y+z < \pi$</u>

  Alors $-\dfrac{\pi}{2} < y+z-\pi < 0$

  Et $U = \tan(y+z-\pi) \iff y+z-\pi = \arctan U$

  Or,$\tan(y+z-\pi) = \tan(y+z) = \dfrac{\tan y + \tan z}{1 - \tan z \tan y} = \dfrac{a+b}{1-ab}$ D'où, si $-\dfrac{\pi}{2} < y+z-\pi < 0$ alors $y+z-\pi = \arctan U = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) \iff y+z = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$

  Donc, si $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan a + \arctan b < \pi$, alors $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$

2. *Calculer, pour $x \neq 0$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$*

   Nous voulons résoudre, ici, le cas où $ab = 1$

   Comme d'habitude, nous posons $y = \arctan x$. Aors,

$$y = \arctan x \iff \begin{cases} x = \tan y \\ x \in \mathbb{R} \\ y \in \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

   Donc, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\tan y} = \dfrac{\cos y}{\sin y} = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)$

   - ⋆ De $y \in \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$, c'est à dire $-\dfrac{\pi}{2} < y < +\dfrac{\pi}{2}$, nous tirons $0 < \dfrac{\pi}{2} - y < \pi$
   - ⋆ Supposons pour commencer que $0 < \dfrac{\pi}{2} - y < \dfrac{\pi}{2}$, c'est à dire $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$ et donc $x > 0$, alors :

$$\frac{1}{x} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right) \iff \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - y \iff y + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

     Donc, si $x > 0$, alors $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$

   - ⋆ Supposons maintenant $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2} - y < \pi$, c'est à dire $-\dfrac{\pi}{2} < y < 0$ et donc $x < 0$

     De la périodicité de la fonction tan, nous avons $\tan(\alpha - \pi) = \tan\alpha$ et donc :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}-y-\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{2}-y\right)$$

     Or, de $-\dfrac{\pi}{2} < y < 0$, nous tirons que $-\dfrac{\pi}{2} < -\dfrac{\pi}{2} - y < 0$ et alors de $\dfrac{1}{x} = \tan\left(-\dfrac{\pi}{2}-y\right)$, nous tirons :

$$\frac{1}{x} = \tan\left(-\frac{\pi}{2}-y\right) \iff \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} - y \iff y + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

     Ainsi, si $x < 0$, alors $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 75 :

Démontrer les égalités :

1. $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

   Comme d'habitude, nous posons $y = \arctan x$; remarquons que $y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; +\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que donc $\cos y > 0$

   De $y = \arctan x$, nous tirons $x = \tan y = \dfrac{\sin y}{\cos y}$; en élevant au carré, $x^2 = \dfrac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \sin^2 y\left(1+\tan^2 y\right)$.
   Or :
   $$x^2 = \sin^2 y\left(1+\tan^2 y\right) \iff x^2 = \left(1-\cos^2 y\right)\left(1+x^2\right) \iff \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

   D'où nous tirons $\cos y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ou $\cos y = \dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$. Comme nous savons que $\cos y > 0$, nous avons $\cos y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

   Et donc, $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2. $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

   De $x = \tan y = \dfrac{\sin y}{\cos y}$, nous tirons, en utilisant le résultat précédent :
   $$x\cos y = \sin y \iff \sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 76 :

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$, simplifier $\arcsin(2\sin x\cos x)$

Comme $2\sin x\cos x = \sin 2x$ il est très tentant de répondre tout de suite !! Or, ce n'est pas possible !!
Il suffit de revenir à la définition de $\arcsin x$:
$$Z = \arcsin U \iff \begin{cases} U = \sin Z \\ U \in [-1,+1] \\ Z \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

- ▷ Si $-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$, alors $-\dfrac{\pi}{2} < 2x < \dfrac{3\pi}{2}$
- ▷ <u>Supposons $-\dfrac{\pi}{4} < x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$</u>

  Alors, sans souci, $-\dfrac{\pi}{2} < 2x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $\arcsin(2\sin x\cos x) = 2x$; c'est tout !!
- ▷ <u>Supposons $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x < \dfrac{3\pi}{4}$</u>

  Alors, $\dfrac{\pi}{2} \leqslant 2x < \dfrac{3\pi}{2}$, et cette fois ci, il est impossible d'utiliser la définition de l'arcsin x.

  Par contre, si $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x < \dfrac{3\pi}{4}$, alors $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant 2x - \pi < \dfrac{\pi}{2}$

  D'autre part, $\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha$; D'où, si $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x < \dfrac{3\pi}{4}$,
  $$2x - \pi = \arcsin\sin(2x-\pi) = \arcsin(-\sin 2x) = -\arcsin(\sin 2x)$$

  D'où, $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x < \dfrac{3\pi}{4}$, alors $\arcsin(\sin 2x) = \pi - 2x$

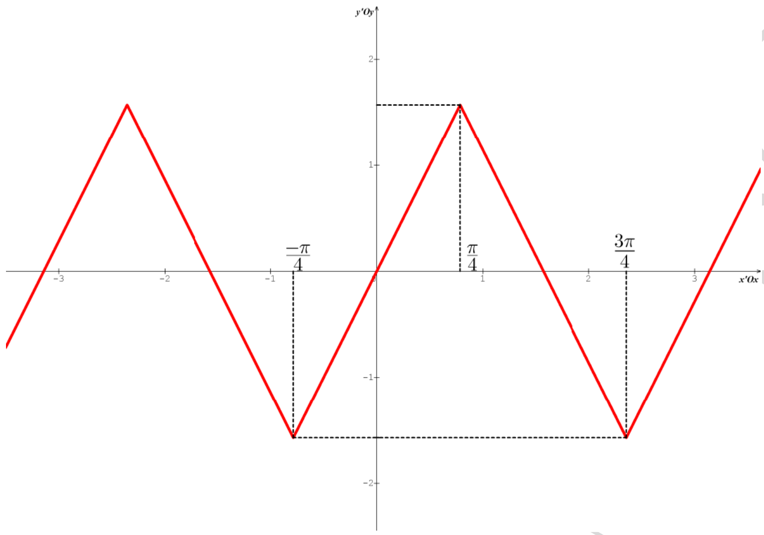

FIGURE 10.40 – Le graphe de la fonction $\arcsin(2\sin x\cos x)$ sur $\mathbb{R}$ en entier

10.9.5 Suites de fonctions

Exercice 77 :

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction f. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, chaque fonction f_n est croissante. Démontrer que f est croissante

Soient $x \in E$ et $y \in E$ tels que $x \leqslant y$
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme la fonction f_n est croissante, $f_n(x) \leqslant f_n(y)$. D'autre part, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de fonctions convergeant simplement vers une fonction f, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y) = f(y)$, en utilisant les résultats sur les suites et les relations d'ordre, nous avons $f(x) \leqslant f(y)$
La fonction f est donc croissante sur E

Exercice 79 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions définies sur l'intervalle fermé borné $[0;1]$

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$

   Nous pouvons remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geqslant 0$, et que, toujours pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$
   D'autre part, pour tout x tel que $0 < x \leqslant 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+nx = +\infty$ et donc, pour $x \in]0;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{1+nx} = 0$, de telle sorte que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convege simplement, sur $[0;1]$ vers la fonction nulle $\mathcal{O}$ sur l'intervalle $]0;1]$.
   Y-a-t-il convergence uniforme ?
   Remarquons que, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(1) \Longleftrightarrow 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{1+n}$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+n} = 0$, c'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0;1]} f_n(x)\right) = 0$, nous avons bien la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle $\mathcal{O}$ sur l'intervalle $]0;1]$

2. $g_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$

Cette fois ci, encore, nous pouvons remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) \geqslant 0$, et que, toujours pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(0) = 1$

D'autre part, pour tout x tel que $0 < x \leqslant 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + nx = +\infty$ et donc, pour $x \in]0;1]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1+nx} = 0$, de telle sorte que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convege simplement, sur $[0;1]$ vers la fonction G définie par :

$$\begin{cases} G(x) = 0 \text{ si } 0 < x \leqslant 1 \\ G(0) = 1 \end{cases}$$

Y-a-t-il convergence uniforme ?

Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions g_n sont continues sur $[0;1]$.

S'il y avait convergence uniforme de la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la fonction G, G serait continue.

Or, G n'est pas une fonction continue

Donc, la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers G

Exercice 80 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$

1. **Faisons une étude générale ; voir figure 10.41**
   - ▷ Tout d'abord, remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction paire ; nous n'allons donc l'étudier sur $\mathbb{R}^+$
   - ▷ Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = \dfrac{1}{2}$
   - ▷ Supposons $0 < x < 1$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x^{2n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$
   - ▷ Supposons maintenant que $x > 1$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x^{2n} = +\infty$; nous sommes devant une indétermination ; mais $f_n(x)$ est un rapport de polynômes qui tend vers l'infini comme le rapport des ses termes de plus haut degré. Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$

   Ainsi, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement, sur $\mathbb{R}$ vers la fonction F définie par :

$$\begin{cases} F(x) = 1 \text{ si } |x| > 1 \\ F(1) = F(-1) = \dfrac{1}{2} \\ F(x) = 0 \text{ si } |x| < 1 \end{cases}$$

   F n'est évidemment pas contine ; la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément vers F sur $\mathbb{R}$

2. **Etude de quelques cas particuliers**

   (a) Supposons $|x| \geqslant h > +1$

   De la parité, nous n'étudions que sur $[h;+\infty[$.

   Il faut donc évaluer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sup\limits_{x \in [h;+\infty[} |f_n(x) - 1| \right)$.

   Or, pour tout $x \in [h;+\infty[$, $|f_n(x) - 1| = \left| \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}} - 1 \right| = \left| \dfrac{-1}{1+x^{2n}} \right| = \dfrac{1}{1+x^{2n}}$.

   Pour tout $x \in [h;+\infty[$, nous avons $1 + x^{2n} \geqslant 1 + h^{2n} \iff \dfrac{1}{1+x^{2n}} \leqslant \dfrac{1}{1+h^{2n}}$. En particulier, $\sup\limits_{x \in [h;+\infty[} |f_n(x) - 1| = \dfrac{1}{1+h^{2n}}$.

   Comme $h > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} h^{2n} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1+h^{2n}} = 0$

   On vient donc de démontrer la converge uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la fonction constante égale à 1 sur les intervalles $]-\infty;-h] \cup [h;+\infty[$ avec $h > 1$

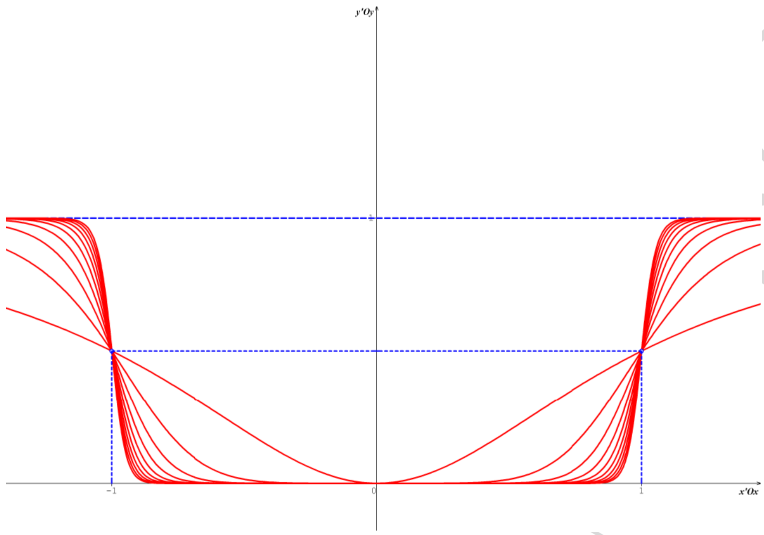

FIGURE 10.41 – Une visualisation, par les graphes, de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) Supposons $|x| \leqslant \alpha < +1$
Comme $\alpha < +1$, si $|x| \leqslant \alpha$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers la fonction constante égale à 0 sur l'intervalle $[-\alpha; +\alpha]$ avec $\alpha < 1$

En conclusion, la convergence uniforme dépend beaucoup du domaine dans lequel ontravaille.

Exercice 82 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $x \in [0;1]$ par $f_n(x) = x^n(1-x)$

- **Convergence simple**
Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $f_n(0) = f_n(1) = 0$
Supposons $0 < x < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$;, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle $\mathcal{O}$ sur $[0;1]$
- **Convergence uniforme**
Comme tout à l'heure, il faut évaluer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0;+1]} |f_n(x)|\right)$. Or, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $f_n(x) \geqslant 0$ et donc $\sup\limits_{x\in[0;+1]} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0;+1]} f_n(x)$
La borne supérieure des fonctions f_n est atteinte en $x_0 = \dfrac{n}{n+1}$ et donc pour tout $x \in [0;+1]$, nous avons $f_n(x) \leqslant f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$
Or, $f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\left(1 - \dfrac{n}{n+1}\right) = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$
Et nous avons : $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} -n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\frac{-1}{n}} = -1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{e}$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = 0$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle $\mathcal{O}$ sur $[0;1]$

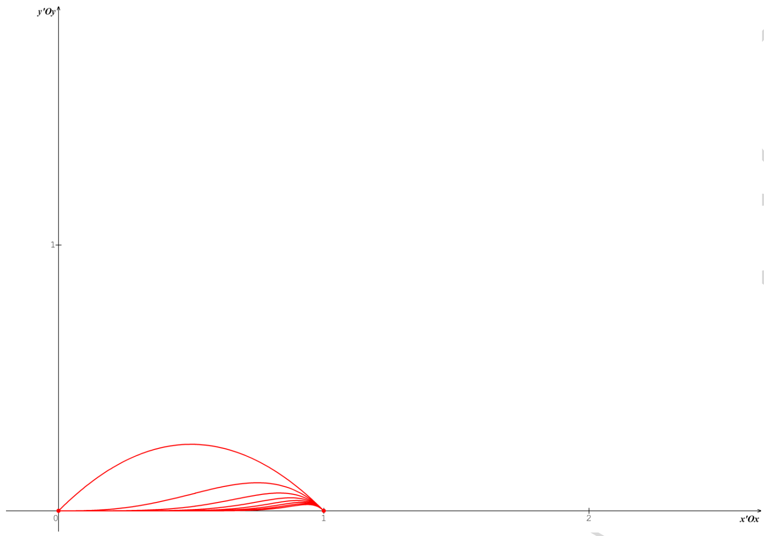

FIGURE 10.42 – Une visualisation, par les graphes, de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 83 :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite de fonctions définires sur l'intervalle fermé borné* $[0;1]$ *par :*

$$\begin{cases} f_n(x) = & n^2 x(1-nx) \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ f_n(x) = & 0 \text{ si } \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers une fonction* f*. La convergence est-elle uniforme ?*

Tout d'abord, commençons par visualiser sur la figure 10.43 cette suite de fonctions :

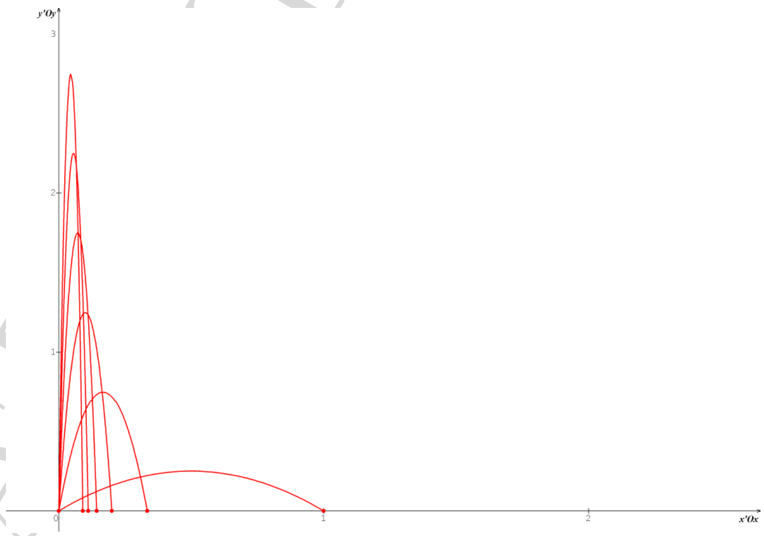

FIGURE 10.43 – Une visualisation, par les graphes, de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

En voyant ces représentations, il y a une chose qui doit nous sauter aux yeux : le maximum de f_n a plutôt tendance à grandir !!

▷ **Convergence simple**

Soit $x \in [0;1]$; il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{N} < x$, et pour tout $n \geqslant N$, nous avons $\dfrac{1}{n} < x$ et alors $f_n(x) = 0$. Nous avons donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc simplement vers la fonction nulle $\mathcal{O}$ sur $[0;1]$

▷ **Convergence uniforme**

Remarquons, comme précédemment que, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $f_n(x) \geqslant 0$ et donc que, sur $[0;1]$, $|f_n(x)| = f_n(x)$

Une petite étude de variations montre que le maximum de f_n est atteint en $x_n = \dfrac{1}{2n}$ et $f_n(x_n) = \dfrac{n}{4}$. Nous avons donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{4} = +\infty$

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne peut donc converger uniformément sur $[0;1]$

Exercice 84 :

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = & \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ f_n(x) = & 0 \text{ si } x > n \end{cases}$$

Comme tout à l'heure, nous allons d'abord visualiser cette suite *(figure 10.44)* :

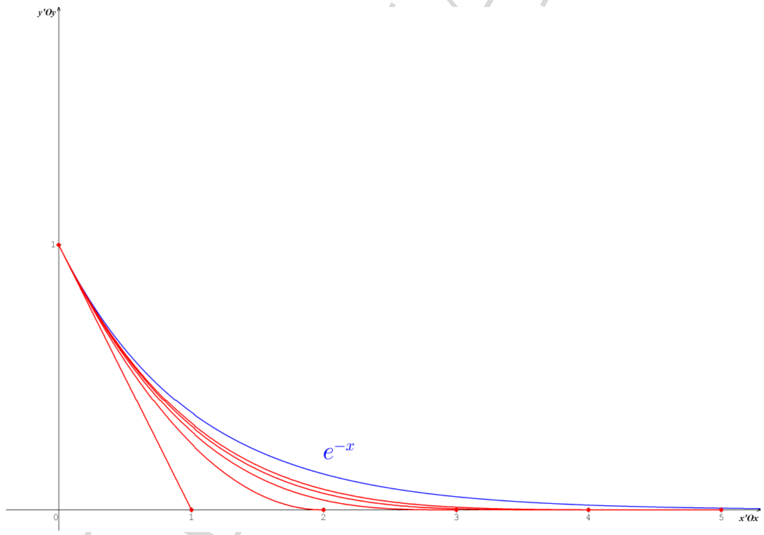

FIGURE 10.44 – Une visualisation, par les graphes, de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de sa limite e^{-x}

▷ **Convergence simple**

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $n > x$, et alors, $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$.

Il faut donc calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$

Nous avons $\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}$. Or, $n \ln\left(1 - \dfrac{x}{n}\right) = -x \times \dfrac{\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}{-\frac{x}{n}}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}{-\frac{x}{n}} = 1$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} -x \times \dfrac{\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}{-\frac{x}{n}} = -x$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} = e^{-x}$

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $f(x) = e^{-x}$

▷ **Y-a-t-il convergence uniforme ?**

S'il y a convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cette convergence ne peut se faire que vers $f(x) = e^{-x}$

$\star$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on construit $g_n(x) = f_n(x) - e^{-x}$. Alors :

$$\begin{cases} \text{Pour } x \in [0; n] & g_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n - e^{-x} \\ \text{Pour } x \geqslant n & g_n(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

L'objet de cette question est de montrer que, pour tout $x \geqslant 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} |g_n(x)| = 0$

On peut d'ores et déjà dire que, si $x \geqslant n$, alors $|g_n(x)| = e^{-x} \leqslant e^{-n}$

$\star$ Supposons $x \in [0; n]$

Calculons, pour $x \in [0; n]$, la dérivée de g_n :

$$g'_n(x) = n \times \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \times \frac{-1}{n} + e^{-x} = e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

L'étude du signe de g'_n est malaisée, et nous allons utiliser le fait que si $m \leqslant g_n(x) \leqslant M$, alors $|g_n(x)| \leqslant \sup\{|m|; |M|\}$

$\star$ Appelons $Z(g'_n)$ l'ensemble des valeurs réelles de $[0; n]$ qui annulent g'_n, c'est à dire :

$$Z(g'_n) = \{z \in [0; n] \text{ tels que } g'_n(z) = 0\}$$

- Tout d'abord, $Z(g'_n) \neq \emptyset$ puisque $0 \in Z(g'_n)$
- Si z_1 est un maximum local de g_n, alors $g'_n(z_1) = 0$ et $z_1 \in Z(g'_n)$
- De même si z_2 est un minimmum local de g_n, alors $g'_n(z_2) = 0$ et $z_2 \in Z(g'_n)$
- Donc, $|g_n(x)| \leqslant \sup\limits_{z \in Z(g'_n)} |g_n(z)|$

$\star$ Que vérifient les éléments $z \in Z(g'_n)$?

Tout d'abord,

$$z \in Z(g'_n) \iff g'_n(z) = 0 \iff e^{-z} - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1} = 0 \iff e^{-z} = \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1}$$

Donc, pour tout $z \in Z(g'_n)$:

$$\begin{aligned} g_n(z) &= \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n - e^{-z} \\ &= \left(1 - \frac{z}{n}\right) \times \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1} - e^{-z} \\ &= \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{-z} - e^{-z} \\ &= \frac{-z}{n} e^{-z} \end{aligned}$$

C'est à dire $|g_n(z)| = \dfrac{z}{n} e^{-z}$

$\star$ Majorons $\varphi(z) = \dfrac{z}{n} e^{-z}$

Nous avons : $\varphi'(z) = \dfrac{1}{n} e^{-z} - \dfrac{z}{n} e^{-z} = \dfrac{e^{-z}}{n}(1 - z)$

Ainsi, pour tout $z \in [0; n]$, nous avons $0 \leqslant \varphi(z) \leqslant \varphi(1) \leqslant \dfrac{e^{-1}}{n}$ et donc, $\sup\limits_{z \in Z(g'_n)} |g_n(z)| \leqslant \dfrac{e^{-1}}{n}$

$\star$ En conclusion, comme pour tout $x \geqslant n$, $|g_n(x)| \leqslant e^{-n}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, nous avons $|g_n(x)| \leqslant \max\left\{\dfrac{e^{-1}}{n}; e^{-n}\right\}$ [10]

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \max\left\{\dfrac{e^{-1}}{n}; e^{-n}\right\} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} |g_n(x)| = 0$

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f(x) = e^{-x}$

10. On peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $e^{-n} \leqslant \dfrac{e^{-1}}{n}$ et donc que $\max\left\{\dfrac{e^{-1}}{n}; e^{-n}\right\} = \dfrac{e^{-1}}{n}$, de telle sorte que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, nous ayions $|g_n(x)| \leqslant \dfrac{e^{-1}}{n}$

Exercice 85 :

1. *Soient $E \subset \mathbb{R}$, $F \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions défnies sur E et à valeurs dans F qui converge uniformément vers une fonction f. Soit $g : F \longrightarrow \mathbb{K}$ une application uniformément continue. Démontrer que la suite de fonctions $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \circ f$*

   Il faut donc montrer que, pour tout $x \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |g \circ f_n(x) - g \circ f(x)| = 0$

   Soit $\varepsilon > 0$
   - ▷ La fonction g étant uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in F$ et tout $y \in F$, $|x - y| < \eta \Longrightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$
   - ▷ La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors, pour tout $x \in E$, $|f_n(x) - f(x)| < \eta$
   - ▷ Ainsi, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|f_n(x) - f(x)| < \eta$ et donc $|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \epsilon$

   La suite $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers la fonction $g \circ f$
2. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions défnies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f. Démontrez que la suite de fonctions $\left(\dfrac{f_n}{1+f_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $\dfrac{f}{1+f^2}$*

   Nous sommes, ici, dans la situation de la question précédente où g est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ et donc $g \circ f_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{1+(f_n(x))^2}$.

   Si nous réussissons à montrer que g est uniformément continue, alors le résultat demandé est démontré.

   L'étude des dérivées premières et secondes de g montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g'(x)| \leqslant 1$, et donc, d'après le théorème des accroissements finis, nous avons $|g(x) - g(y)| \leqslant |x - y|$, ce qui suffit pour conclure que g est uniformément continue.

   Donc, la suite de fonctions $\left(\dfrac{f_n}{1+f_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $\dfrac{f}{1+f^2}$

Exercice 86 :

Soient $E \subset \mathbb{R}$ On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f,bornée et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite de fonctions définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction g, bornée elle aussi. Démontrer que la suite de fonctions $(g_n \times f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \times f$

Pour nous simplifier la vie, nous posons :

- ⋆ M_f le majorant de f sur E, c'est à dire tel que, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M_f$
- ⋆ M_g le majorant de g sur E, c'est à dire tel que, pour tout $x \in E$, $|g(x)| \leqslant M_g$

Nous devons donc montrer que, pour tout $x \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| = 0$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
|f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| = &\ |f_n(x) g_n(x) - f(x) g_n(x) + f(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \\
\leqslant &\ |f_n(x) g_n(x) - f(x) g_n(x)| + |f(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \\
\leqslant &\ |g_n(x)| \, |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \, |g_n(x) - g(x)| \\
\leqslant &\ |g_n(x)| \, |f_n(x) - f(x)| + M_f \, |g_n(x) - g(x)|
\end{aligned}$$

Reste à traiter le cas $|g_n(x)|$.
Nous avons : $|g_n(x)| = |g_n(x) - g(x) + g(x)| \leqslant |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| \leqslant |g_n(x) - g(x)| + M_g$.
Donc :

$$|f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| \left(|g_n(x) - g(x)| + M_g\right) + M_f \, |g_n(x) - g(x)|$$

Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f, que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction g, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} |g_n(x) - g(x)| = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| \left(|g_n(x) - g(x)| + M_g\right) + M_f \, |g_n(x) - g(x)| = 0$$

C'est à dire : pour tout $x \in E$, $\lim\limits_{n \to +\infty} |f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| = 0$
La suite de fonctions $(g_n \times f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers $g \times f$

Exercice 87 :

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme

Pour nous simplifier la vie, nous notons f la limite uniforme de la suite de polynôme $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$
Utilisons le critère de Cauchy pour la convergence uniforme.
Pour $\varepsilon = 1$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$ et tout $m \geqslant N_1$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|P_n(x) - P_m(x)| \leqslant 1$
Ce qui signifie que, pour tout $n \geqslant N_1$, les polynômes $P_n - P_{N_1}$ sont bornés **sur** $\mathbb{R}$, ce qui est impossible sauf si le polynôme $P_n - P_{N_1}$ est un polynôme constant. Posons donc $P_n - P_{N_1} = a_n$ où $a_n \in \mathbb{R}$; nous avons, en particulier, $P_n(0) - P_{N_1}(0) = a_n$
La suite de polynôme $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} P_n(0) - P_{N_1}(0) = f(0) - P_{N_1}(0)$.
Par passage à la limite, nous avons :

$$\lim_{n \to +\infty} P_n - P_{N_1} = f - P_{N_1} = f(0) - P_{N_1}(0)$$

C'est à dire $f = P_{N_1} + f(0) - P_{N_1}(0)$, ce qui montre que f est un polynôme

> *Si vous comparez avec le théorème de Weierstrass (dans le cours de L_2 dans l'annexe « Approximation uniforme ») vous pouvez y voir une contradiction ; Or, il n'en est rien : L'exercice précédent porte sur une convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ en entier alors que le théorème de Weierstrass pour sur une convergence uniforme dans un intervalle borné $[a; b]$*

Exercice 88 :

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_0(x) = 0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right) \left(f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(e^{-2x} - f_n^2(x)\right)\right)$$

1. (a) *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, nous avons :*

$$e^{-x} - f_{n+1}(x) = \left(e^{-x} - f_n(x)\right) \phi(x) \text{ où } \phi(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{2} f_n(x)$$

Rien de bien compliqué !!
Nous reprenons la définition, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$e^{-x} - f_{n+1}(x) = e^{-x} - \left(f_n(x) + \frac{1}{2}\left(e^{-2x} - f_n^2(x)\right)\right) = e^{-x} - f_n(x) - \frac{1}{2}\left(e^{-2x} - f_n^2(x)\right)$$

Or, $e^{-2x} - f_n^2(x) = (e^{-x} - f_n(x))(e^{-x} + f_n(x))$.
D'où, par factorisation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} e^{-x} - f_{n+1}(x) = &\ e^{-x} - f_n(x) - \frac{1}{2}\left(e^{-2x} - f_n^2(x)\right) \\ = &\ e^{-x} - f_n(x) - \frac{1}{2}\left(e^{-x} - f_n(x)\right)\left(e^{-x} + f_n(x)\right) \\ = &\ \left(e^{-x} - f_n(x)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(e^{-x} + f_n(x)\right)\right) \end{aligned}$$

Nous avons bien $e^{-x} - f_{n+1}(x) = (e^{-x} - f_n(x)) \phi(x)$ où

$$\phi(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(e^{-x} + f_n(x)\right) = 1 - \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{2} f_n(x)$$

(b) *Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, nous avons $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-x}$. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et convergente. Préciser sa limite.*

⇒ **Montrons que nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-x}$**

Nous allons faire cette démonstration par récurrence

⋆ Elle est vraie pour $n = 0$

En effet, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_0(x) = 0$ et donc $0 \leqslant f_0(x) \leqslant e^{-x}$

⋆ Supposons que, jusqu'au rang n, nous ayions $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-x}$

⋆ Démontrons que nous avons la propriété au rang $n+1$

Nous allons utiliser l'égalité trouvée dans la première question en établissant une majoration et une minoration de $\phi(x)$

De l'hypothèse de récurrence $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-x}$, nous tirons $e^{-x} \leqslant e^{-x} + f_n(x) \leqslant 2e^{-x}$, puis, en multipliant par $-\dfrac{1}{2}$, nous avons $-e^{-x} \leqslant -\dfrac{1}{2}\left(e^{-x} + f_n(x)\right) \leqslant -\dfrac{1}{2}e^{-x}$

Et donc

$$1 - e^{-x} \leqslant 1 - \frac{1}{2}\left(e^{-x} + f_n(x)\right) \leqslant 1 - \frac{1}{2}e^{-x} \Longleftrightarrow 1 - e^{-x} \leqslant \phi(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$$

Comme $x \geqslant 0$, nous avons $0 < e^{-x} \leqslant 1 \Longleftrightarrow 0 \leqslant 1 - e^{-x} < 1$ et donc $0 \leqslant \phi(x)$.

De l'identité

$$e^{-x} - f_{n+1}(x) = \left(e^{-x} - f_n(x)\right)\phi(x)$$

Et de l'hypothèse de récurrence $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-x}$ et de l'inégalité $0 \leqslant \phi(x)$, nous déduisons que

$$e^{-x} - f_{n+1}(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow f_{n+1}(x) \leqslant e^{-x}$$

D'autre part, de l'inégalité $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-x}$, nous tirons

$$0 \leqslant (f_n(x))^2 \leqslant e^{-2x} \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(e^{-2x} - (f_n(x))^2\right) \geqslant 0$$

De l'identité $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \dfrac{1}{2}\left(e^{-2x} - f_n^2(x)\right)$, nous déduisons $0 \leqslant f_{n+1}(x)$

En conclusion, nous avons $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant e^{-x}$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, nous avons $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-x}$

⇒ **En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et convergente**

⋆ Il faut donc montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, nous avons $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.

Or, de l'égalité

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(e^{-2x} - f_n^2(x)\right) \Longleftrightarrow f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-2x} - f_n^2(x)\right)$$

Et comme nous venons de montrer que $\dfrac{1}{2}\left(e^{-2x} - (f_n(x))^2\right) \geqslant 0$, nous avons bien $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, ce qui montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la suite la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

⋆ De l'inégalité, vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-x}$, nous déduisons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$

La suite la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante et majorée, elle est convergente.

⇒ **Préciser la limite de la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$**

Soit $l(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

De l'égalité $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \dfrac{1}{2}\left(e^{-2x} - f_n^2(x)\right)$, nous déduisons, par le passage à la limite :

$$l(x) = l(x) + \frac{1}{2}\left(e^{-2x} - (l(x))^2\right) \Longleftrightarrow e^{-2x} = (l(x))^2$$

D'où nous tirons $l(x) = \pm e^{-x}$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geqslant 0$, nous avons $l(x) = e^{-x}$

Nous venons donc de montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}^+$ converge simplement vers e^{-x}

2. *Soit $a \in \mathbb{R}^+$*

   (a) *Montrer qu'il existe $k_a \in]0;1[$ tel que, pour tout $x \in [0;a]$:*

$$e^{-x} - f_{n+1}(x) \leqslant k_a \left(e^{-x} - f_n(x)\right)$$

Nous avons démontré que $e^{-x} - f_{n+1}(x) = (e^{-x} - f_n(x))\,\phi(x)$, et il faut donc majorer $\phi(x)$ lorsque $x \in [0;a]$.

Rappelons que $\phi(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}f_n(x)$. Comme, pour tout $x \geqslant 0$, $f_n(x) \geqslant 0$, nous avons $1 - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}f_n(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$, c'est à dire $\phi(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$.

Pour $x \in [0;a]$, nous avons

$$e^{-a} \leqslant e^{-x} \leqslant 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant -\frac{1}{2}e^{-x} \leqslant -\frac{1}{2}e^{-a} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant 1 - \frac{1}{2}e^{-x} \leqslant 1 - \frac{1}{2}e^{-a}$$

Autrement dit, $\frac{1}{2} \leqslant \phi(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2}e^{-a} < 1$. En posant $k_a = 1 - \frac{1}{2}e^{-a}$, nous avons bien $0 < k_a < 1$ et

$$0 \leqslant e^{-x} - f_{n+1}(x) \leqslant k_a \left(e^{-x} - f_n(x)\right)$$

   (b) *En déduire la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}^{*+}$*

C'est une question très classique, très proche des questions de cours.
De l'inégalité $0 \leqslant e^{-x} - f_{n+1}(x) \leqslant k_a (e^{-x} - f_n(x))$, nous tirons :

$$\begin{array}{rcl}
e^{-x} - f_n(x) & \leqslant & k_a (e^{-x} - f_{n-1}(x)) \\
e^{-x} - f_{n-1}(x) & \leqslant & k_a (e^{-x} - f_{n-2}(x)) \\
e^{-x} - f_{n-2}(x) & \leqslant & k_a (e^{-x} - f_{n-3}(x)) \\
\vdots & \leqslant & \vdots \\
\vdots & \leqslant & \vdots \\
e^{-x} - f_3(x) & \leqslant & k_a (e^{-x} - f_2(x)) \\
e^{-x} - f_2(2) & \leqslant & k_a (e^{-x} - f_1(x)) \\
e^{-x} - f_1(x) & \leqslant & k_a (e^{-x} - f_0(x))
\end{array}$$

Et en faisant le produit termes à termes, puis en simplifiant, nous obtenons

$$0 \leqslant \left(e^{-x} - f_n(x)\right) \leqslant (k_a)^n \left(\left(e^{-x} - f_0(x)\right)\right) = (k_a)^n e^{-x} \leqslant (k_a)^n$$

Puisque si $x \geqslant 0$, $e^{-x} \leqslant 1$, nous avons, pour tout $x \in [0,a]$, $0 \leqslant (e^{-x} - f_n(x)) \leqslant (k_a)^n$.
Comme $0 < k_a < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (k_a)^n = 0$ et donc, pour tout $x \in [0,a]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{-x} - f_n(x)) = 0$, ce qui montre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers e^{-x} sur l'intervalle $[0,a]$

3. *On pose $U_n = 1 - f_n(0)$.*

   (a) *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2^{1-2^n}$*

      ▷ Commençons par ce que nous pourrions appeler du bricolage :
      Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(0) = f_n(0) + \frac{1}{2}\left(1 - f_n^2(0)\right) &\Longleftrightarrow 1 - f_{n+1}(0) = 1 - f_n(0) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n^2(0) \\
&\Longleftrightarrow 1 - f_{n+1}(0) = \frac{2 - 2f_n(0) - 1 + f_n^2(0)}{2} \\
&\Longleftrightarrow 1 - f_{n+1}(0) = \frac{1 - 2f_n(0) + f_n^2(0)}{2} \\
&\Longleftrightarrow 1 - f_{n+1}(0) = \frac{(1 - f_n(0))^2}{2}
\end{aligned}$$

Ce qui fait que si nous posons $U_n = 1 - f_n(0)$, nous avons l'identité $U_{n+1} = \frac{U_n^2}{2}$

▷ Trouvons, maintenant, un expression de U_n en fonction de n

⋆ Commençons par faire un peu de bricolage ; de la relation trouvée précédemment, nous tirons :

$$U_n = \frac{1}{2}U_{n-1}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}U_{n-2}^2\right]^2 = \frac{1}{8}\left(U_{n-2}\right)^4$$

Et en itérant, $U_n = \dfrac{1}{2^7}\left(U_{n-3}\right)^8$

Nous pouvons penser que $U_n = \dfrac{1}{2^{2^p-1}}\left(U_{n-p}\right)^{2^p}$

⋆ Démontrons, par une récurrence sur p que $U_n = \dfrac{1}{2^{2^p-1}}\left(U_{n-p}\right)^{2^p}$

⋄ Vérifions que c'est vrai pour $p = 0$.

$$U_n = \frac{1}{2^{2^0-1}}\left(U_{n-0}\right)^{2^0} \iff U_n = \frac{1}{2^0}\left(U_n\right)^1 \iff U_n = U_n$$

⋄ Supposons donc qu'au rang p, nous ayions $U_n = \dfrac{1}{2^{2^p-1}}\left(U_{n-p}\right)^{2^p}$

⋄ Alors :

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{2^{2^p-1}}\left[\frac{1}{2}\left(U_{n-p-1}\right)^2\right]^{2^p} \\ &= \frac{1}{2^{2^p-1}} \times \frac{1}{2^{2^p}}\left(U_{n-p-1}\right)^{2^{p+1}} \\ &= \frac{1}{2^{2^{p+1}-1}}\left(U_{n-(p+1)}\right)^{2^{p+1}} \end{aligned}$$

Ce que nous voulions

⋆ En faisant, maintenant, $p = n-1$, nous avons :

$$U_n = \frac{1}{2^{2^{n-1+1}-1}}\left(U_{n-(n-1+1)}\right)^{2^{n-1+1}} \iff U_n = \frac{1}{2^{2^n-1}}\left(U_0\right)^{2^n}$$

De $U_0 = 1$, nous tirons $U_n = \dfrac{1}{2^{2^n-1}} = 2^{-(2^n-1)} = 2^{1-2^n}$

Donc, $U_n = 2^{1-2^n}$, ce que nous voulions

(b) *On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} U_k$. Etudier la convergence de la suite numérique $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$*

▷ Il nous est possible d'écrire différemment U_n. En effet :

$$U_n = 2^{1-2^n} = 2 \times 2^{-2^n} = 2 \times \frac{1}{2^{2^n}}$$

De telle sorte que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n} 2 \times \frac{1}{2^{2^k}} = 2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{2^k}}$$

▷ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $k \leqslant 2^k$, et donc en passant à l'exponentiation $2^k \leqslant 2^{2^k}$, et, en passant à l'inverse, $\dfrac{1}{2^{2^k}} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$

De cette remarque, nous tirons :

$$S_n = 2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{2^k}} \leqslant 2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = 2\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 4\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) < 4$$

La suite numérique $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée par 4. Comme somme de termes positifs, elle est clairement croissante.

▷ La suite numérique $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée est donc convergente

Le calcul de la limite est une autre paire de manche ! !

Cet exercice est tiré de l'énoncé d'un concours E3A que j'ai eu le privilège (?) de corriger ; Concours de fin de seconde année, il ne pose aucune difficulté et peut très bien être posé comme un exercice de difficulté moyenne en première année.

Chapitre 11

Fonctions différentiables, fonctions dérivables

Ce chapitre est dans l'exacte continuité du cours sur la dérivabilité exposé en L_0 ; il le complète. Il est donc nécessaire de travailler le cours de L_0 avant de travailler ce chapitre. L'objectif de ce chapitre est de maîtriser pleinement la dérivation des fonctions numériques d'une variable réelle

Le point de vue adopté dans ce chapitre est le point de vue de l'approximation ; point de vue que nous retrouverons dans l'étude des développements limités

Introduction

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2$

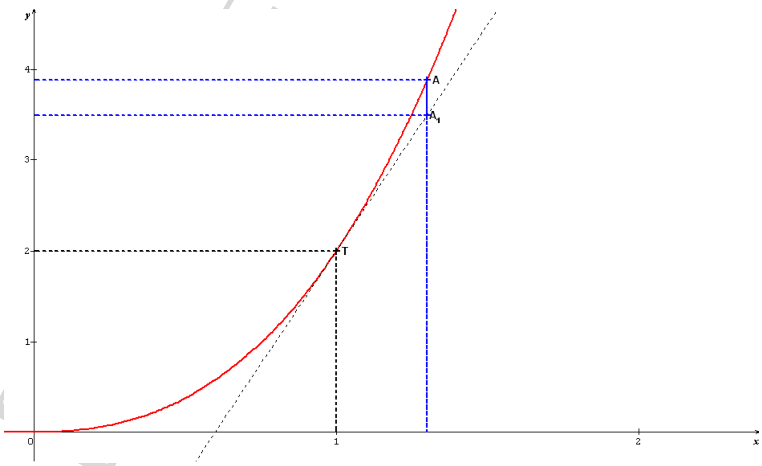

Figure 11.1 – Le graphe de la fonction $f(x) = x^3 + x^2$, le point $A(1,3, f(1,3))$, le point $T(1,2)$ et la tangente au graphe de f en T

Nous souhaitons connaître une valeur approchée de $f(1,3)$ sans calculer $(1,3)^3$ ni $(1,3)^2$, c'est à dire que l'on se place dans un petit intervalle de centre 1.
Pour cela, nous posons $x = 1 + h$ où h est très petit et donc :

$$f(1+h) = (1+h)^3 + (1+h)^2 = 1 + h^3 + 3h^2 + 3h + 1 + h^2 + 2h = 2 + 5h + 4h^2 + h^3$$

Pour h très petit, on **peut négliger** h^2 et h^3 devant h ; on a donc $f(1+h) \simeq 2+5h$; autrement dit,

$$f(1,3) \simeq 2+5\times 0,3 = 3,5$$

Le point $(1,3; f(1,3))$ est le point $A1$ du graphe. En fait, à la calculatrice, $f(1,3) = 3,887$ et l'erreur commise est figurée par le segment $[A; A1]$
Il faut remarquer que l'on peut écrire : $f(1+h) = 2+5h+h\times\left(4h+h^2\right)$
Or comme $f(1)=2$, on peut, en fait, écrire

$$f(1+h) = f(1)+5h+h\times\varepsilon(h)$$

Avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$
L'application

$$\begin{cases} \mathrm{D}_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad h & \longmapsto & \mathrm{D}_1(h) = 5h \end{cases}$$

est l'application linéaire tangente à f en $x_0=1$; $2+5h$ **est l'application linéaire affine tangente** en $x_0=1$

Remarque 1 :

Bien qu'il y ait un très fort lien entre elles, il ne faut pas confondre *"application linéaire affine tangente"* et *droite tangente à la courbe représentative*

11.1 Fonctions différentiables

Nous allons considérer, *par volonté de généralisation*, les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, s'approchant ainsi du cours sur les fonctions vectorielles ou les courbes paramétrées. L'application aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se fera naturellement.

11.1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$
On dit que f est <u>différentiable</u> en x_0 *(ou que f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0)*

- ▷ S'il existe $I \subset \mathbb{R}$, voisinage de 0
- ▷ S'il existe un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$
- ▷ S'il existe ε, application de I dans $\mathbb{C}$ telle que $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$

tels que

$$f(x_0+h) = f(x_0)+\lambda\times h + h\varepsilon(h)$$

Exemple 1 :

Nous avons donc $f(x)=x^3+x^2$ différentiable en $x_0=1$

Remarque 2 :

1. Une question va se poser pour connaître la forme du λ
2. On peut donner une autre définition, totalement équivalente de fonction différentiable en x_0 :

   Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$
   On dit que f est <u>différentiable</u> en x_0, il existe un nombre $\alpha > 0$ et un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $x \in \left]x_0-\alpha; x_0+\alpha\right[$, on puisse écrire :

   $$f(x) = f(x_0)+\lambda(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x)$$

   où $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$ et ε une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

11.1.2 Définition

L'application linéaire L telle que $L(h) = \lambda h$ est appelée application linéaire tangente à f en x_0 ou différentielle de f en x_0, notée $\mathrm{d}f_{x_0}$; nous avons donc $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = \lambda h$

11.1.3 Proposition

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$
Soient g et g_2, 2 fonctions numériques à valeurs réelles, définies sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et telles que

$$f(x) = g(x) + ig_2(x)$$

c'est à dire que g et g_2 sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de f
f est différentiable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si g et g_2 sont différentiables en $x_0 \in \mathcal{D}_f$

Démonstration

1. Supposons g et g_2 sont différentiables en $x_0 \in \mathcal{D}_f$
   - Alors, il existe $\alpha_1 > 0$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_1 :]-\alpha_1; +\alpha_1[\longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = 0$ et tout $h \in]-\alpha_1; +\alpha_1[$:
   $$g(x_0 + h) = g(x_0) + \lambda_1 \times h + h\varepsilon_1(h)$$
   - De même, il existe $\alpha_2 > 0$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_2 :]-\alpha_2; +\alpha_2[\longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_2(h) = 0$ et tout $h \in]-\alpha_2; +\alpha_2[$:
   $$g_2(x_0 + h) = g_2(x_0) + \lambda_2 \times h + h\varepsilon_2(h)$$

   Ainsi, pour $\alpha = \inf\{\alpha_1 : \alpha_2\}$ et tout $h \in]-\alpha; +\alpha[$:
   $$g(x_0 + h) + ig_2(x_0 + h) = g(x_0) + ig_2(x_0) + \lambda_1 \times h + i\lambda_2 \times h + h\varepsilon_1(h) + ih\varepsilon_2(h)$$
   C'est à dire, en posant $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ et $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$
   $$f(x_0 + h) = f(x_0) + \lambda \times h + h\varepsilon(h)$$
   D'après les résultats sur les limites de fonctions à valeurs complexes 10.3.4, nous avons $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et donc, f est différentiable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$
2. Réciproquement, supposons f differntiable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$
   Alors, il existe un nombre $\alpha > 0$ et un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $h \in]-\alpha; +\alpha[$, on puisse écrire :
   $$f(x_0 + h) = f(x_0) + \lambda \times h + h\varepsilon(h)$$
   où $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et ε une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$
   On peut écrire, en utilisant parties réelles et imaginaires :
   $$g(x_0 + h) + ig_2(x_0 + h) = (g(x_0) + \lambda_1 \times h + h\varepsilon_1(h)) + i(g_2(x_0) + \lambda_2 \times h + h\varepsilon_2(h))$$
   Où $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ et $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$. En identifiant parties réelles et imaginaires, nous avons, pour tout $h \in]-\alpha; +\alpha[$:
   - $g(x_0 + h) = g(x_0) + \lambda_1 \times h + h\varepsilon_1(h)$
   - Et $g_2(x_0 + h) = g_2(x_0) + \lambda_2 \times h + h\varepsilon_2(h)$

   Toujours d'après les limites de fonctions à valeurs complexes 10.3.4, nous avons $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon_2(h) = 0$
   Ce qui montre que g et g_2 sont différentiables en x_0

11.1.4 Proposition

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et différentiable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$
Alors le nombre λ est unique

Démonstration

Nous écrivons donc $f(x_0+h) = f(x_0) + \lambda_1 \times h + h\varepsilon(h)$ où $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$
Supposons qu'il existe un second nombre λ_1 tel que $f(x_0+h) = f(x_0) + \lambda_1 \times h + h\beta(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \beta(h) = 0$
Alors :

$$f(x_0) + \lambda h + h\varepsilon(h) = f(x_0) + \lambda_1 h + h\beta(h)$$

C'est à dire :

$$\lambda h - \lambda_1 h - h\beta(h) + h\varepsilon(h) = 0 \Longleftrightarrow h(\lambda - \lambda_1) + h(\varepsilon(h) - \beta(h)) = 0$$

Ce qui est équivalent à : $\lambda - \lambda_1 + (\varepsilon(h) - \beta(h)) = 0$
Or, par hypothèse, $\lim\limits_{h\to 0} (\varepsilon(h) - \beta(h)) = 0$, donc, $\lim\limits_{h\to 0} \lambda - \lambda_1 + (\varepsilon(h) - \beta(h)) = \lambda - \lambda_1 = 0$.
Donc, $\lambda = \lambda_1$.

Exemple 2 :

Nous prenons, ici, des exemples de fonctions numériques à valeurs réelles.

1. **Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x fait correspondre x^2 ; cette fonction est-elle différentiable en x_0 ?**

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et évaluons $f(x_0+h) - f(x_0)$, pour **en trouver une ≪ partie linéaire ≫** ; nous avons :

   $$f(x_0+h) - f(x_0) = (x_0+h)^2 - x_0^2 = h^2 + 2x_0 h$$

   On a alors, évidemment, $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = 2x_0 h$
   Ici, le nombre λ est donc $\lambda = 2x_0$. On peut faire remarquer que cette démonstration est valable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$

2. **Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x fait correspondre x^3 ; cette fonction est-elle différentiable en x_0 ?**

   De la même manière, soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et évaluons $f(x_0+h) - f(x_0)$, pour en trouver une partie linéaire ; nous avons :

   $$f(x_0+h) - f(x_0) = (x_0+h)^3 - x_0^3 = h^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h(3x_0 h)$$

   On a alors, évidemment, $\lambda = 3x_0^2$ et $\mathrm{d}f_{x_0}(h) = 3x_0^2 h$ avec $\varepsilon(h) = 3x_0 h + h^2$

11.1.5 Propriété importante

Si f est différentiable en x_0, alors f est continue en x_0. La réciproque est fausse.

Démonstration

Supposons que f soit différentiable en x_0 ; nous avons alors :

$$f(x_0+h) - f(x_0) = h[\lambda + \varepsilon(h)]$$

Comme λ est fini, que $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, nous avons $\lim\limits_{h\to 0} h[\lambda + \varepsilon(h)] = 0$, c'est à dire que

$$\lim_{h\to 0} (f(x_0+h) - f(x_0)) = 0$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$, c'est à dire que f est continue en x_0

Exemple 3 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x fait correspondre $|x|$; cette fonction est-elle différentiable en 0 ?

Évaluons $f(0+h) - f(0)$, pour en trouver une partie linéaire ; nous avons :

$$f(h) - f(0) = |h|$$

On a alors, évidemment, $f(h) - f(0) = h$ si $h > 0$ et $f(h) - f(0) = -h$ si $h < 0$.
En posant $L(h) = h$ si $h > 0$ et $L(h) = -h$ si $h < 0$, on n'a évidemment pas L linéaire.[1]
Ce qui montre que la valeur absolue n'est pas différentiable en 0. On peut remarque que **la valeur absolue est continue sans être différentiable.**

Remarque 3 :

Il existe donc des fonctions continues sans être différentiables. Qu'apporte la différentiabilité de plus ? Une notion de régularité de la courbe.

11.2 Différentiabilité et dérivabilité

Dans cette partie, nous faisons le lien entre la dérivabilité et la différentiabilité. Et on montre que, pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, c'est exactement la même notion.

11.2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un domaine à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$
f est dite dérivable en x_0, si et seulement si : $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est finie.
Cette limite finie est alors notée $f'(x_0)$ et est appelé nombre dérivé de f en x_0

Remarque 4 :

En posant $h = x - x_0$, cette définition est équivalente à $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ est finie

11.2.2 Proposition

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$
Soient g_1 et g_2, 2 fonctions numériques à valeurs réelles, définies sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et telles que

$$f(x) = g_1(x) + i g_2(x)$$

C'est à dire que g_1 et g_2 sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de f
f est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si g_1 et g_2 sont dérivables en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ et :

$$f'(x_0) = g_1'(x_0) + i g_2'(x_0)$$

Démonstration

1. Supposons f dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$

   Alors $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, et, pour simplifier, posons $f'(x_0) = a_0 + i b_0$

   Or, $\displaystyle\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g_1(x) - g_1(x_0)}{x - x_0} + i \frac{g_2(x) - g_2(x_0)}{x - x_0}$

1. Pour le démontrer, il suffit de prendre des cas particulier : $L(2 + (-1)) = L(1) = 1$, alors que$L(2) + L(-1) = 2 + 1 = 3$

D'après les résultats sur les limites de fonctions à valeurs complexes 10.3.4, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe si et seulement si $\lim_{x \to x_0} \frac{g_1(x) - g_1(x_0)}{x - x_0}$ et $\lim_{x \to x_0} \frac{g_2(x) - g_2(x_0)}{x - x_0}$ existent et nous avons alors $\lim_{x \to x_0} \frac{g_1(x) - g_1(x_0)}{x - x_0} = a_0$ et $\lim_{x \to x_0} \frac{g_2(x) - g_2(x_0)}{x - x_0} = b_0$, ce qui signifie que g_1 et g_2 sont dérivables en x_0, et nous avons $g_1'(x_0) = a_0$ et $g_2'(x_0) = b_0$

2. La réciproque est évidente et utilise une fois de plus 10.3.4

Exemple 4 :

Ainsi, la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ix}$ est-elle dérivable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et nous avons $f'(x_0) = ie^{ix_0}$

La démonstration est simple, puisque $f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ et nous avons d'après 11.2.2 $f'(x_0) = -\sin x_0 + i\cos x_0 = i(\cos x_0 + i \sin x_0) = ie^{ix_0}$

11.2.3 Théorème

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$
f est dérivable en x_0, si et seulement si f est différentiable en x_0

Démonstration

1. Supposons f différentiable en x_0
   Alors, dans un voisinage $I \subset \mathcal{D}_f$ de x_0, f peut s'écrire :
   $$f(x_0 + h) - f(x_0) = \lambda h + h\alpha(h)$$
   Et donc, dans ce voisinage $I \subset \mathcal{D}_f$
   $$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lambda + \alpha(h)$$
   D'où $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \lambda + \alpha(h) = \lambda$.
   f est donc dérivable en x_0, et on a alors $f^{'}(x_0) = \lambda$
2. Supposons, maintenant, f dérivable en x_0
   Nous appelons $A = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$
   On pose alors :
   $$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - A$$
   Alors $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$, et nous avons, clairement :
   $$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + h\varepsilon(h)$$
   Ce qui montre que f est différentiable en x_0

Remarque 5 :

1. Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, **il y a donc équivalence entre fonction dérivable et fonction différentiable**
2. Ainsi, si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0
3. La réciproque est fausse : il existe des fonctions qui sont continues sans être dérivables : il suffit de penser à la fonction $|x|$ qui est continue, sans être dérivable.
4. Voilà notre réponse : **nous avons** $\lambda = f'(x_0)$

5. De ce théorème, nous pouvons déduire que, si f est dérivable *(ou différentiable)*, alors il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$, on ait :

$$f(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

Exemple 5 :

La fonction $\sin x$ est-elle dérivable *(ou différentiable)* en $x_0 \in \mathbb{R}$?
Pour ce faire, nous étudions $\sin(x_0 + h) - \sin x_0$.
Les formules d'addition montrent que :

$$\sin(x_0 + h) - \sin x_0 = 2\sin\left(\frac{h}{2}\right) \times \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \frac{2}{h}\sin\left(\frac{h}{2}\right) \times \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{2}{h}\sin\left(\frac{h}{2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{h \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = \cos x_0$ et donc :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \cos x_0$$

Ce qui montre que $\sin' x_0 = \cos x_0$

Remarque 6 :

Les notions de dérivées à droite ou de dérivée à gauche sont à retravailler dans le cours de L_0

11.2.4 Quelques exercices

Exercice 1 :

1. On considère la fonction f, définie, pour tout $x \in [-1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$
2. Même question pour la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 2 :

On dit qu'une fonction f satisfait à la condition de Lipschitz d'ordre α en x_0 s'il existe un nombre positif $M > 0$ et un intervalle $I =]x_0 - a : x_0 + a[$ *(avec $a > 0$)* tel que, pour tout $x \in I$,

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha$$

1. Montrer qu'une fonction qui vérifie une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 0$ est continue en x_0
2. Montrer qu'une fonction qui vérifie une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 1$ est dérivable en x_0 et de dérivée nulle

Exercice 3 :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f, une fonction définie dans un voisinage de x_0 à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dérivable en x_0. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$ tels que $a > 0$ et $b > 0$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + bh) - f(x_0 - ah)}{(a + b)h} = f'(x_0)$$

Exercice 4 :

1. Soit $f :]-1;+1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en 0. On considère 2 suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui, toutes deux, tendent vers 0 et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < a_n < 0 < b_n < 1$.
   Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $X_n = \dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$ converge vers $f'(0)$
2. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Démontrer que :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0\\ k\to 0\\ k>0}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-k)}{h+k} = f'(x_0)$$

Exercice 5 :

Soit $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable à gauche et à droite de $x_0 \in I$. Démontrer que f est continue en $x_0 \in I$.

11.3 Opérations et fonctions dérivées

Nous considérerons toujours les fonctions numériques réelles à valeurs dans $\mathbb{C}$. Beaucoup de résultats présentés ci-après ont une démonstration identique à celles que nous présentons dans le cours de L_0 ; nous les rappelons ici et les démonstrations seront à refaire seuls

11.3.1 Théorème

Soient f, g et h, 3 fonctions définies sur un même domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et toutes dérivables en $x_0 \in \mathcal{D}$;. Alors :

1. $f+g$, fg sont dérivables en $x_0 \in \mathcal{D}$. Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0
2. Nous avons :
   (a) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
   (b) $(f\times g)'(x_0) = f'(x_0)\times g(x_0) + f(x_0)\times g'(x_0)$
   (c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\times g(x_0) - f(x_0)\times g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ avec, bien entendu $g(x_0) \neq 0$

Démonstration

Retrouver la démonstration dans le cours de L_0

11.3.2 Dérivée des fonctions composées

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$
Soit g une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_g \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$; on suppose $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ et g dérivable en $y_0 = f(x_0)$
Alors, $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(g\circ f)'(x_0) = g'\circ f(x_0) \times f'(x_0) = g'(y_0) \times f'(x_0)$$

Démonstration

Retrouver la démonstration dans le cours de L_0 ; il faut remarquer la cohérence des différents domaines

11.3.3 Définition

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_f$

— On dit que f est dérivable sur $\mathcal{U}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathcal{U}$, $f'(x)$ existe.
— L'application

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f' : \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$$

s'appelle fonction dérivée de f ; cette fonction est parfois notée $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

11.3.4 Opération sur les dérivées

1. Somme de deux fonctions
Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors $f+g$ est dérivable sur I et
$$(f+g)' = f' + g'$$
2. Produit par un scalaire
Si f est une fonction dérivable sur intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable sur I et
$$(\lambda f)' = \lambda f'$$
3. Produit de deux fonctions
Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors $f \times g$ est dérivable sur I et
$$(f \times g)' = g \times f' + g' \times f$$
4. Quotient de deux fonctions
Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Démonstration

C'est une application directe et évidente de 11.3.1

11.3.5 Fonction dérivée des fonctions composées

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$
Soit g une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_g \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et dérivable sur un intervalle $J \subset \mathcal{D}_g$ on suppose $f(I) \subset J$
Alors, $g \circ f$ est dérivable sur l'intervalle I et :

$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$$

Démonstration

C'est une application directe et évidente de 11.3.2

Exercice 6 :

1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle symétrique par rapport à 0, c'est à dire que si $x \in I$, alors $-x \in I$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une application dérivable sur I.
Démontrer que si f est paire, alors f' est impaire et que si f est impaire, alors f' est paire.

2. Soit $T \in \mathbb{R}$ tel que $T > 0$ et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application périodique et de période T, dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f' est périodique et de période T

11.3.6 Dérivée d'ordre supérieur

1. On appelle $f^{(0)}$ la dérivée d'ordre 0 de f, c'est à dire $f^{(0)} = f$
2. Si $n \geqslant 1$, la dérivée *n-ième* de f est définie par récurrence, par :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

3. On note aussi, parfois, $f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f(x))$

Remarque 7 :

Pour que la dérivée n-ième de f en a $f^{(n)}(a)$ existe, il faut, au moins, que $f^{(n-1)}$ soit continue en a ; c'est une conditionn écessaire, mais pas suffisante

11.3.7 Définition de fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$

- ▷ f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ et et seulement si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ existe et est continue
- ▷ Si, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$, alors f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$

Remarque 8 :

1. Pour $n = 0$, les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ sont les fonctions continues
2. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$, alors, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, f est de classe $\mathcal{C}^k$
3. Soit $I \subset \mathbb{R}$; il est évident que l'ensemble $\mathcal{C}^n(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les opérations classiques d'addition et de multiplication des fonctions par un scalaire.

11.3.8 Formule de Leibniz

Soient f et g, deux fonctions qui admettent des dérivées *n-ièmes* en a ; alors, fg admet aussi une dérivée *n-ième* en a et

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a)$$

Démonstration

La démonstration se fait par récurrence avec le même principe que celle du binôme de Newton.

- ▷ **Vérifions pour le premier terme $n = 0$**

  Alors, $(fg)^{(0)}(a) = (fg)(a) = f(a)\, g(a)$, et

$$\sum_{k=0}^{0} \mathrm{C}_0^k f^{(k)}(a)\, g^{(0-k)}(a) = f^{(0)}(a)\, g^{(0)}(a) = f(a)\, g(a)$$

  La propriété énoncée est donc vraie pour $n = 0$
- ▷ **Supposons la propriété vraie à l'ordre n**

  C'est à dire suposons que

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a)$$

▷ **Démontrons la propriété à l'ordre** $n+1$
Alors :

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)}(a) &= \left((fg)^{(n)}(a)\right)' \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a)\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a)\right)'\end{aligned}$$

D'après les formules donnant la dérivée du produit, nous avons :

$$\begin{aligned}\left(f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a)\right)' &= \left(f^{(k)}(a)\right)' g^{(n-k)}(a) + f^{(k)}(a)\left(g^{(n-k)}(a)\right)' \\ &= f^{(k+1)}(a)\, g^{(n-k)}(a) + f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a)\end{aligned}$$

De telle sorte que, en passant à la sommation :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(f^{(k)}(a)\, g^{(n-k)}(a)\right)' &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(f^{(k+1)}(a)\, g^{(n-k)}(a) + f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k+1)}(a)\, g^{(n-k)}(a) + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{C}_n^{k-1} f^{(k)}(a)\, g^{(n-(k-1))}(a) + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k\right) f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a) + \mathrm{C}_n^n f^{(n+1)}(a)\, g(a) + \mathrm{C}_n^0 f(a)\, g^{(n+1)}(a)\end{aligned}$$

D'après les résultats sur les coefficients binômiaux ; nous avons :

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k &= \mathrm{C}_{n+1}^k \\ \mathrm{C}_n^n &= \mathrm{C}_{n+1}^{n+1} = 1 \\ \mathrm{C}_n^0 &= \mathrm{C}_{n+1}^0 = 1\end{aligned}$$

D'où nous tirons :

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)}(a) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k\right) f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a) + \mathrm{C}_n^n f^{(n+1)}(a)\, g(a) + \mathrm{C}_n^0 f(a)\, g^{(n+1)}(a) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k f^{(k)}(a)\, g^{(n+1-k)}(a)\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Exercice 7 :

Soit $f(x) = x^n(1+x^n)$; en calculant de 2 manières différentes la dérivée *n-ième* de f, donner une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{C}_n^k\right)^2$

11.3.9 Conséquences de la formule de Leibniz

1. Le produit de deux applications de classe $\mathcal{C}^n$ définies sur le même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est aussi une application de classe $\mathcal{C}^n$
2. Plus généralement, le produit d'un nombre fini d'applications de classe $\mathcal{C}^n$ définies sur le même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est aussi une application de classe $\mathcal{C}^n$
3. Le produit d'un nombre fini d'applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur le même intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est aussi une application de classe $\mathcal{C}^\infty$

11.3.10 Proposition

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^n$ sur I
Soit g une fonction définie sur $J \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et de classe $\mathcal{C}^n$ sur I
On suppose $f(I) \subset J$
Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$

Démonstration

Nous allons faire une récurrence sur n

1. Pour $n = 0$, si f et g sont de classe $\mathcal{C}^0$, c'est à dire continues, alors $g \circ f$ est continue et donc de classe $\mathcal{C}^0$
2. Supposons que si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$
3. Démontrons maintenant que si f et g sont de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors $g \circ f$ est aussi de classe $\mathcal{C}^{n+1}$

   Si nous démontrons que $(g \circ f)'$ est de classe $\mathcal{C}^n$, nous aurons alors démontré que $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$

   Tout d'abord, $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$
   - f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors f' est de classe $\mathcal{C}^n$
   - De même, g' est de classe $\mathcal{C}^n$ et f est de classe $\mathcal{C}^n$ *(puisque f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$)*; donc, **d'après l'hypothèse de récurrence**, $g' \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$

   Par produit, $f' \times g' \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et donc $(g \circ f)'$ est de classe $\mathcal{C}^n$

   Ce que nous voulions

La proposition est ainsi démontrée

11.3.11 Dérivée de la fonction réciproque : Rappels

Nous ne traitons dans cette section que les fonctions à valeurs réelles

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_f$. On suppose f continue et strictement monotone sur $\mathcal{U}$, et donc bijective sur $\mathcal{U}$; alors

1. Si f est dérivable sur $\mathcal{U}$, alors, f^{-1} est dérivable en tout point y_0 de $f(\mathcal{U})$ tel que si $y_0 = f(x_0)$, alors $f'(x_0) \neq 0$ et, alors,
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$
2. Si f' ne s'annule jamais sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$, et
$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Démonstration

Retrouver la démonstration en L_0

11.3.12 Dérivée des fonctions trigonométriques réciproques

1. La fonction dérivée de $\arcsin(x)$ définie pour tout $x \in [-1; +1]$ est :
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
2. La fonction dérivée de $\arccos(x)$ définie pour tout $x \in [-1; +1]$ est :
$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
3. La fonction dérivée de $\arctan(x)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ est :
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration

1. **Montrons que** $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   Nous avons, bien sûr, d'après 11.3.11, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sin'[\arcsin x]} = \dfrac{1}{\cos[\arcsin x]}$.

   Or, si $y = \arcsin x$, alors $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $x \in [-1; +1]$ et $x = \sin y$.
   Nous cherchons donc une expression de $\sin y$ en fonction de x.
   Comme la dérivée de sin est $\sin'(y) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ puisque nous avons $\cos y \geq 0$, car $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$
   Donc, nous avons $\sin'(y) = \cos y = \sqrt{1-x^2}$, c'est à dire que la dérivée de $\arcsin x$ est donnée par :
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos[\arcsin x]} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. **Montrons que** $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

   Toujours, d'après 11.3.11, nous avons $\arccos'(x) = \dfrac{1}{\cos'[\arccos x]} = \dfrac{-1}{\sin[\arccos x]}$.
   Or, si $y = \arccos x$, alors $y \in [0; \pi]$, $x \in [-1; +1]$ et $x = \cos y$.
   Nous cherchons donc une expression de $\cos y$ en fonction de x.
   D'après l'identité $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$, nous avons $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$ puisque nous avons $\sin y \geq 0$, car $y \in [0; \pi]$
   Donc, nous avons $\sin y = \sqrt{1-x^2}$, c'est à dire que la dérivée de $\arccos x$ est donnée par :
$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin[\arccos x]} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. **Montrons que** $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

   Comme pour arcsin et arccos, et toujours d'après 11.3.11, nous avons $\arctan'(x) = \dfrac{1}{\tan'[\arctan x]}$.

   Or, la dérivée de $\tan x$ est donnée par $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

   Nous avons donc, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1 + \tan^2[\arctan x]} = \dfrac{1}{1+x^2}$

11.3.13 Formulaire donnant quelques dérivées usuelles

En plus des dérivées décrites dans le cours, voici quelques fonctions dérivées.

Fonction $f(x)$	Paramètres	Dérivée $f'(x)$	Ensemble de définition de $f'(x)$
$u+v$		$u'+v'$	
$u\times v$		$u'v+v'v$	
$\frac{u}{v}$		$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	
x^n	$n\in\mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
x^n	$n\in\mathbb{Z}^-$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
x^α	$\alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^+$
$e^{u(x)}$		$u'(x)\,e^{u(x)}$	
$\ln\lvert u(x)\rvert$		$\frac{u'(x)}{u(x)}$	
$\log_a\lvert x\rvert$	$a\in\mathbb{R}^*-\{+1\}$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\mathbb{R}^*$
a^x	$a\in\mathbb{R}^{*+}$	$a^x\ln a$	
$\tan x$		$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right\}$
$\arctan x$		$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$		$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;+1[$
$\arccos x$		$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;+1[$
$\sin u(x)$		$u'(x)\cos u(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos u(x)$		$-u'(x)\sin u(x)$	$\mathbb{R}$
$(u(x))^n$		$nu'(x)\,(u(x))^{n-1}$	$\mathbb{R}$

11.3.14 Théorème des accroissements finis pour les fonctions à valeurs complexes

1. Lorsque nous avons une fonction $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$, il existe $c \in]a; b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Longleftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Le théorème des accroissements finis est alors une égalité

2. Ceci est faux pour les fonctions $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ à valeurs complexes. Pour le voir, il suffit de prendre la fonction $f(x) = e^{ix}$:

$$\begin{cases} f : [-2\pi; +2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x) = e^{ix} \end{cases}$$

Alors, $f(\pi) - f(-\pi) = 0$ et comme $f'(x) = ie^{ix}$, $f'(c)(\pi - (-\pi)) = 2i\pi e^{ic} \neq 0$

3. En fait, pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, nous avons une inégalité

Théorème

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$; alors, il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$|f(b) - f(a)| \leqslant |f'(c)|(b - a)$$

Démonstration

1. Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$
Nous écrivons $(f(b) - f(a)) = |f(b) - f(a)| e^{i\theta}$, c'est à dire que θ est l'un des arguments de $f(b) - f(a)$
2. Soit $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$, définie, pour tout $t \in [a; b]$ par $g(t) = e^{-i\theta}(f(t) - f(a))$.
Alors $g(a) = 0$ et $g(b) = e^{-i\theta}(f(b) - f(a)) = |f(b) - f(a)|$, c'est à dire que $g(a) \in \mathbb{R}$ et $g(b) \in \mathbb{R}$
3. Intéressons nous, maintenant à $g(t) = \mathrm{Re}(g(t)) + i\,\mathrm{Im}(g(t))$.
Nous avons $g'(t) = \mathrm{Re}(g'(t)) + i\,\mathrm{Im}(g'(t)) = (\mathrm{Re}(g(t)))' + i(\mathrm{Im}(g(t)))'$.
La fonction $\mathrm{Re}(g(t))$ est une fonction définie sur $[a; b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; il existe donc $c \in]a; b[$ tel que :

$$\mathrm{Re}(g(b)) - \mathrm{Re}(g(a)) = (\mathrm{Re}(g(c)))'(b - a) \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(g(b)) - \mathrm{Re}(g(a)) = \mathrm{Re}(g'(c))(b - a)$$

Or, comme $g(a) = 0$ et $g(b) = |f(b) - f(a)|$, nous avons $g(a) \in \mathbb{R}$ et $g(b) \in \mathbb{R}$ et donc, nous avons :

$$|f(b) - f(a)| = \mathrm{Re}(g'(c))(b - a) \Longrightarrow |f(b) - f(a)| = |\mathrm{Re}(g'(c))|(b - a)$$

4. De $g(t) = e^{-i\theta}(f(t) - f(a))$, nous déduisons $g'(t) = e^{-i\theta} f'(t)$, et donc $|g'(t)| = |f'(t)|$
De l'inégalité classique $|\mathrm{Re}(g'(t))| \leqslant |g'(t)|$, nous déduisons :

$$|f(b) - f(a)| = |\mathrm{Re}(g'(c))|(b - a) \leqslant |f'(c)|(b - a)$$

Ce que nous voulions

11.3.15 Théorème de prolongement de la dérivée

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, à valeurs réelles, définie sur $\mathcal{D}_f$ et soit $[a; b] \subset \mathcal{D}_f$.
On suppose f continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x) = l$

Alors, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

Remarque 9 :

1. Ceci veut dire que si $f^{'}$, la fonction dérivée de f admet une limite finie lorsque x tend vers a, à droite de a, alors la fonction f est dérivable à droite de a.
2. Bien évidemment, ceci se généralise à gauche de a et en a globalement.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$
On va écrire que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f^{'}(x) = l$.

Il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in]a; b[$, $0 < x - a \leq \eta_\varepsilon \Longrightarrow \left| f^{'}(x) - l \right| < \varepsilon$, c'est à dire tel que $l - \varepsilon < f^{'}(x) < l + \varepsilon$
Pour $x \in]a; a + \eta_\varepsilon[$, on applique le théorème des accroissements finis à l'intervalle $[a; x]$.
Il existe donc $c \in]a; x[$ tel que $f^{'}(c) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$
Donc, $l - \varepsilon < \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < l + \varepsilon$, ce qui est équivalent à :

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l \right| \leqslant \varepsilon$$

C'est à dire que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$, et f est bien dérivable à droite de a, de dérivée $f_d^{'}(a) = l$
Ce que nous voulions.

Remarque 10 :

1. Soit $f(x) = \dfrac{x \ln x - x}{x + 1}$. f n'est définie que sur $\mathbb{R}^{\star +}$; on peut, par contre, prolonger f par continuité car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, et on peut donc poser $f(0) = 0$
   $f^{'}(x) = \dfrac{x + \ln x}{(x + 1)^2}$, avec $\lim\limits_{x \to 0} f^{'}(x) = -\infty$ et f admet une demie tangente en $x = 0$
2. **La réciproque est fausse.**
   Si on prend comme contre-exemple, la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on peut donc prolonger f par continuité en 0, en posant $f(0) = 0$
   Nous avons $f'(x) = 2x \sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$, et cette fonction n'admet pas de limite lorsque x tend vers zéro, alors que f est dérivable en 0, car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ On a donc :
   $$f \text{ dérivable en } x_0 \not\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f'(x) \text{ existe}$$

11.3.16 Quelques exercices

Exercice 8 :

Voici une autre méthode pour résoudre une question déjà posée dans le chapitre sur la continuité
Soit $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$ définie pour $x \neq 0$.

1. Calculez la dérivée de f.
2. En déduire que si $x > 0$, alors $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, et que si $x < 0$ alors $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 9 :

Soit f, la fonction définie par :

$$f(x) = x + x^2 \sin \frac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1. Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$
2. Montrer que f n'est monotone sur aucun des voisinages de 0

Exercice 10 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant les domaines de définition de f et de f'

1. $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
2. $f(x) = \arctan \left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$
3. $f(x) = \arcsin \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \right) - 2 \arctan x$
4. $f(x) = \arccos \left(2x\sqrt{1-x^2} \right)$

Exercice 11 :

Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{x^5}{1+x}$
2. $f_2(x) = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$
3. $f_3(x) = \arctan x$
4. $f_4(x) = \ln\left(x^2+1\right) - \arctan x$
5. $f_5(x) = x^{n-1} \ln x$
6. $f_6(x) = x^2 (1+x)^n$

Exercice 12 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g_n : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une autre fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $g_n(x) = x^{n-1} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g_n^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha \ln x$.
   Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_\alpha^{(n)}(x) = x^{\alpha-n}(a_n \ln x + b_n)$

Exercice 13 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I \subset \mathbb{R}$. On considère une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et s'annulant en $n+1$ points de I tous distincts

1. Démontrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins une fois sur I
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que la dérivée $n-1$-ième de $\varphi = f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I

Exercice 14 :

Première généralisation du théorème de Rolle
Soit $a \geqslant 0$ et $f : [a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a;+\infty[$, dérivable sur $]a;+\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a;+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$

Exercice 15 :

Seconde généralisation du théorème de Rolle
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$

Exercice 16 :

Troisième généralisation du théorème de Rolle
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k$ où k est fini
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$

Exercice 17 :

Règle de L'Hospital

1. Soient f et g 2 fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$ et dérivables sur l'intervalle $]a;b[$. Soit $x_0 \in [a;b]$; on suppose que g' ne s'annule pas sur $]a;b[$ et que $f(x_0) = g(x_0) = 0$
   Montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \Longrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$
2. Applications
   Donner :

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$

Exercice 18 :

Démontrer les inégalités suivantes :

1. Si $0 < x < 1$, alors $\arcsin x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
2. Si $x > 0$, alors $\arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$

Exercice 19 :

Théorème de Darboux
Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur l'intervalle $[a;b]$. On suppose $f'(a) < f'(b)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Démontrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \lambda$

Exercice 20 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que la fonction dérivée f' est strictement décroissante et positive sur $\mathbb{R}^+$

1. Démontrer que pour tout $x \geqslant 1$, nous avons :
$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x)$$
2. En déduire que si f admet une limite finie A en $+\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ où A est finie, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$
3. On définit la suite $(S_p)_{p \geqslant 1}$ par :
$$S_p = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(p) = \sum_{k=1}^{p} f'(k)$$
   Démontrer que la suite $(S_p)_{p \geqslant 1}$ est convergente si et seulement si f admet une limite finie A lorsque A tend vers $+\infty$
4. Applications : Quelle est la nature des suites $(a_p)_{p \geqslant 1}$ et $(b_p)_{p \geqslant 1}$ suivantes :

   (a) $a_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1+k^2}$ (b) $b_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{1+k}}$ (c) $c_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$
5. Nous définissons les suites $(\sigma_p)_{p \geqslant 1}$ et $(\sigma'_p)_{p \geqslant 1}$ par :
$$\sigma_p = S_p - f(p+1) \quad \text{et} \quad \sigma'_p = S_p - f(p)$$

(a) Démontrer que les suites $(\sigma_p)_{p\geqslant 1}$ et $\left(\sigma'_p\right)_{p\geqslant 1}$ sont monotones

(b) Démontrer que, pour tout $p \geqslant 1$, $\sigma_p < \sigma'_p$

(c) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f' pour que les suites $(\sigma_p)_{p\geqslant 1}$ et $\left(\sigma'_p\right)_{p\geqslant 1}$ soient adjacentes

Exercice 21 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, continue et dérivable sur $[a; +\infty[$.

1. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
2. On suppose, cette fois ci, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$
3. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = l$ où $l > 0$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

11.4 Formules de Taylor

Nous avons la formule, exacte pour les polynômes de degré n, en fonction des dérivées successives[2] :

$$P(X) = P(0) + XP'(0) + X^2\frac{P''(0)}{2} + \cdots + X^k\frac{P^{(k)}(0)}{k\,!} + \cdots + X^n\frac{P^{(n)}(0)}{n\,!}$$

Cette formule peut-elle se généraliser pour une fonction quelconque ?
L'idée est de construire un polynôme de degré n, ***à partir de*** f, et de déterminer l'erreur commise en substituant ce polynôme à la fonction elle-même.
Exemples d'approximations, non forcément linéaires de $\ln(1+x)$ que nous illustrons dans la figure 11.2 :

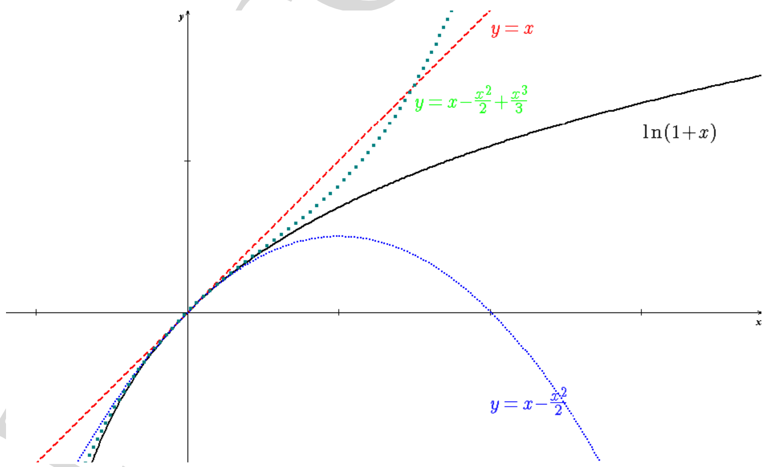

FIGURE 11.2 – Approximation de degré 1 de $\ln(1+x)$ par la droite $y = x$, de degré 2 par la parabole $y = x - \dfrac{x^2}{2}$, de degré 3 par la cubique $y = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

2. Cette formule est démontrée en exercice

11.4.1 Théorème : formule de Taylor-Lagrange

Soit $f : [a\ b] \longrightarrow \mathbb{C}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[a\ b]$ admettant sur l'intervalle ouvert $]a\ b[$ une dérivée $n+1$-ième.
Soit $\alpha \in [a\ b]$. Nous appelons $P_{n,f}$ le polynôme de Taylor associé à f. Ce polynôme a pour expression, pour tout $x \in [a\ b]$:

$$P_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k\,!}(x-\alpha)^k$$

Alors, il existe c compris entre x et α tel que

$$f(x) = P_{n,f}(x) + (x-\alpha)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}$$

Démonstration

Sans être difficile, c'est une démonstration particulièrement longue et qui risque, si nous n'y prenons pas garde, de nous embrouiller. C'est le théorème de Rolle appliqué une infinité de fois ; Ce théorème pourrait être regardé comme l'une des généralisations du théorème des accroissements finis.
Soit $\alpha \in [a\ b]$

1. On reprend le polynôme de Taylor appliqué à f en α, donc, pour $x \in [a\ b]$:
$$P_{n,f}(x) = f(\alpha)+(x-\alpha)f'(\alpha)+(x-\alpha)^2\frac{f''(\alpha)}{2}+\cdots+(x-\alpha)^k\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k\,!}+\cdots+(x-\alpha)^n\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n\,!}$$
2. Il faut remarquer que $P_{n,f}(\alpha) = f(\alpha)$, et que, même plus généralement, en tenant compte des formules sur les dérivées successives :
$$P_{n,f}^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$$
3. Soit $\varphi(x) = f(x) - P_{n,f}(x) - M(x-\alpha)^{n+1}$; alors :
$$\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \varphi^{(2)}(\alpha) = \cdots = \varphi^{(k)}(\alpha) = \cdots = \varphi^{(n)}(\alpha) = 0$$
4. Choisissons M tel que $\varphi(x) = 0$; nous avons, bien évidemment :
$$M = \frac{f(x) - P_{n,f}(x)}{(x-\alpha)^{n+1}}$$
5. Comme $\varphi(x) = \varphi(\alpha) = 0$, d'après le théorème de Rolle, il existe c_1 entre x et α, *(c'est à dire* $c_1 \in]x;\alpha[$ *ou* $c_1 \in]\alpha;x[$) tel que $\varphi'(c_1) = 0$
6. Toujours en appliquant le théorème de Rolle, mais cette fois ci à la fonction φ', il existe $c_2 \in]\alpha\ c_1[$ tel que $\varphi'(c_2) = 0$
7. On crée ainsi une suite de nombres $c_1, c_2, \cdots, c_n$, tels que, pour tout $k = 1, \cdots, n$, $\varphi^{(k)}(c_k) = 0$
8. Comme φ est une fonction $n+1$ fois dérivable et que $\varphi^{(n)}(\alpha) = \varphi^{(n)}(c_n) = 0$, toujours d'après le théorème de Rolle, il existe c_{n+1} entre α et c_n tel que $\varphi^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0$
9. Or, la dérivée $n+1$-ième de φ est donnée par :$\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - (n+1)!M$, d'où nous tirons : $M = \dfrac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$
10. En égalisant les deux valeurs de M, nous trouvons : $\dfrac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)\,!} = \dfrac{f(x) - P_n(x)}{(x-\alpha)^{(n+1)}}$
11. En posant $c = c_{n+1}$, nous trouvons $f(x) = P_n(x) + \dfrac{(x-\alpha)^{(n+1)} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!}$

Ce que nous voulions.

Remarque 11 :

1. Nous avons donc l'écriture classiqie des formules de Taylor : il existe c compris entre x et α tel que

$$\begin{aligned} f(x) = \; & f(\alpha) + (x-\alpha) f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2} f^{(2)}(\alpha) + \cdots \\ & \cdots + \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k\,!}(x-\alpha)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n\,!}(x-\alpha)^n + (x-\alpha)^{n+1}\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)\,!} \end{aligned}$$

2. Pour $n = 0$, comme $P_{0,f}(x) = f(\alpha)$, nous obtenons $f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha) f'(c)$; c'est le théorème des accroissements finis.

Remarque 12 :

1. En remplaçant x par $\alpha + h$, nous obtenons :

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + hf'(\alpha) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\alpha) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\alpha + \theta h)$$

avec $\theta \in]0\;1[$ *(dans ce cas, nous avons, si $h > 0$: $\alpha < \alpha + \theta h < \alpha + h$ et si $h < 0$, nous avons $\alpha + h < \alpha + \theta h < \alpha$)*

2. Si, cette fois ci, $\alpha = 0$, avec f définie sur un intervalle $]a\,,b[$ avec $0 \in]a\,,b[$ nous obtenons alors la formule de Taylor Mac-Laurin :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

avec $\theta \in]0\;1[$

11.4.2 Corollaire : évaluation de l'erreur commise

Soit $f : [a\;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[a\;b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a\;b[$.
On suppose aussi $f^{(n+1)}$ bornée sur $]a\;b[$
Alors, pour tout $x \in]a\;b[$ et tout $\alpha \in]a\;b[$,

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{|x-\alpha|^{n+1}}{(n+1)\,!} \sup_{c \in]a\;b[} \left| f^{(n+1)}(c) \right|$$

Démonstration

La démonstration est simple.
D'après 11.4.1,il existe il existe c compris entre x et α tel que :

$$f(x) - P_{n,f}(x) = (x-\alpha)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

En passant à la valeur absolue :

$$|f(x) - P_{n,f}(x)| = |x-\alpha|^{n+1} \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right|$$

C'est à dire :

$$|f(x) - P_{n,f}(x)| = \frac{|x-\alpha|^{n+1}}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(c) \right|$$

Comme $f^{(n+1)}$ est bornée sur $]a\;b[$, nous avons bien :

$$|f(x) - P_{n,f}(x)| \leqslant \frac{|x-\alpha|^{n+1}}{(n+1)\,!} \sup_{c \in]a\;b[} \left| f^{(n+1)}(c) \right|$$

Exemple 6 :

Si nous considérons la fonction $f(x) = \sin x$ au voisinage de 0, et $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, et donc $f^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$; de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}\right)\right| \leq \frac{\left|x^9\right|}{362880}$$

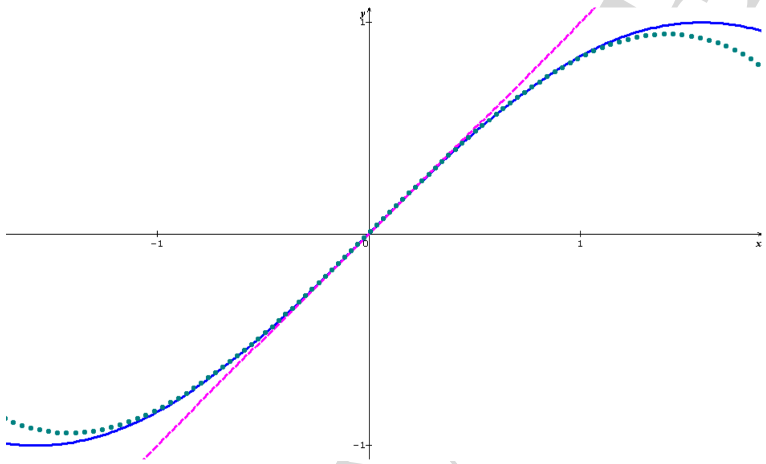

FIGURE 11.3 – Deux fonctions polynômes approchant $\sin x$: $x - \frac{x^3}{6}$ et $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

11.4.3 Application : convexité

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I
Si, pour tout $x \in I$, nous avons $f''(x) \geqslant 0$, alors la courbe représentative de f est toujours au-dessus de ses tangentes

Démonstration

Soit $x_0 \in I$ et étudions la tangente à f en $x_0 \in I$. Ecrivons la formule de Taylor-Young entre x et x_0
Il existe c compris entre x_0 et x tel que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f^{(2)}(c) \Longleftrightarrow f(x) - (f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)) = \frac{(x - x_0)^2}{2} f^{(2)}(c)$$

Or, comme $c \in I$, nous avons $f^{(2)}(c) \geqslant 0$ et donc $\frac{(x - x_0)^2}{2} f^{(2)}(c) \geqslant 0$.
D'où nous déduisons que $f(x) - (f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)) \geqslant 0 \Longleftrightarrow f(x) \geqslant (f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0))$.
L'équation de la tangente au graphe de f en x_0 est donnée par $y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$ et l'inégalité $f(x) \geqslant (f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0))$ traduit bien le fait que le graphe de f est audessus de la tangente.

Remarque 13 :

Que, pour tout $x \in I$, nous avons $f''(x) \geqslant 0$ signifie que f est convexe sur I. Ainsi, le graphe d'une fonction convexe est toujours au-dessus de ses tangentes.

11.4.4 Application : Inégalité de Kolmogorov

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable.
On suppose que pour tout $x \in [a; +\infty[$ nous avons $|f(x)| \leqslant M_0$ et $|f''(x)| \leqslant M_2$.
Alors : pour tout $x \geqslant a$, $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$

Démonstration

Soit $x \geqslant a$ et $u > 0$
Nous écrivons la formule de Taylor-Lagrange ente x et $x+u$.
Il existe donc $c_{x,u} \in [x; x+u]$ tel que $f(x+u) = f(x) + uf'(x) + \dfrac{u^2}{2} f''(c_{x,u})$
Alors, nous avons :

$$uf'(x) = f(x+u) - f(x) - \frac{u^2}{2} f''(c_{x,u}) \Longleftrightarrow f'(x) = \frac{1}{u}\left(f(x+u) - f(x) - \frac{u^2}{2} f''(c_{x,u})\right)$$

D'où nous tirons $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{u}\left(|f(x+u)| + |f(x)| + \left|\dfrac{u^2}{2} f''(c_{x,u})\right|\right) \leqslant \dfrac{2M_0}{u} + \dfrac{u}{2} M_2$

- ▷ On suppose $M_2 = 0$.

  Alors l'inégalité devient $|f'(x)| \leqslant \dfrac{2M_0}{u}$.
  Cette inégalité est vraie pour tout $u > 0$, en particulier lorsque u tend vers $+\infty$; donc, comme $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{2M_0}{u} = 0$, nous avons, pour tout $x \geqslant a$, $|f'(x)| = 0$; l'inégalité $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$ est bien vérifiée dans ce cas particulier.
- ▷ Supposons maintenant que $M_2 \neq 0$.

  Etudions la fonction $\varphi(u) = \dfrac{2M_0}{u} + \dfrac{uM_2}{2}$ pour $u > 0$

  Nous avons $\varphi'(u) = -\dfrac{2M_0}{u^2} + \dfrac{M_2}{2} = \dfrac{M_2 u^2 - 4M_0}{2u^2} = \dfrac{\left(u\sqrt{M_2} + 2\sqrt{M_0}\right)\left(u\sqrt{M_2} - 2\sqrt{M_0}\right)}{2u^2}$
  Comme $u\sqrt{M_2} + 2\sqrt{M_0} \geqslant 0$, le signe de $\varphi'(u)$ ne dépend que de $u\sqrt{M_2} - 2\sqrt{M_0}$

  - ⋆ Donc, si $u \leqslant 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$, alors $\varphi'(u) \leqslant 0$ et φ est décroissante sur $\left]0 : 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}\right]$
  - ⋆ Et, si $u \geqslant 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$, alors $\varphi'(u) \geqslant 0$ et φ est croissante sur $\left[2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}; +\infty\right[$
  - ⋆ Le minimum est atteint en $u = 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$

  Nous avons donc $|f'(x)| \leqslant \varphi\left(2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}\right)$

  Il faut maintenant calculer $\varphi\left(2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}\right)$. Or :

$$\varphi\left(2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right) = 2M_0 \times \frac{\sqrt{M_2}}{2\sqrt{M_0}} + 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}} \times \frac{M_2}{2} = \sqrt{M_0 M_2} + \sqrt{M_0 M_2} = 2\sqrt{M_0 M_2}$$

  D'où nous avons bien le résultat $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$

11.4.5 Formule de Taylor-Young

On suppose f de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[a\ ,b]$, et on suppose juste $f^{(n)}$ dérivable en a, c'est à dire que $f^{(n+1)}(a)$ existe
Alors

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \times f''(a) + \cdots \\ & + \frac{(x-a)^n}{n!} \times f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(a) + (x-a)^{n+1} \varepsilon(x) \end{aligned}$$

Où $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

Démonstration

Soit $x \in [a\ ,b]$, et on va considérer l'intervalle $[a\ ,x]$; pour $t \in [a\ ,x]$, nous construisons le polynôme de Taylor de f en a

$$\begin{aligned} P_{n,f}(t) = \quad & \sum_{k=0}^{n} (t-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \\ = \quad & f(a) + (t-a) f'(a) + (t-a)^2 \frac{f''(a)}{2} + \cdots \\ & \cdots + (t-a)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \cdots + (t-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \end{aligned}$$

La démonstration sera très voisine de celle de 11.4.1 ; on peut d'ores et déjà remarquer que la dérivée n-ième de $P_{n,f}$ est la constante $f^{(n)}(a)$

1. On construit comme précédemment (cf 11.4.1),une fonction φ définie pour tout $t \in [a\ ,x]$ par :
$$\varphi(t) = f(t) - P_n(t) - M(t-a)^{n+1}$$
où nous choisissons M de telle sorte que $\varphi(x) = 0$; et nous avons, bien évidemment :
$$M = \frac{f(x) - P_{n,f}(x)}{(x-a)^{n+1}}$$
2. Comme dans 11.4.1 on crée ainsi une suite de nombres $x > c_1 > c_2 > \cdots > c_n > a$, tels que $\varphi^{(k)}(c_k) = 0$
3. Comme φ est une fonction n fois dérivable et que la dérivée n-ième de φ est donnée par :
$$\varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) - (n+1)!M(t-a)$$
D'où nous tirons :
$$(n+1)! \times M = \frac{f^{(n)}(a) - f^{(n)}(c_n)}{(a-c_n)}$$
4. Puisque $x > c_1 > c_2 > \cdots > c_n > a$, les c_k sont des fonctions de x et de a telles que $\lim\limits_{x \to a} c_k = a$
5. En fait,M est une fonction qui dépend, en fait, de x et nous pouvons donc écrire :
$$(n+1)!M(x) = \frac{f^{(n)}(a) - f^{(n)}(c_n)}{(a-c_n)}$$
Et donc $\lim\limits_{x \to a} (n+1\ !) M(x) = \lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f^{(n)}(a) - f^{(n)}(c_n)}{(a-c_n)} \right) = f^{(n+1)}(a)$.
Il est donc possible d'écrire :
$$(n+1)!M(x) = f^{(n+1)}(a) + \varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$
6. Nous avons donc $\dfrac{f(x) - P_{n,f}(x)}{(x-a)^{n+1}} (n+1)! = f^{(n+1)}(a) + \varepsilon(x)$

Ce que nous voulions

Remarque 14 :

1. Les hypothèses de cette formule sont beaucoup plus légères que celle de 11.4.1
2. La plupart du temps, nous aurons des fonctions qui poseront peu de problèmes au niveau de la dérivabiité
3. **Ce sera la formule la plus utilisée pour construire les développements limités.**
4. Certains livres, plutôt que d'écrire $(x-a)^n \varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, préfèrent écrire $o((x-a)^n)$, sans doute moins explicite, écriture que nous étudierons dans une autre section

11.4.6 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[a\,,b]$.
Alors, pour tout $x \in [a\,,b]$ et tout $y \in [a\,,b]$, nous avons :

$$f(x) = f(y) + (x-y) f'(y) + \cdots + \frac{(x-y)^{(n-1)} f^{(n-1)}(y)}{(n-1)\,!} + \int_y^x \frac{(x-t)^{(n-1)} f^{(n)}(t)}{(n-1)\,!}\, dt$$

<u>**Démonstration**</u>

La démonstration se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$; on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathfrak{P}(n) \ : \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } f \text{ de classe } \mathcal{C}^n \\ f(x) = f(y) + (x-y) f'(y) + \cdots + \dfrac{(x-y)^{(n-1)} f^{(n-1)}(y)}{(n-1)\,!} + \displaystyle\int_y^x \dfrac{(x-t)^{(n-1)} f^{(n)}(t)}{(n-1)\,!}\, dt \end{array} \right.$$

1. **Vérifions que $\mathfrak{P}(1)$ est vraie**

   Nous avons, en utilisant les primitives : $\displaystyle\int_y^x f'(t)\ dt = f(y) - f(x)$, et donc

   $$f(y) = f(x) + \int_y^x f'(t)\ dt$$

   $\mathfrak{P}(1)$ est donc vraie
2. **Supposons $\mathfrak{P}(n)$ vraie**
3. **Démontrons que $\mathfrak{P}(n+1)$ est vraie**
   Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
   f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ est en particulier de classe $\mathcal{C}^n$, et en utilisant l'hypothèse de récurrence $\mathfrak{P}(n)$, nous avons, pour tout $x \in [a\,,b]$ et tout $y \in [a\,,b]$

   $$f(x) = f(y) + (x-y) f'(y) + \cdots + \frac{(x-y)^{(n-1)} f^{(n-1)}(y)}{(n-1)\,!} + \int_y^x \frac{(x-t)^{(n-1)} f^{(n)}(t)}{(n-1)\,!}\, dt$$

   En intégrant $\displaystyle\int_y^x \frac{(x-t)^{(n-1)} f^{(n)}(t)}{(n-1)\,!}\, dt$ <u>par parties</u>, nous obtenons :

   $$\left\{ \begin{array}{ll} u' = \dfrac{(x-t)^{(n-1)}}{(n-1)\,!} & u = -\dfrac{(x-t)^{(n)}}{(n)\,!} \\ v = f^{(n)}(t) & v' = f^{(n+1)}(t) \end{array} \right.$$

   D'où :

   $$\begin{aligned} \int_y^x \frac{(x-t)^{(n-1)} f^{(n)}(t)}{(n-1)\,!}\, dt &= \left[-\frac{(x-t)^{(n)}}{(n)\,!} f^{(n)}(t) \right]_y^x + \int_y^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!}\, dt \\ &= \frac{(x-y)^n}{n\,!} f^{(n)}(y) + \int_y^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!}\, dt \end{aligned}$$

D'où :

$$f(x) = f(y) + (x-y) f'(y) + \cdots + \frac{(x-y)^n f^{(n)}(y)}{n\,!} + \int_y^x \frac{(x-t)^n f^{(n)}(t)}{n\,!}\,dt$$

Ce que nous voulions

Exercice 22 :

Formule de Taylor pour les polynômes

$\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, et on appelle $E_k(X) = (X-a)^k$
   Montrer que la famille $\{E_0, E_1, \ldots, E_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Nous pouvons donc écrire tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ sous la forme

$$P(X) = P_0E_0 + P_1E_1 + P_2E_2 + \cdots + P_nE_n$$

En calculant les dérivées successives de P, montrer que pour tout $k = 0, \ldots, n$, $P_k = \dfrac{P^{(k))}(a)}{k\,!}$

Conclusion

- **Nous obtenons ainsi la formule de Taylor pour les polynômes :** qui est une formule exacte

$$P(X) = P(a)) + (X-a)P'(a) + (X-a)^2\frac{P''(a)}{2} + \cdots + (X-a)^k\frac{P^k(a)}{k\,!} + \cdots + (X-a)^n\frac{P^n(a)}{n\,!}$$

- En faisant $a = 0$, nous obtenons ainsi la formule de Taylor Mac-Laurin :

$$P(X) = P(0)) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2}X^2 + \cdots \frac{P^k(0)}{k\,!} + X^k + \cdots + \frac{P^n(0)}{n\,!}X^n$$

- Ce qui donne, si $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$, une expression explicite des a_k ; nous avons : $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k\,!}$

Exercice 23 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. On considère $f : [a-h; a+h] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a-h; a+h]$ dérivable sur $]a-h; a+h[$

1. Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que :

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = f'(a+ch) + f'(a-ch)$$

2. Démontrer cette fois ci qu'il existe $\theta \in]0;1[$ tel que :

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h)$$

3. On suppose, cette fois-ci que $f''(a)$ existe. Nous posons pour $0 < |u| < h$, c'est à dire $-h < u < h$ et $u \neq 0$:

$$\varphi(u) = \frac{f(a+u) - 2f(a) + f(a-u)}{u^2}$$

Démontrer que $\lim\limits_{u \to 0} \varphi(u) = f''(a)$

Exercice 24 :

Soit $a > 0$ et $f : [-a;+a] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie et continue sur l'intervalle $[-a;+a]$ et deux fois dérivable sur $]-a;+a[$
On suppose que $f(0) = 0$ et que f'' est bornée sur $]-a;+a[$, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in]-a;+a[$, $|f''(x)| \leqslant M$
On construit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pur tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $U_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$
Il faut démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite

11.5 Les fonctions convexes

Dans cette section, toutes les fonctions sont à valeurs réelles

11.5.1 Définition de la convexité

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. Soit un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$

1. f est dite convexe sur I si et seulement si

$$(\forall x \in I)\,(\forall y \in I)\,(\forall t \in [0;1])\,(f(tx + (1-t)\,y) \leqslant tf(x) + (1-t)\,f(y))$$

2. Elle est strictement convexe si l'inégalité est stricte, c'est à dire

$$(\forall x \in I)\,(\forall y \in I)\,(\forall t \in [0;1])\,(f(tx + (1-t)\,y) < tf(x) + (1-t)\,f(y))$$

Remarque 15 :

1. Une fonction f est dite concave si et seulement si

$$(\forall x \in I)\,(\forall y \in I)\,(\forall t \in [0;1])\,(f(tx + (1-t)\,y) \geqslant tf(x) + (1-t)\,f(y))$$

2. Une fonction f est concave si la fonction $-f$ est convexe. C'est pourquoi, l'étude ci-après ne se fera que pour les fonctions convexes.

Exemple 7 :

1. **La fonction $f(x) = |x|$ est convexe**
Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0;1]$. Alors,

$$|tx + (1-t)\,y| \leqslant t\,|x| + (1-t)\,|y|$$

Nous avons bien $f(tx + (1-)\,y) \leqslant tf(x) + (1-)\,f(y)$. Ce qui montre que la valeur absolue est convexe.

2. **La fonction $f(x) = x^2$ est convexe**
De la même manière, soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0;1]$. Alors,

$$(tx + (1-t)\,y)^2 - tx^2 - (1-t)\,y^2 = \left(t^2 - t\right)x^2 + \left(t^2 - t\right)y^2 + 2t\,(1-t)\,xy = \left(t^2 - t\right)(x-y)^2$$

Comme $t \in [0;1]$, nous avons $\left(t^2 - t\right) \leqslant 0$, et donc $(tx + (1-t)\,y)^2 - tx^2 - (1-t)\,y^2 \leqslant 0$, c'est à dire $(tx + (1-t)\,y)^2 \leqslant tx^2 + (1-t)\,y^2$, ce qui veut dire que $f(x) = x^2$ est convexe

Exercice 25 :

1. Montrer que la somme de 2 fonctions convexes est convexe
2. Démontrer que si la fonction f est croissante et convexe et que si la fonction g est convexe, alors la fonction $f \circ g$ est convexe.

Exercice 26 :

1. Démontrer qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, pour tout choix de points $x_1 \in I \dots x_n \in I$, et de coefficients $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+ \dots \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tout $i = 1, \dots, n$ $\lambda_i \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ nous avons $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$
2. Soit une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe; démontrer que pour $x_1 \in I, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ n nombres réels positifs, nous avons :

$$f\left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\right) \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

11.5.2 Interprétation géométrique

Soient $x \in I$ et $y \in I$ tels que $x \leqslant y$; considérons l'intervalle $[x; y] \subset I$. Soient M le point de coordonnées $(x, f(x))$ et N le point de coordonnées $(y, f(y))$.
Alors, tout point $T \in [M; N]$ a pour coordonnées :

$$x_1 = tx + (1-t)\,y \qquad y_1 = tf(x) + (1-t)\,f(y) \text{ avec } t \in [0; 1]$$

Et la propriété d'« **inégalité de convexité** » se traduit par « **La courbe représentative de f se situe sous le segment** $[M; N]$ »

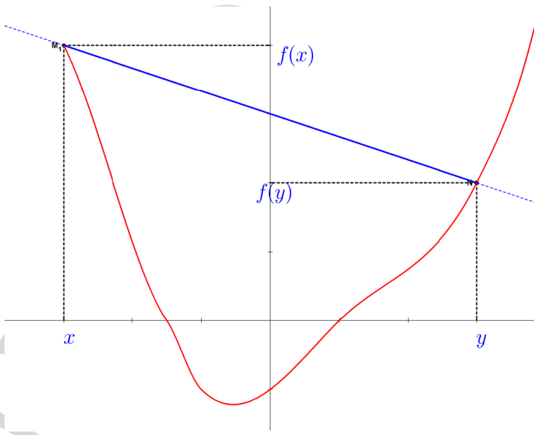

FIGURE 11.4 – La courbe représentative de f est sous le segment $[M; N]$

Remarque 16 :

Quelle est l'équation d'une corde $[M; N]$? En supposant $M = (a, f(a))$ et $M = (b, f(b))$, l'équation de la droite (MN) est donnée par :

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Une autre façon de présenter cette équation est d'utiliser le calcul d'un déterminant :

$$\begin{vmatrix} x - a & b - a \\ y - f(a) & f(b) - f(a) \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (f(b) - f(a))(x - a) - (b - a)(y - f(a)) = 0$$

11.5.3 Caractérisation d'une fonction convexe

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. Soit un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$.
Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I
2. Pour tout $x \in I$, tout $y \in I$ et tout $z \in I$ avec $x < z < y$, nous avons :
$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$
3. Pour tout $a \in I$, la fonction $h_a(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ définie sur $I \setminus \{a\}$ est croissante

Démonstration

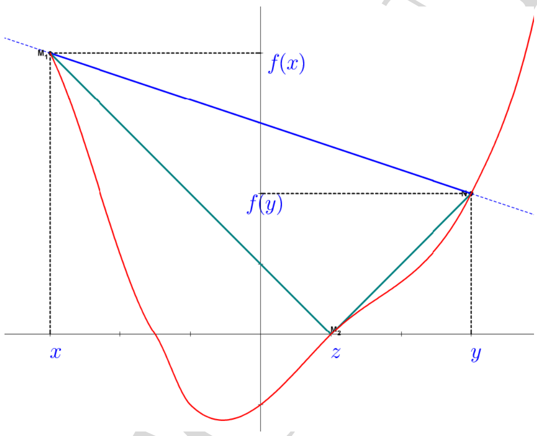

FIGURE 11.5 –

1. **Supposons f convexe sur I**

   Nous allons démontrer que $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \dfrac{f(y) - f(z)}{y - z}$

   Soit g la fonction affine qui passe par les points $M(x, f(x))$ et $N(y, f(y))$. g a pour expression :
$$g(T) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(T - x) + f(x)$$
   Nous remarquons que $g(x) = f(x)$, $g(y) = f(y)$ et, pour tout z tel que $x < z < y$ nous avons $f(z) \leqslant g(z)$

   ▷ De $f(z) \leqslant g(z)$, nous tirons $f(z) - f(x) \leqslant g(z) - f(x)$ et de $z > x$ et donc $\dfrac{1}{z - x} > 0$, nous tirons :
$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{g(z) - f(x)}{z - x}$$
   De $g(x) = f(x)$, nous déduisons $\dfrac{g(z) - f(x)}{z - x} = \dfrac{g(z) - g(x)}{z - x}$

   Le rapport $\dfrac{g(z) - g(x)}{z - x}$ est le coefficient directeur de la droite représentant g et donc
$$\frac{g(z) - g(x)}{z - x} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$
   Il est possible de démontrer autrement que $\dfrac{g(z) - g(x)}{z - x} = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. En effet :
$$g(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x) + f(x) \Longleftrightarrow g(z) - f(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x)$$

De l'égalité $g(x) = f(x)$, nous tirons :

$g(z) - f(x) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x) \Longleftrightarrow g(z) - g(x) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x) \Longleftrightarrow \dfrac{g(z) - g(x)}{z - x} = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$

Et nous avons démontré, dans un premier temps $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$

▷ Nous repartons de $f(z) \leqslant g(z)$. Nous avons, puisque $g(x) = f(x)$ et $g(y) = f(y)$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{g(y) - g(x)}{y - x}$$

Nous avons aussi, et l'avons déjà démontré, que : $\dfrac{g(y) - g(x)}{y - x} = \dfrac{g(y) - g(z)}{y - z}$

De $f(z) \leqslant g(z) \Longleftrightarrow -f(z) \geqslant -g(z)$, et de $y > z \Longleftrightarrow y - z > 0$, nous tirons :

$$\frac{g(y) - g(z)}{y - z} \leqslant \frac{g(y) - f(z)}{y - z} = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

D'où nous tirons la seconde inégalité : $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \dfrac{f(y) - f(z)}{y - z}$

Nous venons de démontrer la double inégalité : $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \dfrac{f(y) - f(z)}{y - z}$

2. **Supposons f vérifie $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \dfrac{f(y) - f(z)}{y - z}$**

Nous allons démontrer que l'application $h_a(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ est croissante.

Supposons que $t_1 < t_2$; il faut donc montrer que $h_a(t_1) \leqslant h_a(t_2)$

▷ Supposons $t_1 < t_2 < a$

D'après l'hypothèse, nous avons : $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \leqslant \dfrac{f(a) - f(t_1)}{a - t_1} \leqslant \dfrac{f(a) - f(t_2)}{a - t_2}$, c'est à dire que nous avons $h_a(t_1) \leqslant h_a(t_2)$

▷ Supposons $t_1 < a < t_2$

Nous avons à nouveau : $\dfrac{f(a) - f(t_1)}{a - t_1} \leqslant \dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \leqslant \dfrac{f(t_1) - f(a)}{t_1 - a}$, c'est à dire que nous avons $h_a(t_1) \leqslant h_a(t_2)$

▷ Supposons $a < t_1 < t_2$

Nous avons : $\dfrac{f(t_1) - f(a)}{t_1 - a} \leqslant \dfrac{f(t_2) - f(a)}{t_2 - a} \leqslant \dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$, c'est à dire que nous avons $h_a(t_1) \leqslant h_a(t_2)$

Ainsi, dans tous les cas, nous avons $t_1 < t_2 \Longrightarrow h_a(t_1) \leqslant h_a(t_2)$

3. **Supposons $h_a(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ croissante**

Démontrons que f est convexe sur I.

Soient $x \in I$, $y \in I$ tels que $x < y$. Il nous faudra montrer que le segment reliant les points $M(x, f(x))$ et $N(y, f(y))$ se situe « au-dessus » du graphe de f, c'est à dire si g est la fonction affine dont la représentation est la droite (MN), pour tout $z \in I$ tel que $x < z < y$, $f(z) \leqslant g(z)$

Nous considérons $h_x(t) = \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$; par hypothèse, h_x est croissante, et donc $h_x(z) \leqslant h_x(y)$, c'est à dire $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

Soit g est la fonction affine dont la représentation passe par les points $M(x, f(x))$ et $N(y, f(y))$; alors :

$$g(T) = \left(\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right)(T - x) + f(x)$$

Nous avons toujours $g(x) = f(x)$ et $g(y) = f(y)$

Alors :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\frac{g(y)-g(x)}{y-x}$$

En considérant la pente de la droite (MN), nous avons :

$$\frac{g(y)-g(x)}{y-x}=\frac{g(z)-g(x)}{z-x}$$

Et

$$\frac{g(z)-g(x)}{z-x}=\frac{g(z)-f(x)}{z-x}$$

Comme $h_x(z)\leqslant h_x(y)$, et que $h_x(y)=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$, nous avons :

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leqslant\frac{g(z)-f(x)}{z-x}$$

C'est à dire $f(z)\leqslant g(z)$
Ce que nous voulions

11.5.4 Dérivabilité des fonctions convexes

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f\subset\mathbb{R}$. Soit un intervalle $I\subset\mathcal{D}_f$ ouvert. On suppose f convexe sur I
Alors, pour tout $a\in I$, f admet une dérivée à droite $f'_d(a)$ et une dérivée à gauche $f'_g(a)$.
De plus, nous avons $f'_g(a)\leqslant f'_d(a)$

Démonstration

Soit $a\in I$. I étant un intervalle ouvert, il existe $r>0$ tel que $]a-r;a+r[\subset I$
Soient $t_1\in I$ et $t_2\in I$ tels que $a-r<t_1<a<t_2<a+r$

1. En reconsidérant $h_a(t)=\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$, nous avons h_a croissante, et donc $h_a(t_1)\leqslant h_a(t_2)$
2. Ainsi la fonction :

$$\left\{\begin{array}{rcl} h_a:]t_1;a[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & h_a(t)=\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}\end{array}\right.$$

   est-elle majorée sur l'intervalle $]t_1;a[$ *(par $h_a(t_2)$, par exemple)*.
   La fonction h_a étant croissante, elle admet une limite de à gauche de a :

$$\lim_{\substack{t\to a\\ t<a}}h_a(t)=\lim_{\substack{t\to a\\ t<a}}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=f'_g(a)$$

   D'autre part, pour tout $t_2>a$, nous avons $f'_g(a)\leqslant h_a(t_2)$
3. De la même manière, la fonction

$$\left\{\begin{array}{rcl} h_a:]a;t_2[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & h_a(t)=\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}\end{array}\right.$$

   est-elle minorée sur l'intervalle $]a;t_2[$ *(par $h_a(t_1)$, par exemple)*. et ainsi :

$$\lim_{\substack{t\to a\\ t>a}}h_a(t)=\lim_{\substack{t\to a\\ t>a}}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=f'_d(a)$$

   De même, pour tout $t_1<a$, nous avons $f'_d(a)\geqslant h_a(t_1)$
4. Ainsi, f admet-elle en $a\in I$, une dérivée à droite et une dérivée à gauche telles que $f'_g(a)\leqslant f'_d(a)$

Remarque 17 :

1. Le raisonnement précédent nous permet d'ajouter les précisions suivantes :

$$(\forall x_1 \in I)\,(\forall x_2 \in I)\,\big((x_1 \leqslant x_2) \Longrightarrow \big(f'_g(x_1) \leqslant f'_d(x_1)\big) \leqslant f'_g(x_2) \leqslant f'_d(x_2)\big)$$

2. Le fait que I soit un intervalle ouvert est important.
   En effet, si nous posons $I = [0;1]$ et considérons f définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ 0 & \longmapsto & f(0) = 1 \\ x & \longmapsto & f(x) = 0 \text{ si } x \neq 0 \end{array}\right.$$

   f est donc la fonction nulle sur $]0;1]$; elle est convexe sur $[0;1]$, mais la continuité n'est pas assurée. Elle est, par contre, assurée dans le plus grand ouvert inclus dans $[0;1]$ qui est, ici, $]0;1[$

3. Une fonction convexe n'est pas forcément dérivable. Il suffit de penser à $f(x) = |x|$ qui est convexe sur $\mathbb{R}$, mais non dérivable sur $\mathbb{R}$; elle est, par contre, toujours dérivable à droite et toujours dérivable à gauche *(mais la dérivée à droite n'est pas toujours égale à la dérivée à gauche)*

11.5.5 Corollaire

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. Soit un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$.
Si f est convexe sur I, alors f est continue sur I

Démonstration

La démonstration a déjà été faite en exercice.
Soit f convexe sur l'intervalle I et soit $x_0 \in I$.
D'après 11.5.4, f est dérivable à droite et à gauche de x_0. Nous pouvons alors écrire :

- ⋆ Pour $x > x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,f'_d(x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x)$$

  où $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \varepsilon(x) = 0$
  Nous avons clairement $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$, et donc f est continue à droite de x_0
- ⋆ De la même manière, pour $x < x_0$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$, et donc f est continue à gauche de x_0
- ⋆ Comme $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$ nous avons donc f continue en x_0

Remarque 18 :

Nous savons qu'une fonction convexe est continue. Mais, à quelle condition une fonction continue est-elle convexe ?

11.5.6 Critère pour qu'une fonction continue soit convexe

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et continue sur un intervalle $[a;b] \subset \mathcal{D}_f$
On suppose que, pour tout $x \in [a;b]$ et tout $y \in [a;b]$, nous avons :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Alors, f est convexe sur l'intervalle $[a;b]$

Démonstration

Nous devons montrer que pour tout $x \in [a;b]$, tout $y \in [a;b]$ et tout $\lambda \in [0;1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Nous allons, d'abord, montrer un résultat complémentaire

1. Démontrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que, pour tout $k \in \{0, \cdots, 2^n\}$:

$$f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1-\frac{k}{2^n}\right)y\right) \leqslant \frac{k}{2^n} f(x) + \left(1-\frac{k}{2^n}\right) f(y)$$

▷ C'est vrai pour $n = 1$
Nous vérifions donc pour $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$
⋆ Pour $k = 0$, nous avons $f(y) \leqslant f(y)$
⋆ Pour $k = 1$, nous avons

$$f\left(\frac{1}{2}x + \left(1-\frac{1}{2}\right)y\right) \leqslant \frac{1}{2} f(x) + \left(1-\frac{1}{2}\right) f(y) \Longleftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

C'est l'hypothèse que nous avons faite sur f.
⋆ Pour $k = 2$, nous avons cette fois-ci $f(x) \leqslant f(x)$
L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée pour $n = 1$

▷ Supposons maintenant que, jusqu'au rang n, pour tout $k \in \{0, \cdots, 2^n\}$:

$$f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1-\frac{k}{2^n}\right)y\right) \leqslant \frac{k}{2^n} f(x) + \left(1-\frac{k}{2^n}\right) f(y)$$

▷ Démontrons la propriété à l'ordre $n+1$
Et, c'est ici que ça de corse !!
Remarquons, avant de commencer que

$$\left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right)y = y - \frac{k}{2^{n+1}}y = \frac{1}{2}y - \frac{k}{2^{n+1}}y + \frac{1}{2}y = \left(\frac{2^n-k}{2^{n+1}}\right)y + \frac{1}{2}y$$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right)y\right) &= f\left(\frac{k}{2^{n+1}}x + \left(\frac{2^n-k}{2^{n+1}}\right)y + \frac{1}{2}y\right) \\
&= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}x + \left(\frac{2^n-k}{2^n}\right)y\right) + \frac{1}{2}y\right) \\
&\leqslant \frac{1}{2} f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(\frac{2^n-k}{2^n}\right)y\right) + \frac{1}{2} f(y) \quad \text{par hypothèses faites sur } f \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n} f(x) + \left(1-\frac{k}{2^n}\right) f(y)\right) + \frac{1}{2} f(y) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&\leqslant \frac{k}{2^{n+1}} f(x) + \left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{2^n}\right) + \frac{1}{2}\right) f(y) \\
&\leqslant \frac{k}{2^{n+1}} f(x) + \left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right) f(y)
\end{aligned}$$

Ce que nous voulions
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0, \cdots, 2^n\}$:

$$f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1-\frac{k}{2^n}\right)y\right) \leqslant \frac{k}{2^n} f(x) + \left(1-\frac{k}{2^n}\right) f(y)$$

2. Soit maintenant $\lambda \in [0;1]$. Alors, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du type $\lambda_n = \dfrac{p_n}{2^n}$ avec $p_n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant p_n \leqslant 2^n$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda$

Comment construire une telle suite ?

En utilisant le développement dyadique *(le développemment en base 2)*[3], il existe une suite $\lambda_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$ avec $\varepsilon_k \in \{0;1\}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda$. En réduisant au même dénominateur, nous avons $p_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k 2^{n-k}$.

D'autre part, nous avons $p_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k 2^{n-k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1 < 2^n$.

Nous avons donc, à ce moment là, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(\lambda_n x + (1-\lambda_n) y) \leqslant \lambda_n f(x) + (1-\lambda_n) f(y)$$

Or :

- ▷ $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n x + (1-\lambda_n) y = \lambda x + (1-\lambda) y$
- ▷ $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n f(x) + (1-\lambda_n) f(y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
- ▷ De la continuité de f nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} f(\lambda_n x + (1-\lambda_n) y) = f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

La limite respectant la relation d'ordre, nous avons donc

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

La fonction f est donc convexe

11.5.7 Fonctions convexes dérivables

1. Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. Soit un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$. On suppose f convexe sur I et dérivable sur I. Alors, la fonction f' est une fonction croissante
2. Réciproquement, si f est une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ et admettant comme dérivée une fonction f' croissante, alors f est convexe

Démonstration

1. On a montré, dans 11.5.4 que si f est convexe sur un intervalle I, alors, pour tout $x_0 \in I$, f est dérivable à droite et à gauche de x_0 et que

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I)\left((x_1 \leqslant x_2) \Longrightarrow \left(f'_g(x_1) \leqslant f'_d(x_1)\right) \leqslant f'_g(x_2) \leqslant f'_d(x_2)\right)$$

Comme f est dérivable, alors $f'_g(x_1) = f'_d(x_1) = f'(x_1)$ et $f'_g(x_2) = f'_d(x_2) = f'(x_2)$
Et donc, si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$; la fonction f' est donc croissante.

2. Réciproquement, supposons que f admette une dérivée croissante sur I ; montrons qu'elle est convexe sur I

Soient $x \in I$, $y \in I$ et $\lambda \in [0;1]$. Nous avons $x \leqslant \lambda x + (1-\lambda) y \leqslant y$.
Il nous faut donc montrer que $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

- ▷ Nous allons appliquer le théorème des accroissements finis entre x et $\lambda x + (1-\lambda) y$.
Il existe donc $\xi_1 \in]x; \lambda x + (1-\lambda) y[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(\lambda x + (1-\lambda) y)}{x - (\lambda x + (1-\lambda) y)} = f'(\xi_1) \Longleftrightarrow \frac{f(x) - f(\lambda x + (1-\lambda) y)}{(1-\lambda)(x-y)} = f'(\xi_1)$$
$$\Longleftrightarrow f(x) - f(\lambda x + (1-\lambda) y) = f'(\xi_1)(1-\lambda)(x-y)$$

3. Le développement dyadique se fait comme le développement décimal vu en L_0

▷ De même,nous appliquons le théorème des accroissements finis entre $\lambda x+(1-\lambda)y$ et y. Il existe donc $\xi_2 \in \left]\lambda x+(1-\lambda)y;y\right[$ tel que

$$\begin{aligned}\frac{f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda)y)}{y-(\lambda x+(1-\lambda)y)}=f'(\xi_2) &\Longleftrightarrow \frac{f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda)y)}{\lambda(y-x)}=f'(\xi_2)\\ &\Longleftrightarrow f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda f'(\xi_2)(y-x)\end{aligned}$$

▷ Des deux applications successives du théorèmes des accroissements finis, nous obtenons 2 égalités :
⋆ $f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(x)=f'(\xi_1)(1-\lambda)(y-x)$
⋆ $f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda f'(\xi_2)(y-x)$
Avec, par construction $\xi_1 \leqslant \xi_2$
Ces égalités sont équivalentes à :
⋆ $\lambda f(\lambda x+(1-\lambda)y)-\lambda f(x)=f'(\xi_1)\lambda(1-\lambda)(y-x)$
⋆ $(1-\lambda)f(y)-(1-\lambda)f(\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda(1-\lambda)f'(\xi_2)(y-x)$
Comme $\lambda(1-\lambda)(y-x)\geqslant 0$, que $f'(\xi_1)\leqslant f'(\xi_2)$ puisque f' est croissante et que $\xi_1\leqslant\xi_2$, nous avons :

$$f'(\xi_1)\lambda(1-\lambda)(y-x)\leqslant f'(\xi_2)\lambda(1-\lambda)(y-x)$$

C'est à dire :

$$\lambda f(\lambda x+(1-\lambda)y)-\lambda f(x)\leqslant(1-\lambda)f(y)-(1-\lambda)f(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

Tous calculs faits, cette inégalité est donc équivalente à :

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

f est donc convexe sur I

11.5.8 Corollaire

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f\subset\mathbb{R}$ deux fois dérivable sur un intervalle $I\subset\mathcal{D}_f$. Alors f est convexe sur I si et seulement si la dérivée seconde f'' est positive sur I, c'est à dire si et seulement si, pour tout $x\in I$ $f''(x)\geqslant 0$

Démonstration

La démonstration en est évidente, puis que si $f''\geqslant 0$, alors f' est croissante sur I, donc convexe sur I

Exemple 8 :

1. La fonction $f(x)=x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$
2. La fonction $f(x)=e^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$
3. La fonction $f(x)=\ln x$ est concave sur $\mathbb{R}^{*+}$

Exercice 27 :

Soit $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{*+}$ une fonction telle que $\ln h$ soit convexe ; démontrer que h est une fonction convexe.

Exercice 28 :

1. Utiliser la convexité de $f(x)=x^2$ pour montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x_1,\ldots,x_n$ réels, nous avons :

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right|\leqslant\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$$

2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, utiliser la convexité de $f(x) = x^p$ sur $\mathbb{R}^+$ pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \dots, x_n$ réels positifs, nous avons :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} \leqslant \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
3. Utiliser la convexité de $f(x) = -\ln x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \dots, x_n$ réels strictement positifs, nous avons :
$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$
En déduire que :
(a) Pour tout $a \geqslant 0$, tout $b \geqslant 0$ et tout $c \geqslant 0$:
$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc \qquad (a+b+c)^3 \geqslant 27abc$$
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{n!} \leqslant \dfrac{n+1}{2}$

11.5.9 Proposition *(Seconde caractérisation géométrique)*

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. Soit un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ ouvert. On suppose f convexe sur I. Soit $a \in I$. Alors :

1. Pour tout $\alpha \in \left[f'_g(a) ; f'_d(a) \right]$, alors la droite de pente α passant par $(a, f(a))$ est située sous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f, c'est à dire :
$$(\forall x \in I)\,(f(x)) \geqslant \alpha (x-a) + f(a)$$
2. En particulier, si f est dérivable sur I, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de n'importe quelle de ses tangentes, c'est à dire :
$$(\forall a \in I)\,(\forall x \in I)\,(f(x)) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$$
3. Réciproquement, si f est dérivable sur I et si $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de n'importe quelle de ses tangentes, alors f est convexe.

Démonstration

1. Nous avons démontré en 11.5.4 que f admet une dérivée à droite de a $f'_d(a)$ et une dérivée à gauche $f'_g(a)$ et que, de plus nous avons $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.
Dans cette même démonstration, nous avons montré que :
   - ⋆ Si $x < a$ alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} \leqslant f'_g(a)$, et comme $x - a < 0$, nous avons $f(x) - f(a) \geqslant f'_g(a)(x-a)$, c'est à dire $f(x) \geqslant f'_g(a)(x-a) + f(a)$
   Comme $f'_g(a)(x-a) + f(a)$ est l'équation de la tangente à f, à gauche de a, nous avons le résultat demandé à gauche de a
   - ⋆ Si $x > a$ alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} \geqslant f'_d(a)$, et comme $x - a > 0$, nous avons $f(x) - f(a) \geqslant f'_d(a)(x-a)$, c'est à dire $f(x) \geqslant f'_d(a)(x-a) + f(a)$
   Comme $f'_d(a)(x-a) + f(a)$ est l'équation de la tangente à f à droite de a, nous avons le résultat demandé à droite de a

   Ainsi, que ce soit à droite ou à gauche de a, la courbe est au-dessus des tangentes
   Maintenant, soit α tel que $f'_g(a) \leqslant \alpha \leqslant f'_d(a)$. Alors :
   - ⋆ Si $x < a$ alors $(x-a) f'_d(a) + f(a) \leqslant \alpha(x-a) + f(a) \leqslant f'_g(a)(x-a) + f(a) \leqslant f(x)$
   - ⋆ Si $x > a$ alors $(x-a) f'_g(a) + f(a) \leqslant \alpha(x-a) + f(a) \leqslant f'_d(a)(x-a) + f(a) \leqslant f(x)$

   Le résultat du premier point est donc démontré

2. Si f est dérivable sur I, alors $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$ et nous avons donc, pour tout $x \in I$, $f'(a)(x-a) + f(a) \leqslant f(x)$, c'est à dire que la tangente est toujours située sous la courbe représentative de f
3. Réciproquement, supposons f dérivable sur I et que :

$$(\forall a \in I)(\forall x \in I)(f(x)) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$$

Soient $x \in I$ et $y \in I$ tels que $x < y$; nous allons montrer que $f'(x) \leqslant f'(y)$, c'est à dire que f' est croissante.

$\longrightarrow$ Soit $g_x(t)$ la tangente à f en $(x, f(x))$; alors, $g_x(t) = f'(x)(t-x) + f(x)$.

Pour tout $t \in I$, nous avons $g_x(t) = f(t)$ et, en particulier $g_x(y) \leqslant f(y)$, c'est à dire

$$f'(x)(y-x) + f(x) \leqslant f(y) \Longleftrightarrow f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$\longrightarrow$ De même, si $g_y(t)$ est la tangente à f en $(y, f(y))$; alors, $g_y(t) = f'(y)(t-x) + f(y)$.

Pour tout $t \in I$, nous avons $g_y(t) = f(t)$ et, en particulier $g_y(x) \leqslant f(x)$, c'est à dire

$$f'(y)(x-y) + f(y) \leqslant f(x) \Longleftrightarrow f'(y) \geqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Puisque $x - y < 0$

$\longrightarrow$ Nous avons donc : $f'(x) \leqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y)$

f' est donc croissante et f est convexe

11.5.10 Exercices sur la convexité

Exercice 29 :

1. Que dire de la somme de deux fonctions convexes ?
2. Que dire de la combinaison linéaire de deux fonctions convexes ?

Exercice 30 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et positive. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que f est nulle sur l'intervalle $[a; b]$

Exercice 31 :

Soient f et g 2 fonctions convexes sur un intervalle I

1. Montrer que $h = \sup(f, g)$ est une fonction convexe
2. Que dire de $j = \inf(f, g)$?

Exercice 32 :

1. Démontrer que, pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0; x]$, nous avons $1 + t \leqslant e^t \leqslant 1 + \dfrac{t}{x}(e^x - 1)$
2. Que se passe-t-il si $x < 0$?

Exercice 33 :

Utiliser la fonction f définie sur l'intervalle $]+1; +\infty[$ par $f(x) = \ln(\ln x)$ pour démontrer que

$$(\forall x > 1)(\forall y > 1)\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geqslant \sqrt{(\ln x)(\ln y)}$$

Exercice 34 :

1. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+e^x)$ est convexe
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1 > 0, \cdots, x_n > 0$ nous avons :
$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1+x_k)^{\frac{1}{n}}$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1 > 0, \cdots, a_n > 0$ et $b_1 > 0, \cdots, b_n > 0$, nous avons :
$$\left(\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 35 :

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a_1 > 0, \cdots, a_n > 0$, nous avons : $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}$
2. Démontrer que, pour tout $x > 1$, nous avons $\sqrt{x^{2n} - 1} \geqslant \sqrt{\frac{x+1}{x-1} \times \frac{x^n - 1}{\sqrt{n}}}$

Exercice 36 :

1. Vérifier que f, définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = x \ln x$ est convexe sur $\mathbb{R}^{*+}$
2. Démontrer que, pour tout $x > 0$, tout $y > 0$, tout $a > 0$ et tout $b > 0$ nous avons :
$$(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leqslant x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right)$$

Exercice 37 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe

1. On suppose f strictement croissante. Etudier $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. On suppose que f est bornée. Montrer que f est constante
3. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est positive
4. On suppose que f admet une droite asymptote en $+\infty$. Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f par rapport à la droite asymptote.

Exercice 38 :

Soit $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Démontrer que la fonction $\frac{f(x)}{x}$ admet, en $+\infty$, la même limite que $h_1(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$ et que cette limite est finie ou égale à $+\infty$
2. Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = L$, alors $g(x) = f(x) - Lx$ admet une limite finie ou $-\infty$ lorsque x tens vers $+\infty$

Exercice 39 :

Soit $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Nous définissons $g :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour tout $x > 0$.

1. Montrer si g est décroissante, alors f est sous-additive sur $]0; +\infty[$.
   On doit qu'une fonction $\varphi :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est <u>sous additive</u> si
$$(\forall a \in]0; +\infty[)\,(\forall a \in]0; +\infty[)\,(\varphi(a+b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b))$$
2. Montrer que si f est convexe et sous-additive, alors g est décroissante

11.6 Suites de fonctions et différentiabilité

Introduction

$\longrightarrow$ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions, définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$

Comme, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle $\mathcal{O}$, c'est à dire la fonction telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathcal{O}(x)=0$

$\longrightarrow$ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable et de dérivée $f_n'(x)=\dfrac{n\cos nx}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\cos nx$.

Ceci nous permet d'écrire que, par exemple, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n'(0)=\sqrt{n}$ et que donc $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n'(0)=+\infty$, alors que $\mathcal{O}'(x)=0$.

C'est à dire que la suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers la dérivée de la limite de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$\longrightarrow$ A quelles conditions avons nous $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n'=\left(\lim\limits_{n\to+\infty}f_n\right)'$. Le résultat suivant tente d'y répondre *(mais, ce n'est pas simple !)*

11.6.1 Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On suppose que :

- ▷ Il existe $c\in[a;b]$ tel que la suite numérique $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ converge
- ▷ La suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions dérivées des f_n converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction φ

Alors :

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction f
2. f est dérivable sur $[a;b]$
3. Pour tout $x\in[a;b]$, $f'(x)=\varphi(x)\iff f'(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f_n'(x)$, c'est à dire que nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}f_n'=\left(\lim_{n\to+\infty}f_n\right)'$$

Démonstration

1. On montre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction f

Soient $p\in\mathbb{N}$ et $q\in\mathbb{N}$ et nous considérons la fonction $\Phi=f_p-f_q$ à laquelle nous allons appliquer le théorème des accroissements finis entre un nombre $x\in[a;b]$ et c.

Il existe donc ξ compris entre c et x *(c'est à dire $\xi\in]c;x[$ ou $\xi\in]x;c[$)* tel que

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(c)}{x-c}=\Phi'(\xi)$$

Ce qui traduit autrement nous donne :

$$\frac{(f_p-f_q)(x)-(f_p-f_q)(c)}{x-c}=(f_p-f_q)'(\xi)\iff\frac{(f_p(x)-f_q(x))-(f_p(c)-f_q(c))}{x-c}=\left(f_p'(\xi)-f_q'(\xi)\right)$$

D'où nous tirons :

$$f_p(x)-f_q(x)=(f_p(c)-f_q(c))+(x-c)\left(f_p'(\xi)-f_q'(\xi)\right)$$

Et alors :

$$\begin{aligned}|f_p(x)-f_q(x)|&\leqslant|f_p(c)-f_q(c)|+|x-c|\left|f_p'(\xi)-f_q'(\xi)\right|\\&\leqslant|f_p(c)-f_q(c)|+|a-b|\left|f_p'(\xi)-f_q'(\xi)\right|\ \text{ car } x\in[a;b]\text{ et } c\in[a;b]\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$.

Comme la suite $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy, et donc, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q > N_1$, alors $|f_p(c) - f_q(c)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Comme la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions dérivées des f_n converge uniformément sur $[a;b]$, il existe un entier $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p > q > N_2$ et **tout** $x \in [a;b]$, nous avons

$$\left|f'_p(x) - f'_q(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2|a-b|}$$

En particulier pour $x = \xi$, nous avons, pour $p > q > N_2$, $\left|f'_p(\xi) - f'_q(\xi)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2|a-b|}$.

Ainsi, pour $N = \max\{N_1, N_2\}$ et pour $p > q > N$, nous avons :

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leqslant |f_p(c) - f_q(c)| + |a-b|\left|f'_p(\xi) - f'_q(\xi)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Et ceci étant vrai pour tout $x \in [a;b]$, ceci démontre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction f.

2. <u>Montrons que f est dérivable et que $f' = \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n$</u>

   Soit $x_0 \in [a;b]$

   ⋆ On construit une suite de fonctions $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur l'intervalle $[a;b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} \rho_n : [a;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & \rho_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \text{ si } x \neq x_0 \\ f'_n(x_0) \text{ si } x = x_0 \end{cases} \end{cases}$$

   Il est clair que la fonction $_rho_n$ est continue sur $[a;b]$

   ⋆ Construisons une seconde fonction ρ, définie sur l'intervalle $[a;b]$ par :

$$\begin{cases} \rho : [a;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & \rho(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ si } x \neq x_0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x_0) = \varphi(x_0) \text{ si } x = x_0 \end{cases} \end{cases}$$

   ⋆ Si nous réussissons à démontrer que ρ est une fonction continue sur $[a;b]$, c'est à dire que si nous réussissons à démontrer que :

$$\lim_{x\to x_0} \rho(x) = \rho(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \varphi(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x_0)$$

   Nous aurons réussi à démontrer que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = \varphi(x_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x_0)$ et nous aurons

$$f' = \lim_{n\to+\infty} f'_n \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} f'_n = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'$$

   ⋆ Tout d'abord, il est évident que la suite de fonctions $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>converge simplement</u> vers la fonction ρ.

   Montrons que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>converge uniformément</u> vers la fonction ρ.

   Dans ce cas, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions ρ_n sont continues, ρ qui est la limite uniforme de la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera elle aussi continue, et nous aurons démontré le théorème

   • <u>**Montrons que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément**</u>

   Soit $x \in [a;b]$. Alors, pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |\rho_p(x) - \rho_q(x)| &= \left|\frac{f_p(x) - f_p(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_q(x) - f_q(x_0)}{x - x_0}\right| \\ &= \left|\frac{(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(x_0)}{x - x_0}\right| \end{aligned}$$

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f_p - f_q$ entre x et x_0, il existe c entre x et x_0 tel que :

$$\frac{(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(x_0)}{x - x_0} = (f_p - f_q)'(c) = f_p'(c) - f_q'(c)$$

Il existe ainsi c entre x et x_0 tel que $|\rho_p(x) - \rho_q(x)| = |f_p'(c) - f_q'(c)|$
Soit $\varepsilon > 0$
La suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions dérivées des f_n converge uniformément sur $[a;b]$. Elle vérifie donc le critère de Cauchy.
Il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q > N_\varepsilon$, alors $|f_p'(c) - f_q'(c)| < \varepsilon$
Ainsi, si $p > q > N_\varepsilon$, alors, pour tout $x \in [a;b]$, $|\rho_p(x) - \rho_q(x)| < \varepsilon$ et la suite de fonctions $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers ρ qui est donc continue.

Ce que nous voulions

Et le théorème est démontré

Remarque 19 :

La convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dans les hypothèses, mais dans le résultat.

Exemple 9 :

Soient $a > 0$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[0;a]$ par $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)x^2 + (-1)^n$

Toutes les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;a]$; la suite des dérivées $f_n'(x) = 2\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)x$ converge uniformément sur vers la fonction $g(x) = 2x$; pourtant, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[0;a]$; en effet, il manque la condition : « il existe $c \in [0;a]$ tel que la suite numérique $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ».

11.6.2 Corollaire

Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que :

- La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a;b]$
- La suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions dérivées des f_n converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction φ

Alors, la limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ et nous avons aussi

$$\lim_{n\to+\infty} f_n' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'$$

Démonstration

Voilà un véritable corollaire de 11.6.1

1. Comme la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a;b]$, pour tout $c \in [a;b]$, la suite numérique $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ converge
2. Comme la suite des fonctions dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$, d'après 11.6.1, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$
3. Toutes les fonctions f_n étant de classe $\mathcal{C}^1$, la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant uniforme, la limite f est donc continue et telle que $f' = \lim_{n\to+\infty} f_n'$, c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} f_n' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'$
4. La convergence de la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ étant uniforme, la limite f' est donc continue ; f est donc de classe $\mathcal{C}^1$

11.7 Exercices complémentaires variés

Exercice 40 :

On considère la fonction $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^+$

1. Quelles sont les limites de f aux bornes du domaine de définition ? Est-il possible de prolonger f par continuité en 0 ?
2. Quelle est la dérivée de f ? La fonction est-elle dérivable en 0 ?
3. Faire une étude des variations de f. Construire un tableau de variations de f.

Exercice 41 :

1. En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer que :
$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right)\left(\forall y \in \mathbb{R}^+\right)\left(\left|e^{-x} - e^{-y}\right| \leqslant |x - y|\right)$$
2. Soit $f(x) = e^{-1-x}$ Démontrer que f est bijective sur $\mathbb{R}$, et que $f([0,1]) \subset [0,1]$
3. Soit $\varphi(x) = f(x) - x$; montrer que φ est bijective, et que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une seule solution s_0 ; situer s_0 entre 2 entiers.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $\varphi(x) = 0$
5. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
   (a) Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\,(f(u_n) \in [0,1])$
   (b) Démontrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\,\left(|f(u_n) - s_0| \leqslant e^{-1}\,|u_n - s_0|\right)$
   (c) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\,(|u_n - s_0| \leqslant e^{-n})$
   (d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 42 :

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n+k}$ est convergente. On appelle l sa limite
2. Soit f une fonction numérique définie sur $[-1;+1]$, dérivable en 0 et nulle en 0 *(c'est à dire $f(0) = 0$)*. On considère la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$S_n(f) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n+1}\right) + f\left(\frac{1}{n+2}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$$
   Montrer que la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $S(f)$ qu'il possible d'exprimer en fonction de l et de $f'(0)$
3. Appliquer le résultat précédent à la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ et en déduire la valeur de l

Exercice 43 :

Soient $\alpha > 1$, $\beta > 1$ et $f : [0;1] \longrightarrow]0;+\infty[$ une application dérivable sur $]0;1[$. On suppose que :
$$f(0) = 0 \text{ et } (\forall x \in]0;1[)\,(f'(x) > 0)$$
En étudiant $g(x) = (f(x))^{\alpha} \times (f(1-x))^{\beta}$, démontrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que :
$$\alpha\frac{f'(c)}{f(c)} = \beta\frac{f'(1-c)}{f'(c)}$$

Exercice 44 :

Cet exercice utilise la notion de convexité pour démontrer des inégalités importantes

On dit que 2 nombres réels $p > 1$ et $q > 1$ sont conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soient donc $p > 1$ et $q > 1$ 2 nombres réels conjugués.

1. Démontrer que, pour tout $u \in \mathbb{C}^*$ et tout $v \in \mathbb{C}^*$, nous avons :
$$|uv| \leqslant \frac{|u|^p}{p} + \frac{|v|^q}{q}$$
2. Soit $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$, une famille de $2n$ nombres complexes. On pose :
$$\alpha = \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad \beta = \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$
Et on suppose $\alpha > 0$ et $\beta > 0$
Démontrer que, pour tout $i = 1, \cdots, n$, nous avons :
$$\frac{|a_i b_i|}{\alpha\beta} \leqslant \frac{|a_i|^p}{p \times \alpha^p} + \frac{|b_i|^q}{q \times \alpha^q}$$
3. Démontrer l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$
Quelle inégalité obtenons nous pour $p = q = 2$?
4. Démontrer l'inégalité de Minkowski
$$\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

11.7.1 Fonctions à variations bornées

Nous commençons à donner une définition de telles fonctions

Définition de fonction à variations bornées

1. Une fonction f est dite à variations bornées sur un segment $[a; b]$ s'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour toute subdivision $\Sigma : a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$ de l'intervalle $[a; b]$ nous ayions
$$\sum_{i=1}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leqslant M$$
2. La quantité $V_a^b(f) = \sup_{\Sigma} \sum_{i=1}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ s'appelle la variation totale de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$

Exercice 45 :

1. Montrer que les fonctions monotones sur un intervalle borné $[a; b]$ sont à variations bornées.
2. Montrer que si f est k-lipstzienne sur l'intervalle $[a; b]$ alors elle est à variations bornées

Exercice 46 :

1. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors f est à variations bornées
2. Calculer alors $V_a^b(f)$

Exercice 47 :

Soient f et g 2 fonctions à variations bornées sur l'intervalle $[a;b]$. Comparer $V_a^b(f+g)$ à $V_a^b(f)+V_a^b(g)$

11.8 Exercices résolus

11.8.1 Différentiabilité, dérivabilité

Exercice 1 :

1. *On considère la fonction f, définie, pour tout $x \in [-1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^3+x^2}$. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$*

   Il est possible d'écrire autrement f. En effet, $f(x) = \sqrt{x^3+x^2} = \sqrt{x^2(x+1)} = |x|\sqrt{(x+1)}$. Nous étudierons alors les dérivées à droite et à gauche de 0

   - A droite de 0

   $$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{|x|\sqrt{(x+1)}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{x\sqrt{(x+1)}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \sqrt{(x+1)} = 1$$

   Donc $f'_d(0) = 1$

   - A gauche de 0

   $$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{|x|\sqrt{(x+1)}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{-x\sqrt{(x+1)}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} -\sqrt{(x+1)} = -1$$

   Donc $f'_g(0) = -1$

   Les dérivées à droite et à gauche de 0 de f sont différentes. f n'est donc pas dérivable en 0

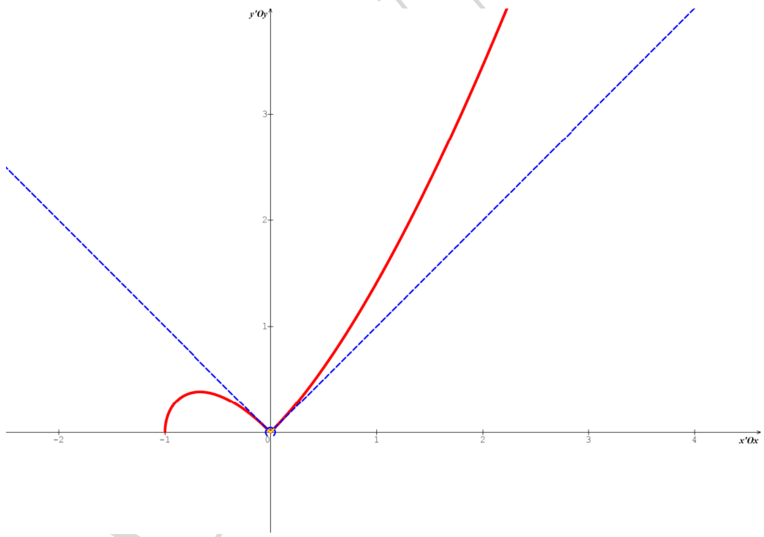

FIGURE 11.6 – Le graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x^3+x^2}$ et les tangentes à droite et à gauche au graphe de f en 0

2. *Même question pour la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

   ⋆ Comme $|f(x)| \leqslant |x^2|$, nous avons $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, et donc f est continue en 0

   ⋆ D'autre part, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = x\sin\dfrac{1}{x}$

   ⋆ Donc, $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right| = \left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant |x|$ et donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$. Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

Exercice 2 :

On dit qu'une fonction f satisfait à la condition de Lipschitz d'ordre α en x_0 s'il existe un nombre positif $M > 0$ et un intervalle $I =]x_0 - a : x_0 + a[$ (avec $a > 0$) tel que, pour tout $x \in I$, $|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha$

1. *Montrer qu'une fonction qui vérifie une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 0$ est continue en x_0*

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Nous avons alors $|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha$, et comme $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0|^\alpha = 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$, c'est à dire que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

   f est donc continue en x_0

2. *Montrer qu'une fonction qui vérifie une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 1$ est dérivable en x_0 et de dérivée nulle*

   Pas plus difficile que ci-dessus :

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leqslant M|x - x_0|^{\alpha - 1}$$

   Comme $1 - \alpha > 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0|^{\alpha-1} = 0$, et donc, si $\alpha > 1$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} \left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| = 0$. Ce qui veut dire que $f'(x_0)$ existe et que $f'(x_0) = 0$

Exercice 3 :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f, une fonction définie dans un voisinage de x_0 à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dérivable en x_0. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$ tels que $a > 0$ et $b > 0$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + bh) - f(x_0 - ah)}{(a + b)h} = f'(x_0)$$

Il nous faut "triturer" $\dfrac{f(x_0 + bh) - f(x_0 - ah)}{(a + b)h}$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0 + bh) - f(x_0 - ah)}{(a + b)h} &= \frac{f(x_0 + bh) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - ah)}{(a + b)h} \\
&= \frac{f(x_0 + bh) - f(x_0)}{(a + b)h} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - ah)}{(a + b)h} \\
&= \frac{bh}{(a + b)h} \times \left[\frac{f(x_0 + bh) - f(x_0)}{bh}\right] + \frac{ah}{(a + b)h} \times \left[\frac{f(x_0) - f(x_0 - ah)}{ah}\right] \\
&= \frac{b}{a + b} \times \left[\frac{f(x_0 + bh) - f(x_0)}{bh}\right] + \frac{a}{a + b} \times \left[\frac{f(x_0 - ah) - f(x_0)}{-ah}\right]
\end{aligned}$$

Nous avons :

- $\star$ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + bh) - f(x_0)}{bh} = f'(x_0)$
- $\star$ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 - ah) - f(x_0)}{-ah} = f'(x_0)$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + bh) - f(x_0 - ah)}{(a + b)h} = \dfrac{b}{a + b} \times f'(x_0) + \dfrac{b}{a + b} \times f'(x_0) = f'(x_0)$

Ce que nous voulions

Exercice 4 :

1. *Soit $f :]-1; +1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en 0. On considère 2 suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui, toutes deux, tendent vers 0 et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < a_n < 0 < b_n < 1$.*

   Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $X_n = \dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$ converge vers $f'(0)$

Il peut paraître, au début que cet exercice ressemble à celui que nous venons de résoudre. Il y a cependant une différence énorme, dans le fait que $\dfrac{b_n}{b_n - a_n}$ ou $\dfrac{a_n}{b_n - a_n}$ sont des formes indéterminées. Il faut donc attaquer le problème différemment et pensez à multiplier par 1 ou ajouter 0....pour que rien ne change, et alors, tout change !!

Tout d'abord, remarquons que $b_n - a_n > 0$, que $0 < \dfrac{b_n}{b_n - a_n} < 1$, ainsi que $0 < \dfrac{-a_n}{b_n - a_n} < 1$

Ensuite :

$$\begin{aligned} X_n - f'(0) &= \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - \frac{b_n - a_n}{b_n - a_n} f'(0) \\ &= \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - \frac{b_n - a_n}{b_n - a_n} f'(0) + \frac{1}{b_n - a_n} (f(0) - f(0)) \\ &= \frac{1}{b_n - a_n} [f(b_n) - f(0) - b_n f'(0)] - \frac{1}{b_n - a_n} [f(a_n) - f(0) - a_n f'(0)] \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{1}{b_n - a_n} [f(b_n) - f(0) - b_n f'(0)] = \frac{1}{b_n - a_n} \left[\frac{b_n f(b_n) - b_n f(0)}{b_n} - b_n f'(0) \right] = \frac{b_n}{b_n - a_n} \left[\frac{f(b_n) - f(0)}{b_n} - f'(0) \right]$$

De même :

$$\frac{1}{b_n - a_n} [f(a_n) - f(0) - a_n f'(0)] = \frac{a_n}{b_n - a_n} \left[\frac{f(a_n) - f(0)}{a_n} - f'(0) \right]$$

Donc :

$$|X_n - f'(0)| \leqslant \frac{b_n}{b_n - a_n} \left| \frac{f(b_n) - f(0)}{b_n} - f'(0) \right| + \frac{|a_n|}{b_n - a_n} \left| \frac{f(a_n) - f(0)}{a_n} - f'(0) \right|$$

Or, $0 < \dfrac{b_n}{b_n - a_n} < 1$ et $0 < \dfrac{|a_n|}{b_n - a_n} < 1$; donc :

$$|X_n - f'(0)| \leqslant \left| \frac{f(b_n) - f(0)}{b_n} - f'(0) \right| + \left| \frac{f(a_n) - f(0)}{a_n} - f'(0) \right|$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(b_n) - f(0)}{b_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(a_n) - f(0)}{a_n} = f'(0)$

Soit $\varepsilon > 0$

Il existe donc $N_b \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_b$, alors $\left| \dfrac{f(b_n) - f(0)}{b_n} - f'(0) \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

De même, il existe donc $N_a \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_a$, alors $\left| \dfrac{f(a_n) - f(0)}{a_n} - f'(0) \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Soit $N = \max\{N_a; N_b\}$. Pour $n \geqslant N$, nous avons :

$$|X_n - f'(0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = f'(0)$.

2. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en $x_0 \in \mathring{I}$. Démontrer que :*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0 \\ k \to 0 \\ k > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - k)}{h + k} = f'(x_0)$$

Bien entendu, la technique est semblable au point ci-dessus.

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}-f'(x_0) &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-k)}{h+k}-\frac{(h+k)f'(x_0)}{h+k}\\ &= \frac{1}{h+k}\left(f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)\right)+\\ &\qquad \frac{1}{h+k}\left(f(x_0)-f(x_0-k)-kf'(x_0)\right)\end{aligned}$$

Regardons, pour commencer $\dfrac{1}{h+k}\left(f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)\right)$

$$\frac{1}{h+k}\left(f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)\right)=\frac{h}{h+k}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right)$$

Nous avons $0<\dfrac{h}{h+k}<1$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

De même :

$$\frac{1}{h+k}\left(f(x_0)-f(x_0-k)-kf'(x_0)\right)=\frac{k}{h+k}\left(\frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{-k}-f'(x_0)\right)$$

Nous avons aussi $0<\dfrac{k}{h+k}<1$ et $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x_0-k)-f(x_0)}{-k}=f'(x_0)$

En synthèse :

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}-f'(x_0)\right|\leqslant\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right|+\left|\frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{-k}-f'(x_0)\right|$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)=0$ et $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x_0-k)-f(x_0)}{-k}-f'(x_0)=0$, nous avons :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0\\ k\to 0\\ k>0}}\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}-f'(x_0)\right|=0$$

Et donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0\\ k\to 0\\ k>0}}\left(\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}\right)=f'(x_0)$

Exercice 5 :

Soit $I\subset\mathbb{R}$, un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$, une fonction dérivable à gauche et à droite de $x_0\in I$. Démontrer que f est continue en $x_0\in I$.

Nous allons démontrer que f est continue à droite et à gauche de x_0, c'est à dire que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}f(x_0+h)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}f(x_0+h)=f(x_0)$$

- ▷ f est dérivable à droite de x_0 ; il existe donc $\eta_1>0$ et une fonction ε_1 telle que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\varepsilon_1(h)=0$ tels que, pour tout $h\in\mathbb{R}$, si $0<h<\eta_1$ alors

  $$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'_d(x_0)+h\varepsilon_1(h)$$

  Il est donc clair que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}f(x_0+h)=f(x_0)$ et que f est continue à droite de x_0

- ▷ De même, f est dérivable à gauche de x_0 ; il existe donc $\eta_2>0$ et une fonction ε_2 telle que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\varepsilon_2(h)=0$ tels que, pour tout $h\in\mathbb{R}$, si $-\eta_2<h<0$ alors

  $$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'_g(x_0)+h\varepsilon_2(h)$$

  Donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}f(x_0+h)=f(x_0)$ et f est continue à gauche de x_0

f est donc continue en x_0

11.8.2 Fonctions dérivées

Exercice 7 :

Soit $f(x) = x^n(1+x^n)$; en calculant de 2 manières différentes la dérivée n-ième de f, donner une expression simple de $\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2$

Voilà un exercice qui, finalement, pourrait s'avérer marrant !!

1. Il nous est tout à fait possible d'écrire $f(x) = u(x)v(x)$ où $u(x) = x^n$ et $v(x) = 1 + x^n$
2. D'autre part, d'après le cours de L_0, :
   - $u^{(k)}(x) = \mathrm{A}_n^k x^{n-k}$
   - Et, pour $k \geqslant 1$, $v^{(k)}(x) = \mathrm{A}_n^k x^{n-k}$ et $v^{(0)}(x) = 1 + x^n$
3. Ainsi, en premier lieu, de $f(x) = x^n(1+x^n) = x^n + x^{2n}$, nous avons :

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{A}_n^n x^{n-n} + \mathrm{A}_{2n}^n x^{2n-n} = n! + \frac{(2n)!}{n!}x^n$$

4. <u>En utilisant la formule de Leibniz</u>, nous avons aussi :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) = &\ (uv)^{(n)}(x) \\ = &\ \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k v^{(k)}(x)\, u^{(n-k)}(x) \\ = &\ v^{(0)}(x)\, u^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{A}_n^k x^{n-k} \mathrm{A}_n^{n-k} x^k \\ = &\ (1+x^n)\mathrm{A}_n^n + x^n \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{A}_n^k \mathrm{A}_n^{n-k} \end{aligned}$$

Or, $(1+x^n)\mathrm{A}_n^n = n! + n!x^n$ et donc $f^{(n)}(x) = n! + x^n\left(n! + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{A}_n^k \mathrm{A}_n^{n-k}\right)$

   - Il faut, maintenant, évaluer $\mathrm{C}_n^k \mathrm{A}_n^k \mathrm{A}_n^{n-k}$. Or :

$$\mathrm{C}_n^k \mathrm{A}_n^k \mathrm{A}_n^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{n!}{k!} = n! \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n! \times \left(\mathrm{C}_n^k\right)^2$$

   - Donc $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{A}_n^k \mathrm{A}_n^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n! \times \left(\mathrm{C}_n^k\right)^2 = n! \sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2$
   - D'où $n! + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{A}_n^k \mathrm{A}_n^{n-k} = n! + n! \sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2 = n!\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2\right) = n!\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2\right)$
5. En identifiant les 2 calculs, nous obtenons :

$$n! + \frac{(2n)!}{n!}x^n = n! + x^n\left(n!\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2\right)\right)$$

C'est à dire $\frac{(2n)!}{n!} = n!\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2\right) \iff \frac{(2n)!}{n! \times n!} = \sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2 \iff \mathrm{C}_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2$

D'où le résultat : $\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{C}_n^k\right)^2 = \mathrm{C}_{2n}^n$

Exercice 8 :

Soit $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ *définie pour* $x \neq 0$.

Clairement, cette fonction n'est définie que sur $\mathbb{R}^*$; aussi nous l'étudierons, d'une part sur $]0;+\infty[$ et d'autre part sur $]-\infty;0[$

1. *Calculez la dérivée de* f.

   Nous nous plaçons donc sur $\mathbb{R}^*$
   En utilisant la dérivée des fonctions composées, nous avons, pour $x \neq 0$

$$\arctan' \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{x^2} \times \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{-1}{1+x^2}$$

   D'où, si $x \neq 0$, $f'(x) = 0$ et nous pouvons en déduire que f est une fonction constante sur chacun des intervalles composant son domaine de définition

2. *En déduire que si* $x > 0$, *alors* $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, *et que si* $x < 0$ *alors* $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

   - f est donc constante sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et donc constamment égale à $f(1)$.
     Or, $f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
   - De même, f est donc constante sur l'intervalle $]-\infty;0[$ et donc constamment égale à $f(-1)$.
     Or, $f(-1) = \arctan -1 + \arctan -1 = 2 \times \frac{-\pi}{4} = \frac{-\pi}{2}$

   D'où le résultat et le graphe de f

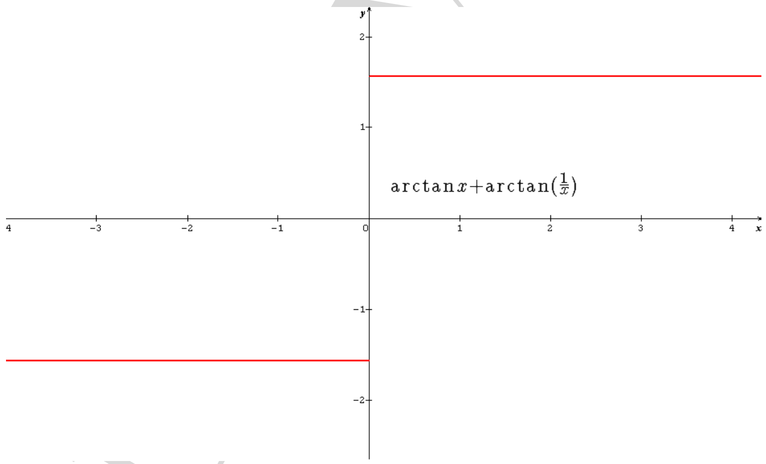

FIGURE 11.7 – Le graphe de la fonction $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

Exercice 9 :

Soit f, *la fonction définie par :* $f(x) = x + x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$

1. *Montrer que* f *est dérivable en* 0 *et donner* $f'(0)$

   Nous avons, et c'est facile à démontrer que $\frac{f(x)}{x} = 1 + x \sin \frac{1}{x^2}$. Comme $\left| x \sin \frac{1}{x^2} \right| \leqslant |x|$, $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0$ et donc $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, c'est à dire $f'(0)$ existe et $f'(0) = 1$

2. *Montrer que* f *n'est monotone sur aucun des voisinages de* 0

   L'objet de cette question est de démontrer que, pour tout $\alpha > 0$, f' ne garde pas de signe constant dans l'intervalle $]-\alpha;\alpha[$

Calculons $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 + 2x \sin \frac{1}{x^2} + x^2 \times \frac{-2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} = 1 + 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

Soit $\alpha > 0$

Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n > N$, alors $0 < x_n < \alpha$, c'est à dire que, pour tout $n > N$, nous avons $[-x_n; x_n] \subset]-\alpha; \alpha[$

Nous avons :

$$\sin \frac{1}{x_n^2} = \sin 2n\pi = 0 \text{ et } \cos \frac{1}{x_n^2} = \cos 2n\pi = 1$$

Et donc $f'(x_n) = 1 - 2\sqrt{2n\pi} < 0$ et $f'(-x_n) = 1 + 2\sqrt{2n\pi} > 0$

Ainsi, pour tout voisinage $]-\alpha; \alpha[$ de 0, la dérivée f' n'a pas de signe constant et ne peut y être monotone *(cf figure 11.8)*

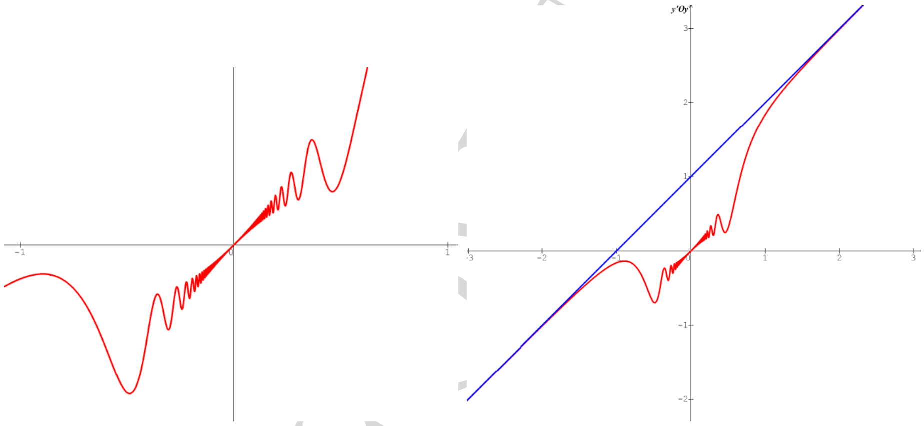

FIGURE 11.8 – Le graphe de la fonction $f(x) = x + x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ au voisinage de 0 et avec son comportement en $+\infty$

Exercice 10 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant les domaines de définition de f et de f'

Cet exercice porte sur la dérivée des fonctions circulaires réciproques, et la dérivée des fonctions composées.

1. $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

   Pour que f existe, il faut que $\dfrac{1-x}{1+x} \geqslant 0$ et $1 + x \neq 0$, c'est à dire $x \in]-1; +1]$

   Nous avons, ici, $f(x) = \arctan u(x)$ dont la dérivée est donnée par :

$$f'(x) = u'(x) \times [\arctan]' u(x) \Longleftrightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{1 + (u(x))^2}$$

   Il faut, maintenant, aller pas à pas

   ⋆ Nous avons : $u(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ et donc $u^2(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ et $1 + u^2(x) = 1 + \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2}{1+x}$ de telle sorte que $\dfrac{1}{1+(u(x))^2} = \dfrac{1}{\frac{2}{1+x}} = \dfrac{x+1}{2}$

- ⋆ Il nous faut, maintenant calculer $u'(x)$
  $u(x)$ est du type $u(x) = \sqrt{\alpha(x)} = (\alpha(x))^{\frac{1}{2}}$ et la dérivée est donc

$$u'(x) = \frac{\alpha'(x)}{2}(\alpha(x))^{\frac{-1}{2}} = \frac{\alpha'(x)}{2\sqrt{\alpha(x)}}$$

  Or, $\alpha'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2}$ et donc :

$$u'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \frac{-\sqrt{1+x}}{(x+1)^2\sqrt{1-x}}$$

- ⋆ Ainsi :

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{1+x}}{(x+1)^2\sqrt{1-x}} \times \frac{x+1}{2} = \frac{-\sqrt{1+x}}{2(x+1)\sqrt{1-x}}$$

  Evidemment, f' n'est définie que sur l'intervalle ouvert $]-1;+1[$

2. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

La fonction $\arctan x$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ en entier. Ici, pour que $\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ soit définie, il faut que $1-x^2>0$, c'est à dire $x \in]-1;+1[$

Supposons donc que $x \in]-1;+1[$

- ⋆ Nous sommes toujours devant une fonction du type $f(x) = \arctan u(x)$ dont la dérivée est donnée par : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$
- ⋆ Premier calcul : $\dfrac{1}{1+(u(x))^2} = \dfrac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}} = 1-x^2$
- ⋆ Calcul de $u'(x)$:

$$a = x \qquad a' = 1$$
$$b = \sqrt{1-x^2} \qquad b' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

  D'où $u'(x) = \dfrac{a'b-b'a}{b^2} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}+\dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

- ⋆ Et nous pouvons maintenant donner $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \times (1-x^2) = \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Le domaine de définition de f' est, lui aussi $]-1;+1[$

3. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) - 2\arctan x$

D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fraction $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ est toujours définie. D'autre part, le domaine de définition de la fonction $\arcsin x$ est $[-1;+1]$. Ainsi, pour que f soit définie, nous devons avoir : $-1 \leqslant \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant +1$. Or : $-1 \leqslant \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant +1 \Longleftrightarrow -1-x^2 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1+x^2$

Ce qui est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$

En rappelant que la fonction $\arctan x$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ en entier, le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}$

- Nous allons, tout d'abord, nous intéresser à $\arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

Cette expression est du type $\arcsin(u(x))$ dont la dérivée est donnée par $\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

Nous avons $u^2(x) = \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 = \dfrac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}$ et

$$1-u^2(x) = \frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$$

Et donc $\sqrt{1-u^2(x)} = \dfrac{2|x|}{1+x^2}$

- Calculons, maintenant $u'(x)$:

$$\begin{array}{ll} a = 1-x^2 & a' = -2x \\ b = 1+x^2 & b' = 2x \end{array}$$

D'où $u'(x) = \dfrac{a'b-b'a}{b^2} = \dfrac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$

- Et nous pouvons maintenant donner $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{2|x|} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{-2x}{|x|} \times \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{-2}{1+x^2}\left(\frac{x}{|x|}-1\right)$$

C'est à dire :

$$f'(x) = 0 \text{ si } x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{-4}{1+x^2} \text{ si } x \leqslant 0$$

4. $f(x) = \arccos\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

Pour que la fonction f soit définie, il faut que, d'abord, $1-x^2 \geqslant 0$, c'est à dire que $x \in [-1;+1]$
D'autre part, nous devons avoir $-1 \leqslant \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \leqslant +1$

$\star$ Avons nous $2x\sqrt{1-x^2} \leqslant +1$ pour tout $x \in [-1;+1]$?
$\longrightarrow$ Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors, nous avons $2x\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$ et :

$$0 \leqslant 2x\sqrt{1-x^2} \leqslant 1 \Longleftrightarrow 4x^2(1-x^2) \leqslant 1$$

Il faut donc étudier la fonction $\varphi(x) = -4x^4+4x^2-1$.
Nous avons $\varphi'(x) = -16x^3+8x = 8x(1-2x^2)$.
Ainsi, $\varphi'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\varphi'(x) \geqslant 0$ si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\varphi'(x) \leqslant 0$ si $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant +1$.
Comme $\varphi(0) = \varphi(1) = -1$ et $\varphi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$, pour tout $x \in [0;+1]$, nous avons $-1 \leqslant \varphi(x) \leqslant 0$, c'est à dire que, pour tout $x \in [0;+1]$, nous avons $2x\sqrt{1-x^2} \leqslant +1$

$\longrightarrow$ Si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, alors, $\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \leqslant 0 \leqslant +1$
Mais :$-1 \leqslant x \leqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant -x \leqslant +1$ et nous avons $2(-x)\sqrt{1-(-x)^2} = -2x\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$.
D'après l'étude précédente, nous avons : $0 \leqslant -2x\sqrt{1-x^2} \leqslant +1$, c'est à dire $-1 \leqslant 2x\sqrt{1-x^2} \leqslant 0$

Donc, pour tout $x \in [-1;+1]$, nous avons $-1 \leqslant \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \leqslant +1$, c'est à dire que f n'est définie que sur $[-1;+1]$

$\star$ Calculons la dérivée de $\arccos\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$
Cette expression est du type $\arccos(u(x))$ où $u(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$dont la dérivée est donnée par $\dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

$\star$ Calculons $1-u^2(x)$. Rien de plus simple :

$$1-u^2(x) = 1-\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 1-4x^2(1-x^2) = 4x^4-4x^2+1$$

$\star$ Calculons maintenant $u'(x)$

$$u'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + 2x \times \left(\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{2\left(1-x^2\right) - 4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-6x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\star$ D'où $f'(x) = \dfrac{2-6x^2}{\sqrt{1-x^2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{4x^4-4x^2+1}} = \dfrac{2-6x^2}{\sqrt{-4x^6+8x^4-5x^2+1}}$
On doit faire remarquer que f' n'existe que pour $x \in]-1;+1[$

Exercice 11 :

Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{x^5}{1+x}$

Nous commençons par la question la plus simple !!
Nous décomposons $f_1(x)$ en éléments simples

En utilisant la division des polynômes ou en remarquant que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$ nous avons

$$\frac{-(-x)^{n+1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-x)^k - \frac{1}{1+x}$$

Ainsi, pour $n=4$, nous avons $\dfrac{x^5}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dfrac{1}{1+x}$.

Nous avons donc $f_1(x) = P(x) - \varphi(x)$, et donc $f_1^{(n)}(x) = P^{(n)}(x) - \varphi^{(n)}(x)$

$\longrightarrow$ Calculons les dérivées successives de P :

- $\star$ $P'(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 1$
- $\star$ $P''(x) = 12x^2 - 6x + 1$
- $\star$ $P^{(3)}(x) = 24x - 6$
- $\star$ $P^{(4)}(x) = 24$
- $\star$ Et donc, pour $n \geqslant 5$, $P^{(n)}(x) = 0$

$\longrightarrow$ Calculons les dérivées successives de φ ; il nous est possible d'écrire $\varphi(x) = (1+x)^{-1}$

- $\star$ $\varphi'(x) = -(1+x)^{-2}$
- $\star$ $\varphi''(x) = 2(1+x)^{-3}$
- $\star$ $\varphi^{(3)}(x) = -6(1+x)^{-4}$
- $\star$ On « subodore » que $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$. Démontrons le par récurrence.
  - C'est vrai pour $n=0$, puisque $\varphi^{(0)}(x) = \varphi(x) = (1+x)^{-1} = (-1)^0 0!(1+x)^{-0-1}$
  - Supposons que jusqu'au rang n, nous ayions $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$
  - Démontrons le à l'ordre $n+1$
    $\varphi^{(n+1)}(x) = \left(\varphi^{(n)}\right)'(x) = -(n+1) \times (-1)^n n! \times (1+x)^{-n-2}$.
    Or, $(1+x)^{-n-2} = (1+x)^{-(n+1)-1}$ et nous avons donc $\varphi^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!(1+x)^{-(n+1)-1}$

  C'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$

En conclusion :

$$f_1'(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 1 + (1+x)^{-2} = 4x^3 - 3x^2 + x - 1 + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f_1''(x) = 12x^2 - 6x + 1 - 2(1+x)^{-3} = 12x^2 - 6x + 1 - \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f_1^{(3)}(x) = 24x - 6 + 6(1+x)^{-4} = 24x - 6 + \frac{6}{(1+x)^4}$$

$$f_1^{(4)}(x) = 24 - 24(1+x)^{-5} = 24 - \frac{24}{(1+x)^5}$$

$$\text{Et pour } n \geqslant 5 \quad f_1^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,(1+x)^{-n-1} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

2. $f_2(x) = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$

   Pourquoi ne pas utiliser la formule de Leibniz ?

   Posons alors $\varphi(x) = x^4$ et $\psi(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3} = (1+x)^{-3}$ et nous avons :

$$f_2^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \varphi^{(k)}(x)\,\psi^{(n-k)}(x)$$

   ⋆ Calcul des dérivées successives de φ

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{(0)}(x) = x^4 & \varphi'(x) = 4x^3 & \varphi^{(2)}(x) = 12x^2 \\ \varphi^{(3)}(x) = 24x & \varphi^{(4)}(x) = 24 & \varphi^{(n)}(x) = 0 \text{ pour tout } n \geqslant 5 \end{array}$$

   — Calcul des dérivées successives de ψ

   Commençons par quelques calculs :

$$\psi'(x) = -3\,(1+x)^{-4} \quad \psi''(x) = 12\,(1+x)^{-5} \quad \psi^{(3)}(x) = -60\,(1+x)^{-6}$$

   On peut penser que $\psi^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{(k+2)!}{2}(1+x)^{-(k+3)}$

   Nous allons le démontrer par récurrence :

   - **Nous le vérifions** pour $n = 0$

     $\psi^{(0)}(x) = \dfrac{(0+2)!}{2}(1+x)^{-(0+3)} = (1+x)^{-3} = \psi(x)$
   - **Supposons que c'est vrai jusque l'ordre** k
   - **Démontrons maintenant à l'ordre** $k+1$

$$\begin{aligned} \psi^{(k+1)}(x) = &\ \left(\psi^{(k+1)}\right)'(x) = (-1)^k \times -(k+3)\frac{(k+2)!}{2}(1+x)^{-(k+3)-1} \\ = &\ (-1)^{k+1}\frac{(k+3)!}{2}(1+x)^{-(k+4)} \\ = &\ (-1)^{k+1}\frac{((k+1)+2)!}{2}(1+x)^{-(k+1)+3} \end{aligned}$$

   La propriété est donc vraie à l'ordre $k+1$

   Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\psi^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{(k+2)!}{2}(1+x)^{-(k+3)}$

   D'où

$$\begin{aligned} f_2^{(n)}(x) = &\ \sum_{k=0}^{4} \mathrm{C}_n^k \varphi^{(k)}(x)\,\psi^{(n-k)}(x) \\ = &\ \sum_{k=0}^{4} \mathrm{C}_n^k \varphi^{(k)}(x)\,(-1)^{n-k}\frac{(n-k+2)!}{2}(1+x)^{-(n-k+3)} \\ = &\ \frac{n!}{2}\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^{n-k}(n-k+1)(n-k+2)}{k!}\varphi^{(k)}(x)\,(1+x)^{-(n-k+3)} \end{aligned}$$

3. $f_3(x) = \arctan x$

   Alors, là, cette fois-ci, c'est plutôt difficile et la question doit être rédigée en plusieurs étapes

   (a) Pour commencer, nous savons que la dérivée première de $f_3(x) = \arctan x$ est $f_3'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, et c'est à partir de cette expression que nous allons nous attaquer à la dérivée n-ième de f_3

   (b) Nous décomposons $\dfrac{1}{1+x^2}$ en éléments simples ; et là, nous arrivons dans l'ensemble des complexes. En effet :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right]$$

Si nous posons $\varphi(x) = \dfrac{1}{x-i}$ et $\psi(x) = \dfrac{1}{x+i}$, alors $f_3^{(n+1)}(x) = \dfrac{1}{2i}\left[\varphi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(x)\right]$

(c) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, il est facile de démontrer par récurrence que la dérivée n-ième de $u(x) = (x+\lambda)^{-1}$ est $u^{(n)}(x) = (-1)^n \times n!\,(x+\lambda)^{-n-1}$

Ainsi : $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,(x-i)^{-n-1}$ et $\psi^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,(x+i)^{-n-1}$

(d) Donc :

$$\frac{1}{2i}\left[\varphi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(x)\right] = \frac{(-1)^n n!}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right]$$

Et nous avons :

$$\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}} = \frac{(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}}$$

(e) Il nous faut, maintenant, simplifier $(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}$

- En utilisant le binôme de Newton : $(x+i)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k i^k x^{n+1-k}$
- De même, $(x-i)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k (-i)^k x^{n+1-k}$
- Et, en additionnant, $(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k \left(i^k - (-i)^k\right) x^{n+1-k}$
- La question est, maintenant de calculer $\left(i^k - (-i)^k\right)$
  - ▷ Pour commencer : $i^k - (-i)^k = i^k - (-1)^k i^k = i^k\left(1 - (-1)^k\right)$
  - ▷ Ainsi, si k est pair, $1 - (-1)^k = 0$ et donc $\left(i^k - (-i)^k\right) = 0$
  - ▷ Et, si k est impair, $(-1)^k = -1$, $1 - (-1)^k = 2$ et donc $\left(i^k - (-i)^k\right) = 2i^k$
- Mettons nous, maintenant à calculer $(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k \left(i^k - (-i)^k\right) x^{n+1-k}$

  En posant $[x]$ la partie entière de x, et en tenant compte des résultats ci-dessus liés à la parité de n, nous avons :

$$(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1} = 2i\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1} (-1)^k x^{n+1-2k-1} = 2i\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1} (-1)^k x^{n-2k}$$

(f) Et donc, en remontant :

$$f_3^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right] = \frac{(-1)^n n!}{2i} \times \frac{2i\displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1} (-1)^k x^{n-2k}}{(x^2+1)^{n+1}}$$

Et, pour terminer, $f_3^{(n+1)}(x) = \dfrac{(-1)^n n! \displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \mathrm{C}_{n+1}^{2k+1} (-1)^k x^{n-2k}}{(x^2+1)^{n+1}}$

Nous avons aussi, le joli résultat suivant, vrai pour $x > 0$:

$$\arctan^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^n} \times \sin\left(n \arctan\frac{1}{x}\right)$$

4. $f_4(x) = \ln\left(x^2+1\right) - \arctan x$

En posant $\omega(x) = \ln\left(x^2+1\right)$, nous avons $f_4(x) = \omega(x) - f_3(x)$, de telle sorte que $f_4^{(n)}(x) = \omega^{(n)}(x) - f_3^{(n)}(x)$.

Nous connaissons déjà $f_3^{(n)}(x)$; il ne nous reste plus qu'à calculer $\omega^{(n)}(x)$

- ⋆ Tout d'abord $\omega'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
- ⋆ Posons $u(x) = 2x$ et $v(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et alors $\omega^{(n+1)}(x) = (uv)^{(n)}(x)$ et on calcule $(uv)^{(n)}(x)$ grâce à la formule de Leibniz.

$$(uv)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(k)}(x)\, v^{(n-k)}(x)$$

Or, il est facile de voir que :

$$u^{(0)}(x) = u(x) = 2x \quad u^{(1)}(x) = u'(x) = 2 \quad \text{Et pour } k \geqslant 2\; u^{(k)}(x) = 0$$

Et il faut remarquer que $v^{(n)}(x) = f_3^{(n+1)}(x)$ Donc :

$$\omega^{(n+1)}(x) = (uv)^{(n)}(x) = u(x)\, v^{(n)}(x) + \mathrm{C}_n^1 u'(x)\, v^{(n-1)}(x) = 2x f_3^{(n+1)}(x) + 2n f_3^{(n)}(x)$$

Donc :

$$\begin{aligned} f_4^{(n)}(x) = & \;\omega^{(n)}(x) - f_3^{(n)}(x) \\ = & \;2x f_3^{(n)}(x) + 2(n-1)\, f_3^{(n-1)}(x) - f_3^{(n)}(x) \\ = & \;(2x-1)\, f_3^{(n)}(x) + 2(n-1)\, f_3^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

5. $f_5(x) = x^{n-1} \ln x$

Posons $\varphi(x) = x^{n-1}$ et $\psi(x) = \ln x$. Alors, en utilisant la formule de Leibniz, nous avons $f_5^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \psi^{(k)}(x)\, \varphi^{(n-k)}(x)$

Il faut donc connaître les dérivées successives de φ et ψ

- ⋆ Les dérivées successives de φ

  Comme $\varphi(x) = x^{n-1}$, d'après le cours de L_0, nous pouvons écrire que $\varphi^{(k)}(x) = \mathrm{A}_{n-1}^k x^{n-1-k}$. Nous pouvons donc remarquer que si $k \geqslant n$, alors $\varphi^{(k)}(x) = 0$ et que si $k = n-1$, alors $\varphi^{(n-1)}(x) = (n-1)!$
- ⋆ Les dérivées successives de ψ

  Comme $\psi^{(0)}(x) = \ln x$, que $\psi'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, $\psi^{(k+1)}(x)$ est la dérivée k-ième de $\dfrac{1}{x}$, et, d'après le cours de L_0, la dérivée k-ième de $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ est donnée par $(-1)^k \times k! \times \dfrac{1}{x^{k+1}}$.

  Donc, $\psi^{(k+1)}(x) = (-1)^k \times k! \times \dfrac{1}{x^{k+1}}$ et donc $\psi^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \times (k-1)! \times \dfrac{1}{x^k}$

D'où :

$$\begin{aligned}
f_5^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \psi^{(k)}(x)\,\varphi^{(n-k)}(x) \\
&= \mathrm{C}_n^0 \psi^{(0)}(x)\,\varphi^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \psi^{(k)}(x)\,\varphi^{(n-k)}(x) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^{k-1} \times (k-1)! \times \frac{1}{x^k} \times \mathrm{A}_{n-1}^{n-k} x^{n-1-n+k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^{k-1} \times (k-1)! \times \frac{1}{x^k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!} \times x^{k-1} \\
&= \frac{(n-1)!}{x} \times -\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k\right) \\
&= -\frac{(n-1)!}{x} \times \left(\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k\right) - 1\right) \\
&= -\frac{(n-1)!}{x} \times (0-1) \\
&= \frac{(n-1)!}{x}
\end{aligned}$$

Donc la dérivée n-ième de $f_5(x)$ est $f_5^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$

6. *$f_6(x) = x^2(1+x)^n$*

   Il faut donc calculer la dérivée n-ième de $f_6(x) = x^2(1+x)^n$. En posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = (1+x)^n$, par la formule de Leibniz, nous avons :

$$f_6^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(k)}(x)\,v^{(n-k)}(x)$$

- Il est facile de voir que $u(x) = 2x$, $u''(x) = 2$ et que si $n \geqslant 3$, alors $u^{(n)}(x) = 0$
- D'après le cours de L_0, nous avons : $v^{(n-k)}(x) = \mathrm{A}_n^{n-k}(1+x)^{n-(n-k)} = \dfrac{n!}{k!}(1+x)^k$

D'où :

$$\begin{aligned}
f_6^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{2} \mathrm{C}_n^k u^{(k)}(x)\,v^{(n-k)}(x) \\
&= \mathrm{C}_n^0 \times x^2 \times n! + \mathrm{C}_n^1 \times 2x \times n! \times (1+x) + \mathrm{C}_n^2 \times 2 \times \frac{n!}{2} \times (1+x)^2 \\
&= n!x^2 + 2nx \times n!(1+x) + \frac{n(n-1)}{2} \times n!(1+x)^2 \\
&= n!\left(x^2 + 2nx(1+x) + \frac{n(n-1)}{2}(1+x)^2\right)
\end{aligned}$$

Tous calculs faits, on trouve $f_6^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{2}\big((n+1)(n+2)x^2 + 2n(n+1)x + n(n-1)\big)$

Exercice 12 :

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

   Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g_n : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une autre fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $g_n(x) = x^{n-1} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g_n^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   Nous faisons cette démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$

- **Vérifions que c'est vrai pour** $n = 1$

  $g_1(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et la dérivée première de g_1 est donnée par $g_1'(x) = \dfrac{-1}{x^2} f'\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{(-1)^1}{x^{1+1}} f^{(1)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

  C'est donc vrai pour $n = 1$
- **Supposons qu'à l'ordre** n**, nous ayions** $g_n^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
- **Démontrons la propriété à l'ordre** $n+1$

  Tout d'abord, $g_{n+1}(x) = x^n f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x g_n(x)$ et en utilisant la formule de Leibniz, nous avons :

$$g_{n+1}^{(n+1)}(x) = \mathrm{C}_{n+1}^0 x g_n^{(n+1)}(x) + \mathrm{C}_{n+1}^1 g_n^{(n)}(x)$$

  Or, $g_n^{(n+1)}(x) = \left(g_n^{(n)}\right)'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{x^{n+2}} f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}} \times \dfrac{-1}{x^2} \times f^{(n+1)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

  Donc :

$$\begin{aligned} g_{n+1}^{(n+1)}(x) &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right) + (n+1)\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

  Ce que nous voulions

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $g_n^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $f_\alpha :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f_\alpha(x) = x^\alpha \ln x$.

   Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et une suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $f_\alpha^{(n)}(x) = x^{\alpha-n}(a_n \ln x + b_n)$

   Classiquement, nous allons utiliser la formule de Leibniz en posant $u(x) = x^\alpha$ et $v(x) = \ln x$. Ainsi :

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)$$

   Il faut donc calculer les dérivées successives de u et de v
   - **Calculons les dérivées successives de** $u(x) = x^\alpha$
     - ⋆ La dérivée première est donnée par $u'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, la dérivée seconde par $u''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$
     - ⋆ On subodore que, pour $k \geqslant 1$, la dérivée k-ième de u est donnée par $u^{(k)}(x) = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)\, x^{\alpha-k}$
     - ⋆ La démonstration se fait, facilement, par récurrence
   - **Calculons les dérivées successives de** $v(x) = \ln x$
     - ⋆ La dérivée première est donnée par $v'(x) = \dfrac{1}{x}$
     - ⋆ La dérivée k-ième de v est la dérivée $k-1$-ième de $\dfrac{1}{x}$.

       D'après le cours de L_0, nous avons $v^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)! \times \dfrac{1}{x^k}$

   D'où

$$\begin{aligned} f_\alpha^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) \\ &= x^\alpha (-1)^{n-1}(n-1)! \times \frac{1}{x^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{C}_n^k \left(\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)\right) x^{\alpha-k} \times (-1)^{n-k-1}(n-k-1)! \times \frac{1}{x^{n-k}} \\ &\quad + \left(\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - j)\right) x^{\alpha-n} \ln x \\ &= x^{\alpha-n}\left(\left(\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - j)\right)\ln x + (-1)^{n-1}(n-1)! + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1} n!}{k!(n-k)}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)\right)\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $a_n = \left(\prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j)\right)$ et $b_n = (-1)^{n-1}(n-1)! + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1} n!}{k!(n-k)} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)\right)$

OUF !!

Exercice 13 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I \subset \mathbb{R}$. On considère une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et s'annulant en $n+1$ points de I tous distincts

1. *Démontrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins une fois sur I*

   Il suffit d'utiliser plusieurs fois le théorème de Rolle.
   Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ les $n+1$ points de I tels que $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_k) = \cdots = f(x_n) = 0$.
   f étant de classe $\mathcal{C}^n$ sur I est en particulier dérivable sur I. Ainsi, d'après le théorème de Rolle, pour $k = 0, \ldots, n-1$, il existe un point $x_k^1 \in]x_k; x_{k+1}[$ tel que $f'(x_k^1) = 0$
   Ainsi f' s'annule-t-elle en n points $x_k^1 \in I$ où $k = 0, \ldots, n-1$
   En poursuivant, la dérivée p-ième de f notée $f^{(p)}$ s'annule en $n-p+1$ points $x_k^p \in I$ où $k = 0, \ldots, n-p$
   Et donc, pour $p = n$, la dérivée n-ième de f notée $f^{(n)}$ s'annule en 1 point $x_0^n \in I$
2. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que la dérivée $n-1$-ième de $\varphi = f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I*

   Nous allons utiliser une fonction auxiliaire ψ définie, pour tout $x \in I$ par $\psi(x) = f(x) e^{\alpha x}$.
   Comme f est de classe $\mathcal{C}^n$ et $e^{\alpha x}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, ψ est de classe $\mathcal{C}^n$
   f s'annulant en $n+1$ points et comme, pour tout $x \in I$, $e^{\alpha x} > 0$, ψ s'annule aussi en $n+1$ points *(les mêmes que f)*
   Donc, la dérivée de ψ, notée ψ', d'après la question précédente, s'annule en n points.
   Or, $\psi'(x) = f'(x) e^{\alpha x} + \alpha e^{\alpha x} f(x) = (f'(x) + \alpha f(x)) e^{\alpha x} = \psi(x) e^{\alpha x}$. Comme $e^{\alpha x} > 0$, φ s'annule aussi en n points.
   φ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ qui s'annule en n points. D'après la question 1, la dérivée $n-1$-ième de $\varphi = f' + \alpha f$ s'annule donc au moins une fois sur I.

Exercice 14 :

Première généralisation du théorème de Rolle
Soit $a \geqslant 0$ et $f : [a; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a; +\infty[$, dérivable sur $]a; +\infty[$ et telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a; +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$

L'idée de la résolution est de retomber sur le théorème de Rolle tel qu'il a été énoncé dans le cours. Pour cela, nous allons utiliser une fonction auxiliaire

1. Où nous construisons une fonction auxiliaire h
   Soit h la fonction qui va de $[0; 1[$ dans $[a; +\infty[$ et qui est définie par :

   $$\begin{cases} [0;1[& \longrightarrow & [a; +\infty[\\ x & \longmapsto & h(x) = \dfrac{x+a}{-x+1} \end{cases}$$

   Nous avons $h(0) = a$ et $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} h(x) = +\infty$

   D'autre part, h est continue sur $[0; 1[$ dérivable sur $[0; 1[$ et de dérivée $h'(x) = \dfrac{1+a}{(-x+1)^2}$.

   h est donc continue et croissante sur $[0; 1[$ et y est donc bijective de $[0; 1[$ sur $[a; +\infty[$
2. Soit $g = f \circ h$
   D'après l'étude précédente, g est bien définie sur $[0; 1[$ et nous avons $g(0) = f \circ h(0) = f(a)$.
   D'autre part, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$

En posant $g(1) = f(a)$, nous prolongeons g par continuité et donc la fonction :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \left\{ \begin{array}{l} f \circ h(x) \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ f(a) \text{ si } x = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est une fonction continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$, telle que $g(0) = g(1)$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc $d \in]0;1[$ tel que $g'(d) = 0$

3. Pour $x \in]0;1[$, nous avons $g'(x) = f' \circ h(x) \times h'(x)$. Or, pour tout $x \in]0;1[$, nous avons $h'(x) > 0$ et donc
$$g'(d) = 0 \Longleftrightarrow f' \circ h(d) = 0$$
En posant $c = h(d)$, nous avons $c \in]a;+\infty[$ et répondu à la question

Exercice 15 :

Seconde généralisation du théorème de Rolle
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$

- ▷ Soit $A > 0$.
  Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, il existe $B > 0$ tel que si $|x| > B$, alors $f(x) \geqslant A$
- ▷ Restreignons f à l'intervalle fermé borné $[-B;+B]$.
  La restriction de f à $[-B;+B]$ y est continue et est bonc bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $c \in [-B;+B]$ tel que $f(c) = \inf\limits_{x\in[-B;+B]} f(x)$.
  $f(c)$ est donc un extremum de f sur $[-B;+B]$ et f y étant dérivable, alors $f'(c) = 0$
  Ce que nous voulions

Exercice 16 :

Troisième généralisation du théorème de Rolle
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k$ où k est fini
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$

Nous appellons tan la fonction tangente définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$

1. Soit $g = f \circ \tan$

   g est bien définie continue et dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$.

   Nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\x>-\frac{\pi}{2}}} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k$

   De même, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$

   En posant $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = k$, nous prolongeons g par continuité et donc la fonction :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g : \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \left\{ \begin{array}{l} f \circ \tan(x) \text{ si } x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[\\ k \text{ si } x = -\dfrac{\pi}{2} \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

   est une fonction continue sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$, telle que $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = k$.
   D'après le théorème de Rolle, il existe donc $d \in \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(d) = 0$

2. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$, nous avons $g'(x) = f' \circ \tan(x) \times \left(1+\tan^2 x\right)$. Or, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$, nous avons $\left(1+\tan^2 x\right) > 0$ et donc

$$g'(d) = 0 \Longleftrightarrow f' \circ \tan(d) = 0$$

En posant $c = \tan(d)$, nous avons $c \in \mathbb{R}$ et répondu à la question

Exercice 17 :

1. *Soient f et g 2 fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$ et dérivables sur l'intervalle $]a;b[$. Soit $x_0 \in [a;b]$; on suppose que g' ne s'annule pas sur $]a;b[$ et que $f(x_0) = g(x_0) = 0$*

   Montrer que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

   Nous allons utiliser le théorème des accroissements finis généralisé aux fonctions f et g

   Soit $x \in]a;b[$ avec $x \neq x_0$. Pour simplifier, nous supposons $a < x < x_0$; le problème est semblable si $x_0 < x < b$

   Il existe donc $c_x \in]x;x_0[$ tel que $(f(x) - f(x_0))\, g'(c_x) = (g(x) - g(x_0))\, f'(c_x)$. Or :

   $$(f(x) - f(x_0))\, g'(c_x) = (g(x) - g(x_0))\, f'(c_x) \Longleftrightarrow f(x)\, g'(c_x) = g(x)\, f'(c_x) \Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

   Par encadrement, nous avons $\lim\limits_{x\to x_0} c_x = x_0$ et donc, par composition :

   $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = l$$

   Remarque :
   La règle de L'Hospital est un outil à ne pas négliger pour lever des indéterminations

2. *Applications*
   Donner :

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

   Il y a bien, ici, une indétermination.

   - ⋆ Posons $f(x) = \ln(1+x) - x$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{1-1-x}{1+x} = \dfrac{-x}{1+x}$
   - ⋆ Posons maintenant $g(x) = x^2$, alors $g'(x) = 2x$
   - ⋆ Donc $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{-x}{2x(1+x)} = \dfrac{-1}{2(1+x)}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{2(1+x)} = -\dfrac{1}{2}$

   D'après la règle de L'Hospital, nous avons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$

   Nous sommes toujours, ici, devant une indétermination.

   - ⋆ Posons $f(x) = x - \sin x$, alors $f'(x) = 1 - \cos x$
   - ⋆ Posons maintenant $g(x) = x^3$, alors $g'(x) = 3x^2$
   - ⋆ Donc $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{1-\cos x}{3x^2}$ et nous sommes toujours devant une indétermination.
   - ⋆ Continuons : $f''(x) = \sin x$ et $g''(x) = 6x$; $\dfrac{f''(x)}{g''(x)} = \dfrac{\sin x}{6x}$.
   - ⋆ Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, nous avons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{6x} = \dfrac{1}{6}$

   D'après la règle de L'Hospital, nous avons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{6}$

Exercice 18 :

Démontrer les inégalités suivantes :

1. *Si* $0 < x < 1$, *alors* $\arcsin x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

   On considère la fonction $\arcsin t$ laquelle est définie sur $[-1;+1]$, dérivable sur $]-1;+1[$ et de dérivée $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

   Soit $0 < x < 1$

   Appliquons le théorème des accroissements finis à $\arcsin t$ sur l'intervalle $[0;x]$.

   Il existe donc $c \in]0;x[$ tel que $\dfrac{\arcsin x - \arcsin 0}{x-0} = \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}} \iff dfrac{\arcsin x}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}}$

   Comme $0 < c < x$, nous avons $\sqrt{1-c^2} > \sqrt{1-x^2} > 0 \iff \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Donc, si $0 < x < 1$, alors $dfrac{\arcsin x}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \iff \arcsin x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

   Ce que nous voulions

   Remarque

   On démontrerait de même que si $-1 < x < 0$ alors $\arcsin x > \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

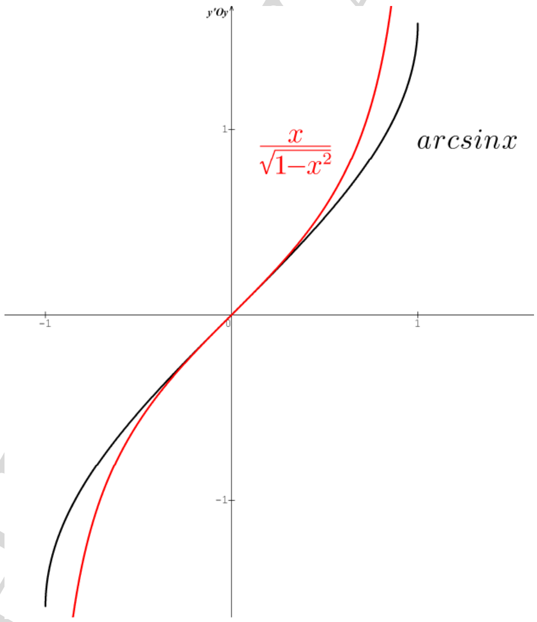

FIGURE 11.9 – Encadrement de la fonction $f(x) = \arcsin x$ par la fonction $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

2. *Si* $x > 0$, *alors* $\arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$

   Considérons la fonction $\arctan t$ laquelle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\dfrac{1}{1+t^2}$.

   Soit $x > 0$

   Appliquons le théorème des accroissements finis à $\arctan t$ sur l'intervalle $[0;x]$.

   Il existe donc $c \in]0;x[$ tel que $\dfrac{\arctan x - \arctan 0}{x-0} = \dfrac{1}{1+c^2} \iff dfrac{\arctan x}{x} = \dfrac{1}{1+c^2}$

   Comme $0 < c < x$, nous avons $\dfrac{1}{1+c^2} > \dfrac{1}{1+x^2} > 0$.

Donc, si $x > 0$, alors $dfrac\arctan x x > \dfrac{1}{1+x^2} \Longleftrightarrow \arctan x > \dfrac{x}{1+x^2}$

Ce que nous voulions

Remarque

On démontrerait de même que si $x < 0$ alors $\arctan x < \dfrac{x}{1+x^2}$

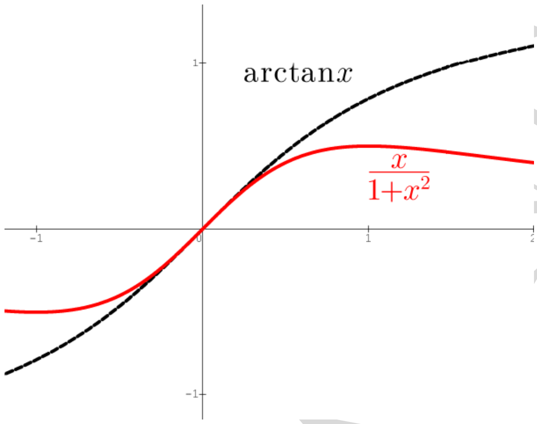

FIGURE 11.10 – Encadrement de la fonction $f(x) = \arctan x$ par la fonction $\dfrac{x}{1+x^2}$

Exercice 19 :

Théorème de Darboux

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur l'intervalle $[a;b]$. On suppose $f'(a) < f'(b)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Démontrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \lambda$

f étant dérivable sur l'intervalle $[a;b]$ y est continue.
Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) < \lambda < f'(b)$

- ⋆ Construisons la fonction auxiliaire $g(t) = f(t) - \lambda t$. Par construction, g est continue sur l'intervalle $[a;b]$; elle y est donc bornée et atteint ses bornes.
  Soit $c \in [a;b]$ tel que $g(c) = \inf\limits_{t\in[a;b]} g(t)$
- ⋆ Comme $g(c)$ est un extremum, nous avons $g'(c) = 0$. Or, $g'(t) = f'(t) - \lambda$ et donc :

$$g'(c) = 0 \Longleftrightarrow f'(c) = \lambda$$

- ⋆ Nous avons $c \neq a$, c'est à dire $c > a$
  Considérons la fonction $\varphi(t) = \dfrac{g(t) - g(a)}{t - a}$. φ est définie et continue sur $]a;b]$[4]. Il est possible de prolonger φ par continuité en a en posant $\varphi(a) = \lim\limits_{\substack{t\to a\\ t>a}} \varphi(t)$. Or :

$$\varphi(a) = \lim_{\substack{t\to a\\ t>a}} \varphi(t) = \lim_{\substack{t\to a\\ t>a}} \frac{g(t) - g(a)}{t - a} = g'(a) = f'(a) - \lambda$$

  Comme $f'(a) < \lambda$, $\varphi(a) = f'(a) - \lambda < 0$.
  φ étant continue sur l'intervalle $[a;b]$ et comme $\varphi(a) = f'(a) - \lambda < 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $a < t < a + \eta$ alors $\varphi(t) < 0$. Comme $t - a > 0$ et $\varphi(t) < 0$, nous avons $g(t) - g(a) < 0$, c'est à dire $g(t) < g(a)$ et donc $g(c) < g(a)$ et donc $c \neq a$
- ⋆ Nous avons $c \neq b$ et donc $c < b$

4. Elle y est même dérivable

Considérons, cette fois ci la fonction $\psi(t) = \dfrac{g(t) - g(b)}{t - b}$. ψ est définie et continue sur $[a; b[$. Il est possible de prolonger ψ par continuité en b en posant $\psi(b) = \lim\limits_{\substack{t \to b \\ t > b}} \psi(t)$. Or :

$$\psi(b) = \lim_{\substack{t \to b \\ t < b}} \psi(t) = \lim_{\substack{t \to b \\ t < b}} \frac{g(t) - g(b)}{t - b} = g'(b) = f'(b) - \lambda$$

Comme $f'(b) > \lambda$, $\psi(b) = f'(b) - \lambda > 0$.
ψ étant continue sur l'intervalle $[a; b]$ et comme $\psi(b) = f'(b) - \lambda > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $b - \eta < t < b$ alors $\psi(t) > 0$. Comme $t - b < 0$ et $\varphi(t) > 0$, nous avons $g(t) - g(b) < 0$, c'est à dire $g(t) < g(b)$ et donc $g(c) < g(b)$ et donc $c \neq b$

Il existe donc bien $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \lambda$

Compléments

1. La résolution eût été semblable si nous avions supposé $f'(a) > f'(b)$
2. Nous pouvons énoncer un résultat complémentaire qui est la conséquence du théorème de Darboux :

   Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur l'intervalle $[a; b]$ telle que$f'(a) \times f'(b) < 0$. Il existe alors $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$
3. Le théorème de Darboux démontre qu'une fonction dérivée vérifie la propriété de la valeur intermédiaire et qu'ainsi, toutes les fonctions ne peuvent pas être des dérivées.

Exercice 20 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que la fonction dérivée f' est strictement décroissante et positive sur $\mathbb{R}^+$

1. *Démontrer que pour tout $x \geqslant 1$, nous avons :*

$$f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$$

Soit $x \geqslant 1$.

⋆ Appliquons le théorème des accroissements finis à f entre x et $x + 1$

Il existe donc $c \in]x; x+1[$ tel que $\dfrac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f'(c) \Longleftrightarrow f(x+1) - f(x) = f'(c)$

Comme $x < c < x + 1$, que f' est strictement décroissante, nous avons $f'(c) < f'(x)$. D'où nous obtenons la première inégalité : $f(x+1) - f(x) < f'(x)$

⋆ Appliquons maintenant le théorème des accroissements finis à f entre $x - 1$ et x

Il existe donc $c \in]x - 1; x[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} = f'(c) \Longleftrightarrow f(x) - f(x-1) = f'(c)$

Comme $x - 1 < c < x$, que f' est strictement décroissante, nous avons $f'(c) > f'(x)$. D'où nous obtenons la seconde inégalité : $f'(x) < f(x) - f(x)$

En synthèse, nous avons donc, pour $x \geqslant 1$, $f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$

2. *En déduire que si f admet une limite finie A en $+\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ où A est finie, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$*

Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x+1) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x-1) = A$. Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - f(x-1)) = 0$.

Donc, par encadrement, nous déduisons $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

3. *On définit la suite $(S_p)_{p \geqslant 1}$ par : $S_p = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(p) = \sum\limits_{k=1}^{p} f'(k)$ Démontrer que la suite $(S_p)_{p \geqslant 1}$ est convergente si et seulement si f admet une limite finie A lorsque A tend vers $+\infty$*

- ⋆ D'après la question 1, nous avons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $f(k+1)-f(k) < f'(k) < f(k)-f(k-1)$ et donc pour $k = 1, \dots, p$

$$\begin{array}{rcl} f(2)-f(1) < & f'(1) & < f(1)-f(0) \\ f(3)-f(2) < & f'(2) & < f(2)-f(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(k+1)-f(k) < & f'(k) & < f(k)-f(k-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f(p)-f(p-1) < & f'(p-1) & < f(p-1)-f(p-2) \\ f(p+1)-f(p) < & f'(p) & < f(p)-f(p-1) \end{array}$$

  En additionnant, nous avons alors :

$$f(p+1)-f(1) < \sum_{k=1}^{p} f'(k) < f(p)-f(0) \Longleftrightarrow f(p+1)-f(1) < S_p < f(p)-f(0)$$

- ⋆ Il faut remarquer que, puisque, pour tout $x \geqslant 0$, nous avons $f'(x) \geqslant 0$ la suite $(S_p)_{p\geqslant 1}$ est une <u>suite croissante</u>. D'autre part, comme $f'(x) \geqslant 0$, f est une fonction croissante
- ⋆ <u>Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ où A est fini</u>
  Alors, $\lim\limits_{p\to+\infty} f(p) = A$ et donc $\lim\limits_{p\to+\infty} (f(p)-f(0)) = A - f(0)$, et de la croissance de f, nous tirons que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $(f(p)-f(0)) \leqslant A - f(0)$ et donc, $S_p \leqslant A - f(0)$
  La suite $(S_p)_{p\geqslant 1}$ est donc une suite croissante et majorée, donc convergente.
- ⋆ <u>Supposons que f n'admette pas de limite finie en $+\infty$</u>
  De la positivité et de la croissante de f, nous déduisons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et donc, $\lim\limits_{p\to+\infty} (f(p+1)-f(1)) = +\infty$.
  Comme $f(p+1)-f(1) < S_p$, nous déduisons que $\lim\limits_{p\to+\infty} S_p = +\infty$; ainsi, la suite $(S_p)_{p\geqslant 1}$ est divergente

Ainsi, la suite $(S_p)_{p\geqslant 1}$ est convergente si et seulement si f admet une limite fonie A lorsque A tend vers $+\infty$

4. *Applications : Quelle est la nature des suites $(a_p)_{p\geqslant 1}$ et $(b_p)_{p\geqslant 1}$ suivantes :*

(a) $a_p = \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{1+k^2}$

En posant $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, nous avons $a_p = \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{1+k^2} = \sum\limits_{k=1}^{p} f'(k)$.

f' est bien positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et, d'autre part, $f(x) = \arctan x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = +\dfrac{\pi}{2}$, c'est à dire que la limite de f est finie.

Donc, la suite $(a_p)_{p\geqslant 1}$ est convergente

(b) $b_p = \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{\sqrt{1+k}}$

En posant $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, nous avons $b_p = \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{\sqrt{1+k}} = \sum\limits_{k=1}^{p} f'(k)$.

f' est bien positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et, d'autre part, $f(x) = 2\sqrt{1+x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{1+x} = +\infty$, c'est à dire que la limite de f est infinie.

Donc, la suite $(b_p)_{p\geqslant 1}$ est divergente et diverge vers $+\infty$

(c) $b_p = \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k}$

En posant $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, nous avons $c_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{p} f'(k)$.

f' est bien positive et décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$ et, d'autre part, $f(x) = \ln x$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, c'est à dire que la limite de f est infinie.

Donc, la suite $(c_p)_{p \geqslant 1}$ est divergente et diverge vers $+\infty$

5. *Nous définissons les suites $(\sigma_p)_{p \geqslant 1}$ et $(\sigma'_p)_{p \geqslant 1}$ par :*

$$\sigma_p = S_p - f(p+1) \quad \text{et} \quad \sigma'_p = S_p - f(p)$$

(a) *Démontrer que les suites $(\sigma_p)_{p \geqslant 1}$ et $(\sigma'_p)_{p \geqslant 1}$ sont monotones*

⋆ Nous allons démontrer que la suite $(\sigma_p)_{p \geqslant 1}$ est croissante

Il suffit de calculer $\sigma_{p+1} - \sigma_p$:

$$\begin{aligned} \sigma_{p+1} - \sigma_p = & \ (S_{p+1} - f(p+2)) - (S_p - f(p+1)) \\ = & \ (S_{p+1} - S_p) - (f(p+2) - f(p+1)) \\ = & \ f'(p+1) - (f(p+2) - f(p+1)) \end{aligned}$$

Pour tout $x \geqslant 1$, nous avons $f(x+1) - f(x) < f'(x) \Longleftrightarrow f'(x) - (f(x+1) - f(x)) > 0$
Donc, pour tout p entier tel que $p \geqslant 1$, nous avons $f'(p+1) - (f(p+2) - f(p+1)) > 0$, c'est à dire $\sigma_{p+1} - \sigma_p > 0$
La suite $(\sigma_p)_{p \geqslant 1}$ est donc strictement croissante

⋆ Nous allons démontrer que la suite $(\sigma'_p)_{p \geqslant 1}$ est décroissante

Nous allons calculer $\sigma'_{p+1} - \sigma'_p$:

$$\begin{aligned} \sigma'_{p+1} - \sigma'_p = & \ (S_{p+1} - f(p+1)) - (S_p - f(p)) \\ = & \ (S_{p+1} - S_p) - (f(p+1) - f(p)) \\ = & \ f'(p+1) - (f(p+1) - f(p)) \end{aligned}$$

Pour tout $x \geqslant 1$, nous avons $f'(x) < f(x) - f(x-1) \Longleftrightarrow f'(x) - (f(x) + f(x-1)) < 0$
Donc, pour tout p entier tel que $p \geqslant 1$, nous avons $f'(p+1) - (f(p+1) - f(p)) < 0$, c'est à dire $\sigma'_{p+1} - \sigma'_p > 0$
La suite $(\sigma'_p)_{p \geqslant 1}$ est donc strictement décroissante

(b) *Démontrer que, pour tout $p \geqslant 1$, $\sigma_p < \sigma'_p$*

Il faut donc faire la différence $\sigma_p - \sigma'_p$; or

$$\sigma_p - \sigma'_p = (S_p - f(p+1)) - (S_p - f(p)) = f(p) - f(p+1)$$

Or, si f' est positive, f est croissante et donc $f(p) - f(p+1) < 0$, c'est à dire $\sigma_p < \sigma'_p$

(c) *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f' pour que les suites $(\sigma_p)_{p \geqslant 1}$ et $(\sigma'_p)_{p \geqslant 1}$ soient adjacentes*

Il faut donc trouver une condition nécessaire et suffisante sur f' pour que $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} (\sigma'_p - \sigma_p) = 0$.
Or, $\sigma'_p - \sigma_p = f(p+1) - f(p)$, et d'après l'inégalité prouvée dans la première question, et de la croissance de f, nous avons :

$$0 < f(p+1) - f(p) < f'(p)$$

⋆ Ainsi, si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, alors $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} f'(p) = 0$ et $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} (f(p+1) - f(p)) = 0$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} (\sigma'_p - \sigma_p) = 0$ et les suites $(\sigma_p)_{p \geqslant 1}$ et $(\sigma'_p)_{p \geqslant 1}$ sont adjacentes

⋆ Réciproquement, supposons $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\sigma'_p-\sigma_p\right)=0$.
De l'inégalité $0<f'(p)<f(p)-f(p-1)$, c'est à dire $0<f'(p)<\sigma'_{p-1}-\sigma_{p-1}$, nous déduisons que $\lim\limits_{\substack{p\to+\infty\\ p\in\mathbb{N}}} f'(p)=0$.
Il faut montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\in\mathbb{R}}} f'(x)=0$.
Soit $\varepsilon>0$
Comme la suite $(f'(p))_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet pour limite 0, il existe $N_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, nous ayions l'implication $(p>N_\varepsilon)\Longrightarrow(0<f'(p)<\varepsilon)$
Par hypothèses, la fonction f' est décroissante et donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ tels que si $x>N_\varepsilon+1$, alors, $0<f'(x)<f'(N_\varepsilon+1)<\varepsilon$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

La condition nécessaire et siffisante pour que les suites $(\sigma_p)_{p\geqslant1}$ et $\left(\sigma'_p\right)_{p\geqslant1}$ soient adjacentes est que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

Exercice 21 :

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $f:[a;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$, définie, continue et dérivable sur $[a;+\infty[$.

1. *On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$*

   Soit $A>0$
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$, il existe $K_A>0$ tel que si $x>K_A$, alors $f'(x)>A$
   Soit$x>K_A$ et appliquons le théorème des accroissements finis entre K_A et x. Il existe donc $c\in\,]K_A;x[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(K_A)}{x-K_A}=f'(c)$.
   Comme $c>K_A$, nous avons $\dfrac{f(x)-f(K_A)}{x-K_A}>A$, c'est à dire $f(x)>A(x-K_A)+f(K_A)$.
   D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. *On suppose, cette fois ci, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$*

   Soit $\varepsilon>0$.
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, il existe $K_\varepsilon>0$ tel que si $x>K_\varepsilon$, alors $|f'(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$
   Soit $x>K_\varepsilon$ et appliquons le théorème des accroissements finis entre K_ε et x ; il existe donc $c\in\,]K_\varepsilon;x[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(K_\varepsilon)}{x-K_\varepsilon}=f'(c)$, ce qui est équivalent, pour $x>K_\varepsilon$ à

   $$f(x)=f(K_\varepsilon)+(x-K_\varepsilon)f'(c)$$

   Alors, pour $x>K_\varepsilon$:

   $$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x}\right| &= \left|\frac{f(K_\varepsilon)+(x-K_\varepsilon)f'(c)}{x}\right|\\ &\leqslant \left|\frac{f(K_\varepsilon)}{x}\right|+\frac{(x-K_\varepsilon)}{x}|f'(c)|\\ &\leqslant \left|\frac{f(K_\varepsilon)}{x}\right|+|f'(c)|\ \text{ car } 0<\frac{(x-K_\varepsilon)}{x}<1\end{aligned}$$

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{f(K_\varepsilon)}{x}\right|=0$, il existe $K^1_\varepsilon>0$ tel que si $x>K^1_\varepsilon$ alors $\left|\dfrac{f(K_\varepsilon)}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Ainsi, si $M=\sup\left(K_\varepsilon,K^1_\varepsilon\right)$, alors, si $x>M$, nous avons $x>K_\varepsilon$ et $x>K^1_\varepsilon$ et donc $\left|\dfrac{f(K_\varepsilon)}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ et $|f'(c)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$
   D'où, si $x>M$, alors $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

3. *On suppose que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = l$ *où* $l > 0$. *Démontrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$

Soit $\varepsilon > 0$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = l$, il existe $A_\varepsilon > 0$, tel que si $x > A_\varepsilon$, alors $|f'(x) - l| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Nous appliquons le théorème des accroissements finis entre A_ε et x. Il existe $c \in]A_\varepsilon; x[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(A_\varepsilon)}{x - A_\varepsilon} = f'(c) \iff f(x) = f(A_\varepsilon) + (x - A_\varepsilon) f'(c)$$

Maintenant, pour $x > A_\varepsilon$

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x} - l\right| &= \left|\frac{f(x) - lx}{x}\right| \\ &= \left|\frac{f(A_\varepsilon) + (x - A_\varepsilon) f'(c) - lx}{x}\right| \\ &= \left|\frac{f(A_\varepsilon) + f'(c)x - f'(c)A_\varepsilon - lx}{x}\right| \\ &= \left|\frac{f(A_\varepsilon) + f'(c)x - lx - f'(c)A_\varepsilon}{x}\right| \\ &= \left|\frac{f(A_\varepsilon)}{x} + f'(c) - l - \frac{f'(c)A_\varepsilon}{x}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{f(A_\varepsilon)}{x}\right| + |f'(c) - l| + \frac{A_\varepsilon}{x}|f'(c)|\end{aligned}$$

Alors :

- ⋆ Comme $c > A_\varepsilon$, alors $|f'(c) - l| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
- ⋆ Si $x > \dfrac{3|f(A_\varepsilon)|}{\varepsilon}$ alors $\left|\dfrac{f(A_\varepsilon)}{x}\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
- ⋆ Et, pour terminer, comme $c > A_\varepsilon$, alors $|f'(c) - l| < \dfrac{\varepsilon}{3} \iff l - \dfrac{\varepsilon}{3} < f'(c) < l + \dfrac{\varepsilon}{3}$, c'est à dire

$$|f'(c)| < \sup\left(\left|l - \frac{\varepsilon}{3}\right|, \left|l + \frac{\varepsilon}{3}\right|\right)$$

Et donc :

$$\frac{A_\varepsilon}{x}|f'(c)| < \frac{A_\varepsilon}{x}\sup\left(\left|l - \frac{\varepsilon}{3}\right|, \left|l + \frac{\varepsilon}{3}\right|\right)$$

Ce qui nous montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{A_\varepsilon}{x}|f'(c)| = 0$

Il existe donc $B > 0$ tel que si $x > B$ alors $0 < \dfrac{A_\varepsilon}{x}|f'(c)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

Soit $M = \sup\left(B, A_\varepsilon, \dfrac{3|f(A_\varepsilon)|}{\varepsilon}\right)$. Alors, si $x > M$, nous avons $|f'(c) - l| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $\left|\dfrac{f(A_\varepsilon)}{x}\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ et $\dfrac{A_\varepsilon}{x}|f'(c)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Ce qui termine de montrer que, si $x > M$, alors $\left|\dfrac{f(x)}{x} - l\right| < \varepsilon$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$

Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Nous venons de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$, c'est à dire, comme $l > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{lx} = 1$.

Il existe donc $B > 0$ tel que si $x > B$, alors $\left|\dfrac{f(x)}{lx} - 1\right| < \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{1}{2} < \dfrac{f(x)}{lx} < \dfrac{3}{2}$.

Comme $l > 0$, si $x > B$, alors $\dfrac{lx}{2} < f(x)$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, par minoration

11.8.3 Formule de Taylor

Exercice 22 :

$\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, et on appelle $E_k(X) = (X-a)^k$
   Montrer que la famille $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Nous pouvons donc écrire tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ sous la forme

$$P(X) = P_0E_0 + P_1E_1 + P_2E_2 + \cdots + P_nE_n$$

En calculant les dérivées successives de P, montrer que pour tout $k = 0, \dots, n$, $P_k = \dfrac{P^{(k))}(a)}{k\,!}$

Exercice 23 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. On considère $f : [a-h; a+h] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a-h; a+h]$ dérivable sur $]a-h; a+h[$

1. *Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que : $\dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = f'(a+ch) + f'(a-ch)$*

On considère la fonction $F : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0;1]$ par

$$F(x) = f(a+xh) - f(a-xh)$$

Par construction, F est continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$. La dérivée de F sur $]0;1[$ est donnée par :

$$F'(x) = hf'(a+xh) + hf'(a-xh)$$

Nous appliquons le <u>théorème des accroissements finis à F</u> entre 0 et 1. Il existe donc $c \in]0;1[$ tel que :

$$\frac{F(1) - F(0)}{1-0} = F'(c) \Longleftrightarrow F(1) - F(0) = F'(c)$$

Comme $F(0) = 0$, il existe donc $c \in]0;1[$ tel que $F(1) = F'(c)$, c'est à dire tel que :

$$f(a+h) - f(a-h) = hf'(a+ch) + hf'(a-ch) \Longleftrightarrow \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = f'(a+ch) + f'(a-ch)$$

Ce que nous voulions

2. *Démontrer cette fois ci qu'il existe $\theta \in]0;1[$ tel que :*

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h)$$

La méthode est la même que celle de la question précédente.

Nous considèrons la fonction $G : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0;1]$ par

$$G(x) = f(a+xh) + f(a-xh)$$

Par construction, G est continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$. La dérivée de G sur $]0;1[$ est donnée par :

$$G'(x) = hf'(a+xh) - hf'(a-xh)$$

Nous appliquons le <u>théorème des accroissements finis à G</u> entre 0 et 1. Il existe donc $\theta \in]0;1[$ tel que :

$$\frac{G(1) - G(0)}{1-0} = G'(\theta) \Longleftrightarrow G(1) - G(0) = G'(\theta)$$

Comme $G(0) = 2f(a)$, que $G(1) = f(a+h) + f(a-h)$, il existe donc $\theta \in]0;1[$ tel que

$$f(a+h) + f(a-h) - 2f(a) = G'(c)$$

C'est à dire tel que :

$$\begin{gathered} f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) = hf'(a+\theta h) - hf'(a-\theta h) \\ \Longleftrightarrow \\ \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h) \end{gathered}$$

Ce que nous voulions

3. *On suppose, cette fois-ci que $f''(a)$ existe. Nous posons pour $0 < |u| < h$, c'est à dire $-h < u < h$ et $u \neq 0$:*

$$\varphi(u) = \frac{f(a+u) - 2f(a) + f(a-u)}{u^2}$$

Démontrer que $\lim_{u \to 0} \varphi(u) = f''(a)$

On applique 2 fois, la formule de Taylor-Young 11.4.5 ; pour $0 < |u| < h$, nous avons donc :

- $f(a+u) = f(a) + uf'(a) + \frac{u^2}{2} f''(a) + u^2 \varepsilon_1(u)$ où $\lim_{u \to 0} \varepsilon_1(u) = 0$
- $f(a-u) = f(a) - uf'(a) + \frac{u^2}{2} f''(a) + u^2 \varepsilon_2(u)$ où $\lim_{u \to 0} \varepsilon_2(u) = 0$

En additionnant, nous obtenons :

$$f(a+u) + f(a-u) = 2f(a) + u^2 f''(a) + u^2 (\varepsilon_1(u) + \varepsilon_2(u))$$

En divisant par u^2, nous obtenons :

$$\frac{f(a+u) - 2f(a) + f(a-u)}{u^2} = f''(a) + (\varepsilon_1(u) + \varepsilon_2(u)) \Longleftrightarrow \varphi(u) = f''(a) + (\varepsilon_1(u) + \varepsilon_2(u))$$

Comme $\lim_{u \to 0} (\varepsilon_1(u) + \varepsilon_2(u)) = 0$, nous en déduisons que $\lim_{u \to 0} \varphi(u) = f''(a)$

Ce que nous voulions

Exercice 24 :

Soit $a > 0$ et $f : [-a; +a] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie et continue sur l'intervalle $[-a; +a]$ et deux fois dérivable sur $]-a; +a[$

On suppose que $f(0) = 0$ et que f'' est bornée sur $]-a; +a[$, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in]-a; +a[$, $|f''(x)| \leqslant M$

On construit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pur tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $U_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$

Il faut démontrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite

D'après la formule de Taylor 11.4.1, nous avons, pour $x \in [-a; +a]$:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta x) \text{ où } \theta \in]0; 1[$$

C'est à dire $f(x) = xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta x)$ où $\theta \in]0; 1[$.

L'étude des limites d'une suite est toujours une étude asymptotique.

Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < a \Longleftrightarrow n > \frac{1}{a}$. Pour $k \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant k \leqslant n$, nous avons toujours $\frac{k}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}$, c'est à dire, en particulier $0 < \frac{k}{n^2} < a$

Ainsi, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, nous avons :

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{k}{n^2} f'(0) + \frac{k^2}{2n^4} f''\left(\theta \frac{k}{n^2}\right)$$

Et donc :

$$\begin{aligned} U_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) + \frac{k^2}{2n^4} f''\left(\theta \frac{k}{n^2}\right) \\ &= f'(0) \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} f''\left(\theta \frac{k}{n^2}\right) \\ &= \frac{f'(0)}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 f''\left(\theta \frac{k}{n^2}\right) \end{aligned}$$

D'où nous déduisons $U_n - \dfrac{f'(0)}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{1}{2n^4} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 f''\left(\theta \dfrac{k}{n^2}\right)$

Et en passant à la valeur absolue : $\left| U_n - \dfrac{f'(0)}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \right| = \dfrac{1}{2n^4} \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 f''\left(\theta \dfrac{k}{n^2}\right) \right|$

D'après l'hypothèse, nous avons $\left| f''\left(\theta \dfrac{k}{n^2}\right) \right| \leqslant M$ et alors :

$$\frac{1}{2n^4} \left| \sum_{k=1}^{n} k^2 f''\left(\theta \frac{k}{n^2}\right) \right| \leqslant \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 \left| f''\left(\theta \frac{k}{n^2}\right) \right| \leqslant \frac{M}{2n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Nous avons donc :

$$\left| U_n - f'(0) \frac{n(n+1)}{2n^2} \right| \leqslant M \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}$$

Nous avons $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} M \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} = 0$, et donc en utilisant les résultats sur les limites et les inégalités, nous déduisons que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(U_n - f'(0) \frac{n(n+1)}{2n^2} \right) = 0$, c'est à dire

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} f'(0) \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{f'(0)}{2}$$

En conclusion, nous avons donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$

11.8.4 Convexité

Exercice 25 :

Démontrer que si la fonction f est croissante et convexe et que si la fonction g est convexe, alors la fonction $f \circ g$ est convexe.

On suppose donc f croissante et convexe et g convexe.
Soient $x \in I$, $y \in I$ et $\lambda \in [0;1]$. Alors $g(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$
f étant croissante, alors $f(g(\lambda x + (1-\lambda) y)) \leqslant f(\lambda g(x) + (1-\lambda) g(y))$
f étant convexe $f(\lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)) \leqslant \lambda f(g(x)) + (1-\lambda) f(g(y))$ et nous avons donc :

$$f(g(\lambda x + (1-\lambda) y)) \leqslant \lambda f(g(x)) + (1-\lambda) f(g(y))$$

C'est à dire

$$f \circ g(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f \circ g(x) + (1-\lambda) f \circ g(y)$$

Ainsi, si la fonction f est croissante et convexe et que si la fonction g est convexe, alors la fonction $f \circ g$ est convexe.

Exercice 26 :

1. *Démontrer qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, pour tout choix de points $x_1 \in I \dots x_n \in I$, et de coefficients $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+ \dots \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tout $i = 1, \dots, n$ $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ nous avons $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$*

   (a) **Supposons que f soit convexe**
   Nous allons démontrer, **par une récurrence sur** n que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, pour tout choix de points $x_1 \in I \dots x_n \in I$, et de coefficients $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+ \dots \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tout $i = 1, \dots, n$ $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ nous avons $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

   ▷ C'est évidemment vrai pour $n = 2$, puisque si $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, alors

   $$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

   ▷ Supposons la propriété vraie à l'ordre n

   ▷ Démontrons la propriété à l'ordre $n+1$
   Soient donc $x_1 \in I \dots x_{n+1} \in I$, et de coefficients $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+ \dots \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tout $i = 1, \dots, n+1$ nous avons $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$

   Alors :

   $$\begin{aligned}
   \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i &= \lambda_{n+1} x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \\
   &= \lambda_{n+1} x_{n+1} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \\
   &= \lambda_{n+1} x_{n+1} + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \\
   &= \lambda_{n+1} x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1}) \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \\
   &= \lambda_{n+1} x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1}) Y
   \end{aligned}$$

   Ainsi, $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1}) Y) \leqslant \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1}) f(Y)$ car f est convexe

   Or, $Y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\right) x_i$

   En posant $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$, nous avons $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$ et donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

   $$f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i)$$

En faisant la synthèse, nous avons :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\right) &\leqslant \lambda_{n+1}x_{n+1}+\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)f(Y) \\ &\leqslant \lambda_{n+1}x_{n+1}+\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i}f(x_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(x_i) \end{aligned}$$

C'est donc vrai à l'ordre $n+1$

Et nous avons démontré la proposition

(b) **Réciproquement** si pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, pour tout choix de points $x_1 \in I \ldots x_n \in I$, et de coefficients $\lambda_1 \in \mathbb{R} \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $i = 1, \ldots, n$ $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$ nous avons $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$.

Soient donc $x_1 \in I$, $x_2 \in I$ $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que $\lambda_1+\lambda_2=1$.

D'après la propriété, nous avons $f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2)$. f est donc convexe.

2. *Soit une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe ; démontrer que pour $x_1 \in I, \ldots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n nombres réels positifs, nous avons :*

$$f\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i}\right) \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i}$$

Rien de plus simple : il suffit de poser $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i}$; nous avons $\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i = 1$ et il suffit d'appliquer la question précédente.

Exercice 27 :

Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ une fonction telle que $\ln h$ soit convexe ; démontrer que h est une fonction convexe.

Nous savons que la fonction exponentielle $\exp(x) = e^x$ est une fonction convexe et croissante. Comme $\ln h$ est convexe, alors $\exp \circ \ln h$ est convexe. Or, $h = \exp \circ \ln h$ et h est bien convexe

Exercice 28 :

1. *Utiliser la convexité de $f(x) = x^2$ pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \ldots, x_n$ réels, nous avons :*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}$$

La fonction $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \ldots, x_n$ réels, nous avons :

$$f\left(\frac{x_1+\cdots x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k) \Longleftrightarrow \left(\frac{x_1+\cdots x_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f x_k^2$$

Ce qui nous, en passant à la racine carrée : $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$

Ce que nous voulions

2. *Pour $p \in \mathbb{N}^*$, utiliser la convexité de $f(x) = x^p$ sur $\mathbb{R}^+$ pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \ldots, x_n$ réels positifs, nous avons :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

La dérivée seconde de $f(x) = x^p$ sur $\mathbb{R}^+$ est donnée par $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$. La dérivée seconde étant positive ou nulle sur $\mathbb{R}^+$ et donc $f(x) = x^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$
Comme tout à l'heure, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \ldots, x_n$ réels positifs, nous avons :

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \Longleftrightarrow \left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right)^p \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^p$$

Ce qui nous, en passant à la racine p-ième : $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Ce que nous voulions

3. *Utiliser la convexité de $f(x) = -\ln x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \ldots, x_n$ réels strictement positifs, nous avons :*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$f''(x)$ la dérivée seconde de f est donnée par $f''(x) = \frac{1}{x^2}$; elle est positive sur $\mathbb{R}^{*+}$ et donc $f(x) = -\ln x$ est convexe sur $\mathbb{R}^{*+}$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x_1, \ldots, x_n$ réels strictement positifs, nous avons :

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \Longleftrightarrow -\ln\left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} -\ln x_k$$

Or,

$$-\ln\left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} -\ln x_k \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln x_k$$

D'après les propriétés du logarithme, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln x_k = \frac{1}{n}\ln(x_1 x_2 \cdots x_n) = \ln(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$ et, en prenant l'exponentielle, nous avons :

$$\left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right) \geqslant (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \Longleftrightarrow \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots x_n}{n}$$

En déduire que :

(a) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$

On considère 3 réels a^3, b^3 et c^3. Nous avons donc : $\sqrt[3]{a^3 b^3 c^3} \leqslant \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$, ce qui nous donns donc :

$$abc \leqslant \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \Longleftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$$

(b) $(a+b+c)^3 \geqslant 27abc$

On applique l'inégalité à a, b et c : $\sqrt[3]{abc} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$. D'où, en élevant au cube :

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \iff abc \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \iff 27abc \leqslant (a+b+c)^3$$

(c) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{n!} \leqslant \dfrac{n+1}{2}$

Nous appliquons l'inégalité $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + \cdots x_n}{n}$ aux n entiers $x_k = k$. Alors :

$$\sqrt[n]{1 \times 2 \times \cdots \times n} \leqslant \frac{1+2+3+\cdots+n}{n} \iff \sqrt[n]{n\,!} \leqslant \frac{n\,(n+1)}{2n} \iff \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}$$

Exercice 29 :

1. *Que dire de la somme de deux fonctions convexes ?*

   Soient f et g 2 fonctions convexes sur un intervalle I et 2 nombres $x_i n I$ et $y \in I$ tels que $x < y$
   - ⋆ Alors, pour tout $\lambda \in [0;1]$, nous avons $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
   - ⋆ Et pour tout $\lambda \in [0;1]$, nous avons $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$
   - ⋆ Donc :

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) = \;& f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y)\\ \leqslant\;& \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) + \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)\\ \leqslant\;& \lambda (f(x) + g(x)) + (1-\lambda)(f(y) + f(y))\\ \leqslant\;& \lambda (f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y)\end{aligned}$$

   Ce qui montre que $f+g$ est convexe.

   La somme de 2 fonctions convexes est convexe

2. *Que dire de la combinaison linéaire de deux fonctions convexes ?*

   On considère 2 fonctions $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$
   - ▷ On sait que $f(x) = e^x$ est convexe.
   - ▷ Nous avons $g''(x) = e^{-x}$; comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) > 0$, g est convexe sur $\mathbb{R}$
   - ▷ Nous avons maintenant, $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = e^x - e^{-x}$ et donc $(f-g)''(x) = e^x - e^{-x}$
   Si $x \geqslant 0$, alors $(f-g)''(x) \geqslant 0$ et si $x \leqslant 0$, alors $(f-g)''(x) \leqslant 0$. Ce qui veut dire que la dérivée seconde n'est pas positive sur $\mathbb{R}$ et donc que $f-g$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$

   La combinaison linéaire de 2 fonctions convexes n'est pas forcément convexe

Exercice 30 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction convexe et positive. On suppose qu'il existe* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(a) = f(b) = 0$*. Montrer que* f *est nulle sur l'intervalle* $[a;b]$

Voilà un exercice sans trop de difficulté.
Tout $x \in [a;b]$ s'écrit $x = \lambda a + (1-\lambda) b$. D'après l'hypothèse, $f(x) \geqslant 0$ et $f(x) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$.
Comme $f(a) = f(b) = 0$, nous avons aussi $f(x) \leqslant 0$, et donc, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) = 0$
f est donc nulle sur l'intervalle $[a;b]$

Exercice 31 :

Soient f *et* g *2 fonctions convexes sur un intervalle* I

1. *Montrer que* $h = \sup(f,g)$ *est une fonction convexe*

   Soient $x \in I$, $y \in I$ et $\lambda \in [0;1]$. Alors :
   $\longrightarrow$ $f(x) \leqslant h(x)$ et $f(y) \leqslant h(y)$ et, de même $g(x) \leqslant h(x)$ et $g(y) \leqslant h(y)$

$\longrightarrow$ D'autre part $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ et $g(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$

$\longrightarrow$ Comme $\lambda \geqslant 0$ et $(1-\lambda) \geqslant 0$, nous avons $\lambda f(x) \leqslant \lambda h(x)$ et $(1-\lambda)f(y) \leqslant (1-\lambda)h(y)$, c'est à dire $\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \leqslant \lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)$
De la même manière,$\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y) \leqslant \lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)$

$\longrightarrow$ Or, nous avons $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \leqslant \lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)$
De même, nous avons $g(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)$
Donc $\sup\{f(\lambda x+(1-\lambda)y); g(\lambda x+(1-\lambda)y)\} \leqslant \lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)$

$\longrightarrow$ Comme $h(\lambda x+(1-\lambda)y) = \sup\{f(\lambda x+(1-\lambda)y); g(\lambda x+(1-\lambda)y)\}$, nous avons :

$$h(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)$$

Ainsi, $h=\sup(f,g)$ est une fonction convexe

2. *Que dire de $j=\inf(f,g)$?*

A contrario, $j=\inf(f,g)$ **n'est pas forcément convexe**

Soient $f(x)=x+1$ et $g(x)=\dfrac{x}{2}$; ces deux fonctions sont convexes, mais $j(x)=\inf(f(x),g(x))$ ne l'est pas.

Nous avons, en fait : $j(x)=\begin{cases} x+1 \text{ si } x \leqslant -2 \\ \dfrac{x}{2} \end{cases}$

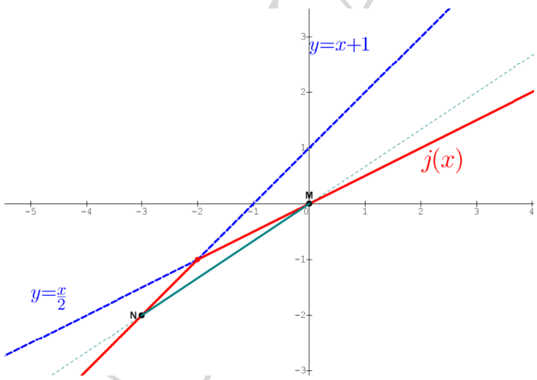

FIGURE 11.11 – $j(x)=\inf(f(x),g(x))$ n'est pas convexe

Exercice 32 :

1. *Démontrer que, pour tout $x>0$ et tout $t\in[0;x]$, nous avons $1+t \leqslant e^t \leqslant 1+\dfrac{t}{x}(e^x-1)$*

La fonction exponentielle est au-dessus de ses tangentes et sous ses cordes.
Soit donc $x>0$ et considérons l'intervalle $[0;x]$
Si nous considérons la tangente en $x=0$ à la courbe e^t, elle a pour équation $y=t+1$, et nous pouvons dire que, pour tout $t\in\mathbb{R}$ que $t \leqslant e^t$

La sécante qui passe par les points $(0;1)$ et $(x;e^x)$ a pour équation $y=1+\dfrac{t}{x}(e^x-1)$, et donc, pour tout $t\in[0;x]$, nous avons $e^t \leqslant 1+\dfrac{t}{x}(e^x-1)$

Finalement, pour tout $x>0$ et tout $t\in[0;x]$, nous avons $1+t \leqslant e^t \leqslant 1+\dfrac{t}{x}(e^x-1)$

2. *Que se passe-t-il si $x<0$?*

Il se passe la même chose, et pour les mêmes raisons!!

Pour tout $x<0$ et tout $t\in[x;0]$, nous avons $1+t \leqslant e^t \leqslant 1+\dfrac{t}{x}(e^x-1)$

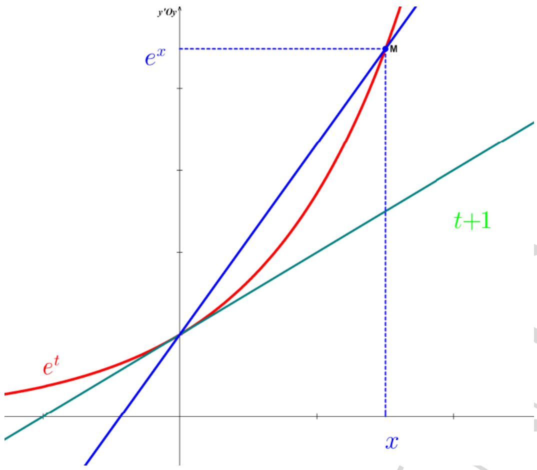

FIGURE 11.12 – La fonction exponentielle est convexe, donc au-dessus de ses tangentes et sous ses cordes

Exercice 33 :

Utiliser la fonction f définie sur l'intervalle $]+1;+\infty[$ par $f(x)=\ln(\ln x)$ pour démontrer que

$$(\forall x>1)\,(\forall y>1)\,\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\geqslant\sqrt{(\ln x)(\ln y)}$$

Calculons, pour $x>1$, la dérivée seconde de f. Nous avons :

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln x}\quad\text{et}\quad f''(x)=\frac{-(1+\ln x)^2}{(x\ln x)^2}$$

Comme $x>1$, $-(1+\ln x)^2<0$ et $f''(x)<0$, ce qui veut dire que f est concave. Donc, pour tout $x>1$ et tout $y>1$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\geqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}\iff\ln\left[\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]\geqslant\frac{1}{2}(\ln\ln x+\ln\ln y)$$

Or :

$$\frac{1}{2}(\ln\ln x+\ln\ln y)=\frac{1}{2}\ln(\ln x\ln y)=\ln\sqrt{\ln x\ln y}$$

Nous avons donc $\ln\left[\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]\geqslant\ln\sqrt{\ln x\ln y}$, et en passant par l'exponentielle qui est une fonction croissante, nous avons :

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\geqslant\sqrt{\ln x\ln y}$$

Exercice 34 :

1. *Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(1+e^x)$ est convexe*

   Il suffit d'en calculer la dérivée seconde et de vérifier qu'elle est positive.

   $f''(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$; f'' est bien positive sur $\mathbb{R}$, donc convexe sur $\mathbb{R}$

2. *Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x_1>0,\cdots,x_n>0$ nous avons :*

$$1+\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\frac{1}{n}}$$

▷ La fonction f étant convexe sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x_1 \in \mathbb{R}, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$nous avons :

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

C'est à dire :

$$\ln\left(1 + e^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + e^{x_i})$$

▷ Des propriétés de l'exponentielle, nous avons :

⋆ Pour le premier membre de l'inéquation :

$$\begin{aligned} e^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}} &= e^{\frac{x_1}{n}} \times e^{\frac{x_2}{n}} \times \cdots \times e^{\frac{x_n}{n}} \\ &= (e^{x_1})^{\frac{1}{n}} \times (e^{x_2})^{\frac{1}{n}} \times \cdots \times (e^{x_n})^{\frac{1}{n}} \\ &= \prod_{k=1}^{n} (e^{x_k})^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n} (e^{x_k})\right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

⋆ Et pour le second membre de l'inéquation :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + e^{x_i}) = \frac{1}{n}\ln\prod_{i=1}^{n}(1 + e^{x_i}) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n}(1 + e^{x_i})\right)^{\frac{1}{n}}$$

De telle sorte que nous avons une nouvelle inégalité :

$$\ln\left(1 + \left(\prod_{k=1}^{n}(e^{x_k})\right)^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant \ln\left(\prod_{i=1}^{n}(1 + e^{x_i})\right)^{\frac{1}{n}}$$

Comme la fonction ln est bijective, nous avons :

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n}(e^{x_k})\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n}(1 + e^{x_i})\right)^{\frac{1}{n}}$$

▷ Soient $y_1 > 0, y_2 > 0 \ldots y_n > 0$. La fonction exp étant bijective, il existe une unique $x_i \in \mathbb{R}$ tel que $y_i = e^{x_i}$ et alors, nous avons l'inégalité :

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1 + y_k)\right)^{\frac{1}{n}} \iff 1 + \prod_{k=1}^{n} y_k^{\frac{1}{n}} \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1 + y_k)^{\frac{1}{n}}$$

Ce que nous voulions

3. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1 > 0, \cdots, a_n > 0$ et $b_1 > 0, \cdots, b_n > 0$, nous avons :*

$$\left(\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $a_1 > 0, \cdots, a_n > 0$ et $b_1 > 0, \cdots, b_n > 0$ $2n$ réels strictement positifs. En posant $y_k = \dfrac{a_k}{b_k}$ et en utilisant l'inégalité précédente, nous avons

$$1 + \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

⋆ D'une part :

$$1+\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{n}} = 1+\frac{\prod_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{n}}}{\prod_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{n}}} = \frac{\prod_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{n}}+\prod_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{n}}}{\prod_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{n}}}$$

⋆ D'autre part :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k+a_k}{b_k}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{\frac{1}{n}}}{\prod_{k=1}^{n}(b_k)^{\frac{1}{n}}}$$

D'où nous obtenons :

$$\frac{\prod_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{n}}+\prod_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{n}}}{\prod_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{\frac{1}{n}}}{\prod_{k=1}^{n}(b_k)^{\frac{1}{n}}}$$

C'est à dire, après simplification :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Ce que nous voulions

Exercice 35 :

1. *Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $a_1>0,\cdots,a_n>0$, nous avons :* $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}$

   Il est facile à démontrer que la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ est concave ; il suffit, pour cela, de vérifier la dérivée seconde est négative : nous avons $f''(x)=\frac{-1}{4x\sqrt{x}}$

   Dès lors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $a_1>0,\cdots,a_n>0$, nous avons :

$$f\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

   C'est à dire :

$$\sqrt{\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k} \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{a_1+\cdots+a_n} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k} \Longleftrightarrow \sqrt{a_1+\cdots+a_n} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$$

   Ce que nous voulions

2. *Démontrer que, pour tout $x>1$, nous avons* $\sqrt{x^{2n}-1} \geqslant \sqrt{\frac{x+1}{x-1}\times\frac{x^n-1}{\sqrt{n}}}$

Pour $x > 1$, posons $a_k = x^{2k}$. Alors $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} x^{2k} = \frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$, et donc $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x^{2k}} = \sqrt{\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^{2n}-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

De même, $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x^{2k}} = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x^n-1}{x-1}$.

D'où, l'inégalité $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}$ devient :

$$\frac{\sqrt{x^{2n}-1}}{\sqrt{x^2-1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x^n-1}{x-1} \iff \sqrt{x^{2n}-1} \geqslant \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \times \frac{x^n-1}{\sqrt{n}}$$

Exercice 36 :

1. *Vérifier que f, définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = x \ln x$ est convexe sur $\mathbb{R}^{*+}$*

   Il suffit donc de calculer la dérivée seconde $f''(x) = \frac{1}{x}$ qui est positive sur $\mathbb{R}^{*+}$

2. *Démontrer que, pour tout $x > 0$, tout $y > 0$, tout $a > 0$ et tout $b > 0$ nous avons :*

$$(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leqslant x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right)$$

Soient $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ et $b > 0$

Nous écrivons que f est convexe entre $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$; pour tout $\lambda \in [0;1]$, nous avons :

$$f\left(\lambda\frac{x}{a} + (1-\lambda)\frac{y}{b}\right) \leqslant \lambda f\left(\frac{x}{a}\right) + (1-\lambda) f\left(\frac{y}{b}\right)$$

Ainsi, en posant $\lambda = \frac{a}{a+b}$, nous avons $1-\lambda = \frac{b}{a+b}$ et l'inégalité devient :

$$f\left(\frac{a}{a+b} \times \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \times \frac{y}{b}\right) \leqslant \frac{a}{a+b} f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b} f\left(\frac{y}{b}\right)$$
$$\iff$$
$$f\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leqslant \frac{a}{a+b} f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b} f\left(\frac{y}{b}\right)$$

Et maintenant, mettons nous au calcul :

$\longrightarrow f\left(\frac{x+y}{a+b}\right) = \left(\frac{x+y}{a+b}\right) \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right)$

$\longrightarrow \frac{a}{a+b} f\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{a+b} \times \left(\frac{x}{a}\right) \ln\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a+b} \ln\left(\frac{x}{a}\right)$

$\longrightarrow \frac{b}{a+b} f\left(\frac{y}{b}\right) = \frac{b}{a+b} \times \left(\frac{y}{b}\right) \ln\left(\frac{y}{b}\right) = \frac{y}{a+b} \ln\left(\frac{y}{b}\right)$

D'où, l'inégalité devient :

$$\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leqslant \frac{x}{a+b} \ln\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{y}{a+b} \ln\left(\frac{y}{b}\right)$$

Ce qui donne, en simplifiant :

$$(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leqslant x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right)$$

Exercice 37 :

Cet exercice est fait de questions plus ou moins indépendantes, utilisant le même outil
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe

1. *On suppose f strictement croissante. Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$*

   Nous allons démontrer la question de 2 façons

   (a) Une première façon

   f étant convexe est toujours « sous les tangentes », c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons $f(x) \geqslant f'_d(a)(x-a) + f(a)$
   Fixons $a \in \mathbb{R}$; f étant croissante $f'_d(a) \geqslant 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f'_d(a)(x-a) + f(a) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   (b) Une seconde façon

   On considère $h_0(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$. D'après 11.5.3, la fonction h_0 est croissante.
   Donc, pour tout $x > 1$, $h_0(x) \geqslant h_0(1)$ et donc $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant \dfrac{f(1) - f(0)}{1} = f(1) - f(0)$
   Donc $f(x) \geqslant (f(1) - f(0))x + f(0)$. Comme, f est croissante, $f(1) - f(0) \geqslant 0$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(1) - f(0))x + f(0) = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2. *On suppose que f est bornée. Montrer que f est constante*

   Si f est constante, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, avec $a \neq b$, nous avons $f(a) = f(b)$.
   Supposons le contraire, c'est à dire $f(a) \neq f(b)$. Pour nous simplifier la vie, nous supposons $a < b$

   ▷ Si $f(a) > f(b)$

   Alors, nous utilisons la fonction $h_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. D'après 11.5.3, la fonction h_a est croissante.
   Donc, pour tout $x > b$, nous avons $h_a(x) \geqslant h_a(b)$, c'est à dire $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et donc $f(x) - f(a) \leqslant \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a)$, puisque $x - a > 0$ et donc :

   $$f(x) \leqslant \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a) + f(a)$$

   Comme $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant 0$, nous avons $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a) + f(a) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, ce qui contredit le fait que f est bornée.

   — Si $f(a) < f(b)$

   Alors, nous utilisons toujours la fonction $h_b(x) = \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$. D'après 11.5.3, la fonction h_b est croissante.
   Donc, pour tout $x < a$, nous avons $h_b(x) \leqslant h_b(a)$, c'est à dire $\dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} \leqslant \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$ et donc $f(x) - f(b) \geqslant \left(\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}\right)(x - b)$, puisque $x - a < 0$ et donc :

   $$f(x) \geqslant \left(\frac{f(a) - f(b)}{a - b}\right)(x - b) + f(b)$$

   Comme $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \geqslant 0$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f(a) - f(a)}{a - b}\right)(x - a) + f(b) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ce qui contredit une nouvelle fois le fait que f est bornée.

   Donc l'hypothèse $f(a) \neq f(b)$ est contradictoire et $f(a) = f(b)$ et f est constante sur $\mathbb{R}$

3. *On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est positive*

   Il faut donc que nous démontrions que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons $f(a) \geqslant 0$
   Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(a_0) < 0$
   Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, il existe $b \in \mathbb{R}$, (et on peut choisir $b > a_0$) tel que si $x > b$, alors

   $$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|f(a_0)| \Longleftrightarrow \frac{1}{2}f(a_0) \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2} \times -f(a_0)$$

   Nous avons, en particulier $\frac{1}{2}f(a_0) \leqslant f(b) \leqslant \frac{1}{2} \times -f(a_0)$
   Considérons, maintenant $h_{a_0}(x) = \frac{f(x)-f(a_0)}{x-a_0}$. D'après 11.5.3, la fonction h_{a_0} est croissante.
   Alors, pour tout $x > b$ nous avons : $h_{a_0}(x) \geqslant h_{a_0}(b)$, c'est à dire :

   $$\frac{f(x)-f(a_0)}{x-a_0} \geqslant \frac{f(b)-f(a_0)}{b-a_0}$$

   De l'inégalité $\frac{1}{2}f(a_0) \leqslant f(b) \leqslant \frac{1}{2} \times -f(a_0)$, nous tirons : $\frac{1}{2} \times -f(a_0) \leqslant f(b) - f(a_0) \leqslant \frac{3}{2} \times -f(a_0)$, de telle sorte, puisque $b > a_0$:

   $$\frac{f(b)-f(a_0)}{b-a_0} \geqslant \frac{-f(a_0)}{2(b-a_0)}$$

   Et donc : $\frac{f(x)-f(a_0)}{x-a_0} \geqslant \frac{-f(a_0)}{2(b-a_0)}$
   D'où nous avons, pour $x > b$, $f(x) \geqslant \left(\frac{-f(a_0)}{2(b-a_0)}\right)(x-a) + f(a_0)$. Comme $\frac{-f(a_0)}{2(b-a_0)} \geqslant 0$, nous avons $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-f(a_0)}{2(b-a_0)}\right)(x-a) + f(a_0) = +\infty$, et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   Ce qui est en totale contradiction avec l'hypothèse. Donc f est positive sur $\mathbb{R}$

4. *On suppose que f admet une droite asymptote en $+\infty$. Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f par rapport à la droite asymptote.*

   Soit $y = ax + b$ l'équation de cette droite asymptote ; alors $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$
   La fonction $g(x) = -(ax+b)$ est convexe *(et aussi concave puisque c'est une application affine)* et donc la fonction $f + g$ est convexe comme somme de 2 fonctions convexes.
   Nous avons $(f+g)(x) = f(x) - (ax+b)$ et donc $\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = 0$
   D'après la question précédente, comme $f+g$ convexe et $\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = 0$, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f+g)(x) \geqslant 0$, c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$f(x) - (ax+b) \geqslant 0 \Longleftrightarrow f(x) \geqslant (ax+b)$$

   Ainsi, $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f est au-dessus de la droite asymptote.

Exercice 38 :

Voici un exercice réellement "tiré par les cheveux", pas exactement transcendant......apportant peu, en fait, sinon une pratique des propriétés des fonctions convexes
Soit $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. *Démontrer que la fonction $\frac{f(x)}{x}$ admet, en $+\infty$, la même limite que $h_1(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ et que cette limite est finie ou égale à $+\infty$*

D'après 11.5.3, la fonction h_1 est croissante et alors, de deux choses l'une :

$$\lim_{x\to+\infty} h_1(x) = L \text{ ou bien } \lim_{x\to+\infty} h_1(x) = +\infty$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{f(x)-f(1)+f(1)}{x-1}\times\frac{(x-1)}{x}\\ &= \frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{(x-1)}{x}+\frac{f(1)}{x}\\ &= h_1(x)\times\frac{(x-1)}{x}+\frac{f(1)}{x}\end{aligned}$$

Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-1)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(1)}{x} = 0$ et donc, nous avons bien $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} h_1(x)$

Ce que nous voulions.

2. *Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = L$, alors $g(x) = f(x) - Lx$ admet une limite finie ou $-\infty$ lorsque x tens vers $+\infty$*

   Soit $x > 0$; nous considérons $h_x(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ définie sur $]x;+\infty[$.

   Nous avons h_x croissante sur $]x;+\infty[$ et donc, comme précédemment :

   $$\lim_{t\to+\infty} h_x(t) = L \text{ ou bien } \lim_{t\to+\infty} h_x(t) = +\infty$$

   h_x étant croissante, pour tout $y > x$, nous avons $h_x(y) \leqslant L$, c'est à dire :

   $$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant L \iff f(y)-f(x) \leqslant L(y-x) \iff f(y)-Ly \leqslant f(x)-Lx$$

   En considérant $g(x) = f(x) - Lx$, nous venons de montrer que g est décroissante et donc :

   $$\lim_{t\to+\infty} g(x) = l \text{ ou bien } \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

Exercice 39 :

Soit $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Nous définissons $g :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour tout $x > 0$.

1. *Montrer si g est décroissante, alors f est sous-additive sur $]0;+\infty[$.*

   Soient $a > 0$ et $b > 0$

   - $\star$ g étant décroissante, alors $g(a+b) \leqslant g(a)$, c'est à dire $\frac{f(a+b)}{a+b} \leqslant \frac{f(a)}{a}$, inégalité équivalente à $\frac{af(a+b)}{a+b} \leqslant f(a)$
   - $\star$ Pour les mêmes raisons, nous avons : $\frac{bf(a+b)}{a+b} \leqslant f(b)$
   - $\star$ Maintenant, en additionnant les deux inégalités, nous obtenons :

   $$\frac{af(a+b)}{a+b}+\frac{bf(a+b)}{a+b} \leqslant f(a)+f(b) \iff f(a+b) \leqslant f(a)+f(b)$$

   f est bien sous-additive

2. *Montrer que si f est convexe et sous-additive, alors g est décroissante*

   Soient $a > 0$ et $b > 0$ tels que $a \leqslant b$; il nous faut donc montrer que $g(b) \leqslant g(a)$

   $\longrightarrow$ Soit $\alpha = \frac{a}{b}$. Par construction, nous avons $0 < \alpha \leqslant +1$, et donc, de la convexité de f :

   $$f(\alpha a + (1-\alpha)(a+b)) \leqslant \alpha f(a) + (1-\alpha) f(a+b)$$

$\longrightarrow$ f est sous-additive, donc $f(a+b) \leqslant f(a) + f(b)$ et en injectant cette inégalité, nous avons :

$$\alpha f(a) + (1-\alpha) f(a+b) \leqslant \alpha f(a)(1-\alpha)(f(a)+f(b))$$

Ce qui nous donne en synthèse :

$$f(\alpha a + (1-\alpha)(a+b)) \leqslant \alpha f(a)(1-\alpha)(f(a)+f(b))$$

$\longrightarrow$ Maintenant, calculons les différents membres de cette dernière inégalité :

$\star$ $\alpha a + (1-\alpha)(a+b) = \alpha a + a + b - \alpha a - \alpha b = a + (1-\alpha) b = a + \left(1 - \frac{a}{b}\right) b = a + b - a = b$

$\star$ $\alpha f(a)(1-\alpha)(f(a)+f(b)) = \alpha f(a) + f(a) + f(b) - \alpha f(a) - \alpha f(b) = f(a) + (1-\alpha) f(b)$

$\longrightarrow$ D'où nous tirons : $f(b) \leqslant f(a) + (1-\alpha) f(b) \iff f(a) - \alpha f(b) \geqslant 0$

Or, $f(a) - \alpha f(b) \geqslant 0 \iff f(a) \geqslant \frac{a}{b} f(b) \iff \frac{f(a)}{a} \geqslant \frac{f(b)}{b}$, c'est à dire $g(b) \leqslant g(a)$

Ce que nous voulions.

11.8.5 Miscelleanous

Exercice 42 :

1. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$ est convergente. On appelle l sa limite*

Nous allons démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée *(donc convergente)*

▷ Elle est minorée

Effectivement, et de manière évidente, elle est strictement positive.
Plus généralement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée.

En effet, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, nous avons $\frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n}$, et en passant à la sommation, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2n} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \iff \frac{n+1}{2n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n}$$

Et nous avons donc bien $\frac{1}{2} < u_n \leqslant 2$

▷ La suite est décroissante

Pour montrer la décroissante de la suite, nous calculons donc $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n+(1+k)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n+2} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{2n(n+1) + n(2n+1) - 2(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)n} \\
&= \frac{-3n-2}{(2n+1)(2n+2)n}
\end{aligned}$$

Donc, $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc strictement décroissante.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante et minorée est donc convergente, et nous appelons l sa limite

2. *Soit f une fonction numérique définie sur $[-1;+1]$, dérivable en 0 et nulle en 0 (c'est à dire $f(0)=0$). On considère la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :*

$$S_n(f)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n+1}\right)+f\left(\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2n}\right)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

Montrer que la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $S(f)$ qu'il possible d'exprimer en fonction de l et de $f'(0)$

Soit $\varepsilon>0$

▷ Comme f est différentiable en 0, il existe $\alpha>0$ tel que, pour tout $x\in\,]-\alpha;+\alpha[$, nous ayions :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+x\varphi(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varphi(x)=0$$

Comme $f(0)=0$, nous pouvons remplacer la précédente égalité par :

$$f(x)=xf'(0)+x\varphi(x) \text{ où } \lim_{x\to 0}\varphi(x)=0$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, il existe $\alpha_1>0$ tel que si $|x|\leqslant\alpha_1$ alors $|\varphi(x)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$

▷ Appelons $\beta=\inf\{\alpha;\alpha_1\}$.

Comme la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante et tendant vers 0, il existe $N_\beta\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, si $n\geqslant N_\beta$, alors $\dfrac{1}{n}<\beta$

Soit $n\geqslant N_\beta$; alors, pour $k\in\mathbb{N}$, avec $0\leqslant k\leqslant n$, nous avons :

$$f\left(\frac{1}{n+k}\right)=\frac{1}{n+k}f'(0)+\frac{1}{n+k}\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

Et, en sommant de $k=0$ à $k=n$, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{1}{n+k}\right)=f'(0)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

C'est à dire :

$$S_n(f)=f'(0)\,u_n+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

▷ <u>Supposons $f'(0)=0$</u>

Alors :

$$|S_n(f)|=\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}\left|\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)\right|$$

- Si $n\geqslant N_\beta$, alors $0<\dfrac{1}{n+k}<\alpha_1$ et $\left|\varphi\left(\dfrac{1}{n+k}\right)\right|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$
- Nous avons démontré que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}<2$

Donc, $n\geqslant N_\beta$, alors $|S_n(f)|\leqslant 2\times\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

Nous avons donc, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(f)=0$

▷ <u>Supposons $f'(0)\neq 0$</u>, c'est à dire $|f'(0)|>0$

Nous allons démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(f)=f'(0)\,l$. Pour ce faire, nous avons :

$$\begin{aligned} S_n(f)-f'(0)\,l= &\ f'(0)\,u_n-f'(0)\,l+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)\\ = &\ f'(0)\,(u_n-l)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k}\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)\end{aligned}$$

De telle sorte que :

$$|S_n(f) - f'(0)\,l| \leqslant |f'(0)|\,|u_n - l| + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}\left|\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)\right|$$

Nous avons montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$; il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_1$, alors $|u_n - l| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\,|f'(0)|}$

Et,pour $n \geqslant N_\beta$, nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}\left|\varphi\left(\frac{1}{n+k}\right)\right| \leqslant 2 \times \frac{\varepsilon}{2}$

Ainsi, pour $n \geqslant \max\{N_1, N_\beta\}$, nous avons :

$$|S_n(f) - f'(0)\,l| \leqslant |f'(0)| \times \frac{\varepsilon}{2\,|f'(0)|} + 2 \times \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3\varepsilon}{2}$$

Ce qui démontre que, de manière générale, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = f'(0)\,l$

3. *Appliquer le résultat précédent à la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ et en déduire la valeur de l*

   Réécrivons $S_n(f)$ pour $f(x) = \ln(1+x)$:

$$\begin{aligned}
S_n(f) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \ln(n+k+1) - \ln(n+k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \ln(n+k) - \sum_{k=0}^{n} \ln(n+k) \\
&= \ln(2n+1) - \ln n \\
&= \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

   D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = \ln 2$. Or, nous avons aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = f'(0)\,l$ et donc $\ln 2 = f'(0)\,l$.

   Comme $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ donc $f'(0) = 1$ et on conclue que $l = \ln 2$

Des prolongements

▷ Considérons $f(x) = \sin x$. Alors :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{1}{n+k}\right) = \sum_{k=n}^{2n} \sin\frac{1}{k}$$

D'après les résultats de l'exercice, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \sin\frac{1}{k} = \ln 2 \cos 0 = \ln 2$

▷ Considérons $f(x) = \sin^2 x$. Alors :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{1}{n+k}\right) = \sum_{k=n}^{2n} \sin^2\frac{1}{k}$$

D'après les résultats de l'exercice, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \sin^2\frac{1}{k} = \ln 2 \times 2 \sin 0 \cos 0 = 0$

▷ Considérons $f(x) = x^2$. Alors :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right)^2 = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2} = \ln 2 \times 0 = 0$$

D'après les résultats de l'exercice, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2} = \ln 2 \times 0 = 0$

Ce dernier cas n'est pas surprenant puisque la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ est convergente, qu'elle vérifie donc le critère de Cauchy, et que $\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}$ est un cas particulier du critère de Cauchy

Exercice 43 :

Soient $\alpha > 1$, $\beta > 1$ et $f : [0;1] \longrightarrow]0;+\infty[$ une application dérivable sur $]0;1[$. On suppose que :

$$f(0) = 0 \text{ et } (\forall x \in]0;1[)\,(f'(x) > 0)$$

En étudiant $g(x) = (f(x))^\alpha \times (f(1-x))^\beta$, démontrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que :

$$\alpha\frac{f'(c)}{f(c)} = \beta\frac{f'(1-c)}{f'(c)}$$

Nous considérons donc $g(x) = (f(x))^\alpha \times (f(1-x))^\beta$. Nous avons donc $g(0) = g(1) = 0$.
g est continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0;1[$ tel que $g'(c) = 0$ Or,

$$\begin{aligned} g'(x) = & \ \alpha (f(x))^{\alpha-1} \times f'(x) \times (f(1-x))^\beta + \beta (f(x))^\alpha \times (f(1-x))^{\beta-1} \times -f'(1-x) \\ = & \ (f(x))^{\alpha-1}(f(1-x))^{\beta-1}[\alpha f'(x) \times (f(1-x)) - \beta (f(x)) \times f'(1-x)] \end{aligned}$$

Comme, pour tout $x \in]0;1[$, nous avons $f(x) > 0$, nous en déduisons que

$$g'(c) = 0 \Longleftrightarrow \alpha f'(c) \times (f(1-c)) - \beta (f(c)) \times f'(1-c) = 0$$

C'est à dire :

$$\alpha f'(c) \times (f(1-c)) = \beta (f(c)) \times f'(1-c) \Longleftrightarrow \alpha\frac{f'(c)}{f(c)} = \beta\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

Ce que nous voulions

Exercice 44 :

Soient donc $p > 1$ et $q > 1$ 2 nombres réels conjugués.

1. *Démontrer que, pour tout $u \in \mathbb{C}^*$ et tout $v \in \mathbb{C}^*$, nous avons :*

$$|uv| \leqslant \frac{|u|^p}{p} + \frac{|v|^q}{q}$$

⋆ La fonction $\ln x$ est une fonction concave sur $\mathbb{R}^{*+}$, ce qui veut dire que, pour tout $x > 0$, tout $y > 0$ et tout $\lambda \in [0;1]$:

$$\ln(\lambda x + (1-\lambda) y) \geqslant \lambda \ln x + (1-\lambda)\ln y$$

- ⋆ En posant $\lambda = \dfrac{1}{p}$, nous avons $1 - \lambda = \dfrac{1}{q}$ et l'inégalité devient :

$$\ln\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln x + \frac{1}{q}\ln y$$

- ⋆ En passant à l'exponentielle, nous avons

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \geqslant x^{\frac{1}{p}} \times y^{\frac{1}{q}}$$

- ⋆ En posant, maintenant, $x = a^p$ et $y = b^q$, nous avons, pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$,

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

- ⋆ Soient $u \in \mathbb{C}^*$ et $v \in \mathbb{C}^*$, nous avons $|u| > 0$ et $|v| > 0$ et nous pouvons appliquer l'inégalité précédemment trouvée :

$$|uv| \leqslant \frac{|u|^p}{p} + \frac{|v|^q}{q}$$

2. *Soit $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$, une famille de $2n$ nombres complexes. On pose :*

$$\alpha = \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad \beta = \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

Et on suppose $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ Démontrer que, pour tout $i = 1, \cdots, n$, nous avons :

$$\frac{|a_i b_i|}{\alpha\beta} \leqslant \frac{|a_i|^p}{p \times \alpha^p} + \frac{|b_i|^q}{q \times \alpha^q}$$

Posons $A_i = \dfrac{a_i}{\alpha}$ et $B_i = \dfrac{b_i}{\beta}$. D'après l'inégalité de la question 1, nous avons :

$$|A_i B_i| \leqslant \frac{|A_i|^p}{p} + \frac{|B_i|^q}{q}$$

Maintenant, faisons quelques calculs :

$$|A_i B_i| = \frac{|a_i b_i|}{\alpha\beta} \qquad \frac{|A_i|^p}{p} = \frac{|a_i|^p}{p \times \alpha^p} \qquad \frac{|B_i|^q}{q} = \frac{|b_i|^q}{q \times \beta^q}$$

D'où, en remplaçant, nous obtenons :

$$\frac{|a_i b_i|}{\alpha\beta} \leqslant \frac{|a_i|^p}{p \times \alpha^p} + \frac{|b_i|^q}{q \times \alpha^q}$$

3. *Démontrer l'inégalité de Hölder :* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$

Pour chaque $i = 1, \cdots, n$, nous avons démontré l'inégalité :

$$\frac{|a_i b_i|}{\alpha\beta} \leqslant \frac{|a_i|^p}{p \times \alpha^p} + \frac{|b_i|^q}{q \times \alpha^q}$$

D'où, en sommant de 1 à n, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i b_i|}{\alpha\beta} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|^p}{p \times \alpha^p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{|b_i|^q}{q \times \alpha^q}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \frac{1}{p \times \alpha^p}\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p + \frac{1}{q \times \alpha^q}\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q$$

En faisant remarquer que $\alpha^p = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p$ et que $\beta^q = \sum_{i=1}^{n} |b_i|^q$, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i b_i|}{\alpha\beta} \leqslant \frac{\alpha^p}{p\alpha^p} + \frac{\beta^q}{q\beta^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Ainsi, nous avons montré que $\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i b_i|}{\alpha\beta} \leqslant 1$ et donc que $\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \alpha\beta$, c'est à dire

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

Pour $p = q = 2$, nous obtenons l'inégalité de Schwarz

4. *Démontrer l'inégalité de Minkowski :* $\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$

Pour tout $i = 1, \cdots, n$, nous commençons à écrire que $|a_i + b_i|^p = |a_i + b_i| \times |a_i + b_i|^{p-1}$.
Nous utilisons, maintenant, l'inégalité triangulaire $|a_i + b_i| \leqslant |a_i| + |b_i|$, de telle sorte que :

$$|a_i + b_i|^p = |a_i + b_i| \times |a_i + b_i|^{p-1} \leqslant (|a_i| + |b_i|)\, |a_i + b_i|^{p-1} = |a_i| \times |a_i + b_i|^{p-1} + |b_i| \times |a_i + b_i|^{p-1}$$

En passant aux sommations, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i| \times |a_i + b_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |b_i| \times |a_i + b_i|^{p-1}$$

Etudions chaque somme :

$\longrightarrow$ En utilisant l'inégalité de Hölder, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \times |a_i + b_i|^{p-1} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

— De même, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i| \times |a_i + b_i|^{p-1} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

D'où, en ré-injectant dans l'inégalité de départ, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p &\leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right) \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Etudions maintenant $\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}$

Tout d'abord, de la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, nous tirons $pq = p + q$ et donc que $(p-1)\,q = p$. Doù, nous pouvons écrire que :

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{\frac{1}{q}}$$

D'autre part, de $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$, nous avons :

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{1-\frac{1}{p}} = \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{-\frac{1}{p}}$$

Nous avons donc :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \leqslant \left(\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{-\frac{1}{p}}$$

Ce qui est équivalent, par simplification à :

$$1 \leqslant \left(\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{-\frac{1}{p}}$$

Ce qui nous donne l'inégalité demandée : $\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$

11.8.6 Fonctions à variations bornées

Exercice 45 :

1. *Montrer que les fonctions monotones sur un intervalle borné $[a; b]$ sont à variations bornées.*

   C'est une question très facile.
   Pour nous simplifier, nous supposons f croissante. La démonstration est identique si f est décroissante.
   Donc, comme $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$, nous avons

   $$f(x_1) \leqslant f(x_2) \leqslant \cdots \leqslant f(x_N)$$

   Et donc $|f(x_{i+1}) - f(x_i)| = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, de telle sorte que :

   $$\sum_{i=1}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=1}^{N-1} f(x_{i+1}) - f(x_i) = f(b) - f(a)$$

   Ainsi, pour toute subdivision $\Sigma : a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$ de l'intervalle $[a; b]$ nous avons

   $$\sum_{i=1}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leqslant f(b) - f(a) = M$$

   f est donc bien à variations bornées

2. *Montrer que si f est k-lipstzienne sur l'intervalle $[a; b]$ alors elle est à variations bornées*

   Si f est k-lipstzienne sur l'intervalle $[a; b]$, ceci veut dire que pour tout $x \in [a; b]$ et tout $y \in [a; b]$, nous avons

   $$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

   Ainsi, pour toute subdivision $\Sigma : a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$ de l'intervalle $[a; b]$ nous avons

   $$\sum_{i=1}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{N-1} k|x_{i+1} - x_i| = k\sum_{i=1}^{N-1}(x_{i+1} - x_i) = k(b-a) = M$$

   Ainsi, f est bien à variations bornées

Exercice 46 :

1. *Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors f est à variations bornées*

   Considérons donc l'expression $\displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$

   Par le théorème des accroissements finis, nous pouvons écrire qu'il existe $\xi_i \in]x_i : x_{i+1}[$ tel que

   $$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(\xi_i)$$

   Et donc

   $$\left|\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right| = |f'(\xi_i)| \iff |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = |x_{i+1} - x_i|\,|f'(\xi_i)|$$

   Comme $f \in \mathcal{C}^1([a;b])$, f' est continue sur l'intervalle $[a;b]$ et donc $\sup\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$ existe.

   Si nous posons $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$, nous avons $M > 0$ et donc :

   $$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leqslant M\,|x_{i+1} - x_i|$$

   Et donc,

   $$\sum_{i=1}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{N-1} M\,|x_{i+1} - x_i| = M(b-a)$$

   Ainsi, f est bien à variations bornées

2. *Calculer alors $V_a^b(f)$*

   - Reprenons toujours l'expression $\displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$

     En regardant $f(x_{i+1}) - f(x_i)$, nous avons $f(x_{i+1}) - f(x_i) = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t$

     Et donc :

     $$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

     De telle sorte que :

     $$\sum_{i=1}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

     Nous avons donc $V_a^b(f) \leqslant \displaystyle\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$

   - Considérons la subdivision particulière de $[a;b]$:

     $$x_1 = a \qquad x_{i+1} - x_1 = \frac{b-a}{N} \qquad x_N = b$$

     Alors, par le théorème des accroissements finis, nous avons $|f(x_{i+1}) - f(x_i)| = |x_{i+1} - x_i|\,|f'(\xi_i)|$ où $\xi_i \in]x_i : x_{i+1}[$, c'est à dire $|f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \dfrac{b-a}{N}|f'(\xi_i)|$

     Et alors :

     $$\sum_{i=1}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N-1} |f'(\xi_i)|$$

     L'expression $\dfrac{b-a}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} |f'(\xi_i)|$ apparaît comme une somme de Riemann, et comme $f \in \mathcal{C}^1([a;b])$,

     $|f'|$ est continue sur l'intervalle $[a;b]$ et donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N-1} |f'(\xi_i)| = \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$

Ainsi, $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{N-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|=\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t$, ce qui termine de démontrer que

$$V_a^b(f)=\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Exercice 47 :

Soient f et g 2 fonctions à variations bornées sur l'intervalle $[a;b]$. Comparer $V_a^b(f+g)$ à $V_a^b(f)+V_a^b(g)$

f et g étant à variations bornées, nous avons, pour toute subdivision de l'intervalle $[a;b]$,

$$\sum_{i=1}^{N-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|<V_a^b(f)\ \text{ et }\ \sum_{i=1}^{N_1-1}|g(y_{i+1})-g(y_i)|\leqslant V_a^b(g)$$

Alors, pour toute subdivision $\Sigma: a=x_1<x_2<\cdots<x_N=b$ de l'intervalle $[a;b]$ nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N-1}|(f+g)(x_{i+1})-(f+g)(x_i)| &= \sum_{i=1}^{N-1}|f(x_{i+1})+g(x_{i+1})-f(x_i)-g(x_i)|\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{N-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|+\sum_{i=1}^{N-1}|g(x_{i+1})-g(x_i)|\\ &\leqslant V_a^b(f)+V_a^b(g)\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision $\Sigma: a=x_1<x_2<\cdots<x_N=b$ de l'intervalle $[a;b]$ nous avons donc, en particulier, $\sup\limits_{\Sigma}\sum\limits_{i=1}^{N-1}|(f+g)(x_{i+1})-(f+g)(x_i)|\leqslant V_a^b(f)+V_a^b(g)$

C'est à dire $V_a^b(f+g)\leqslant V_a^b(f)+V_a^b(g)$

Ainsi, si f et g sont à variations bornées, il en est de même de $f+g$

Chapitre 12

Fonctions transcendantes

12.1 Fonctions Exponentielles

En L_0, nous avons vu la fonction exponentielle comme fonction réciproque de la fonction logarithme, la fonction logarithme étant elle-même définie par une intégrale
Nous nous proposons ici, de définir d'abord la fonction exponentielle (ou les fonctions exponentielles) comme solution d'une équation fonctionnelle. La fonction logarithme sera, cette fois ci, définie comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

12.1.1 Problème

Nous souhaitons connaître toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues, dérivables en 0 et non nulles telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous ayions :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y) \tag{12.1}$$

Remarque 1 :

De manière évidente, la fonction nulle $\mathcal{O}$ est solution de l'équation fonctionnelle du type 12.1

La fonction nulle est la fonction $\mathcal{O} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{O}(x) = 0$

Pour nous mettre dans le cadre de l'équation fonctionnelle proposée, nous supposons désormais, f solution de 12.1 et non nulle
Nous allons progresser petit à petit dans la résolution de ce problème.

12.1.2 Utilisation de la seule continuité

1. Si f est solution de 12.1 et non nulle alors $f(0) = 1$

   Démonstration

   En effet :
   $\longrightarrow$ Nous avons $f(0+0) = f(0) \times f(0) \iff f(0) = f(0)^2$, d'où nous tirons $f(0) = 1$ ou $f(0) = 0$
   $\longrightarrow$ Si $f(0) = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $f(x+0) = f(x) \times f(0) = 0$ et f est la fonction nulle ; il y a donc contradiction.
   $\longrightarrow$ Donc, $f(0) = 1$

2. Si f est solution de 12.1 et non nulle alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$

Démonstration

$\longrightarrow$ Nous allons d'abord démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$
Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0) \times f(x_0) = 0$.
Ce qui signifie que f est la fonction nulle. Contradiction.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$

$\longrightarrow$ Nous allons démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$
Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f(A) \leqslant 0$
Pour plus de facilité, nous allons supposer $A > 0$, mais ce n'est pas le plus important *(la démonstration est semblable si nous supposons $A < 0$)*
Considérons l'intervalle $[0; A]$; sur cet intervalle, f est continue et nous avons $f(0) \times f(A) \leqslant 0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0; A]$ tel que $f(x_0) = 0$; ce qui est impossible.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$

$\longrightarrow$ Une autre solution pour démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$$

Puisque pour pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$

3. Si f est solution de 12.1 et non nulle alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (f(x))^{-1}$

Démonstration

Nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 = f(0) = f(x - x) = f(x) \times f(-x)$$

C'est à dire $f(x) \times f(-x) = 1 \Longleftrightarrow f(-x) = \dfrac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$

4. Si f est solution de 12.1 et non nulle alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = (f(x))^n$

Démonstration

Nous allons faire cette démonstration par récurrence.
Soit donc $x \in \mathbb{R}$
$\longrightarrow$ C'est vrai pour $n = 0$, puisque $f(0 \times x) = f(0) = (f(x))^0$
$\longrightarrow$ Supposons que $f(nx) = (f(x))^n$ est vrai au rang n
$\longrightarrow$ Démontrons que la propriété est vraie au rang $n + 1$:

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) \times f(x) = (f(x))^n \times f(x) = (f(x))^{n+1}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = (f(x))^n$

5. Si f est solution de 12.1 et non nulle alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = (f(x))^n$

Démonstration

$\longrightarrow$ Nous venons de démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = (f(x))^n$
$\longrightarrow$ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}^-$, c'est à dire que n est un entier naturel négatif.
Il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que $n = -n'$ et donc $f(nx) = f(-n'x)$
Nous avons démontré que $f(-n'x) = \dfrac{1}{f(n'x)}$.
Donc :

$$f(-n'x) = \frac{1}{f(n'x)} = \frac{1}{(f(x))^{n'}} = (f(x))^{-n'} = (f(x))^n$$

Ce que nous voulions

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = (f(x))^n$

6. Si f est solution de 12.1 et non nulle alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = (f(x))^r$

Démonstration

Soient $x \in \mathbb{R}$, et $r \in \mathbb{Q}$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \dfrac{n}{p}$

$\longrightarrow$ Nous montrons que si $p \in \mathbb{N}^*$, alors $f\left(\dfrac{1}{p} \times x\right) = (f(x))^{\frac{1}{p}}$

Nous avons : $f(x) = f\left(p \times \dfrac{1}{p} \times x\right) = \left(f\left(\dfrac{1}{p} \times x\right)\right)^p$

Donc, de $f(x) = \left(f\left(\dfrac{1}{p} \times x\right)\right)^p$, nous tirons $f\left(\dfrac{1}{p} \times x\right) = (f(x))^{\frac{1}{p}}$

$\longrightarrow$ Ainsi $f(rx) = f\left(\dfrac{n}{p} \times x\right) = f\left(n \times \dfrac{1}{p} \times x\right) = \left(f\left(\dfrac{1}{p} \times x\right)\right)^n = (f(x))^{\frac{n}{p}} = (f(x))^r$

7. (a) Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, nous avons, en particulier, $f(r) = f(1)^r$
   (b) En posant $a = f(1)$, nous avons $f(r) = a^r$

Justification

(a) Dans l'égalité $f(rx) = (f(x))^r$, il suffit de faire $x = 1$

(b) D'autre part, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $f(x) > 0$, nous avons, en particulier $a > 0$

8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$ nous posons :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) \text{ et } a^x = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n}$$

Justification

f est continue sur $\mathbb{R}$, et de cette continuité, nous pouvons écrire, d'après 10.4.6, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} r_n\right)$

9. En conclusion, les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, non nulles telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous ayions : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ sont les fonctions du type $f(x) = a^x$ où $a > 0$

12.1.3 Etude de la dérivabilité

Soit f, solution de 12.1 et non nulle. Alors :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$
2. Sa dérivée vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = kf(x)$ où $k = f'(0)$
3. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $f^{(n)}(x) = k^n f(x)$

Démonstration

1. Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en entier

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et montrons que f est dérivable en x_0. Etudions le rapport $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Nous avons donc :

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0) f(h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0)(f(h) - 1)}{h} = f(x_0) \times \frac{(f(h) - f(0))}{h}$$

Donc,

$$\lim_{h\to0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to0} f(x_0) \times \frac{(f(h) - f(0))}{h} = f(x_0) \times \lim_{h\to0} \frac{(f(h) - f(0))}{h} = f(x_0) \times f'(0)$$

Ainsi, f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et nous avons $f'(x_0) = f'(0) f(x_0)$

2. **Une autre démonstration du résultat $f'(x) = kf(x)$, en supposant f dérivable sur $\mathbb{R}$**
   On appelle $h(y) = f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
   h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(y) = f'(x+y) = f(x) \times f'(y)$
   Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y = 0$, nous avons $f'(x+0) = f(x) \times f'(0) \Longleftrightarrow f'(x) = f'(0) \times f(x)$
   Ce que nous voulions
3. Du résultat précédent, nous avons $f''(x) = k \times f'(x) = k^2 f(x)$. Le résultat se démontre par une récurrence simple.
   - ▷ C'est vrai pour $n = 0$, puisque $f^{(0)}(x) = f(x) = k^0 f(x)$
   - ▷ Supposons qu'à l'ordre n, nous ayions $f^{(n)}(x) = k^n f(x)$
   - ▷ Démontrons que nous avons la propriété à l'ordre $n+1$
     La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, nous avons :
     $$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = (k^n f(x))' = k^n f'(x) = k^n \times kf(x) = k^{n+1} f(x)$$

   Donc, f est dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $f^{(n)}(x) = k^n f(x)$

12.1.4 Proposition : étude de la réciproque

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\begin{cases} f'(x) = kf(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous avons $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

Démonstration

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ et nous considérons la fonction de la variable x définie par :$\varphi(x) = \dfrac{f(x+y)}{f(x)}$.
Alors, la dérivée φ' est donnée par :

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x+y)f(x) - f'(x)f(x+y)}{(f(x))^2} = \frac{kf(x+y)f(x) - kf(x)f(x+y)}{(f(x))^2} = 0$$

Cette dérivée est donc nulle sur $\mathbb{R}$ en entier et donc, φ est conctante sur $\mathbb{R}$ en entier.
Nous avons, en particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0)$. Donc :

$$\frac{f(x+y)}{f(x)} = \frac{f(y)}{f(0)} = f(y) \Longleftrightarrow f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

Remarque 2 :

Ainsi, rechercher une fonction différentiable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ est équivalent à rechercher une fonction différentiable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = kf(x)$ et $f(0) = 1$

12.1.5 Utilisation de la formule de Taylor

$\longrightarrow$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous pouvons appliquer, sur le segment $[0; x]$ (ou $[x; 0]$) la formule de Taylor jusqu'à un ordre arbitraire n :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \text{ où } 0 < \theta < 1$$

$\longrightarrow$ Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f^{(n)}(0) = k^n f(0) = k^n$, la formule de Taylor devient :

$$f(x) = 1 + kx + \frac{(kx)^2}{2} + \cdots + \frac{(kx)^n}{n!} + \frac{(kx)^{n+1}}{(n+1)!}f(\theta x) \text{ où } 0 < \theta < 1$$

$\longrightarrow$ Pour $k=1$, nous appelons $f(x)=\exp(x)$, et donc $f'(x)=f(x)$ et $f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$
Ces considérations nous amènent à étudier la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$g_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

12.1.6 Théorème

On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $g_n(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$

La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0;A]$ où $A>0$

Démonstration

Nous allons faire 2 démonstrations de ce résultat

1. **Première démonstration**

   (a) Montrons que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$

   Soit $x\geqslant 0$

   $\longrightarrow$ Alors, la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

   En effet :

$$g_{n+1}(x)-g_n(x)=\frac{x^{k+1}}{(n+1)!}\geqslant 0$$

   Nous avons donc $g_{n+1}(x)\geqslant g_n(x)$ et la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante

   $\longrightarrow$ Montrons que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée

   Soit $p\in\mathbb{N}$ tel que $p>2x$, ou, ce qui est équivalent, $x<\dfrac{p}{2}$; on peut donc prendre $p=[2x]+1$; c'est à dire que p est fixé.

   - Pour tout $k\geqslant p$, nous avons :

$$\frac{x^k}{k!}=\frac{x^p}{p!}\times\frac{x^{k-p}}{(p+1)(p+2)\cdots(k-1)k}$$

     De plus, $x^{k-p}<\left(\dfrac{p}{2}\right)^{k-p}=p^{k-p}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-p}$ et d'autre part :

$$\frac{p^{k-p}}{(p+1)(p+2)\cdots(k-1)k}=\frac{p}{p+1}\times\frac{p}{p+2}\times\cdots\times\frac{p}{k-1}\times\frac{p}{k}<1$$

     Puisque, pour tout $j=1,\cdots,k-p$, nous avons $\dfrac{p}{p+j}<1$. D'où nous pouvons tirer :

$$\frac{x^k}{k!}\leqslant\frac{x^p}{p!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-p}\times\frac{p^{k-p}}{(p+1)(p+2)\cdots(k-1)k}\leqslant\frac{x^p}{p!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-p}$$

     Ainsi, pour tout $k\geqslant p$, nous avons $\dfrac{x^k}{k!}\leqslant\dfrac{x^p}{p!}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-p}$

   - Maintenant, pour tout $n\geqslant p$, nous avons :

$$\begin{aligned}
g_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{p-1}\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=p}^{n}\frac{x^k}{k!}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{p-1}\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=p}^{n}\frac{x^p}{p!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-p}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{p-1}\frac{x^k}{k!}+\frac{x^p}{p!}\sum_{k=p}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-p}=g_{p-1}(x)+\frac{x^p}{p!}\times\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-p+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)\\
&\leqslant g_{p-1}(x)+2\frac{x^p}{p!}
\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ La suite numérique $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée et converge vers une limite que nous notons $g(x)$

$\longrightarrow$ Cette limite est donnée par $g(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{g_n(x)\}$, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $g_n(x) < g(x)$

$\longrightarrow$ Mieux, nous avons, pour tout $n \geqslant p$, $g(x) < g_{p-1}(x) + 2\dfrac{x^p}{p!}$

Remarque
Cette majoration dépend de $x \geqslant 0$ et n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$

L'inégalité est en particulier vraie pour $p = n$, où nous avons $g(x) < g_{n-1}(x) + 2\dfrac{x^n}{n!}$ et donc :

$$g_n(x) < g(x) < g_{n-1}(x) + 2\frac{x^n}{n!} \iff g_n(x) < g(x) < g_n(x) + \frac{x^n}{n!} \iff 0 < g(x) - g_n(x) < \frac{x^n}{n!}$$

(b) Montrons que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0; A]$ où $A > 0$

Nous avons toujours $0 < g(x) - g_n(x) < \dfrac{x^n}{n!}$ et donc, pour tout $x \in [0; A]$, nous avons $\dfrac{x^n}{n!} \leqslant \dfrac{A^n}{n!}$.

Nous en déduisons que, pour tout $x \in [0; A]$, nous avons $0 < g(x) - g_n(x) < \dfrac{A^n}{n!}$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{A^n}{n!} = 0$

Donc, pour tout $x \in [0; A]$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} (g(x) - g_n(x)) = 0$, ce qui montre que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0; A]$ où $A > 0$

2. **Seconde démonstration : la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy sur $[0; A]$ où $A > 0$**

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, nous avons $g_{n+p}(x) - g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{n+k}}{(n+k)!}$

$\dfrac{x^{n+k}}{(n+k)!} = \dfrac{x^n}{n!} \times \dfrac{x^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$

Soit $n > 2A \iff A < \dfrac{n}{2}$

Comme $x \leqslant A$, nous avons aussi $x \leqslant \dfrac{n}{2}$ et donc :

$$\frac{x^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \leqslant \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{n^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$$

Comme tout à l'heure, nous avons $\dfrac{n^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \leqslant 1$ et donc

$$\frac{x^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{n+k}}{(n+k)!} = & \frac{x^n}{n!} \sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \\
\leqslant & \frac{x^n}{n!} \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
\leqslant & \frac{2x^n}{n!} \leqslant \frac{2A^n}{n!}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2A^n}{n!} = 0$, alors, pour tout $x \in [0; A]$ $\lim\limits_{n\to\infty} g_{n+p}(x) - g_n(x) = 0$.

Ce qui montre que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy sur $[0; A]$ et donc uniformément convergente sur $[0; A]$

12.1.7 Définition

On appelle e le nombre $g(1)$. Ainsi : $e = \lim_{n \to +\infty} g_n(1) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

Remarque 3 :

1. Nous avons démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geqslant 0$, nous avons $0 < g(x) - g_n(x) < \frac{x^n}{n!}$, en particulier pour $x = 1$ où nous obtenons l'inégalité $0 < e - g_n(1) < \frac{1}{n!}$, ce qui nous autorise à donner une approximation décimale de e ; nous avons $e \simeq 2,718$
2. Bien entendu, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $g_n(0) = 1$, nous avons $g(0) = 1$

12.1.8 Proposition

Le nombre e n'est pas rationnel, cest à dire $e \notin \mathbb{Q}$

Démonstration

D'après les résultats précédents, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < e - g_n(1) < \frac{1}{n!}$.
Supposons que e soit rationnel, c'est à dire $e \in \mathbb{Q}$ et posons $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
L'inégalité $0 < e - g_n(1) < \frac{1}{n!}$ est vrai aussi pour $n = q$ et nous avons donc :

$$0 < e - g_q(1) < \frac{1}{q!} \Longleftrightarrow 0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q!}$$

Multiplions cette inégalité par $(q-1)!$; nous obtenons alors :

$$0 < p \times (q-1)! - q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < 1$$

- ▷ Nous avons $p \times (q-1)! \in \mathbb{N}$
- ▷ Ensuite : $q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = q! \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) = 2 \times q! + \frac{q!}{2} + \frac{q!}{3!} + \cdots + 1$

  Et donc, $q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$

Donc $p \times (q-1)! - q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$, mais, il n'y a pas d'entier strictement compris entre 0 et 1

Donc, $e \notin \mathbb{Q}$

12.1.9 Continuité

g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$

Démonstration

C'est une démonstration simple.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est un polynôme de degré n, donc continu.
La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonc g. g est donc une fonction continue.

12.1.10 Dérivabilité

La fonction g est dérivable et sa dérivée vérifie $g' = g$

Démonstration

C'est une application directe de 11.6.2

1. La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues de classe $\mathcal{C}^1$ qui converge uniformément, donc simplement vers g
2. Etudions la dérivée :

$$g'_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = g_{n-1}(x)$$

   La suite de fonctions $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g
3. Et donc, d'après 11.6.2, nous avons $g' = g$

12.1.11 Expression de g

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $g(x) = e^x$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $g'(x) = g(x) = e^x$

Démonstration

Nous avons établi que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $g' = g$ et que $g(0) = 1$.
D'après la réciproque 12.1.4, nous avons $g(x+y) = g(x)\,g(y)$.
Or, toutes ces fonctions sont du type $g(x) = a^x$ avec $a = g(1)$. Ici, nous avons $g(1) = e$.
Donc, $g(x) = e^x$

12.1.12 Propriété de $g(x) = e^x$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
2. Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
3. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
4. La fonction exponentielle est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$
5. La fonction e^x est convexe

Le graphe de la fonction exponentielle est sur la figure 12.1

Démonstration

Voilà un énoncé qui s'apparente à un enfonçage de portes ouvertes ; il m'a, par contre, semblé nécessaire de résumer en cet énoncé des propriétés très importantes

1. <u>Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$</u>

   Cette propriété résulte de l'étude précédente des fonctions vérifiant $g(x+y) = g(x)\,g(y)$
2. <u>Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$</u>

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $g_n(x) < g(x) = e^x$, nous avons, en particulier, $\dfrac{x^n}{n!} < e^x$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = +\infty$, nous déduisons $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

D'autre part, de l'égalité $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, nous pouvons écrire : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

3. <u>La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$</u>
   Evidemment, puisque sa dérivée est e^x et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$
4. <u>La fonction exponentielle est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$</u>
   La fonction exponentielle étant croissante et continue est donc bijective.
5. <u>La fonction e^x est convexe</u>
   La dérivée seconde de e^x étant e^x, toujours positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit la convexité

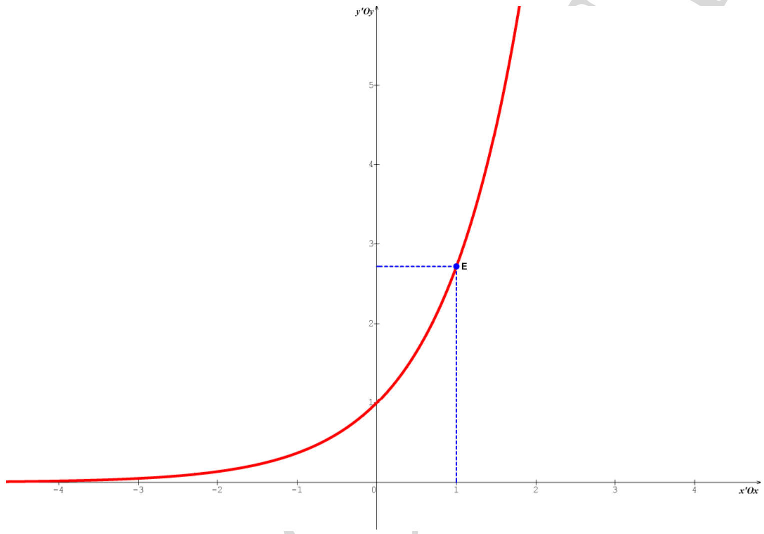

FIGURE 12.1 – Le graphe de la fonction exponentielle e^x

Remarque 4 :

Soit u une fonction dérivable définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$. Par le théorème de la dérivée des fonctions composées, nous avons :

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}$$

12.1.13 Proposition

Toutes les fonctions dérivables solutions de l'équation $f(x+y) = f(x)\, f(y)$ sont les fonctions exponentielles du type $f(x) = e^{kx}$ où $k \in \mathbb{R}$

<u>Démonstration</u>

On a démontré que toutes les fonctions continues et dérivables telles que $f(x+y) = f(x)\, f(y)$ sont du type $f(x) = a^x$ avec $a > 0$ et $f(1) = a$.
La fonction $g(x) = e^x$ étant bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$, pour tout $a > 0$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $a = e^k$ et donc $f(x) = a^x = \left(e^k\right)^x = e^{kx}$

Remarque 5 :

<u>**En guise de conclusion**</u>, faisons une petite intrusion en Algèbre.
En fait, la fonction $\exp(x) = e^x$ est un isomorphisme continu du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp x \times \exp y$

12.1.14 Quelques exercices

Exercice 1 :

1. Etudier la continuité de $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$
2. Etudier la continuité et faire le graphe de la fonction $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2 :

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $|e^x - 1 - x| \leqslant \dfrac{x^2}{2} e^{|x|}$

Exercice 3 :

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$; nous considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et par $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$.
Donner la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 4 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$. Démontrer que la dérivée n-ième de f_n est $f_n^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-n-1} e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 5 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha)$. Démontrer que la dérivée n-ième de f est donnée par $f^{(n)}(x) = e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha + n\alpha)$

12.2 Fonctions Logarithmes

12.2.1 La fonction logarithme népérien

On définit la fonction logarithme népérien comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle $\exp(x) = e^x$, c'est à dire :

$$\begin{cases} \ln : \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \qquad x & \longmapsto & \ln x \end{cases}$$

Justification :

Cette fonction réciproque existe puisque nous avons démontré que la fonction $\exp(x) = e^x$ est continue et croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{*+}$.

12.2.2 Propriété de la fonction logarithme népérien

On considère la fonction logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors :

1. Nous avons l'équivalence suivante :
$$y = \ln x \Longleftrightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R} \\ x = e^y \\ \ln 1 = 0 \end{cases}$$
2. Pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$, nous avons $\ln ab = \ln a + \ln b$.
En particulier, $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$ et, pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, et tout $a > 0$, $\ln a^r = r \ln a$
3. La dérivée de $\ln$ est donnée par $\ln' x = \dfrac{1}{x}$

Démonstration

1. La démonstration du point 1 est l'application simple de ce qu'est une fonction réciproque
2. • Soient $a > 0$ et $b > 0$. Alors :

$$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab \text{ et } ab = e^{\ln(ab)}$$

   Nous avons donc $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln(ab)}$, et de la bijection de la fonction exponentielle nous avons $\ln ab = \ln a + \ln b$

   • Soit $a > 0$; clairement : $0 = \ln 1 = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{a}$

   Donc, $\ln a + \ln \frac{1}{a} = 0$, et donc $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

   • Nous avons, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{Q}$:

$$\exp(ry) = (\exp(y))^r \iff e^{ry} = (e^y)^r$$

   Donc, pour tout $x > 0$, nous avons :

$$\exp(r \ln x) = (\exp(\ln x))^r \iff \exp(r \ln x) = x^r$$

   En passant au logarithme, nous avons donc :

$$\ln(\exp(r \ln x)) = \ln x^r \iff \ln x^r = r \ln x$$

3. La fonction exponentielle étant une fonction continue, monotone, croissante et différentiable, sa fonction réciproque ln est, elle aussi continue, monotone, croissante et différentiable.
   D'après les théorèmes de dérivation des fonctions réciproques, nous avons, pour tout $x > 0$:

$$\ln' x = \frac{1}{\exp' \circ \ln x} = \frac{1}{\exp \circ \ln x} = \frac{1}{x}$$

Remarque 6 :

Intrusion en algèbre : la fonction ln est l'isomorphisme de groupe réciproque de l'isomorphisme de groupe exp et les propriétés exposées en 12.2.2 ; les démonstrations de 12.2.2 sont la copie des démonstrations des propriétés de tous les isomorphismes réciproques.

Remarque 7 :

Soit u une fonction dérivable définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ et telle que, pour tout $x \in D$ nous ayons $u(x) > 0$. Par le théorème de la dérivée des fonctions composées, nous avons :

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f(x) = \ln|x| \end{cases}$$

Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, car, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|x| > 0$. Par les théorèmes de composition des fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
D'autre part, $\lim\limits_{x \to 0} \ln|x| = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln|x| = +\infty$

Etude des dérivées

- Si $x > 0$, alors $f(x) = \ln x$ et $f'(x) = \frac{1}{x}$
- Si $x < 0$, alors $f(x) = \ln(-x)$ et $f'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

Remarque 8 :

Soit u une fonction dérivable définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ et telle que, pour tout $x \in D$ nous ayons $u(x) \neq 0$. Par le théorème de la dérivée des fonctions composées, nous avons :

$$(\ln |u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

12.2.3 Graphe de $\ln x$

1. Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$
2. La fonction $\ln x$ est croissante et concave, car sa dérivée seconde est donnée par $\dfrac{-1}{x^2}$, laquelle est négative.

12.2.4 Quelques limites remarquables

1. Pour tout $x > 0$,nous avons $\ln x < \sqrt{x}$
2. Pour tout $x \geqslant 1$, nous avons $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
3. Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
4. Nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$

Démonstration

1. $\longrightarrow$ Si nous avons $0 < x \leqslant 1$, il n'y a pas de problème, puisque dans ce cas, nous avons $\ln x \leqslant 0$ et $\sqrt{x} \geqslant 0$. La question est donc résolue

   $\longrightarrow$ Supposons $x \geqslant 1$.
   Nous allons étudier les variations de la fonction $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.
   La dérivée de f est donnée par $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2 - \sqrt{x}}{2x}$. Le signe de la dérivée ne dépend donc que de celui de $2 - \sqrt{x}$.
   D'où le tableau de variations :

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$2\ln 2 - 2$	$\searrow$	

   Ce qui veut dire que, pour tout $x \geqslant 1$,$f(x) = \ln x - \sqrt{x} \leqslant 2\ln 2 - 2$. Or, Comme $1 < 2 < e$, nous avons $\ln 2 < 1$ et donc $2\ln 2 - 2 < 0$.
   Nous en déduisons donc que, pour $x \geqslant 1$, $\ln x < \sqrt{x}$

   Donc, pour tout $x > 0$, $\ln x < \sqrt{x}$
2. Nous venons de démontrer que pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \ln x < \sqrt{x}$; en divisant par x, nous obtenons $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, par les théorèmes de limites par encadrement, nous obtenons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Nous pouvons donc dire que la direction asymptotique du graphe de $\ln x$ est l'axe des abscisses $x'Ox$

3. Faisons le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$. Nous avons alors :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = \lim_{X \to +\infty} \frac{-\ln X}{X} = 0$$

Ce que nous voulions.

Graphe de $\ln x$

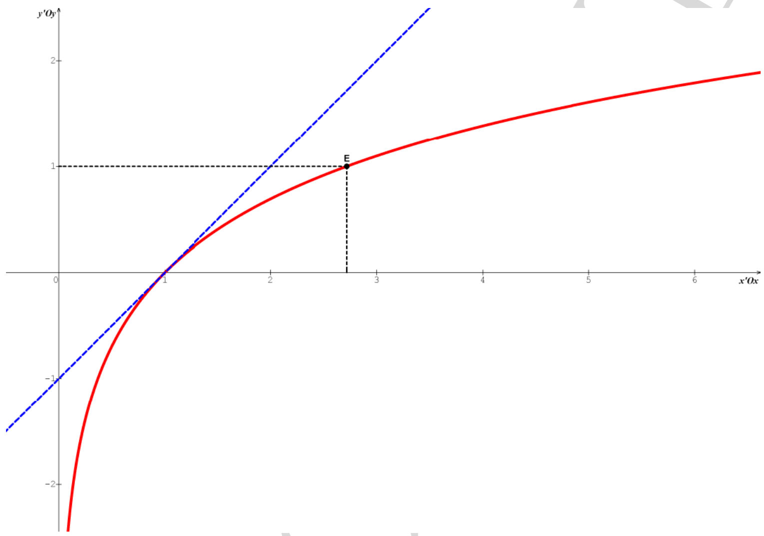

FIGURE 12.2 – Le graphe de la fonction logarithme népérien $\ln x$

12.2.5 Exercices

Exercice 6 :

Calculez les dérivées des fonctions f, g et h suivantes :

1. $f(x) = \ln(\ln x)$
2. $g(x) = \arctan(\ln x)$
3. $h(x) = \ln \sqrt{1 - 2\sin^2 x}$

Exercice 7 :

1. Soit f la fonction définie pour $x > 1$ par $f(x) = \ln(\ln x)$. Montrer qu'elle est concave.
2. En déduire l'inégalite vraie pour $a > 1$ et $b > 1$: $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln a \ln b}$

Exercice 8 :

Quelques inégalités

1. Démontrer que, pour $x > 0$, nous avons $\ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$
2. Démontrer que, pour $x > -1$, $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$
3. Démontrer que, pour tout a et b tels que $0 < b \leqslant a$, nous avons $\dfrac{a-b}{a} \leqslant \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) \leqslant \dfrac{a-b}{b}$

Exercice 9 :

Etudier les fonctions suivantes et les représenter graphiquement :

1. $f(x) = \ln(\sin x)$
2. $g(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

12.2.6 Fonctions exponentielles de base a où $a > 0$

- Nous avons démontré que toutes les fonctions continues et différentiables vérifiant $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ sont toutes du type $f(x) = a^x$ où $a = f(1) > 0$
- La fonction exponentielle $\exp(x) = e^x$ étant continue, croissante et donc bijective, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $a = e^k$, c'est à dire que $k = \ln a$
- Nous posons, par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, $a^x = e^{x \ln a}$

Remarque 9 :

De $a^x = e^{x \ln a}$, nous tirons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln a^x = x \ln a$

12.2.7 Propriétés de la fonction exponentielle de base $a > 0$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $a > 0$, nous avons :

1. $a^{x+y} = a^x \times a^y$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $(ab)^x = a^x \times b^x$

Démonstration

1. Par définition, $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{x \ln a} \times e^{y \ln a} = a^x \times a^y$
2. Toujours par définition $(a^x)^y = e^{y \ln a^x} = e^{xy \ln a} = a^{xy}$
3. De même, $(ab)^x = e^{x \ln ab} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x \ln a} \times e^{x \ln b} = a^x \times b^x$

12.2.8 Proposition

Soit $a > 0$

1. La dérivée de la fonction $f(x) = a^x$ est $f'(x) = \ln a \times a^x$
2. Si $a > 1$
   - La fonction $f(x) = a^x$ est croissante et continue donc bijective
   - Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$
3. Si $a < 1$
   - La fonction $f(x) = a^x$ est décroissante et continue donc bijective
   - Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
4. Pour $a > 1$ et$a < 1$, la fonction $f(x) = a^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$

Démonstration

Cette proposition est simple à démontrer et sa démonstration prend comme point de départ l'identité $a^x = e^{x \ln a}$; ensuite, tout en découle.
Pour démontrer la convexité, il suffit de calculer la dérivée seconde. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $f''(x) = (\ln a)^2 \times a^x$, laquelle est positive sur $\mathbb{R}$. f est donc convexe sur $\mathbb{R}$

Remarque 10 :

Il est clair que si $a = 1$, la fonction f est contante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $f(x) = 1$

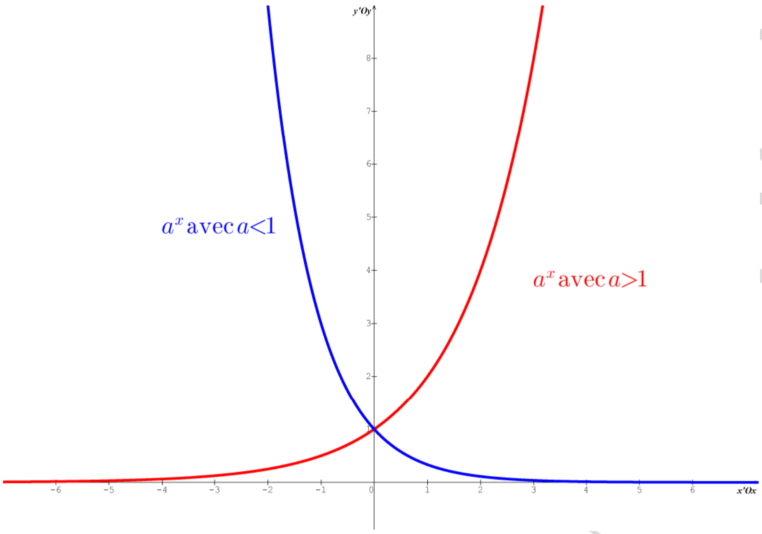

FIGURE 12.3 – Les graphes des fonctions du type $f(x) = a^x$ avec $a > 1$ et $a < 1$

Graphe de la fonction a^x

12.2.9 Proposition : limites remarquables

1. Nous avons $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ converge simplement vers la fonction $f(x) = e^x$

Démonstration

1. En utilisant le rapport de dérivation, nous avons $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Or, $(1+h)^{\frac{1}{h}} = e^{\dfrac{\ln(1+h)}{h}}$.
   En utilisant les théorèmes sur la composition des applications, nous avons $\lim\limits_{h\to 0} e^{\frac{\ln(1+h)}{h}} = \lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$. Ce que nous voulions.
   Et, en faisant le changement de variables $h = \dfrac{1}{x}$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$.
2. Soit $x\in\mathbb{R}$.
   Nous avons $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$. Intéressons nous à l'expression $n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$:
$$\begin{aligned} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) &= n\times\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\times\frac{x}{n} \\ &= x\times\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \end{aligned}$$
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x\times\dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) = x$

Exercice 10 :

Soit $a > 0$. Trouver toutes les valeurs de x et y strictement positives vérifiant le système
$$\left\{\begin{aligned} x^y &= y^x \\ y &= ax \end{aligned}\right.$$

Exercice 11 :

Soit $a > 0$. Donner $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$ puis $\lim\limits_{k \to \pm\infty} k\left(a^{\frac{1}{k}} - 1\right)$

Exercice 12 :

Nous considérons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$. Donner $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

12.2.10 Fonction logarithme de base a avec $a > 0$ et $a \neq 1$

Soit $a > 0$ avec $a \neq 1$

1. On appelle fonction logarithme de base a la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base a notée $\log_a(x)$. Nous avons donc :
$$y = a^x \iff \begin{cases} y > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ x = \log_a(y) \end{cases}$$
2. Pour $a > 0$ et $a \neq 1$ nous avons $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$
3. Pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, nous avons $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
4. La fonction $\log_a(x)$ est :
   (a) Admet pour dérivée première $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
   (b) Croissante et concave si $a > 1$
   (c) Décroissante et convexe si $a < 1$

Démonstration

1. Comme la fonction a^x est continue et strictement monotone, elle est bijective ; d'où l'existence de $\log_a(x)$
2. Pour $a > 0$ et $a \neq 1$, nous avons $y = \log_a(x) \iff x = a^y = e^{y \ln a}$.
   Donc $\ln x = y \ln a \iff y = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \log_a(x)$. Ce que nous voulions
3. Pour démontrer que pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, nous avons $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, il suffit d'utiliser le fait que $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ et les propriétés de la fonction logarithme.
4. Il est évident que la dérivée de $\log_a(x)$ est $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$ et la dérivée seconde est $\log_a''(x) = \dfrac{-1}{x^2 \ln a}$
   (a) Donc, si $a > 1$, alors $\ln a > 0$ et donc $\log_a'(x) > 0$ et $\log_a''(x) < 0$ d'où $\log_a(x)$ est bien croissante et concave.
   (b) Et si $a < 1$, alors $\ln a < 0$ et donc $\log_a'(x) < 0$ et $\log_a''(x) V 0$ d'où $\log_a(x)$ est bien décroissante et convexe.

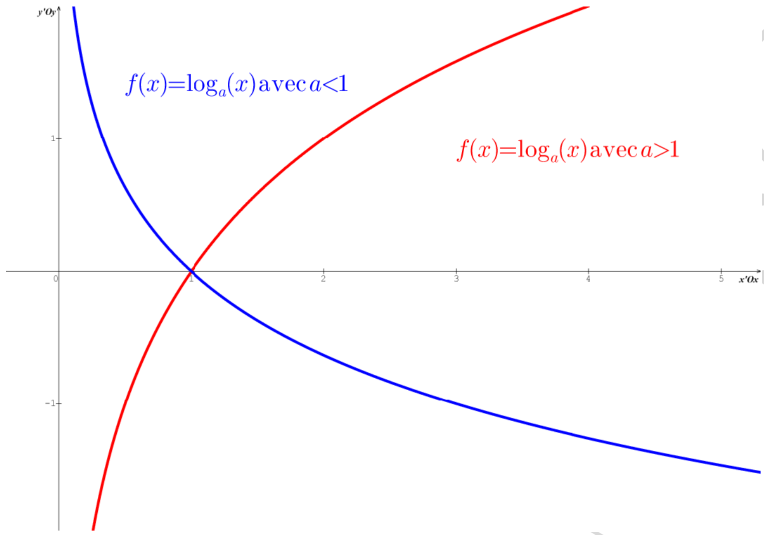

FIGURE 12.4 – Le graphe de la fonction $\log_a(x)$ pour $a > 1$ et $a < 1$

Graphe de la fonction $\log_a(x)$

12.2.11 Fonction puissance x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   On appelle fonction puissance la fonction f définie par $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.
   Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}^{*+}$
2. La fonction puissance est continue et différentiable sur $\mathbb{R}^{*+}$.
   Sa dérivée est donnée par $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
3. On suppose $\alpha < 0$
   ▷ La fonction f est décroissante et convexe sur $\mathbb{R}^{*+}$
   ▷ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
4. On suppose $\alpha > 0$
   ▷ On peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$
   ▷ Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   ▷ Si $\alpha > 1$, alors, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. f est convexe
   ▷ Si $0 < \alpha < 1$, alors, f n'est pas dérivable en 0 et admet, en 0, une tangente verticale. f est concave

Démonstration

1. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ comme composée de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$

$$f'(x) = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = \frac{\alpha}{x} \times e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

2. Si $\alpha < 0$,
   - Alors sur $\mathbb{R}^{*+}$, nous avons $\alpha x^{\alpha-1} < 0$ et donc f est décroissante.
     La dérivée seconde est donnée par $\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. Si $\alpha < 0$, alors $\alpha - 1 < 0$ et $\alpha(\alpha-1) > 0$ et donc la dérivée seconde est positive sur $\mathbb{R}^{*+}$. f est donc convexe sur $\mathbb{R}^{*+}$
   - Comme $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha \ln x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha \ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$
   - Toujours, comme $\alpha < 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \alpha \ln x = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} e^{\alpha \ln x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^\alpha = +\infty$
3. Si $\alpha > 0$

- Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \alpha \ln x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^{\alpha \ln x} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^\alpha = 0$. Il nous est donc possible de prolonger f par continuité, en posant $f(0) = 0$
- Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha \ln x = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\alpha \ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$
- <u>Supposons $\alpha > 1$</u>
  - ⋆ Etudions la dérivabilité de f en 0 :
  $$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha - 1}$$
  Comme $\alpha - 1 > 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^{\alpha-1} = 0$, ce qui montre que si $\alpha > 1$ f est dérivable à droite de 0 et de dérivée $f'(0) = 0$
  - ⋆ La dérivée seconde de f est toujours donnée par $\alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2}$ et est donc positive. f est donc convexe sur $\mathbb{R}^{*+}$
- <u>Supposons $0 < \alpha < 1$</u>
  - ⋆ Etudions la dérivabilité de f en 0 :
  $$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha - 1} = e^{(\alpha-1)\ln x}$$
  Comme $\alpha - 1 < 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (\alpha - 1) \ln x = +\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^{(\alpha-1)\ln x} = +\infty$ ce qui montre que si $0 < \alpha < 1$, f n'est pas dérivable à droite de 0 ; elle admet, en 0, une tangente verticale.
  - ⋆ La dérivée seconde de f, toujours donnée par $\alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2}$ est donc négative. f est donc concave sur $\mathbb{R}^{*+}$

Remarque 11 :

1. Il est évident que que si $\alpha = 0$ alors f est la fonction constante toujours égale à 1
2. Il est tout aussi évident que si $\alpha = 1$ alors $f(x) = x$ est la fonction f est la première bissectrice.

Exercice 13 :

1. On suppose $\alpha > 1$. Démontrer que si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $x^\alpha \leqslant x$ et que si $x \geqslant 1$, alors $x^\alpha \geqslant x$
2. On suppose $0 < \alpha < 1$. Démontrer que si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $x^\alpha \geqslant x$ et que si $x \geqslant 1$, alors $x^\alpha \leqslant x$

Graphe de x^α

12.2.12 Généralisation

Soient u et v 2 fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$, de domaine respectif $\mathcal{D}_u \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_v \subset \mathbb{R}$.
On suppose que, pour tout $x \in \mathcal{D}_u$, nous avons $u(x) > 0$

1. On pose, par définition, $(u(x))^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$
2. Si u et v sont différentiables, alors $(u(x))^{v(x)}$ l'est aussi et sa dérivée est donnée par :
$$\left((u(x))^{v(x)}\right)' = (u(x))^{v(x)} \left(v'(x) \ln(u(x)) + v(x) \times \frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

Exercice 14 :

Donner le domaine de définition et la dérivée des fonctions suivantes

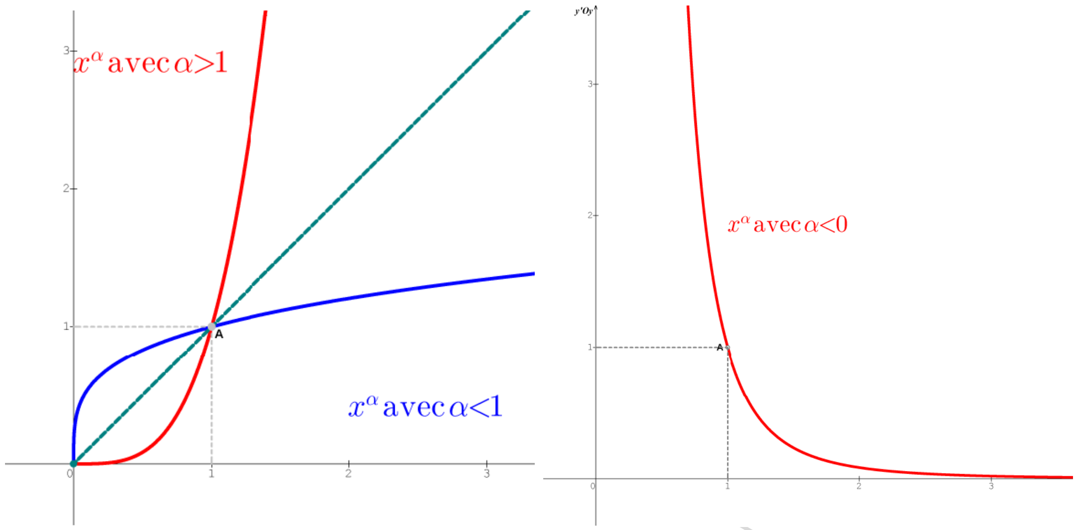

FIGURE 12.5 – Le graphe de la fonction x^α pour $\alpha > 1$, $0 < \alpha < 1$ et $\alpha < 0$

1. $f_1(x) = x^x$
2. $f_2(x) = x^{\frac{1}{x}}$
3. $f_3(x) = a^{b^x}$ avec $a > 0$ et $b > 0$
4. $f_4(x) = a^{x^b}$ avec $a > 0$ et $b > 0$

12.3 Fonctions Hyperboliques

12.3.1 Définition

1. On appelle cosinus hyperbolique, la fonction $\cosh x$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
2. On appelle sinus hyperbolique, la fonction $\sinh x$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
3. On appelle tangente hyperbolique, la fonction $\tanh x$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

12.3.2 Propriétés algébriques

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous avons :
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \text{ et } \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ et $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

Démonstration

1. Nous avons $\cosh^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{2}$ et $\sinh^2 x = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{2}$.
   D'où, en additionnant, nous obtenons :
   $$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{2} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{2} = 1$$
   Ce que nous voulions
2. (a) Tout d'abord, $\cosh(x+y) = \dfrac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2}$ et donc
   $$2\cosh(x+y) = e^{x+y} + e^{-x-y} = \frac{e^x e^y}{2} + \frac{e^x e^y}{2} + \frac{e^{-x} e^{-y}}{2} + \frac{e^{-x} e^{-y}}{2}$$
   D'où :
   $$\begin{aligned}
   2\cosh(x+y) &= \frac{e^x e^y}{2} + \frac{e^x e^y}{2} + \frac{e^{-x} e^y}{2} - \frac{e^{-x} e^y}{2} + \frac{e^x e^{-y}}{2} - \frac{e^x e^{-y}}{2} + \frac{e^{-x} e^{-y}}{2} + \frac{e^{-x} e^{-y}}{2} \\
   &= \frac{e^x e^y}{2} + \frac{e^x e^{-y}}{2} + \frac{e^{-x} e^y}{2} + \frac{e^{-x} e^{-y}}{2} + \frac{e^{-x} e^{-y}}{2} - \frac{e^x e^{-y}}{2} + \frac{e^x e^y}{2} - \frac{e^x e^{-y}}{2} \\
   &= e^x\left(\frac{e^y}{2} + \frac{e^{-y}}{2}\right) + e^{-x}\left(\frac{e^y}{2} + \frac{e^{-y}}{2}\right) + e^y\left(\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}\right) + e^{-y}\left(\frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^x}{2}\right) \\
   &= e^x \cosh y + e^{-x}\cosh y + e^y \sinh x + e^{-y} \times -\sinh x \\
   &= \cosh y\,(e^x + e^{-x}) + \sinh x\,(e^y - e^{-y}) \\
   &= 2\cosh y \cosh x + 2\sinh x \sinh y
   \end{aligned}$$
   D'où $2\cosh(x+y) = 2\cosh y \cosh x + 2\sinh x \sinh y \iff \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

   (b) La démonstration de l'égalité $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ est semblable et laissée au lecteur.
3. Pour démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ et $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$, il suffit de faire $x = y$ dans les identités $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ et $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

Exercice 15 :

Démontrer que nous avons aussi :

- $2\cosh x = 1 + 2\sinh^2 x$
- $1 + \cosh 2x = 2\cosh^2 x$
- $\tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}$
- $\cosh 2x = \dfrac{1 + \tanh^2 x}{1 - \tanh^2 x}$
- $\sinh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1 - \tanh^2 x}$
- $\tanh^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{\cosh 2x + 1}$
- $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

12.3.3 Propriétés analytiques

1. Pour les fonctions $\cosh x$ et $\sinh x$
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\cosh x \geqslant 1$
   (b) Pour tout $x \geqslant 0$, nous avons $\sinh x \geqslant 0$ et tout $x \leqslant 0$, nous avons $\sinh x \leqslant 0$
   (c) La fonction $\cosh$ est paire alors que la fonction $\sinh$ est impaire
   (d) i. La fonction $\cosh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $\sinh$
       ii. La fonction $\sinh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $\cosh$
   (e) Nous avons $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \cosh x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty$, puis $\lim\limits_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty$
2. Pour la fonction $\tanh x$
   (a) La fonction $\tanh$ est impaire
   (b) La fonction $\tanh$ est dérivable et de dérivée $\tanh' x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
   (c) Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \tanh x = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \tanh x = -1$

Démonstration

Les démonstrations sont très simples et laissées au lecteur

12.3.4 Graphes

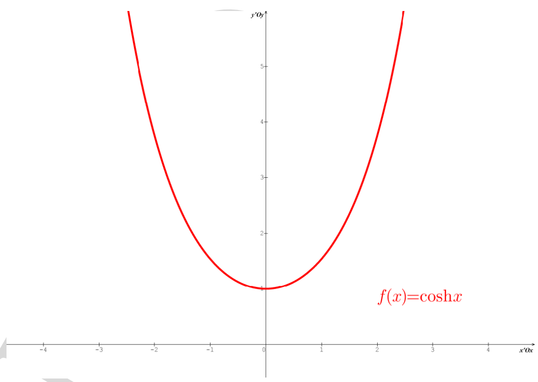

FIGURE 12.6 – Le graphe de la fonction $\cosh x$

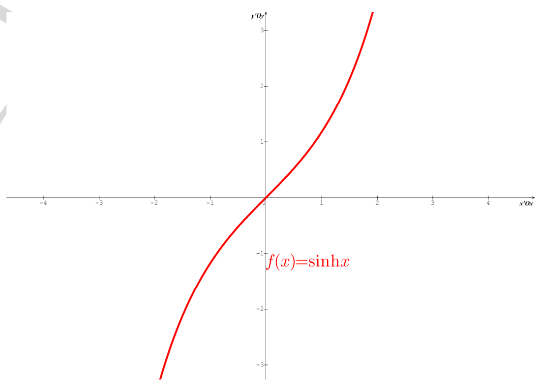

FIGURE 12.7 – Le graphe de la fonction $\sinh x$

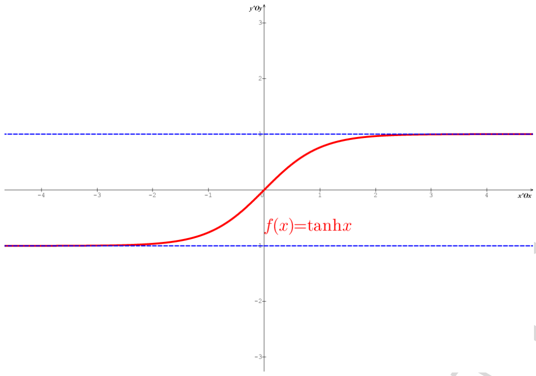

FIGURE 12.8 – Le graphe de la fonction $\tanh x$

Exercice 16 :

1. Quelle est la dérivée de la fonction $f(x) = \ln \tanh x$
2. Etudier et représenter la fonction $g(x) = \tanh \dfrac{x-1}{x+1}$
3. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $h_\lambda(x) = \dfrac{1}{\lambda + \cosh x}$ soit définie ? Etudier et représenter la fonction $h_2(x) = \dfrac{1}{2 + \cosh x}$

12.3.5 La fonction Argument sinus hyperbolique

1. On appelle Argument sinus hyperbolique, la fonction $\operatorname{Arg\,sinh} x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R}$ et qui est la fonction réciproque de la fonction $\sinh x$. Nous avons :

$$y = \operatorname{Arg\,sinh} x \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R} \\ x = \sinh y \end{cases}$$

2. Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Arg\,sinh} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{Arg\,sinh} x = -\infty$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\operatorname{Arg\,sinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
4. La fonction $\operatorname{Arg\,sinh} x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est :

$$\operatorname{Arg\,sinh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Démonstration

1. La fonction $\sinh x$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ce qui justifie l'existence de la fonction $\operatorname{Arg\,sinh} x$ et que nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Arg\,sinh} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{Arg\,sinh} x = -\infty$
2. Soit $y = \operatorname{Arg\,sinh} x$; alors $x = \sinh y \iff x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. Nous avons :

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \iff 2x = e^y - e^{-y} \iff 2xe^y = e^{2y} - 1 \iff e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Faisons le changement $Y = e^y$; nous avons $Y > 0$ et l'équation $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$ devient $Y^2 - 2xY - 1 = 0$ dont les deux solutions sont :

$$Y_1 = x + \sqrt{x^2+1} \text{ et } Y_2 = x - \sqrt{x^2+1}$$

Nous avons $x^2+1>x^2$ et donc $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|$, c'est à dire $\sqrt{x^2+1}>x$ et $\sqrt{x^2+1}>-x$ et alors $Y_1=x+\sqrt{x^2+1}>0$ et $Y_2=x-\sqrt{x^2+1}<0$.
Nous ne retenons donc que $Y_1=x+\sqrt{x^2+1}$
Donc $e^y=x+\sqrt{x^2+1}$, d'où $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, c'est à dire $\operatorname{Arg}\sinh x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

3. Nous pourrions, effectivement utiliser la dérivation de $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, mais nous allons utiliser la dérivée de la fonction réciproque.
En utilisant le cours, nous pouvons écrire : $\operatorname{Arg}\sinh' x=\dfrac{1}{\sinh'\left(\operatorname{Arg}\sinh x\right)}$
Nous avons $\sinh'\left(\operatorname{Arg}\sinh x\right)=\cosh\left(\operatorname{Arg}\sinh x\right)$. En posant $y=\operatorname{Arg}\sinh x$, de l'identité $\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$, nous tirons $\cosh^2 y=\sinh^2 y+1$, et comme $\cosh y\geqslant 1$, nous tirons $\cosh y=\sqrt{\sinh^2 y+1}$; comme $\sinh^2 y=x^2$, nous obtenons $\cosh y=\sqrt{x^2+1}$, d'où :
$$\operatorname{Arg}\sinh' x=\frac{1}{\sinh'\left(\operatorname{Arg}\sinh x\right)}=\frac{1}{\cosh\left(\operatorname{Arg}\sinh x\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Graphe de la fonction Argument sinus hyperbolique *(figure 12.9)*

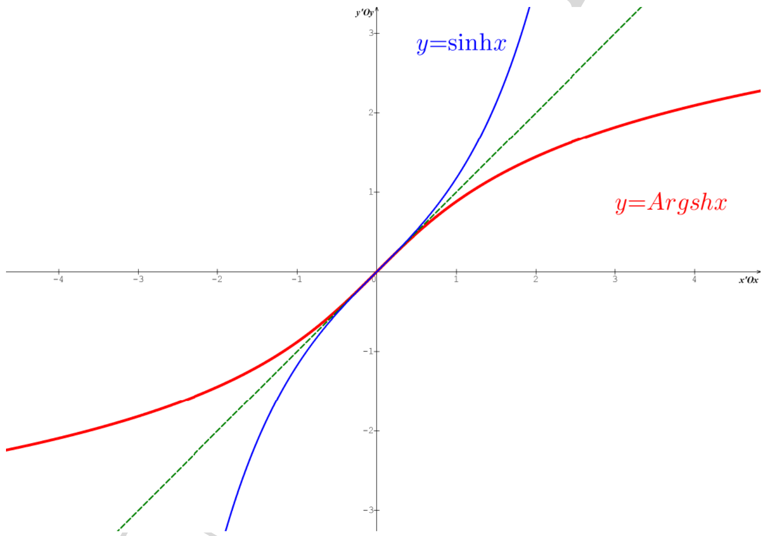

FIGURE 12.9 – Le graphe de la fonction $\operatorname{Arg}\sinh x$

12.3.6 La fonction Argument cosinus hyperbolique

1. On appelle Argument cosinus hyperbolique, la fonction $\operatorname{Arg}\cosh x : [+1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$, définie sur $[+1;+\infty[$ et qui est la fonction réciproque de la fonction $\cosh x$. Nous avons :
$$y=\operatorname{Arg}\cosh x \Longleftrightarrow \begin{cases} x\geqslant +1 \text{ et } y\geqslant 0 \\ x=\cosh y\end{cases}$$
2. Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{Arg}\cosh x=+\infty$ et $\operatorname{Arg}\cosh 0=1$
3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, nous avons $\operatorname{Arg}\cosh x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$
4. La fonction $\operatorname{Arg}\sinh x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est :
$$\operatorname{Arg}\cosh' x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Démonstration

1. La fonction $\cosh x$, n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; il suffit de le voir dans la figure 12.6. Par contre, la fonction $\cosh x$ est continue et croissante de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $[+1;+\infty[$ et est donc bijective de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $[+1;+\infty[$. Ce qui justifie l'existence de la fonction $\operatorname{Arg}\cosh x$ de $[+1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}^{*+}$ et que nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arg}\cosh x = +\infty$ et $\operatorname{Arg}\cosh 1 = 0$

2. Soit $y = \operatorname{Arg}\cosh x$; alors $x = \cosh y \iff x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$. Nous avons :
$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \iff 2x = e^y + e^{-y} \iff 2xe^y = e^{2y} + 1 \iff e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$
Faisons le changement $Y = e^y$; nous avons $Y \geqslant 1$, puisque $y \geqslant 0$, et l'équation $e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$ devient $Y^2 - 2xY + 1 = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4\left(x^2-1\right)$; comme $x \geqslant +1$, nous avons $\Delta \geqslant 0$
Nous avons donc deux solutions qui sont :
$$Y_1 = x + \sqrt{x^2-1} \text{ et } Y_2 = x - \sqrt{x^2-1}$$
Il faut donc comparer Y_1 et Y_2 à 1
   - ⋆ Nous avons :
$$\begin{aligned} Y_2 - 1 = &\ x - \sqrt{x^2-1} - 1 \\ = &\ x - 1 - \sqrt{x^2-1} \\ = &\ \sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{x^2-1} \text{ possible car } x \geqslant 1 \\ = &\ \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}\right) \end{aligned}$$
Or, comme pour $x \geqslant 1$ $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} < 0$, nous avons $Y_2 - 1 \leqslant 0$, c'est à dire $Y_2 \leqslant 1$
   - ⋆ Un raisonnement semblable montrerait que $Y_1 \geqslant 0$

   Et nous choisissons donc $Y_1 = x + \sqrt{x^2-1}$, c'est à dire $e^y = x + \sqrt{x^2-1} \iff y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ et donc $\operatorname{Arg}\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

3. Comme tout à l'heure, nous pourrions utiliser la dérivation de $\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, mais nous allons, une nouvelle fois, utiliser la dérivée de la fonction réciproque.
En utilisant le cours, nous pouvons écrire : $\operatorname{Arg}\cosh' x = \dfrac{1}{\cosh'(\operatorname{Arg}\cosh x)}$
Nous avons $\cosh'(\operatorname{Arg}\cosh x) = \sinh(\operatorname{Arg}\cosh x)$. En posant $y = \operatorname{Arg}\cosh x$, de l'identité $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, nous tirons $\sinh^2 y = \cosh^2 y - 1$.
Comme $y = \operatorname{Arg}\cosh x$, alors $y \geqslant 0$ et donc $\sinh y \geqslant 0$ et nous tirons alors $\sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1}$; comme $\cosh^2 y = x^2$, nous obtenons $\sinh y = \sqrt{x^2-1}$, d'où :
$$\operatorname{Arg}\cosh' x = \frac{1}{\cosh'(\operatorname{Arg}\cosh x)} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{Arg}\cosh x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Graphe de la fonction Argument cosinus hyperbolique *(figure 12.10)*

Exercice 17 :

Etudier la fonction $\varphi(x) = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|$

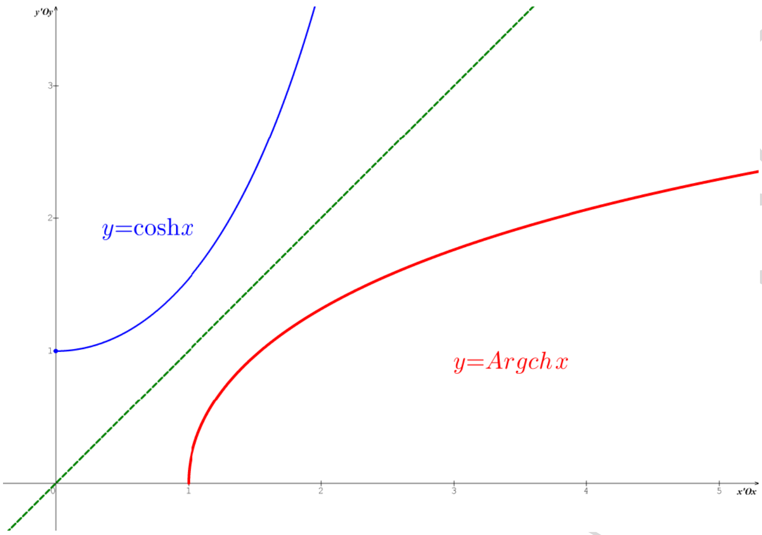

FIGURE 12.10 – Le graphe de la fonction $\operatorname{Arg}\cosh x$

12.3.7 La fonction Argument tangente hyperbolique

1. On appelle Argument tangente hyperbolique, la fonction $\operatorname{Arg}\tanh x :]-1;+1[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie sur $]-1;+1[$ et qui est la fonction réciproque de la fonction $\tanh x$. Nous avons :

$$y = \operatorname{Arg}\tanh x \iff \begin{cases} x \in]-1;+1[\text{ et } y \in \mathbb{R} \\ x = \tanh y \end{cases}$$

2. Nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to+1\\x<+1}} \operatorname{Arg}\tanh x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \operatorname{Arg}\tanh x = -\infty$
3. Pour tout $x \in]-1;+1[$, nous avons $\operatorname{Arg}\tanh x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
4. La fonction $\operatorname{Arg}\tanh x$ est dérivable sur $]-1;+1[$ et sa fonction dérivée est :

$$\operatorname{Arg}\tanh' x = \frac{1}{1-x^2}$$

Démonstration

1. La fonction $\tanh x$, est croissante et continue de $\mathbb{R}$ dans $]-1;+1[$; elle y est donc bijective. Ce qui justifie l'existence de la fonction $\operatorname{Arg}\tanh x$ de $]-1;+1[$ dans $\mathbb{R}$ et que nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to+1\\x<+1}} \operatorname{Arg}\tanh x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \operatorname{Arg}\tanh x = -\infty$
2. Soit $y = \operatorname{Arg}\tanh x$; alors $x = \tanh y \iff x = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$. Nous avons :

$$x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \iff x\left(e^{2y}+1\right) = e^{2y}-1 \iff e^{2y}(x-1) = -1-x \iff e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

D'où, bien entendu, $2y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \iff y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

3. Il suffit de dériver $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$.

Nous obtenons donc comme dérivée : $\operatorname{Arg}\tanh' x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Graphe de la fonction Argument tangente hyperbolique *(figure 12.11)*

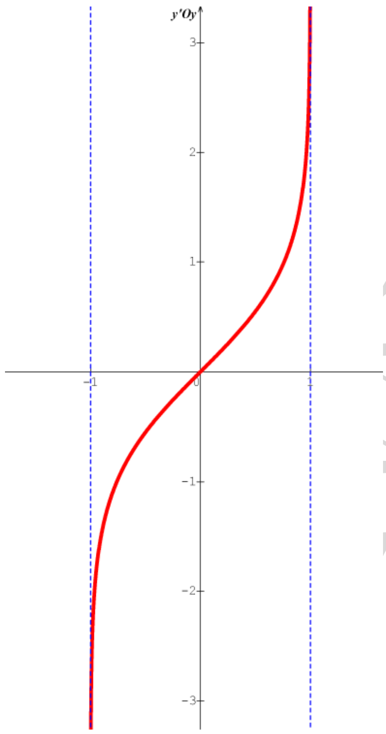

FIGURE 12.11 – Le graphe de la fonction $\operatorname{Arg}\tanh x$

Exercice 18 :

1. Calculer la dérivée de $f(x) = \operatorname{Arg}\tanh\sqrt{x}$
2. Exprimer en fonction de ln les fonctions :

$$g(x) = \operatorname{Arg}\sinh\frac{1}{x} \text{ et } h(x) = \operatorname{Arg}\tanh\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

12.4 Croissances comparées

Nous allons, ici, faire plusieurs études de limites, et surtout comparer les comportements, en $+\infty$ des fonctions logarithmes, puissances ou exponentielles
La base de cette étude seront les limites, démontrées en 12.2.4 :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$$

12.4.1 Comparaison des fonctions puissances et logarithme népérien en $+\infty$

Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$

Démonstration

Tout d'abord, remarquons que nous pouvons écrire, d'après les propriétés du logarithme,

$$\ln x = \frac{1}{\alpha}\ln x^\alpha = \frac{\beta}{\alpha}\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

De telle sorte que :

$$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \frac{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta}{\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \times \left(\frac{\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$$

En faisant le changement de variable $X = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$, nous obtenons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{\ln X}{X}\right)^\beta$$

Comme d'après 12.2.4 nous avons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, nous avons donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \left(\frac{\ln X}{X}\right)^\beta = 0$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$. Ce que nous voulions.

12.4.2 Comparaison des fonctions puissances et logarithme népérien en 0

Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0$

Démonstration

Comme précédemment, nous avons $\ln x = \dfrac{\beta}{\alpha}\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ et $x^\alpha = \left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta$, de telle sorte que :

$$x^\alpha (\ln x)^\beta = \left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta \times \left(\frac{\beta}{\alpha}\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \times \left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta \times \left(\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta$$

En faisant le changement de variable $X = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$, nous obtenons :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^\alpha (\ln x)^\beta = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^\alpha (\ln x)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \lim_{\substack{X\to0\\X>0}} (X\ln X)^\beta$$

Toujours d'après 12.2.4 où nous avons $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x = 0$, nous avons donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} (X\ln X)^\beta = 0$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0$.

12.4.3 Comparaison des fonctions exponentielles et puissance en $+\infty$

Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)^\beta}{x^\alpha} = +\infty$

Démonstration

Faisons le changement de variable $X = e^x \iff x = \ln X$. Alors :

$$\frac{(e^x)^\beta}{x^\alpha} = \frac{X^\beta}{(\ln X)^\alpha}$$

D'après 12.4.7, nous avons $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{(\ln X)^\alpha}{X^\beta} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{X^\beta}{(\ln X)^\alpha} = +\infty$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)^\beta}{x^\alpha} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X^\beta}{(\ln X)^\alpha} = +\infty$. Ce que nous voulions.

Remarque 12 :

Comme $(e^x)^\beta = e^{\beta x}$, nous avons, pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$

12.4.4 Corollaire

Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$

Démonstration

Nous avons $x^\alpha e^{-\beta x} = \dfrac{x^\alpha}{e^{\beta x}}$. D'après 12.4.3, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$

12.4.5 Comparaison des fonctions a^x avec $a > 1$ et puissance en $+\infty$

Pour tout $a > 1$ et tout $\alpha > 0$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$

Démonstration

Soit $a > 1$
La fonction exponentielle étant bijective, il existe un unique $\beta > 0$ tel que $a = e^\beta$ et donc $a^x = e^{\beta x}$
De là, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$

12.4.6 Comparaison des fonctions a^x avec $0 < a < 1$ et puissance en $+\infty$

Pour tout $0 < a < 1$ et tout $\alpha > 0$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = 0$

Démonstration

Soit $0 < a < 1$
La fonction exponentielle étant bijective, il existe un unique $\beta < 0$ tel que $a = e^\beta$ et donc $a^x = e^{\beta x}$.
Donc :

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha e^{-\beta x}}$$

Comme $-\beta > 0$, nous avons, d'après 12.4.3, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha e^{-\beta x}} = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = 0$

12.4.7 Comparaison des fonctions $\log_a x$ avec $a > 1$ et puissance en $+\infty$

Pour tout $a > 1$, tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0$

Démonstration

Soient $a > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$; alors :

$$\frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = \frac{\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{1}{\ln a}\right)^\beta \times \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}$$

D'après 12.4.7, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0$

Remarque 13 :

On démontrerait, facilement, en utilisant des arguments semblables que pour tout $a > 1$ et tout $\alpha > 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{\log_a x} = +\infty$ [1]

12.4.8 Comparaison des fonctions $\log_a x$ avec $0 < a < 1$ et puissance en $+\infty$

Pour tout $0 < a < 1$, tout $\alpha > 0$ nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$

Démonstration

Comme tout à l'heure, nous avons $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ avec, cette fois ci, comme $0 < a < 1$, $\ln a < 0$; on ne peut donc pas élever $\ln a$ à la puissance β avec $\beta \in \mathbb{R}$
C'est donc très simple :

$$\frac{\log_a x}{x^\alpha} = \frac{\frac{\ln x}{\ln a}}{x^\alpha} = \frac{1}{\ln a} \times \frac{\ln x}{x^\alpha}$$

Donc, d'après 12.4.7,*(avec $\beta = 1$ et $a = e$)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$

Remarque 14 :

Il est aussi facile de démontrer que, si $0 < a < 1$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x^\alpha}{\log_a x} = -\infty$

12.4.9 Comparaison des fonctions $\log_a x$ et puissance en 0

1. Pour tout $a > 1$, tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^\alpha (\log_a x)^\beta = 0$
2. Pour tout $0 < a < 1$ et tout $\alpha > 0$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^\alpha \log_a x = 0$

Démonstration

1. Soient $a > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

   Alors : $x^\alpha (\log_a x)^\beta = x^\alpha \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)^\beta = \left(\dfrac{1}{\ln a}\right)^\beta x^\alpha (\ln x)^\beta$

   D'après 12.4.2, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^\alpha (\log_a x)^\beta = 0$

2. Soient maintenant $0 < a < 1$ et $\alpha > 0$. Alors, $x^\alpha \log_a x = x^\alpha \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Et donc, toujoiurs d'après 12.4.2, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^\alpha \log_a x = 0$

1. Le faire ! !

12.4.10 Comparaison des fonctions $\log_b x$ et a^x en $+\infty$

1. On suppose $a > 1$
   (a) Si $b > 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{\log_b x} = +\infty$
   (b) Si $0 < b < 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{\log_b x} = -\infty$
2. On suppose $0 < a < 1$
   Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x \log_b x = 0$

Démonstration

1. Supposons $a > 1$

   La clef de la résolution de cette question est d'écrire $\dfrac{a^x}{\log_b x} = \dfrac{a^x}{x^\alpha} \times \dfrac{x^\alpha}{\log_b x} = \ln b \times \dfrac{a^x}{x^\alpha} \times \dfrac{x^\alpha}{\ln x}$ avec $\alpha > 0$

   Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{\ln x} = +\infty$ Donc :

   ⋆ Si $b > 1$, alors $\ln b > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln b \times \dfrac{a^x}{x^\alpha} \times \dfrac{x^\alpha}{\ln x} = +\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{\log_b x} = +\infty$

   ⋆ Et si $0 < b < 1$, alors $\ln b < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln b \times \dfrac{a^x}{x^\alpha} \times \dfrac{x^\alpha}{\ln x} = -\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{\log_b x} = -\infty$

2. Supposons $0 < a < 1$
   Il existe $\beta > 0$ tel que $a = e^{-\beta}$ et nous pouvons donc écrire, pour tout $\alpha > 0$:

$$a^x \log_b x = e^{-\beta x} \log_b x = e^{-\beta x} \times \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{1}{\ln b} \times x^\alpha e^{-\beta x} \times \frac{\ln x}{x^\alpha}$$

   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$, nous avons bien $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x \log_b x = 0$

12.4.11 Exercices

Exercice 19 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et nous considérons la fonction f_n définie par :

$$\begin{cases} f_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

   Montrer que f_n est continue en 0 et dérivable en 0

2. Démontrer que la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

   est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 20 :

Démontrer que la dérivée n-ième de la fonction $g(x) = e^{-x^2}$ est de la forme $g^{(x)} = P_n(x) e^{-x^2}$ où P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$

12.5 Exercices complémentaires

Exercice 21 :

Trouver $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$

Exercice 22 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous notons :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_\alpha : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_\alpha(x) = e^{\alpha x} \end{array} \right.$$

Montrer que la famille de fonctions $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est une une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 23 :

1. Démontrer que la fonction logarithme ln n'est la restriction sur $]0;+\infty[$ d'aucune fonction fraction rationnelle
2. Démontrer que la fonction exponentielle exp n'est pas une fonction fraction rationnelle

Exercice 24 :

Démontrer que, pour tout $x \in]0;+1[$, nous avons $x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$

Exercice 25 :

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, nous avons $\tanh x = \dfrac{2}{\tanh 2x} - \dfrac{1}{\tanh x}$
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \tanh\left(2^k x\right)$

Exercice 26 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Evaluer $\Pi_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \Pi_n(x)$

Exercice 27 :

Soit $G : \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(t) = \operatorname{Argsh}(\tan t)$

1. Montrer que G est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que, pour tout $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$, nous avons
$$G'(t) = \cosh(G(t))$$
2. Démontrer que, pour tout $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$ nous avons $\tanh(G(t)) = \sin t$

Exercice 28 :

1. Soit $\Phi : [0:1[\longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : [0:1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \Phi(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - 2x \end{array} \right.$$
Il faut montrer que, pour tout $x \in [0:1[$, nous avons $\Phi(x) \geqslant 0$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on appelle f_n, l'application définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_n\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = x^n e^{-x} \end{array} \right.$$

   Il faut montrer que, pour tout $x \in [0 : n[$, nous avons $f_n(n+x) \geqslant f_n(n-x)$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\ dt \leqslant \int_n^{2n} f_n(t)\ dt$
4. Démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\int_0^x f_n(t)\ dt = n!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\ dt = n!$
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \geqslant \frac{e^n}{2}$

Exercice 29 :

Problèmes sur les équations fonctionnelles[2]

1. **Première équation fonctionnelle de Cauchy**
   On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ est additive sur $\mathbb{R}$ si, pour tous nombres réels x et y

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

   On se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble des fonctions f additives et continues sur $\mathbb{R}$.
   (a) **Résultats préliminaires**
      Soit f une fonction définie et additive sur $\mathbb{R}$.
      i. Déterminer $f(0)$
      ii. Démontrer que f est une fonction impaire.
      iii. Démontrer que, pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ et tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
      iv. En déduire que, pour tout nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ et tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, $f(rx) = rf(x)$
      v. Démontrer qu'il existe un nombre réel a tel que, pour tout nombre rationnel r, $f(r) = ar$
   (b) **Première méthode**
      Soit f une fonction additive et continue sur $\mathbb{R}$
      Déduire de la question précédente. qu'il existe un nombre réel a tel que, pour tout nombre réel x nous avons $f(x) = a.x$ Conclure.
   (c) **Seconde méthode**
      Soit f une fonction additive et continue sur $\mathbb{R}$
      i. Après avoir justifié l'existence de ces intégrales, démontrer que, pour tout nombre réel x, nous avons

$$f(x) = \int_0^1 f(x+t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$$

      ii. Démontrer que, pour tout nombre réel x

$$f(x) = \int_x^{x+1} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$$

2. Problèmes donnés au CAPES 2023

iii. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.

iv. Conclure.

2. **Restriction des hypothèses**

On pourra, pour les questions suivantes, utiliser les résultats démontrés dans les questions précédentes. L'objectif de cette partie est d'examiner l'effet de trois restrictions de l'hypothèse de continuité des fonctions additives sur $\mathbb{R}$.

(a) **Continuité en un point**

Soient un nombre réel $x_0 \in \mathbb{R}$ et une fonction f additive sur $\mathbb{R}$ continue en x_0.

i. Démontrer que f est continue en 0.

ii. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

iii. Conclure.

(b) **Monotonie**

Soit une fonction f additive et monotone sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un nombre réel.

i. Justifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

A. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in \mathbb{Q}$ et $b_n \in \mathbb{Q}$

B. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

C. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x_0$

ii. Démontrer que $f(x_0) = x_0 f(1)$.

iii. Conclure.

(c) **Encadrement**

Soient deux nombres réels $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, avec $\alpha < \beta$, et une fonction f additive sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $[\alpha;\beta]$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel.

i. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre rationnel $r_n \in \mathbb{Q}$ tel que $nx - r_n \in [\alpha;\beta]$.

ii. On pose $f(1) = a$. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(nx - r_n)| \geqslant n\,|f(x) - ax| - |a|\,|nx - r_n|$$

iii. Conclure

3. **Equation fonctionnelle de Jensen**

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Soit f une telle fonction.

(a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0)$

(b) On pose $f(0) = b$. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = f(x) - b$

Déterminer l'équation fonctionnelle vérifiée par g et résoudre l'équation fonctionnelle de Jensen.

4. On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}^{*+}$ telles que :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right)\left(f(x) = f\left(\frac{x^2+16}{2x}\right)\right)$$

Soit f une telle fonction

(a) On considère les fonctions :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{x^2+16}{2x} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h(x) = g(x) - x \end{array}\right.$$

i. Dresser le tableau des variations de g, déterminer $g(4)$ et préciser les limites de g en 0 et en $+\infty$

ii. Étudier le signe de la fonction h sur $\mathbb{R}^{*+}$

(b) i. Soient $x \in [+4; +\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 16}{2u_n}$ Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

ii. En déduire que, pour tout $x \in [+4; +\infty[$, nous avons $f(x) = f(4)$

(c) Procéder de manière analogue pout démontrer que, pour tout $x \in]0; 4[$, on a $f(x) = f(4)$

(d) Conclure

Exercice 30 :

Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous ayions :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - f(x)f(y)$$

12.6 Quelques exercices corrigés

12.6.1 Sur la fonction exponentielle

Exercice 1 :

1. *Etudier la continuité de* $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$

   ▷ A priori, cette fonction est définie pour $x \neq 0$
   ▷ D'autre part, elle est définie pour les $x \in \mathbb{R}$ tels que $1 - e^{\frac{1}{x}} \neq 0$, c'est à dire tels que $1 \neq e^{\frac{1}{x}}$.
   Or , il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{1}{x} = 0$
   ▷ Donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$

   Pour $x \neq 0$, la fonction $1 - e^{\frac{1}{x}}$ est continue et ne s'annule pas, donc $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

   <u>**Etude des limites en 0**</u>

   - A droite de 0, c'est à dire si $x > 0$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 - e^{\frac{1}{x}} = -\infty$ d'où
     $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$
   - Et maintenant, à gauche de 0, c'est à dire $x < 0$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$,
     et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} 1 - e^{\frac{1}{x}} = 1$
     d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}} = 1$, c'est à dire $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 1$

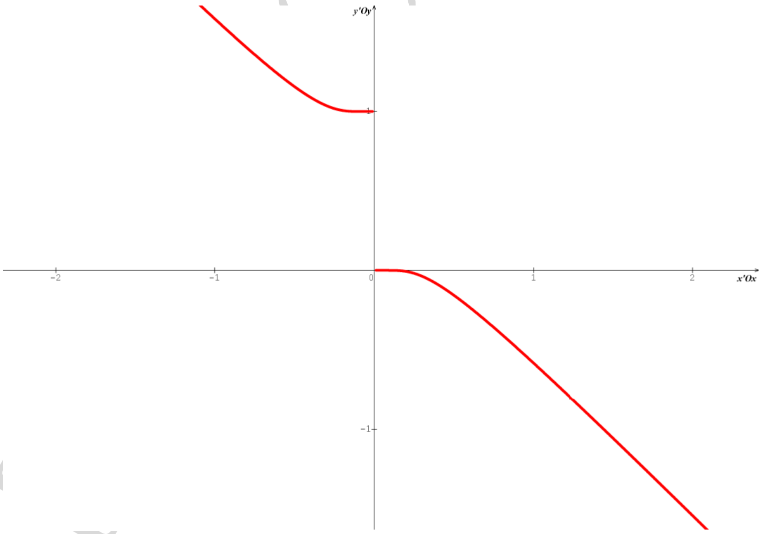

FIGURE 12.12 – Le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$ au voisinage de 0

2. *Etudier la continuité et faire le graphe de la fonction* $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$

   ▷ Tout d'abord, il est clair que g n'est définie que sur $\mathbb{R}^*$
   ▷ Etudions la continuité en $x = 0$.
   - A droite de 0, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$
   - A gauche de 0, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$

- ▷ En $+\infty$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$
- ▷ En $-\infty$, nous avons $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

La fonction dérivée de g est donnée par $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ est négative sur $\mathbb{R}^*$ et donc la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}^*$

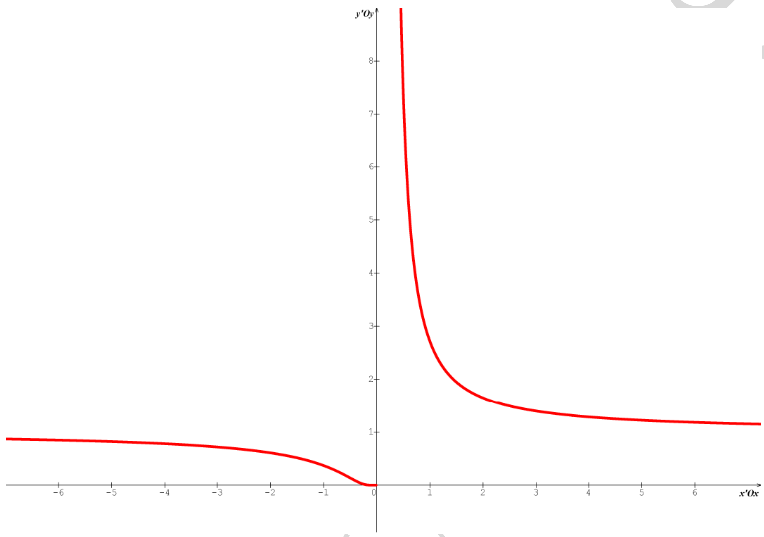

FIGURE 12.13 – Le graphe de la fonction $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 2 :

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $|e^x - 1 - x| \leqslant \dfrac{x^2}{2}e^{|x|}$

La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Nous pouvons utiliser la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en $x = 0$:

$$(\exists\theta \in]0;1[)\left(e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{\theta x}\right)$$

Nous avons donc aussi $e^x - 1 - x = \dfrac{x^2}{2}e^{\theta x}$, ce qui montre que $e^x - 1 - x \geqslant 0$.
D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\theta x \leqslant |\theta x| = \theta\,|x| \leqslant |x|$
De la croissance de la fonction exponentielle, nous obtenons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{\theta x} \leqslant e^{|x|}$. Donc :

$$e^x - 1 - x = |e^x - 1 - x| = \frac{x^2}{2}e^{\theta x} \leqslant \frac{x^2}{2}e^{|x|}$$

Nous avons bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|e^x - 1 - x| \leqslant \dfrac{x^2}{2}e^{|x|}$ et même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - 1 - x \leqslant \dfrac{x^2}{2}e^{|x|}$

Exercice 3 :

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$; nous considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et par $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$.
Donner la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- ▷ Il est facile de démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$
- ▷ Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$, nous avons $0 < e^{-u_n} \leqslant 1$
- ▷ Donc, nous avons : $0 < \dfrac{e^{-u_n}}{n+1} < \dfrac{1}{n+1}$

Comme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-u_n}}{n+1} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 4 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$. Démontrer que la dérivée n-ième de f_n est $f_n^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-n-1} e^{\frac{1}{x}}$

Nous allons faire la démonstration par récurrence sur n

- Vérifions que c'est vrai pour $n = 0$

  $f_0(x) = x^{-1} e^{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = f_0^{(0)}(x)$ et en remplaçant n par 0, nous obtenons

$$f_0^{(0)}(x) = (-1)^0 x^{-0-1} e^{\frac{1}{x}} = x^{-1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

  C'est donc vrai pour $n = 0$
- Supposons que jusqu'à n, nous ayons $f_n^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-n-1} e^{\frac{1}{x}}$
- Démontrons le à l'ordre $n+1$

  Une première remarque est de voir que $f_{n+1}(x) = x f_n(x)$ et donc $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (x f_n(x))^{(n+1)}$, et en utilisant la formule de Leibniz, en posant $h(x) = x$, nous avons :

$$(x f_n(x))^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k h^{(k)}(x) f_n^{(n+1-k)}(x) = x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x)$$

  Nous connaissons, par hypothèse de récurrence $f_n^{(n)}(x)$

  Et $f_n^{(n+1)}(x)$ est la dérivée première de $f_n^{(n)}(x)$; donc :

$$f_n^{(n+1)}(x) = (-1)^n \left((-n-1) x^{-n-2} e^{\frac{1}{x}} + x^{-n-1} \times \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) = (-1)^{n+1} x^{-n-3} e^{\frac{1}{x}} ((n+1)x + 1)$$

  Donc :

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(n+1)}(x) = & \quad (-1)^{n+1} x^{-n-2} e^{\frac{1}{x}} ((n+1)x + 1) + (n+1)(-1)^n x^{-n-1} e^{\frac{1}{x}} \\ = & \quad (-1)^{n+1} x^{-n-2} e^{\frac{1}{x}} ((n+1)x + 1 - (n+1)x) \\ = & \quad (-1)^{n+1} x^{-n-2} e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

  C'est à dire $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} x^{-(n+1)-1} e^{\frac{1}{x}}$; ce que nous voulions

Donc, la dérivée n-ième de f_n est bien $f_n^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-n-1} e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 5 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x\cos\alpha} \cos(x \sin\alpha)$. Démontrer que la dérivée n-ième de f est donnée par $f^{(n)}(x) = e^{x\cos\alpha} \cos(x\sin\alpha + n\alpha)$

Nous faisons cette démonstration par récurrence sur n

$\longrightarrow$ Elle est évidemment vraie pour $n = 0$

$\longrightarrow$ Supposons que, pour n, nous ayons $f^{(n)}(x) = e^{x\cos\alpha} \cos(x\sin\alpha + n\alpha)$

$\longrightarrow$ Démontrons le à l'ordre $n+1$

$f^{(n+1)}(x)$ est la dérivée première de $f^{(n)}(x)$. Calculons donc cette dérivée.

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) = & \quad \left(e^{x\cos\alpha} \cos(x\sin\alpha + n\alpha)\right)' \\ = & \quad \cos\alpha e^{x\cos\alpha} \cos(x\sin\alpha + n\alpha) - \sin\alpha e^{x\cos\alpha} \sin(x\sin\alpha + n\alpha) \\ = & \quad e^{x\cos\alpha} (\cos\alpha \cos(x\sin\alpha + n\alpha) - \sin\alpha \sin(x\sin\alpha + n\alpha)) \\ = & \quad e^{x\cos\alpha} \cos(x\sin\alpha + n\alpha + \alpha) \text{ d'après les formules d'addition} \\ = & \quad e^{x\cos\alpha} \cos(x\sin\alpha + (n+1)\alpha) \end{aligned}$$

C'est donc vrai à l'ordre $n+1$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de f est donnée par $f^{(n)}(x) = e^{x\cos\alpha} \cos(x\sin\alpha + n\alpha)$

12.6.2 Sur la fonction logarithme

Exercice 6 :

Calculez les dérivées des fonctions f, g et h suivantes :

Voici un exercice qui s'apparente à un exercice d'application directes. Dans le corrigé, je tenterai d'aller *(un peu)* plus loin que la question posée

1. $f(x) = \ln(\ln x)$
   - Une première question à se poser est celle du domaine de définition.
     Nous devons avoir $\ln x > 0$, et donc, le domaine de définition de f est clairement $]+1;+\infty[$
   - En second lieu, f est de la forme $f(x) = \ln(u(x))$ où $u(x) = \ln x$.
     la dérivée f' est donc donnée par $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \dfrac{1}{x \ln x}$
   - Dans un exercice qui suit, nous démontrons que pour $x > 0$, nous avons $\ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$.
     Pour $x > 1$, nous avons $\ln x > 0$, et donc nous avons l'inégalité

$$\ln(\ln x) \leqslant \frac{\ln x}{e} < \ln x$$

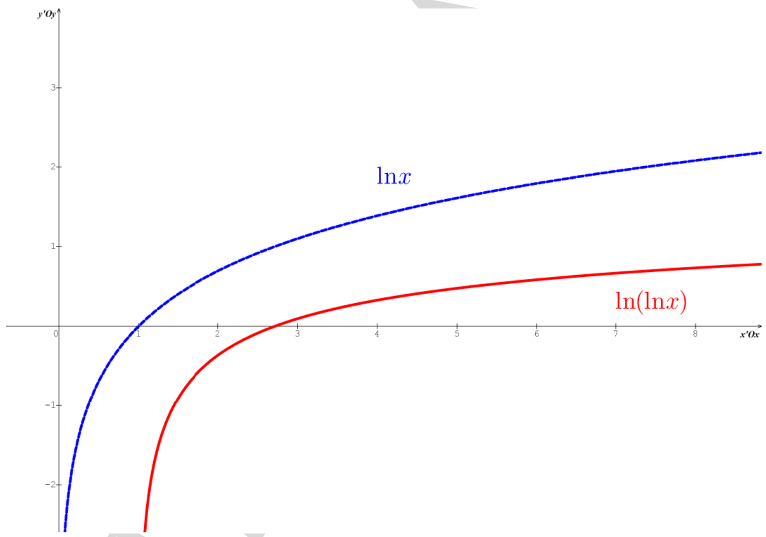

FIGURE 12.14 – Le graphe de la fonction $f(x) = \ln(\ln x)$ et une comparaison avec celui de $\ln x$

2. $g(x) = \arctan(\ln x)$
   - Le domaine de définition n'est pas difficile à trouver : nous devons avoir $x > 0$
   - Le calcul de dérivées est celui de la dérivée des fonctions composées :

$$g'(x) = \ln' x \times \arctan'(\ln x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \ln^2 x}$$

   C'est donc une fonction croissante.
   - Il n'est pas difficile de constater que $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(\ln x) = \dfrac{\pi}{2}$, mais, il faut remarquer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \arctan(\ln x) = -\dfrac{\pi}{2}$, ce qui nous autorise à prolonger g par continuité, en posant $g(0) = -\dfrac{\pi}{2}$

   On trouvera le graphe de la fonction $g(x) = \arctan(\ln x)$ dans la figure 12.15

3. $h(x) = \ln\sqrt{1 - 2\sin^2 x}$

   Faisons, tout d'abord, un peu de trigonométrie ; nous avons $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$ [3]

3. Comment faisons nous pour le retrouver ? Nous avons $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2_sin^2 x$

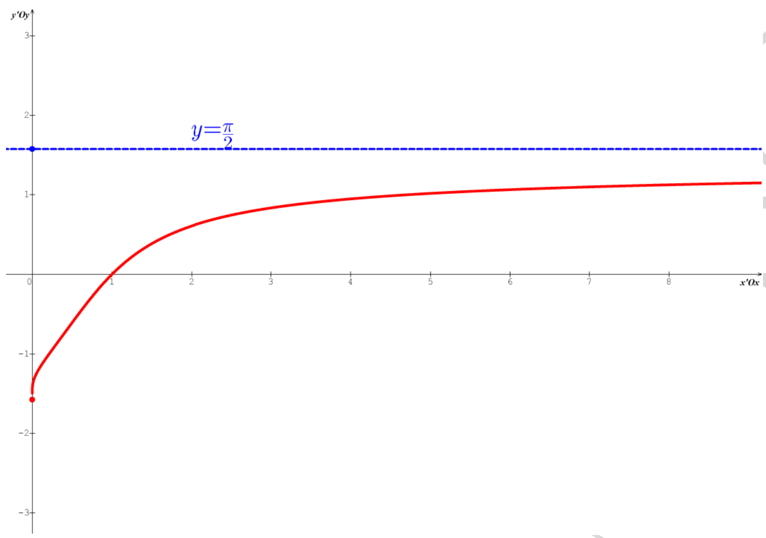

FIGURE 12.15 – Le graphe de la fonction $g(x) = \arctan(\ln x)$

Et donc, $h(x) = \ln\sqrt{1 - 2\sin^2 x} = \ln\sqrt{\cos 2x}$. Nous pouvons, d'ores et déjà dire que la fonction h est périodique et de période π

- Le domaine de définition est donné par $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \cos 2x > 0\}$. Nous avons :

$$\cos 2x > 0 \iff \frac{-\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \frac{-\pi}{4} + k\pi < 2x < \frac{\pi}{4} + k\pi$$

  Donc $\mathcal{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{-\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right[$

  La fonction h étant périodique et de période π, nous ne l'étudierons que sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$
- Nous pouvons utiliser les propriétés de la fonction logarithme pour simplifier h.

$$\ln\sqrt{1 - 2\sin^2 x} = \ln\sqrt{\cos 2x} = \frac{1}{2}\ln\cos 2x$$

- Le calcul de dérivées est celui de la dérivée des fonctions du type $\ln u(x)$:

$$h'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-2\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$$

  C'est donc une fonction croissante sur $\left]-\frac{\pi}{4}; 0\right[$ et décroissante sur $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$ puisque si $x \in \left]-\frac{\pi}{4}; 0\right[$, alors $2x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$ et alors $\tan 2x \leqslant 0$. De même, si $x \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$, alors $2x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et alors $\tan 2x \geqslant 0$
- Il n'est pas difficile de constater que $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{\pi}{4} \\ x > -\frac{\pi}{4}}} \ln\sqrt{\cos 2x} = -\infty$; de même, $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{4} \\ x < \frac{\pi}{4}}} \ln\sqrt{\cos 2x} = -\infty$

On trouvera le graphe de la fonction $h(x) = \ln\sqrt{1 - 2\sin^2 x}$ dans la figure 12.16

Exercice 7 :

1. *Soit f la fonction définie pour $x > 1$ par $f(x) = \ln(\ln x)$. Montrer qu'elle est concave.*

   Pour montrer que f est concave, nous allons en calculer la dérivée seconde. Nous connaissons déjà la dérivée première de f ; en effet, nous avons $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ et la dérivée seconde est donc $f''(x) = \dfrac{-(1 + \ln x)}{(x\ln x)^2}$.

   Comme $x > 1$, nous avons $1 + \ln x > 1$ et donc $f''(x) < 0$. f est donc concave

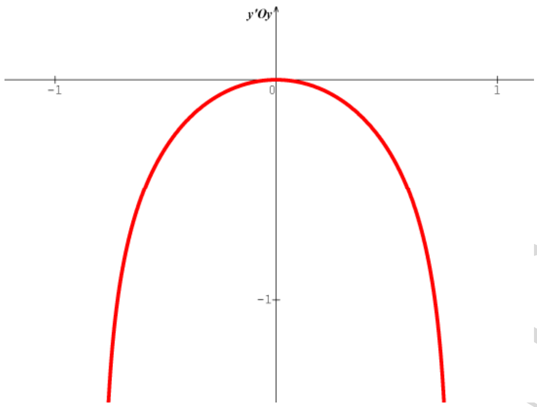

FIGURE 12.16 – Le graphe de la fonction $h(x) = \ln\sqrt{1 - 2\sin^2 x} = \ln\sqrt{\cos 2x}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$

2. *En déduire l'inégalite vraie pour $a > 1$ et $b > 1$: $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln a \ln b}$*

   f étant concave, pour tout $a > 1$, tout $b > 1$ et tout $\lambda \in]0;1[$, nous avons
   $$f(\lambda a + (1-\lambda) b) \geqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$
   Et donc, pour $\lambda = \frac{1}{2}$, nous obtenons $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$

   C'est à dire, ici, $\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geqslant \frac{1}{2}(\ln(\ln a) + \ln(\ln b))$.

   Or, $\ln(\ln a)+\ln(\ln b) = \ln(\ln a \ln b)$ et donc, $\frac{1}{2}(\ln(\ln a) + \ln(\ln b)) = \frac{1}{2}\ln(\ln a \ln b) = \ln\sqrt{(\ln a \ln b)}$

   Nous avons donc $\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geqslant \ln\sqrt{(\ln a \ln b)}$, et en utilisant le fait que la fonction logarithme est une fonction croissante, nous avons $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{(\ln a \ln b)}$

   Important :
   L'inégalité ne vaut que pour $a > 1$ et $b > 1$.
   Pour le démontrer, nous allons utiliser un contre-exemple :
   Supposons $a = b = \frac{1}{2}$. Alors :
   $\longrightarrow$ $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 < 0$
   $\longrightarrow$ $\ln a \ln b = \left(\ln\frac{1}{2}\right)^2 = (-\ln 2)^2 = (\ln 2)^2$, et $\sqrt{(\ln a \ln b)} = \sqrt{(\ln 2)^2} = \ln 2$
   Nous n'avons donc pas $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln a \ln b}$

Exercice 8 :

1. *Démontrer que, pour $x > 0$, nous avons $\ln x \leqslant \frac{x}{e}$*

   Comme souvent, nous allons utiliser la fonction auxiliaire $\varphi(x) = \ln x - \frac{x}{e}$, de domaine de définition $\mathbb{R}^{*+}$ et dont la dérivée est donnée par $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{ex}$

   Ainsi, si $0 < x \leqslant e$, alors $\varphi'(x) \geqslant 0$ et si $x \geqslant 0$ alors $\varphi'(x) \leqslant 0$; ce qui veut dire que φ est croissante sur $]0; e]$ et que φ est décroissante sur $[e; +\infty[$

   Le maximum de φ est donc atteint en $x = e$, ce qui sous-entend que pour tout $x > 0$, nous avons $\varphi(x) \leqslant \varphi(e) = 0$ et, donc, pour tout $x > 0$, $\ln x - \frac{x}{e} \leqslant 0$, c'est à dire que pour tout $x > 0$, nous avons $\ln x \leqslant \frac{x}{e}$

2. *Démontrer que, pour $x > -1$, $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$*

   Nous avons, ici, 2 inégalités :
   $\longrightarrow$ La première : $\ln(1+x) \leqslant x$
   $\longrightarrow$ La seconde : $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x)$

   - Démontrons la première inégalité
     Il y a la méthode classique qui consiste à étudier la fonction auxiliaire $\psi(x) = \ln(1+x) - x$ et à démontrer qu'elle est négative si $x > -1$; se référer à la démonstration de la question précédente.
     Il y a une autre méthode : celle qui consiste à utiliser la formule de Taylor-Lagrange. D'après 11.4.1, il existe $\theta \in]0;1[$ tel que

     $$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta x) \Longleftrightarrow \ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} \times \frac{-1}{(1+\theta x)^2}$$

     C'est à dire que $\ln(1+x) - x = \dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{-1}{(1+\theta x)^2} \leqslant 0$, c'est à dire que, si $x > -1$ alors $\ln(1+x) \leqslant x$
   - Démontrons la seconde inégalité
     Ici, le meilleur choix est bien celui de la fonction auxiliaire $\psi(x) = \dfrac{x}{x+1} - \ln(1+x)$ dont la dérivée est donnée par $\psi'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{-x}{(1+x)^2}$
     Il est facile de voir que le maximum est atteint en $x = 0$, et donc, pour tout $x > -1$, $\psi(x) \leqslant \psi(0) = 0$ et donc, nous avons $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x)$

   D'où, en faisant la synthèse, pour tout $x > -1$, nous avons $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

3. *Démontrer que, pour tout a et b tels que $0 < b \leqslant a$, nous avons $\dfrac{a-b}{a} \leqslant \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) \leqslant \dfrac{a-b}{b}$*

   Première remarque, qui est importante :

   $$\frac{a-b}{a} \leqslant \ln\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant \frac{a-b}{b} \Longleftrightarrow 1 - \frac{b}{a} \leqslant \ln\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant \frac{a}{b} - 1$$

   Nous avons aussi $0 < b \leqslant a \Longleftrightarrow 1 \leqslant \dfrac{a}{b}$. Pour cela, nous allons démontrer que si $x \geqslant 1$, nous avons $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$
   Nous avons, une nouvelle fois 2 inégalités à démontrer dès que $x \geqslant 1$:
   $\longrightarrow$ La première : $\ln x \leqslant x - 1$
   $\longrightarrow$ La seconde : $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x$

   - Démontrons la première inégalité
     Nous allons, à nouveau, utiliser la formule de Taylor-Lagrange en $x_0 = 1$ appliquée, cette fois ci à $\ln x$. D'après 11.4.1, il existe $\theta \in]0;1[$ tel que

     $$f(x) = f(1) + (x-1) f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} f''(\theta x) \Longleftrightarrow \ln x = x - 1 + \frac{(x-1)^2}{2} \times \frac{-1}{(\theta x)^2}$$

     C'est à dire que $\ln x - (x-1) = \dfrac{(x-1)^2}{2} \times \dfrac{-1}{(\theta x)^2} \leqslant 0$, c'est à dire que, si $x \geqslant 1$ alors $\ln x \leqslant x - 1$
   - Démontrons la seconde inégalité
     Ici, le meilleur choix est encore celui de la fonction auxiliaire $\psi(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \ln x$ dont la dérivée est donnée par $\psi'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1-x}{x^2}$
     Il est facile de voir que le maximum est atteint en $x = 1$, et donc, pour tout $x > 0$, $\psi(x) \leqslant \psi(1) = 0$ et donc, nous avons $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x$ dès que $x \geqslant 1$

D'où, en faisant la synthèse, pour tout $x \geqslant 1$, nous avons $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$

Ainsi, si $0 < b \leqslant a \Longleftrightarrow 1 \leqslant \dfrac{a}{b}$, nous avons $1 - \dfrac{b}{a} \leqslant \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) \leqslant \dfrac{a}{b} - 1$, ce qui veut dire que nous avons, pour $0 < b \leqslant a$, $\dfrac{a-b}{a} \leqslant \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) \leqslant \dfrac{a-b}{b}$

Exercice 9 :

Etudier les fonctions suivantes et les représenter graphiquement :

1. $f(x) = \ln(\sin x)$

$\longrightarrow$ Dans un premier temps, nous pouvons remarquer que f est périodique et de période 2π. Dans un second temps, f n'est définie que si $\sin x > 0$. Nous n'étudierons donc f que sur l'intervalle $]0;\pi[$.
D'autre part, comme pour tout $x \in]0;\pi[$, $0 < \sin x \leqslant 1$, nous avons $f(x) \leqslant 0$

$\longrightarrow$ Si nous étudions les limites de f, nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} f(x) = -\infty$

$\longrightarrow$ Le calcul de la dérivée nous donne $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.
Donc, si $0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ alors $f'(x) \geqslant 0$ et si $\dfrac{\pi}{2} \leqslant x < \pi$, alors $f'(x) \leqslant 0$.
Ce qui nous donne pour tableau de variations :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

D'où le graphe *(figure 12.17)*

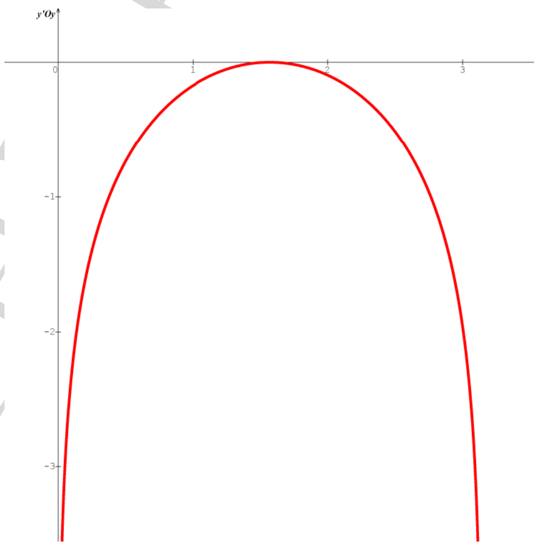

FIGURE 12.17 – Le graphe de la fonction $f(x) = \ln(\sin x)$

2. $g(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

Nous avons $g(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$\longrightarrow$ Dans un premier temps, intéressons nous au domaine de définition.

Nous devons avoir $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$ et $x \neq 1$; d'où on trouve comme domaine de définition $]-1;+1[$

$\longrightarrow$ Etudions les limites aux bornes du domaine de définition

- Nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{1+x}{1-x} = 0$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = -\infty$
- De même, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to +1 \\ x < +1}} \dfrac{1+x}{1-x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to +1 \\ x < +11}} \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = +\infty$

$\longrightarrow$ Etudions la dérivée

- Tout calculs faits, $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$
- Donc, pour tout $x \in]-1;+1[$, nous avons $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante sur $]-1;+1[$

D'où le graphe *(figure 12.18)* :

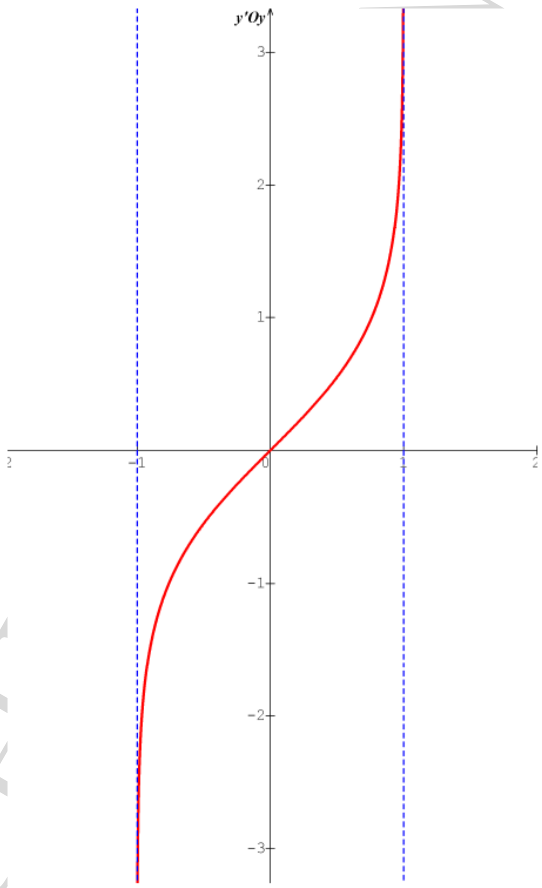

FIGURE 12.18 – Le graphe de la fonction $g(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$

Exercice 10 :

Soit $a > 0$. Trouver toutes les valeurs de x et y strictement positives vérifiant le système

$$\begin{cases} x^y = & y^x \\ y = & ax \end{cases}$$

Première remarque, c'est que si $a=1$, alors $x=y$ et tout $x>0$ convient.
On suppose maintenant $x \neq 1$
En regardant la première équation, nous avons $x^y=y^x \iff e^{y\ln x}=e^{x\ln y}$, et, en remplaçant y par ax, nous obtenons $x^y=y^x \iff e^{y\ln x}=e^{x\ln y}=e^{ax\ln x}=e^{x\ln ax}$. Du fait que la fonction exponentielle est une bijection, nous avons donc :

$$\begin{aligned} ax\ln x = x\ln ax &\iff ax\ln x = x\ln a + x\ln x \\ &\iff x\ln x\,(a-1) = x\ln a \\ &\iff \ln x = \frac{\ln a}{a-1} \text{ pour } a\neq 1 \end{aligned}$$

D'où $x=e^{\frac{\ln a}{a-1}}=a^{\frac{1}{a-1}}$ et $y=ax=a\times a^{\frac{1}{a-1}}=a^{\frac{a}{a-1}}$

Exercice 11 :

Soit $a>0$. Donner $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$ puis $\lim\limits_{k\to\pm\infty} k\left(a^{\frac{1}{k}}-1\right)$

La dérivée de a^h est donnée par $(\ln a)\,a^h$ et le nombre dérivée de a^h en 0 est donné par $\ln a$. Nous avons donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}=\ln a$.

En faisant le changement de variables $k=\dfrac{1}{h}$, nous avons donc $\lim\limits_{k\to\pm\infty} k\left(a^{\frac{1}{k}}-1\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}=\ln a$

Exercice 12 :

Nous considérons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

Nous avons $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\times\dfrac{n!}{n^n}=\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=e$, ce qui montre aussi que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^n}{n!}=+\infty$

Exercice 14 :

Donner le domaine de définition et la dérivée des fonctions suivantes

1. $f_1(x)=x^x$
   - ▷ Nous avons donc $f_1(x)=e^{x\ln x}$ et donc le domaine de définition est $\mathbb{R}^{*+}$.
   - ▷ <u>Etude de limites</u>
     - Nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x=0$, et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{x\ln x}=1$. Nous pouvons donc prolonger f_1 par continuité en 0, en posant $f_1(0)=1$
     - D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln x}=+\infty$
   - ▷ <u>Calcul de la dérivée</u>
     $f_1(x)=x^x=e^{x\ln x}$ est donc du type $f_1(x)=e^{u(x)}$, de dérivée $f_1'(x)=u'(x)\,e^{u(x)}$. la dérivée est donc donnée par :
     $$f_1'(x)=(1+\ln x)\,e^{x\ln x}$$
     La dérivée de f_1 est donc du signe de $1+\ln x$. Ainsi :
     - Si, $0<x\leqslant\dfrac{1}{e}$ alors $f_1'(x)\leqslant 0$ et f_1 y est décroissante
     - Si, $x\geqslant\dfrac{1}{e}$ alors $f_1'(x)\geqslant 0$ et f_1 y est croissante
     - f_1 admet donc un minimum en $x_0=\dfrac{1}{e}$ et, pour tout $x\geqslant 0$, $f_1(x)\geqslant f_1\left(\dfrac{1}{e}\right)=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}=e^{\frac{-1}{e}}$

   D'où le graphe *(figure 12.19)* :
2. $f_2(x)=x^{\frac{1}{x}}$

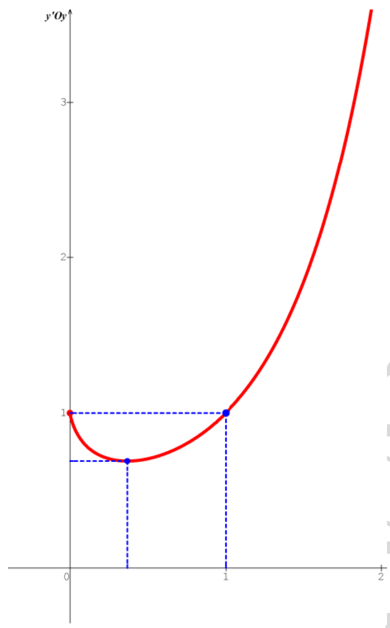

Figure 12.19 – Le graphe de la fonction $f_1(x) = x^x$

- ▷ Comme tout à l'heure, nous avons $f_2(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \times \ln x}$ et donc le domaine de définition est $\mathbb{R}^{*+}$.
- ▷ Etude de limites
  - Nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$. Nous pouvons donc prolonger f_2 par continuité en 0, en posant $f_2(0) = 0$
  - D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$
- ▷ Calcul de la dérivée

  Un calcul simple montre que $f_2'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} x^{\frac{1}{x}}$ et donc que f_2' est du signe de $1 - \ln x$
  - Si, $0 < x \leqslant e$ alors $f_2'(x) \geqslant 0$ et f_2 y est croissante
  - Si, $x \geqslant e$ alors $f_2'(x) \leqslant 0$ et f_2 y est décroissante
  - f_1 admet donc un maximum en $x_0 = e$ et, pour tout $x \geqslant 0$, $f_1(x) \leqslant f_2(e) = e^{\frac{1}{e}} =$

D'où le tableau de variations :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	$+1$

Et le graphe *(figure 12.20)* :

3. $f_3(x) = a^{b^x}$ *avec* $a > 0$ *et* $b > 0$ *et* $f_4(x) = a^{x^b}$ *avec* $a > 0$ *et* $b > 0$

Il est intéressant de bien regarder ces fonctions pour éviter beaucoup de confusions.

- ▷ Une première lecture peut être ainsi faite :

  $f_3(x) = \left(a^b\right)^x$ et alors $f_3(x) = e^{xb \ln a}$

  De même $f_4(x) = (a^x)^b$ et alors $f_4(x) = e^{xb \ln a}$ et donc $f_3(x) = f_4(x) = a^{bx}$ et nous avons là, l'étude d'une exponentielle normale.
- ▷ Une seconde lecture donne des résultats bien différents !!

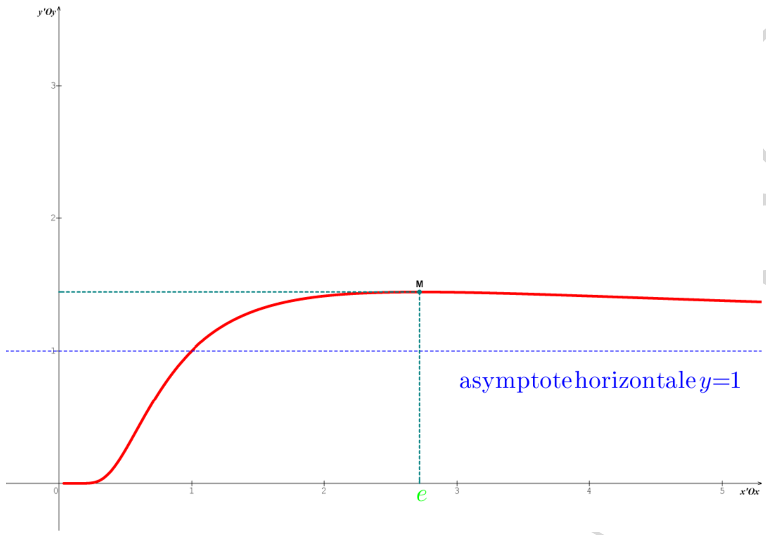

FIGURE 12.20 – Le graphe de la fonction $f_2(x) = x^{\frac{1}{x}}$

En effet, si $f_3(x) = a^{(b^x)} = e^{b^x \ln a} = e^{\ln a e^{x \ln b}}$ et si $f_4(x) = a^{(x^b)} = e^{x^b \ln a} = e^{\ln a e^{b \ln x}}$, nous avons alors $f_3(x) \neq f_4(x)$

▷ *Etude de $f_3(x) = a^{(b^x)}$*

Voilà une très longue étude !! Tout d'abord, écrivons $f_3(x) = e^{\ln a e^{x \ln b}}$

- Le domaine de définition est bien sûr $\mathbb{R}$ et la dérivée est donnée par

$$f_3'(x) = \ln a \ln b \times e^{x \ln b} e^{\ln a e^{x \ln b}} = \ln a \ln b \times e^{\left(x \ln b + \ln a e^{x \ln b}\right)}$$

  Le signe de la dérivée ne dépend donc que de celui de $\ln a \ln b$
- Supposons $\ln a \ln b > 0$, c'est à dire $a > 1$ et $b > 1$ ou $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$; alors $f_3'(x) > 0$ et f_3 est croissante sur $\mathbb{R}$

  <u>Etude des limites</u>
  - Supposons $a > 1$ et $b > 1$, c'est à dire $\ln a > 0$ et $\ln b > 0$
    - ⋆ Tout d'abord $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln a e^{x \ln b} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\ln a e^{x \ln b}} = +\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$
    - ⋆ Ensuite, $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln b = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln b} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\ln a e^{x \ln b}} = 1$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = 1$
  - Supposons $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$, c'est à dire $\ln a < 0$ et $\ln b < 0$
    - ⋆ Tout d'abord $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln b} = 0$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln a e^{x \ln b} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\ln a e^{x \ln b}} = 1$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = 1$
    - ⋆ Ensuite, $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln b = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln b} = +\infty$, puis $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln a e^{x \ln b} = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\ln a e^{x \ln b}} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = 0$
- D'où les graphes de f_3 pour $\ln a \ln b > 0$ *(figure 12.21)* :
- Supposons $\ln a \ln b < 0$, c'est à dire $a > 1$ et $0 < b < 1$ ou $0 < a < 1$ et $b > 1$; alors $f_3'(x) < 0$ et f_3 est décroissante sur $\mathbb{R}$

  <u>Etude des limites</u>
  - Supposons $a > 1$ et $0 < b < 1$, c'est à dire $\ln a > 0$ et $\ln b < 0$
    - ⋆ Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln b = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln b} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\ln a e^{x \ln b}} = 1$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = 1$
    - ⋆ Ensuite, $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln b = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln b} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\ln a e^{x \ln b}} = +\infty$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = +\infty$

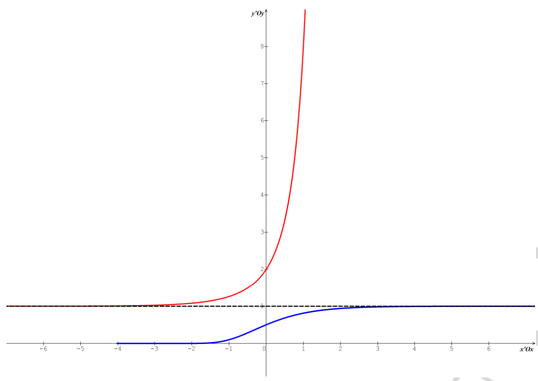

FIGURE 12.21 – Les graphes de la fonction $f_3(x) = a^{(b^x)}$ pour $\ln a \ln b > 0$

■ Supposons $0 < a < 1$ et $b > 1$, c'est à dire $\ln a < 0$ et $\ln b > 0$

- ⋆ Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln b} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln a e^{x \ln b} = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\ln a e^{x \ln b}} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = 0$
- ⋆ Ensuite, $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln b = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln b} = 0$, puis $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln a e^{x \ln b} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\ln a e^{x \ln b}} = 1$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = 1$

- D'où les graphes de f_3 pour $\ln a \ln b < 0$ *(figure 12.22)* :

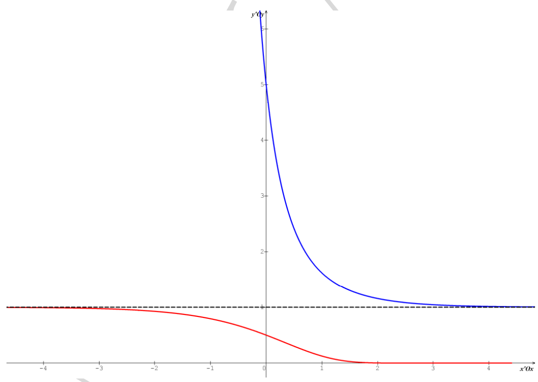

FIGURE 12.22 – Les graphes de la fonction $f_3(x) = a^{(b^x)}$ pour $\ln a \ln b < 0$

▷ *Etude de $f_4(x) = a^{\left(x^b\right)}$*

Nous allons, une nouvelle fois, « triturer » f_4. Nous avons :

$$f_4(x) = a^{\left(x^b\right)} = e^{\left(x^b\right)\ln a} = e^{\left(e^{b \ln x}\right)\ln a} = e^{\ln a e^{b \ln x}}$$

Donc, le domaine de définition de f_4 est $\mathbb{R}^{*+}$

- Calculons la dérivée de f_4.

  En posant $u(x) = \ln a e^{b \ln x}$, nous avons $u'(x) = \dfrac{b \ln a}{x} e^{b \ln x}$ et donc :

$$f_4'(x) = \frac{b \ln a}{x} e^{b \ln x} \times e^{\ln a e^{b \ln x}} = \frac{b \ln a}{x} e^{b \ln x + \ln a e^{b \ln x}}$$

  Le signe de f_4' ne dépend donc que de celui de $\ln a$

- Etude de la limite en 0.

  Nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} b \ln x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{b \ln x} = 0$, tout comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln a \times e^{b \ln x} = 0$

  Donc, pour tout $a > 0$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_4(x) = 1$

Il nous est donc possible de prolonger f_4 en 0, en posant $f_4(0) = 1$

- Etude de la limite en $+\infty$.
  Tout d'abord, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} b\ln x = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{b\ln x} = +\infty$
  - ⋆ Si $\ln a > 0$, c'est à dire si $a > 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln a e^{b\ln x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = +\infty$
  - ⋆ Si $\ln a < 0$, c'est à dire si $0 < a < 11$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln a e^{b\ln x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = 0$
- Signe de la dérivée.
  - ⋆ Si $\ln a > 0$, c'est à dire si $a > 1$, alors $\ln a > 0$ et alors $f_4'(x) > 0$ et f_4 est croissante.
  - ⋆ Si $\ln a < 0$, c'est à dire si $0 < a < 11$, alors $\ln a < 0$ et alors $f_4'(x) < 0$ et f_4 est décroissante.
- D'où les graphes de f_4 *(figure 12.23)* :

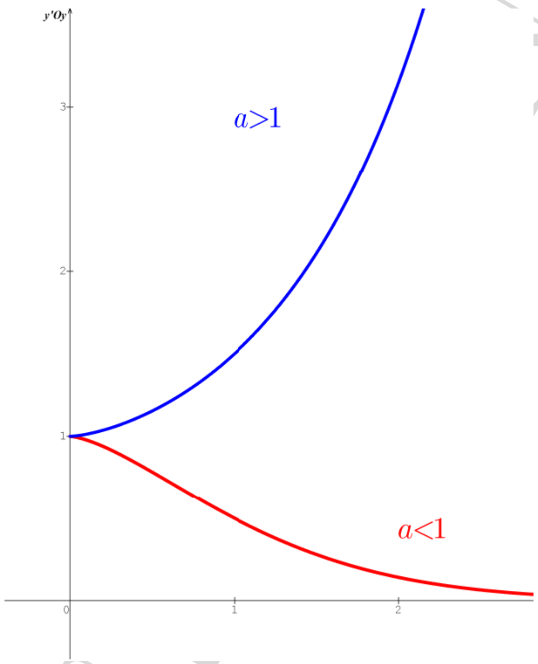

FIGURE 12.23 – Les graphes de la fonction $f_4(x) = a^{\left(x^b\right)}$ pour $a > 1$ et $0 < a < 1$

Il y a,cependant, des cas triviaux, que nous n'avons pas évoqués :

- ⧫ Pour $f_3(x) = a^{\left(b^x\right)} = e^{\ln a e^{x\ln b}}$, si $b = 1$, nous obtenons la fonction constante $f_3(x) = a$ et si $a = 1$, nous obtenons la fonction constante $f_3(x) = 1$, pour tout $b > 0$
- ⧫ Pour $f_4(x) = a^{\left(x^b\right)} = e^{\ln a e^{b\ln x}}$, si $b = 1$, nous obtenons $f_4(x) = e^{\ln a e^{\ln x}} = e^{x\ln a} = a^x$; c'est une fonction exponentielle de base a, et si $a = 1$, nous obtenons à nouveau la fonction constante $f_4(x) = 1$, pour tout $b > 0$

Exercice 16 :

1. *Etudier et représenter la fonction $g(x) = \tanh \dfrac{x-1}{x+1}$*

⟶ Le domaine de définition de g est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

⟶ Limites aux bornes du domaine

⇝ Nous avons $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \tanh \dfrac{x-1}{x+1} = \tanh 1 \simeq 0,761594156$

⇝ D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{x-1}{x+1} = -\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \tanh \dfrac{x-1}{x+1} = -1$

⇝ De même, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \tanh \dfrac{x-1}{x+1} = +1$

$\longrightarrow$ Calcul de la dérivée

g est une fonction du type $g(x) = \tanh u(x)$ et a donc pour dérivée $g'(x) = u'(x) \tanh' u(x) = \dfrac{u'(x)}{\cosh^2 u(x)}$

g' est donc du signe de $u'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, nous avons $g'(x) > 0$

D'où le graphes de g *(figure 12.24)* :

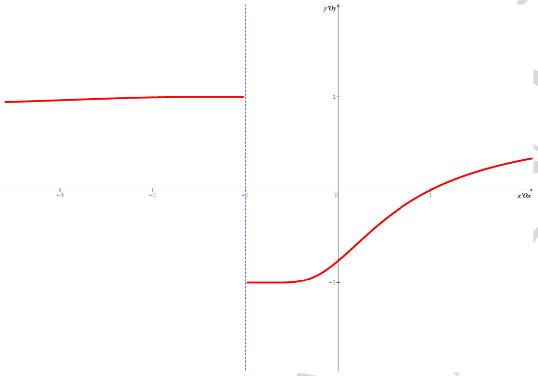

FIGURE 12.24 – Le graphe de la fonction $g(x) = \tanh \dfrac{x-1}{x+1}$

2. *Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $h_\lambda(x) = \dfrac{1}{\lambda + \cosh x}$ soit définie ? Etudier et représenter la fonction $h_2(x) = \dfrac{1}{2 + \cosh x}$*

   Pour que h_λ, il faut que $\lambda + \cosh x \neq 0$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\cosh x \geqslant 1$, donc $\cosh x + \lambda \geqslant 1 + \lambda$ et donc nous devons avoir $\lambda > -1$

   L'étude de la fonction $h_2(x) = \dfrac{1}{2 + \cosh x}$ ne pose aucune difficulté et est déduite de celle de $\cosh x$. Nous avons, en particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < \dfrac{1}{2 + \cosh x} \leqslant \dfrac{1}{3}$

   En fait, pour tout $\lambda > -1$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $0 < \dfrac{1}{\lambda + \cosh x} \leqslant \dfrac{1}{1+\lambda}$

12.6.3 Croissances comparées

Exercice 19 :

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et nous considérons la fonction f_n définie par :*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

   Montrer que f_n est continue en 0 et dérivable en 0

   - ▷ Il est clair que f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$
   - ▷ Il faut donc étudier la continuité de f_n en 0

     Faisons le changement de variable $X = \dfrac{1}{x^2}$ alors $x^2 = \dfrac{1}{X}$ et $x = \dfrac{1}{\sqrt{X}}$ ou $x = \dfrac{-1}{\sqrt{X}}$

     $\longrightarrow$ Si $x > 0$, alors $\dfrac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right)^n} e^{-X} = X^{\frac{n}{2}} e^{-X}$ et donc :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} X^{\frac{n}{2}} e^{-X} = \lim_{x \to +\infty} \frac{X^{\frac{n}{2}}}{e^X} = 0$$

     f_n est donc continue à droite de 0

$\longrightarrow$ Si $x<0$, alors $\dfrac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{\left(\frac{-1}{\sqrt{X}}\right)^n}e^{-X}=(-1)^n X^{\frac{n}{2}}e^{-X}$ et donc :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}}=(-1)^n\lim_{x\to+\infty}X^{\frac{n}{2}}e^{-X}=\lim_{x\to+\infty}\frac{X^{\frac{n}{2}}}{e^X}=0$$

f_n est donc continue à gauche de 0

f_n étant continue à droite et à gauche de 0 est donc continue en 0, et de manière générale, continue sur $\mathbb{R}$

- Etudions la dérivabilité de f_n en 0

  Nous avons :

$$\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\frac{1}{x^{n+1}}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

  Et, d'après l'étude précédente, nous avons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{n+1}}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$, donc $f_n'(0)$ existe et $f_n'(0)=0$

  f_n est donc dérivable sur $\mathbb{R}$

2. *Démontrer que la fonction g définie par :*

$$\begin{cases} g:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ \quad x & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x=0\\ e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x\neq 0\end{cases}\end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

- Tout d'abord g est continue et dérivable en 0

  $\longrightarrow$ Continue parce que $\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{1}{x^2}=-\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0=g(0)$.

  $\longrightarrow$ Dérivable puisque, si nous regardons le rapport $\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$, nous avons :

$$\frac{g(x)-g(0)}{x}=\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

  D'après la question précédente, nous avons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$.

  Ainsi, g est dérivable en 0 et $g'(0)=0$

  $\longrightarrow$ Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, nous avons $g'(x)=\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$. g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

- Nous allons démontrer, par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$, que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$g^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{\alpha_n}}e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ et } g^{(n)}(0)=0$$

  Avec P_n polynôme et $\alpha_n\in\mathbb{N}$

  ⋆ C'est vrai pour $n=1$ puisque $g'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Nous avons $P_1(x)=2$ et $\alpha_1=3$

  ⋆ Supposons que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$g^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{\alpha_n}}e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ et } g^{(n)}(0)=0$$

  Avec P_n polynôme et $\alpha_n\in\mathbb{N}$

  ⋆ Démontrons le à l'ordre $n+1$

  $\longrightarrow$ Tout d'abord, $g^{(n+1)}(0)=\dfrac{g^{(n)}(x)-g^{(n)}(0)}{x}=\dfrac{P_n(x)}{x^{\alpha_n+1}}e^{-\frac{1}{x^2}}$

  Comme $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{p_n}a_kx^k$, nous avons $\dfrac{P_n(x)}{x^{\alpha_n+1}}e^{-\frac{1}{x^2}}=\sum\limits_{k=0}^{p_n}\dfrac{a_k}{x^{\alpha_n+1-k}}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

  Or, nous avons que pour tout k tel que $0\leqslant k\leqslant p_n$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_k}{x^{\alpha_n+1-k}}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$, d'où nous déduisons que $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{k=0}^{p_n}\dfrac{a_k}{x^{\alpha_n+1-k}}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g^{(n)}(x)-g^{(n)}(0)}{x}=0$, et donc $g^{(n+1)}(0)=0$

$\longrightarrow$ Pour $x \neq 0$, nous avons $g^{(n+1)}(x) = \left(\dfrac{P_n(x)}{x^{\alpha_n+1}} e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'$. Or :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{P_n(x)}{x^{\alpha_n}} e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' &= \left(\frac{P_n(x)}{x^{\alpha_n}}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{P_n(x)}{x^{\alpha_n}} \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' \\
&= \left(\frac{x^{\alpha_n} P_n'(x) - \alpha_n x^{\alpha_n - 1} P_n(x)}{x^{2\alpha_n}} + \frac{2P_n(x)}{x^{\alpha_n+3}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \left(\frac{x^{\alpha_n+3} P_n'(x) - \alpha_n x^{\alpha_n+2} P_n(x) + 2x^{\alpha_n} P_n(x)}{x^{2\alpha_n+3}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \left(\frac{\left(2x^{\alpha_n} - \alpha_n x^{\alpha_n+2}\right) P_n(x) + x^{\alpha_n+3} P_n'(x)}{x^{2\alpha_n+3}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}
\end{aligned}$$

Nous avons donc $P_{n+1}(x) = \left(2x^{\alpha_n} - \alpha_n x^{\alpha_n+2}\right) P_n(x) + x^{\alpha_n+3} P_n'(x)$ et $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 3$

$\longrightarrow$ Comme tout à l'heure, nous avons $\lim\limits_{x \to 0} g^{(n+1)}(x) = 0$

g est donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$

C'est à dire que g est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$

On peut connaître explicitement le degré du polynôme P_n et la valeur de α_n

Nous avons, en fait :

- $\deg P_{n+1} = \deg P_n + \alpha_n + 2$
- $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 3$

avec $\deg P_1 = 0$ et $\alpha_1 = 3$

(a) Commençons par étudier la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 1}$.
En prenant la suite auxiliaire $(v_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $v_n = \alpha_n + 3$, la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est géométrique, de raison 2 et de premier terme $v_1 = 6$.
Nous obtenons donc $v_n = 2^{n-1} v_1 = 6 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^n$
Donc, $\alpha_n + 3 = 3 \times 2^n \Longleftrightarrow \alpha_n = 3 \times 2^n - 3$

(b) Pour nous simplifier la vie, posons $D_n = \deg P_n$. Nous avons alors :

$$D_{n+1} = D_n + 3 \times 2^n - 3 + 2 \Longleftrightarrow D_{n+1} = D_n + 3 \times 2^n - 1$$

En faisant les sommations, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} D_{k+1} &= \sum_{k=1}^{n} D_k + 3 \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} D_k + 3 \times 2\left(2^n - 1\right) - n
\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} D_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} D_k = 3 \times 2\left(2^n - 1\right) - n \Longleftrightarrow D_{n+1} - D_1 = 6\left(2^n - 1\right) - n \Longleftrightarrow$
$D_{n+1} = 6\left(2^n - 1\right) - n$

(c) Nous obtenons donc :

$$\alpha_n = 3 \times 2^n - 3 \quad \text{et} \quad D_n = 6\left(2^{n-1} - 1\right) + 1 - n$$

Exercice 20 :

Démontrer que la dérivée n-ième de la fonction $g(x) = e^{-x^2}$ est de la forme $g^{(x)} = P_n(x) e^{-x^2}$ où P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$

Nous allons démontrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $g^{(x)} = P_n(x) e^{-x^2}$

▷ C'est évidemment vrai pour $n = 0$, où $P_0(x) = 1$; on peut remarqer que $\deg P_0 = 0$ et que $1 = (-2)^0$

- ▷ Supposons qu'à l'ordre n, nous avons $g^{(x)} = P_n(x)\, e^{-x^2}$ où P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$
- ▷ A l'ordre $n+1$, nous avons :

$$g^{(x)} = \left(P_n(x)\, e^{-x^2}\right)' = P_n'(x)\, e^{-x^2} - 2xP_n(x)\, e^{-x^2} = \left(P_n'(x) - 2xP_n(x)\right) e^{-x^2}$$

Et donc $P_{n+1}(x) = P_n'(x) - 2xP_n(x)$.

$\longrightarrow$ Si $\deg P_n = n$, alors $\deg -2xP_n = n+1$ et comme $\deg P_n' = n-1$, nous avons $\deg P_{n+1} = n+1$

$\longrightarrow$ D'autre part, si $P_n(x) = (-2)^n x^n + Q_{n-1}(x)$, alors $-2xP_n(x) = -2x \times (-2)^n x^n + Q_{n-1}(x)$ et donc, le coefficient dominant de P_{n+1} est donc $(-2)^{n+1}$

Ce que nous voulions

12.6.4 Miscelleanous

Exercice 21 :

Trouver $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$

Voilà une expression que nous avons plus ou moins travaillée !!

- Nous avons déjà $(x^x)^x = e^{x \ln x^x} = e^{x^2 \ln x}$
- Nous avons aussi, $x^{(x^x)} = e^{x^x \ln x}$; comme $x^x \ln x = \ln x e^{x \ln x}$, nous avons $x^{(x^x)} = e^{\ln x e^{x \ln x}}$
- De telle sorte que $\dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = e^{x^2 \ln x - \ln x e^{x \ln x}} = e^{x^2 \ln x\left(1 - \frac{1}{x^2} e^{x \ln x}\right)}$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln x \left(1 - \frac{1}{x^2} e^{x \ln x}\right) = -\infty$, nous avons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{x^2 \ln x\left(1 - \frac{1}{x^2} e^{x \ln x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = 0$

Exercice 22 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. *Nous notons :*

$$\begin{cases} f_\alpha : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f_\alpha(x) = e^{\alpha x} \end{cases}$$

Montrer que la famille de fonctions $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ *est une une famille libre du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Pour montrer que la famille de fonctions $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est une une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, il faut montrer que toute famille finie $(f_{\alpha_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ extraite de $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est une famille libre, c'est à dire que l'implication suivante :

$$\lambda_1 f_{\alpha_1} + \lambda_2 f_{\alpha_2} + \cdots + \lambda_n f_{\alpha_n} = \mathcal{O} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

est vraie.

Supposons donc qu'il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_{\alpha_1} + \lambda_2 f_{\alpha_2} + \cdots + \lambda_n f_{\alpha_n} = \mathcal{O}$; ceci sgnifie donc que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 f_{\alpha_1}(x) + \lambda_2 f_{\alpha_2}(x) + \cdots + \lambda_n f_{\alpha_n}(x) = 0$.

Pour simplifier, quitte à réordonner, nous supposons $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$. L'hypothèse donne donc :

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots \lambda_n e^{\alpha_n x} = 0$$

Nous appelons $\varphi(x) = \lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + \lambda_n e^{\alpha_n x}$

- ▷ Regardons le comportement de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
  Factorisons par $e^{\alpha_n x}$; alors :

$$\varphi(x) = e^{\alpha_n x}\left(\lambda_1 e^{(\alpha_1 - \alpha_n)x} + \lambda_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_n)x} + \cdots + \lambda_n\right) = 0$$

Comme, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n-1$, nous avons $(\alpha_i - \alpha_n) < 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \lambda_i e^{(\alpha_i - \alpha_n)x} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \lambda_n e^{\alpha_n x} = 0$, car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 0$.

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $e^{\alpha_n x} > 0$, nous en déduisons que $\lambda_n = 0$

D'où $\varphi(x) = \lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + \lambda_{n-1} e^{\alpha_{n-1} x}$

- ▷ Nous poursuivons en factorisant par $e^{\alpha_{n-1} x}$, et en faisant le même raisonnement que ci-dessus, nous obtenons $\lambda_{n-1} = 0$

▷ Et ainsi de suite jusque $\lambda_1 = 0$

Nous avons donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, ce qui montre que la famille $(f_{\alpha_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre, et que, plus généralement, la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est une une famille libre.
Ce que nous voulions

Exercice 23 :

1. *Démontrer que la fonction logarithme* $\ln$ *n'est la restriction sur* $]0;+\infty[$ *d'aucune fonction fraction rationnelle*

   Supposons donc que, pour tout $x > 0$, nous ayions $\ln x = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P est le polynôme $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et $Q(x) = b_p x^p + \cdots + b_0$ avec $b_p \neq 0$.

   Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$, nous avons $n > p$ et $\dfrac{a_n}{b_p} > 0$

   Dans le cours, nous avons vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc, si $\ln x = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lorsque $x > 0$, nous avons : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{xQ(x)} = 0$. Or :

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{xQ(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_p x^{p+1} + \cdots + b_0 x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^{p+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n}{b_p} x^{n-p-1}$$

   ▷ Si $n = p + 1$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{xQ(x)} = \frac{a_n}{b_p} > 0$, ce qui est impossible, puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

   ▷ Si $n > p+1$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{xQ(x)} = +\infty$, ce qui est à nouveau impossible, puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

   Ainsi, l'hypothèse $\ln x = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sur $]0;+\infty[$ est contradictoire.

   Donc, la fonction logarithme ln n'est la restriction sur $]0;+\infty[$ d'aucune fonction fraction rationnelle

2. *Démontrer que la fonction exponentielle* $\exp$ *n'est pas une fonction fraction rationnelle*

   Supposons donc que, pour tout $x > 0$, nous ayions $e^x = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P est le polynôme $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et $Q(x) = b_p x^p + \cdots + b_0$ avec $b_p \neq 0$.

   Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$, nous avons $n > p$ et $\dfrac{a_n}{b_p} > 0$ [4]

   Faisons un calcul de dérivée basique :

   $$(e^x)' = \left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)' \iff e^x = \frac{P'(x)Q(x) - Q'(x)P(x)}{(Q(x))^2} = \frac{P(x)}{Q(x)} \iff P'(x)Q(x) - Q'(x)P(x) = P(x)Q(x)$$

   Nous avons donc l'égalité $P'Q - Q'P = PQ$. En considérant les degrés des polynômes, nous avons :
   - ⋆ $\deg(PQ) = n + p$
   - ⋆ $\deg(P'Q) = n - 1 + p$ et $\deg(PQ') = n + p - 1$
   - ⋆ Et donc $\deg(P'Q - Q'P) \leqslant n + p - 1$

   Ce qui est en contradiction avec $P'Q - Q'P = PQ$

   Donc, la fonction exponentielle exp n'est pas une fonction fraction rationnelle.

Exercice 24 :

Démontrer que, pour tout $x \in]0;+1[$, *nous avons* $x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$

Ce n'est pas un exercice bien difficile, plutôt calculatoire.
Nous appelons $\varphi(x) = x^x(1-x)^{1-x}$ et $u(x) = \ln\varphi(x) = x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$

4. Mais, ceci ne nous apportera rien !!

- Dérivons u ; nous avons $u'(x) = 1 + \ln x - \ln(1-x) - 1 = lnx - \ln(1-x) = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$

  Nous pouvons remarquer que, pour tout $x \in]0;+1[$, nous avons $\dfrac{x}{1-x} > 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} u'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} u'(x) = +\infty$.

  De plus, $u'(x) = 0 \iff \dfrac{x}{1-x} = 1 \iff x = \dfrac{1}{2}$

  Par contre, il est assez difficile de connaître le comportement de $u'(x)$ sur l'intervalle $]0;+1[$
- Tentons dons la dérivée seconde de u :

$$u''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)}$$

  Nous avons donc, pour tout $x > 0$, $u''(x) > 0$
- Ainsi, $u'(x)$ est une fonction croissante sur $]0;+1[$

  $\longrightarrow$ Si $0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}$, alors $u'(x) \leqslant 0$ et si $\dfrac{1}{2} \leqslant x < +1$, alors $u'(x) \geqslant 0$

  $\longrightarrow$ C'est à dire que u est décroissante sur $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}:+1\right[$

  $\longrightarrow$ Et donc, pour tout $x \in]0;+1[$, nous avons $u(x) \geqslant u\left(\dfrac{1}{2}\right)$

  Or, $u\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{1}{2}$.

  Nous en déduisons que, pour tout $x \in]0;+1[$, nous avons :

$$\ln\varphi(x) \geqslant \ln\frac{1}{2} \iff \varphi(x) \geqslant \frac{1}{2} \iff x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$$

  Ce que nous voulions

Exercice 25 :

1. *Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, nous avons $\tanh x = \dfrac{2}{\tanh 2x} - \dfrac{1}{\tanh x}$*

   Nous allons utiliser les formules d'addition des fonctions hyperboliques qui ont déjà été démontrées. Nous avons, en particulier :

$$\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$$

   Donc :

$$\begin{aligned}\frac{2}{\tanh 2x} - \frac{1}{\tanh x} &= \frac{2\left(1+\tanh^2 x\right)}{2\tanh x} - \frac{1}{\tanh x}\\ &= \frac{1+\tanh^2 x - 1}{\tanh x}\\ &= \tanh x\end{aligned}$$

   Ce que nous voulions [5]

2. *En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k \tanh\left(2^k x\right)$*

   En réutilisant le résultat précédent, nous avons :

$$2^k\tanh\left(2^k x\right) = 2^k\left(\frac{2}{\tanh\left(2\times\left(2^k x\right)\right)} - \frac{1}{\tanh\left(2^k x\right)}\right) = \frac{2^{k+1}}{\tanh\left(2^{k+1}x\right)} - \frac{2^k}{\tanh\left(2^k x\right)}$$

5. Simple comme « Bonjour ! ! »

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^k \tanh\left(2^k x\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{\tanh\left(2^{k+1}x\right)} - \frac{2^k}{\tanh\left(2^k x\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{\tanh\left(2^{k+1}x\right)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{\tanh\left(2^k x\right)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{\tanh\left(2^k x\right)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{\tanh\left(2^k x\right)} \\ &= \frac{2^{n+1}}{\tanh\left(2^{n+1}x\right)} - \frac{1}{\tanh x}\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \tanh\left(2^k x\right) = \frac{2^{n+1}}{\tanh\left(2^{n+1}x\right)} - \frac{1}{\tanh x}$

Exercice 26 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}$. *Evaluer* $\displaystyle\Pi_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right)$. *En déduire* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Pi_n(x)$

▷ La clef de la démonstration tient dans les différents formules des fonctions hyperboliques. Nous avons :

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x \Longleftrightarrow \cosh x = \frac{\sinh 2x}{2\sinh x}$$

De telle sorte que $\cosh\left(\dfrac{x}{2^k}\right) = \dfrac{\sinh\left(\dfrac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\sinh\left(\dfrac{x}{2^k}\right)}$. D'où :

$$\begin{aligned}\Pi_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right) &= \Pi_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sinh\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right)} \\ &= \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n} \frac{\sinh\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right)} \\ &= \frac{1}{2^n} \times \frac{\sinh x}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)} \times \frac{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2^2}\right)} \times \cdots \times \frac{\sinh\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{\sinh\left(\frac{x}{2^n}\right)} \\ &= \frac{1}{2^n} \times \frac{\sinh x}{\sinh\left(\frac{x}{2^n}\right)}\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\Pi_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n} \times \frac{\sinh x}{\sinh\left(\frac{x}{2^n}\right)}$

▷ L'étude de la limite de $\Pi_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ vient de l'étude d'une limite remarquable.

- Nous avons, en effet, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sinh t}{t} = 1$. En voici la démonstration :

$$\begin{aligned}\frac{\sinh t}{t} &= \frac{e^t - e^{-t}}{2t} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^t - 1 + 1 - e^{-t}}{t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^t - 1}{t} + \frac{1 - e^{-t}}{t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^t - 1}{t} + \frac{e^{-t} - 1}{-t}\right)\end{aligned}$$

Nous avons, comme limite remarquable : $\lim_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=\lim_{t\to 0}\dfrac{e^{-t}-1}{-t}=1$, et donc :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sinh t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{e^t-1}{t}+\frac{e^{-t}-1}{-t}\right)=1$$

Et, en corollaire, $\lim_{t\to 0}\dfrac{t}{\sinh t}=1$

- D'où nous tirons $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x}{2^n}}{\sinh\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}=1$

Or, $\Pi_n(x)=\dfrac{1}{2^n}\times\dfrac{\sinh x}{\sinh\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}=\dfrac{\sinh x}{x}\times\dfrac{\dfrac{x}{2^n}}{\sinh\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$, et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\Pi_n(x)=\frac{\sinh x}{x}$$

Exercice 27 :

Soit $G:\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow\mathbb{R}$ *définie, pour tout* $t\in\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$ *par* $G(t)=\operatorname{Arg}\sinh(\tan t)$

1. *Montrer que* G *est dérivable sur* $\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$ *et que, pour tout* $t\in\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$*, nous avons*

$$G'(t)=\cosh(G(t))$$

▷ G est la fonction composée de 2 fonctions bijectives, continues et dérivables :

$$\tan:\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow\mathbb{R}\text{ et }\operatorname{Arg}\sinh:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

Donc, G est une fonction bijective, continue et dérivable.

▷ D'après les résultats sur la composition des fonctions dérivables, nous avons $G'(t)=\tan' t\operatorname{Arg}\sinh'(\tan t)$.

Or :

⋆ $\tan' t=1+\tan^2 t$

⋆ Et $\operatorname{Arg}\sinh' x=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et donc $\operatorname{Arg}\sinh'(\tan t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}$

De telle sorte que $G'(t)=\sqrt{1+\tan^2 t}$

Or, des propriétés de bijection, nous pouvons écrire : $\tan t=\sinh(\operatorname{Arg}\sinh(\tan t))=\sinh(G(t))$ et donc $G'(t)=\sqrt{1+\sinh^2(G(t))}$

Comme nous avons $\cosh x=\sqrt{1+\sinh^2 x}$, nous avons donc :

$$G'(t)=\sqrt{1+\sinh^2(G(t))}=\cosh(G(t))$$

Ce que nous voulions

2. *Démontrer que, pour tout* $t\in\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$ *nous avons* $\tanh(G(t))=\sin t$

Voilà un exercice classique, que nous retrouvons dans l'étude des fonctions trigonométriques réciproques.

Pour commencer, nous avons, par définition de la fonction $\operatorname{Arg}\sinh$

$$y=\operatorname{Arg}\sinh x\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\in\mathbb{R}\text{ et }y\in\mathbb{R}\\ x=\sinh y\end{array}\right.$$

Or, $\tanh y=\dfrac{\sinh y}{\cosh y}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Donc, de $G(t) = \operatorname{Arg}\sinh(\tan t)$ nous tirons, en remplaçant x par $\tan t$:

$$\tanh(G(t)) = \tanh(\operatorname{Arg}\sinh(\tan t)) = \frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \frac{\sin t \cos t}{\cos t} = \sin t$$

Ce que nous voulions

Exercice 28 :

1. *Soit $\Phi : [0:1[\longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par :*

$$\begin{cases} \Phi : [0:1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & \Phi(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - 2x \end{cases}$$

Il faut montrer que, pour tout $x \in [0:1[$, nous avons $\Phi(x) \geqslant 0$

- Première remarque, $\Phi(0) = 0$ et comme $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{1+x}{1-x} = +\infty$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \Phi(x) = +\infty$
- Une autre écriture de Φ est donnée par : $\Phi(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x$ et le calcul de dérivée donne :

$$\Phi'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 2 = \frac{1-x+1+x-2\left(1-x^2\right)}{1-x^2} = \frac{2x^2}{1-x^2}$$

  Donc, pour tout $x \in [0:1[$, nous avons $\Phi'(x) \geqslant 0$
- Comme la dérivée est positive, la fonction Φ est croissante et donc, pour tout $x \in [0:1[$, nous avons $\Phi(x) \geqslant \Phi(0)$, c'est à dire que pour tout $x \in [0:1[$, nous avons $\Phi(x) \geqslant 0$

Ce que nous voulions

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on appelle f_n, l'application définie par :*

$$\begin{cases} f_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f_n(x) = x^n e^{-x} \end{cases}$$

Il faut montrer que, pour tout $x \in [0:n]$, nous avons $f_n(n+x) \geqslant f_n(n-x)$

Ce n'est pas une question d'une grande évidence !! Il faut, bien entendu, utiliser la question précédente.

- Soit $x \in [0:n[$. Nous avons, dans ce cas, $f_n(n+x) \geqslant 0$ et $f_n(n-x) \geqslant 0$. Nous allons faire le rapport $\dfrac{f_n(n+x)}{f_n(n-x)}$. Donc :

$$\frac{f_n(n+x)}{f_n(n-x)} = \frac{(n+x)^n e^{-n-x}}{(n-x)^n e^{-n+x}} = \left(\frac{n+x}{n-x}\right)^n e^{-2x} = \left(\left(\frac{n+x}{n-x}\right)e^{-2\frac{x}{n}}\right)^n = \left(\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}}\right)e^{-2\frac{x}{n}}\right)^n$$

- En prenant le logarithme, nous avons :

$$\ln\left(\frac{f_n(n+x)}{f_n(n-x)}\right) = \ln\left(\left(\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}}\right)e^{-2\frac{x}{n}}\right)^n\right) = n\left(\ln\left(\frac{1+\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}}\right) - 2\frac{x}{n}\right)$$

- Comme $x \in [0:n[$, nous avons $\dfrac{x}{n} \in [0:1[$ et donc, comme $\Phi\left(\dfrac{x}{n}\right) = \dfrac{1+\frac{x}{n}}{1-\frac{x}{n}} - 2\dfrac{x}{n} \geqslant 0$, d'où nous déduisons $\ln\left(\dfrac{f_n(n+x)}{f_n(n-x)}\right) \geqslant 0$.

  Or :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{f_n(n+x)}{f_n(n-x)}\right) \geqslant 0 &\iff \ln(f_n(n+x)) - \ln(f_n(n+x)) \geqslant 0 \\ &\iff \ln(f_n(n+x)) \geqslant \ln(f_n(n+x)) \\ &\iff f_n(n+x) \geqslant f_n(n+x) \end{aligned}$$

  Ce que nous voulions

3. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\,dt \leqslant \int_n^{2n} f_n(t)\,dt$*

   Intéressons nous à l'intégrale $\displaystyle\int_n^{2n} f_n(t)\,dt$.
   Faisons le changement de variables $t = x + n \Longleftrightarrow x = t - n$ et donc $du = dt$. Nous avons alors :

   $$\int_n^{2n} f_n(t)\,dt = \int_0^n f_n(n+x)\,dx$$

   D'après la question précédente, si $x \in [0:n]$, alors $f_n(n+x) \geqslant f_n(n-x)$. Nous pouvons alors écrire :

   $$I_n^{2n} f_n(t)\,dt = \int_0^n f_n(n+x)\,dx \geqslant \int_0^n f_n(n-x)\,dx$$

   Faisons maintenant, dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^n f_n(n-x)\,dt$ le changement de variables $t = n - x \Longleftrightarrow x = n - t$ et donc $dx = -dt$. Nous avons alors :

   $$\int_0^n f_n(n-x)\,dx = \int_n^0 f_n(t) - dt = \int_0^n f_n(t)\,dt$$

   Et nous avons donc $\displaystyle\int_n^{2n} f_n(t)\,dt \geqslant \int_0^n f_n(t)\,dt \Longleftrightarrow \int_0^n f_n(t)\,dt \leqslant \int_n^{2n} f_n(t)\,dt$
   Ce que nous voulions

4. *Démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons : $\displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt = n!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$*

   Nous allons faire cette démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$
   $\longrightarrow$ **Vérifions pour $n = 1$**
   Nous avons $\displaystyle\int_0^x f_1(t)\,dt = \int_0^x te^{-t}\,dt$.
   En faisant une intégration par tarties, nous avons :

   $$\begin{array}{ll} u = t & u' = 1 \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array}$$

   Et donc :

   $$\begin{aligned} \int_0^x te^{-t}\,dt &= \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt \\ &= -xe^{-x} + \left[-e^{-t}\right]_0^x \\ &= -xe^{-x} + 1 - e^{-x} \\ &= 1\left(1 - e^{-x}(1+x)\right) \\ &= 1!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{1}\frac{x^k}{k!}\right) \end{aligned}$$

   C'est donc vrai pour $n = 1$
   $\longrightarrow$ **Supposons que c'est vrai à l'ordre n**
   $\longrightarrow$ **Démontrons à l'ordre $n+1$**
   Comme tout à l'heure, nous avons $\displaystyle\int_0^x f_{n+1}(t)\,dt = \int_0^x t^{n+1}e^{-t}\,dt$.
   En faisant une intégration par tarties, nous avons :

   $$\begin{array}{ll} u = t^{n+1} & u' = (n+1)\,t^n \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}\int_0^x t^{n+1}e^{-t}\,dt &= \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^x + (n+1)\int_0^x t^n e^{-t}\,dt\\ &= -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)\int_0^x f_n(t)\,dt\\ &= -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= (n+1)!\left(\frac{-x^{n+1}e^{-x}}{(n+1)!} + 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)\\ &= (n+1)!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}\right)\end{aligned}$$

Ce que nous voulions.

Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons : $\displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt = n!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$

5. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt = n!$*

Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors, pour tout $x \geqslant 0$, nous avons :

$$\left|\int_0^x f_n(t)\,dt - n!\right| = \sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-x}x^k \times n!}{k!}$$

En utilisant les croissances comparées entre la fonction exponentielle et les fonctions puissances, nous avons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}x^k \times n!}{k!} = 0$, et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-x}x^k \times n!}{k!} = 0$, de telle sorte que

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\int_0^x f_n(t)\,dt - n!\right| = 0$$

et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt = n!$

6. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} \geqslant \frac{e^n}{2}$*

De l'identité $\displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt = n!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$, nous tirons, pour $x = n$

$$\int_0^n f_n(t)\,dt = n!\left(1 - e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}\right)$$

C'est à dire :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = e^n - \frac{e^n}{n!}\int_0^n f_n(t)\,dt$$

De telle sorte que :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} - \frac{e^n}{2} = \frac{e^n}{2} - \frac{e^n}{n!}\int_0^n f_n(t)\,dt$$

D'autre part :

$$2\int_0^n f_n(t)\,dt = \int_0^n f_n(t)\,dt + \int_0^n f_n(t)\,dt \leqslant \int_0^n f_n(t)\,dt + \int_n^{2n} f_n(t)\,dt = \int_0^{2n} f_n(t)\,dt$$

Pour tout t tel que $t \geqslant 0$, nous avons $t^n e^{-t} \geqslant 0$ et donc $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{2n} f_n(t)\,dt$. D'autre part, pour tout $x \geqslant 2n$, nous avons aussi $\displaystyle\int_0^{2n} f_n(t)\,dt \leqslant \int_0^x f_n(t)\,dt$.

En particulier, $\displaystyle\int_0^{2n} f_n(t)\,dt \leqslant \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f_n(t)\,dt = n!$. Ainsi, nous avons

$$2\int_0^n f_n(t)\,dt \leqslant n! \Longleftrightarrow \int_0^n f_n(t)\,dt \leqslant \frac{n!}{2}$$

Donc $\displaystyle\frac{e^n}{n!}\int_0^n f_n(t)\,dt \leqslant \frac{e^n}{n!} \times \frac{n!}{2} = \frac{e^n}{2}$.

Nous en déduisons $\displaystyle -\frac{e^n}{n!}\int_0^n f_n(t)\,dt \geqslant -\frac{e^n}{2}$

Et donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} - \frac{e^n}{2} \geqslant \frac{e^n}{2} - \frac{e^n}{2} = 0$

Nous avons bien, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \geqslant \frac{e^n}{2}$

Exercice 29 :

1. **Equation fonctionnelle de Cauchy**
   On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ est additive sur $\mathbb{R}$ si, pour tous nombres réels x et y

   $$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

   On se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble des fonctions f additives et continues sur $\mathbb{R}$.

   (a) **Résultats préliminaires**
   Soit f une fonction définie et additive sur $\mathbb{R}$.

   i. Déterminer $f(0)$

   ii. Démontrer que f est une fonction impaire.

   iii. Démontrer que, pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ et tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.

   iv. En déduire que, pour tout nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ et tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, $f(rx) = rf(x)$

   v. Démontrer qu'il existe un nombre réel a tel que, pour tout nombre rationnel r, $f(r) = ar$

   Rappelons que $\mathbb{R}$, muni de l'addition est un groupe abélien et que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est telle que,pour tous nombres réels $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

   $$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

   Alors, f est un **homomorphisme de groupe**

   $\Rightarrow$ Des premières propriétés d'homomorphisme de groupe, nous tirons $f(0) = 0$ *(L'image de l'élément neutre est l'élément neutre)* et $f(-x) = -f(x)$ *(L'image d'un symétrique est le symétrique de l'image)*. f est donc impaire

   $\Rightarrow$ Démontrons, maintenant, que pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ et tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
   Soit donc $x \in \mathbb{R}$

   $\star$ Pour $n \in \mathbb{N}$, il est facile de démontrer, par récurrence que $f(nx) = nf(x)$

   - $\triangleright$ C'est vrai pour $n = 0$, puisque $f(0) = f(0 \times x) = 0 = 0 \times f(x)$
   - $\triangleright$ Ensuite, supposons que $f(nx) = nf(x)$
   - $\triangleright$ Alors, $f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$

   Ce que nous voulions

⋆ Ensuite si $n \in \mathbb{Z}^{*-}$, c'est à dire si n est un entier négatif strictement inférieur à 0. Il existe donc $n' \in \mathbb{N}$ tel que $n = -n'$ et donc :

$$f(nx) = f(-n'x) = -f(n'x) = -n'f(x) = nf(x)$$

Donc, pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ et tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$

⇒ Soit $q \in \mathbb{Z}^*$, c'est à que q est un entier relatif non nul

▷ Alors :

$$f(1) = f\left(q \times \frac{1}{q}\right) = q \times f\left(\frac{1}{q}\right) \Longleftrightarrow f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}f(1)$$

▷ Ainsi, si $p \in \mathbb{Z}$, alors $f\left(\frac{p}{q}\right) = p \times f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1)$, c'est à dire que, pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.
Il existe $a \in \mathbb{R}$ et ce $a = f(1)$ tel que, pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ra$.

⇒ Plus loin, soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(x) = f\left(q \times \frac{1}{q} \times x\right) = q \times f\left(\frac{1}{q} \times x\right)$$

D'où nous déduisons que $f\left(\frac{1}{q} \times x\right) = \frac{1}{q}f(x)$

Puis, si $r \in \mathbb{Q}$, alors $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ et donc :

$$f(rx) = f\left(\frac{p}{q} \times x\right) = p \times f\left(\frac{1}{q} \times x\right) = \frac{p}{q}f(x) = rf(x)$$

(b) **Première méthode**

Soit f une fonction additive et continue sur $\mathbb{R}$
Déduire de la question précédente qu'il existe un nombre réel a tel que, pour tout nombre réel x nous avons $f(x) = a.x$ Conclure.

L'hypothèse supplémentaire apportée ici est **la continuité** de f et elle est capitale.

◇ Nous savons que $\mathbb{Q}$ **est dense dans** $\mathbb{R}$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$

◇ D'après les questions précédentes, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(r_n) = a.r_n$.
De la continuité de f, nous tirons $\lim\limits_{n\to+\infty} f(r_n) = f(x)$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} ar_n = ax$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons $f(x) = a.x$

◇ Ceci signifie que les seuls endomorphismes de groupe continus de $(\mathbb{R}, +)$ sont les applications du type $f(x) = a.x$, ce sont, en fait, les applications linéaires

(c) **Seconde méthode**

Soit f une fonction additive et continue sur $\mathbb{R}$

i. *Après avoir justifié l'existence de ces intégrales, démontrer que, pour tout nombre réel x, nous avons*

$$f(x) = \int_0^1 f(x+t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$f(x+t) = f(x) + f(t) \Longleftrightarrow f(x) = f(x+t) - f(t)$$

Clairement, la fonction $\psi(t) = f(x+t) - f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions continues. Nous pouvons donc en calculer l'intégrale sur l'intervalle $[0;1]$

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \psi(t)\ \mathrm{d}t \Longleftrightarrow \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 f(x+t) - f(t)\ \mathrm{d}t$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = \int_0^1 f(x+t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$$

ii. *Démontrer que, pour tout nombre réel x*

$$f(x) = \int_x^{x+1} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$$

Regardons l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x+t)\ \mathrm{d}t$. Nous faisons le changement de variable $u = x+t$ et donc $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ et donc :

$$\int_0^1 f(x+t)\ \mathrm{d}t = \int_x^{x+1} f(u)\ \mathrm{d}u$$

D'où $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$

iii. *Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.*

Appelons $G(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\ \mathrm{d}t$. Nous avons $G(x) = \displaystyle\int_0^{x+1} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$.

Si $H(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$, alors $G(x) = H(x+1) - H(x)$ et G apparaît donc comme une fonction dérivable de dérivée

$$G'(x) = H'(x+1) - H'(x) = f(x+1) - f(x)$$

L'expression $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ étant une constante, sa dérivée est nulle et donc, nous avons :

$$f'(x) = f(x+1) - f(x)$$

iv. *Conclure.*

La conclusion est simple.
Nous avons $f(x+1) = f(x) + f(1)$ et donc $f'(x) = f(x) + f(1) - f(x) = f(1)$
D'où, $f(x) = xf(1) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Mais, comme $f(0) = 0$, nous avons $k = 0$ et $f(x) = xf(1)$

2. **Restriction des hypothèses**

(a) **Continuité en un point**
Soient un nombre réel $x_0 \in \mathbb{R}$ et une fonction f additive sur $\mathbb{R}$ continue en x_0.

i. *Démontrer que f est continue en 0.*

Pour montrer que f est continue en 0, il faut démontrer que $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = f(0) = 0$.

Nous avons $x_0 = x_0 - h + h$ et donc

$$f(x_0) = f(x_0 + h - h) = f(x_0 + h) - f(h) \Longleftrightarrow f(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

De la continuité de f en x_0, nous tirons que $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ et donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$, c'est à dire que $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = 0$

f est donc continue en 0

ii. *Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$*

Soit $x \in \mathbb{R}$, quelconque. Il faut donc démontrer que $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$

Là encore, c'est facile puisque $f(x+h) = f(x) + f(h)$ et comme $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = 0$, nous avons $\lim\limits_{h\to 0} f(x) + f(h) = f(x)$ et donc, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$

f est donc continue en x

iii. *Conclure.*

Ainsi, si une fonction additive est continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, alors elle est continue sur $\mathbb{R}$ en entier et nous avons toujours $f(x) = xf(1)$

(b) **Monotonie**

Soit une fonction f additive et monotone sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un nombre réel.

i. *Justifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :*

A. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in \mathbb{Q}$ et $b_n \in \mathbb{Q}$

B. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

C. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x_0$

Nous choisissons 2 suites définies par le développement décimal de x.
Pour ne pas perdre le lecteur, nous allons réutiliser les notations de notre cours.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 10^{-n}[10^n x]$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 10^{-n}$ est telle que $u_n \leqslant x < v_n$, et nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = x$.
D'autre part, et par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Q}$ et $v_n \in \mathbb{Q}$
Ensuite, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors que la suite suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

En effet, nous avons vu que nous pouvions écrire $u_n = [x] + \sum\limits_{p=1}^{n} a_p 10^{-p}$ où $a_p \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant a_p \leqslant 9$. Alors :

→ $u_{n+1} - u_n = a_{n+1}10^{-n-1} \geqslant 0$ et donc, comme $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

→ De plus :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = & \quad u_{n+1} + 10^{-n-1} - u_n - 10^{-n} = 10^{-n-1} - 10^{-n} + a_{n+1}10^{-n-1} \\ = & \quad 10^{-n-1}(a_{n+1} + 1 - 10) \\ = & \quad 10^{-n-1}(a_{n+1} - 9) \end{aligned}$$

Or, comme $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 9$, nous avons $a_{n+1} - 9 \leqslant 0$ et donc $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

En fait, les 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Remarque :

Nous avons utilisé le développement décimal (en base 10), mais nous aurions tout aussi pu utiliser une autre base d où $d \in \mathbb{N}$ et $d \geqslant 2$

ii. *Démontrer que $f(x_0) = x_0 f(1)$.*

Dans ce paragraphe, les seules hypothèses dont nous disposions sont la monotonie et l'additivité.
Nous allons supposer f croissante et $f(1) \geqslant 0$. Les autres cas se déduisent très facilement.
Nous avons démontré que si f est additive, alors pour tout $r \in \mathbb{Q}$, nous avions $f(r) = rf(1)$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$
Soient, maintenant, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites de rationnels tels que $a_n \leqslant x < b_n$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x_0$

▷ Comme $a_n \leqslant x_0 < b_n$ et que f est croissante, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(a_n) \leqslant f(x_0) < f(b_n) \iff a_n f(1) \leqslant f(x_0) < b_n f(1)$$

▷ De l'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x_0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n f(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n f(1) = x_0 f(1)$

▷ Nous devons donc démontrer que $f(x_0) = x_0 f(1)$.
Supposons le contraire, c'est à dire $f(x_0) \neq x_0 f(1)$. Pour simplifier, nous allons supposer que $f(x_0) < x_0 f(1)$. Le cas $f(x_0) > x_0 f(1)$ est similaire.
Soit donc $\varepsilon = \dfrac{x_0 f(1) - f(x_0)}{2} > 0$
Il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $0 < x_0 f(1) - a_n f(1) < \varepsilon$, c'est à dire :

$$\begin{gathered} x_0 f(1) - a_n f(1) < \varepsilon \\ \iff \\ x_0 f(1) - a_n f(1) < \frac{x_0 f(1) - f(x_0)}{2} \\ \iff \\ a_n f(1) > \frac{x_0 f(1) + f(x_0)}{2} > f(x_0) \end{gathered}$$

Ce qui est en contradiction avec le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $a_n f(1) \leqslant f(x)$.
Donc $f(x_0) = x_0 f(1)$
Ce que nous voulions

iii. *Conclure.*

Toutes les fonctions monotones et additives sont du type $f(x) = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

(c) **Encadrement**

Soient deux nombres réels $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, avec $\alpha < \beta$, et une fonction f additive sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $[\alpha;\beta]$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel.

i. *Démontrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre rationnel $r_n \in \mathbb{Q}$ tel que $nx - r_n \in [\alpha;\beta]$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Alors $nx - r_n \in [\alpha;\beta] \iff \alpha \leqslant nx - r_n \leqslant \beta$. Or :

$$\alpha \leqslant nx - r_n \leqslant \beta \iff \alpha - nx \leqslant -r_n \leqslant \beta - nx \iff nx - \beta \leqslant r_n \leqslant nx - \alpha$$

Puisque $\alpha < \beta$, nous avons $nx - \beta < nx - \alpha$ et de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $r_n \in \mathbb{Q}$ tel que $r_n \in [nx - \beta; nx - \alpha]$, c'est à dire qu'il existe un nombre rationnel $r_n \in \mathbb{Q}$ tel que $nx - r_n \in [\alpha;\beta]$.
Ce que nous voulions

ii. *On pose $f(1) = a$. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:*

$$|f(nx - r_n)| \geqslant n|f(x) - ax| - |a||nx - r_n|$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx - r_n \in [\alpha;\beta]$
De l'additivité, nous avons $f(nx - r_n) = f(nx) - f(r_n)$
Nous avons démontré dans la partie 1 que :
→ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$
→ Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1) = ra$
Et donc, $f(nx - r_n) = f(nx) - f(r_n) = nf(x) - r_n a$.
Or, nous pouvons aussi écrire :

$$\begin{aligned} f(nx - r_n) &= f(nx) - f(r_n) = nf(x) - r_n a \\ &= nf(x) - r_n a + nax - nax \\ &= n(f(x) - ax) - a(r_n - nx) \end{aligned}$$

Et donc $|f(nx - r_n)| = |n(f(x) - ax) - a(r_n - nx)|$
En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons $|f(nx - r_n)| \geqslant |n(f(x) - ax)| - |a(r_n - nx)|$, c'est à dire :

$$|f(nx - r_n)| \geqslant n|f(x) - ax| - |a||nx - r_n|$$

iii. *Conclure*

▷ Comme $nx - r_n \in [\alpha; \beta]$, alors $|nx - r_n| \leqslant \max\{|\alpha|; |\beta|\}$, et si nous appelons $A = \max\{|\alpha|; |\beta|\}$, alors nous avons $-|a||nx - r_n| \geqslant -|a| A$, et donc :

$$|f(nx - r_n)| \geqslant n|f(x) - ax| - |a| A$$

▷ f étant bornée sur $[\alpha; \beta]$, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [\alpha; \beta]$, nous avons $|f(x)| \leqslant M$, et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons $|f(nx - r_n)| \leqslant M$, et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ $n|f(x) - ax| - |a| A \leqslant M$
Ce qui est impossible sauf si $|f(x) - ax| = 0$, c'est à dire si $f(x) - ax = 0 \Longleftrightarrow f(x) = ax$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$ où a est bien entendu tel que $a = f(1)$

3. **Equation fonctionnelle de Jensen**
On se propose de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Soit f une telle fonction.

(a) *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0)$*

Soit $u \in \mathbb{R}$; alors $f\left(\dfrac{u+0}{2}\right) = \dfrac{f(u) + f(0)}{2} \Longleftrightarrow f\left(\dfrac{u}{2}\right) = \dfrac{f(u) + f(0)}{2}$

Soient, maintenant $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. En posant $u = x + y$, nous avons :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y) + f(0)}{2} = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Nous avons donc $\dfrac{f(x+y) + f(0)}{2} = \dfrac{f(x) + f(y)}{2} \Longleftrightarrow f(x+y) + f(0) = f(x) + f(y)$

Et donc $f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0)$

(b) *On pose $f(0) = b$. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = f(x) - b$*
Déterminer l'équation fonctionnelle vérifiée par g et résoudre l'équation fonctionnelle de Jensen.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; alors :

$$\begin{aligned} g(x+y) = f(x+y) - b = & \ f(x) + f(y) - b - b \\ = & \ (f(x) - b) + (f(y) - b) \\ = & \ g(x) + g(y) \end{aligned}$$

g vérifie donc une équation fonctionnelle de Cauchy ; comme g est continue, alors g est du type $g(x) = ax$ et donc, les solutions de l'équations fonctionnelle de Jensen sont du type

$$f(x) = ax + b \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

Un exposé filmé de la résolution des équations fonctionnelles de Jensen est disponible sur Youtube

4. *On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}^{*+}$ telles que :*

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right)\left(f(x) = f\left(\frac{x^2 + 16}{2x}\right)\right)$$

Soit f une telle fonction

(a) *On considère les fonctions :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{x^2+16}{2x} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h(x) = g(x) - x \end{array}\right.$$

i. *Dresser le tableau des variations de g, déterminer $g(4)$ et préciser les limites de g en 0 et en $+\infty$*

Le domaine d'étude est, ici, $\mathbb{R}^{*+}$ et ne pose aucune difficulté.
L'étude des variations comporte plusieurs étapes :

- **L'étude des limites**
  - ▷ En 0, nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{x^2+16}{2x} = +\infty$
  - ▷ En $+\infty$, g étant un rapport de polynômes, nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+16}{2x} = +\infty$$

- **Le calcul de la dérivée**

  Nous avons $g'(x) = \dfrac{2x^2-32}{4x^2} = \dfrac{x^2-16}{2x^2}$
  Ainsi, si $x \in]0;+4]$, alors $g'(x) \leqslant 0$ et si $x \geqslant 4$, alors $g'(x) \geqslant 0$ et donc, g est décroissante sur $]0;+4]$ et croissante sur $[4;+\infty[$

- **Existence d'une asymptote**

  On peut écrire $g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{16}{2x}$ et comme $\lim\limits_{+\to\infty}\left(g(x) - \dfrac{x}{2}\right) = 0$, la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote en $+\infty$
  Une autre asymptote est la droite $x = 0$

D'où le graphe *(figure12.25)* :

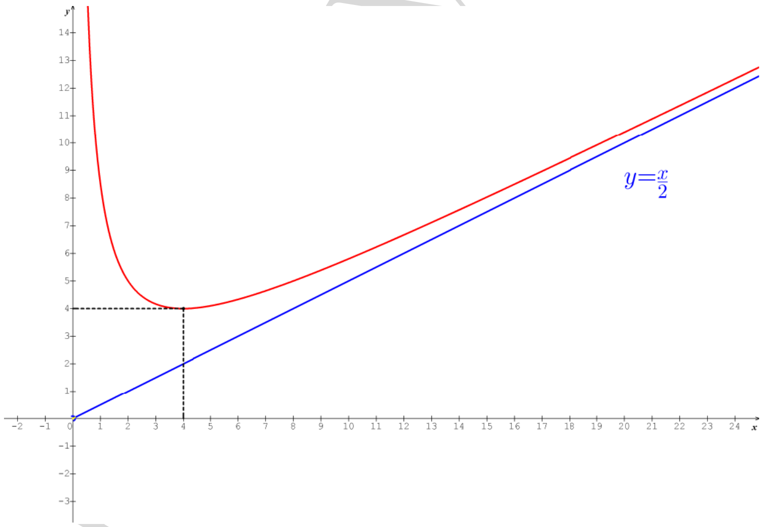

FIGURE 12.25 – Le graphe de la fonction $g(x) = \dfrac{x^2+16}{2x}$

Nous avons $g(4) = 4$ et nous pouvons remarquer que $g([+4;+\infty[) = [+4;+\infty[$ et que, de même, $g(]0;+4]) = [+4;+\infty[$.
Donc, $g(\mathbb{R}^{*+}) = [+4;+\infty[$

ii. *Étudier le signe de la fonction h sur $\mathbb{R}^{*+}$*

Nous allons donc commencer par évaluer $h(x) = g(x) - x$

$$h(x) = g(x) - x = \frac{x^2+16}{2x} - x = \frac{x^2+16-2x^2}{2x} = \frac{16-x^2}{2x} = \frac{(4+x)(4-x)}{2x}$$

Ainsi, si $x \in]0;+4]$, alors $h(x) \geqslant 0$, c'est à dire $g(x) \geqslant x$ et si $x \geqslant 4$ alors $h(x) \leqslant 0$, c'est à dire $g(x) \leqslant x$

(b) i. *Soient $x \in [+4;+\infty[$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+16}{2u_n}$ Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.*

Si $u_0 = x$ où $x \in [+4;+\infty[$, de la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons $u_{n+1} = g(u_n)$ et, d'après l'étude de la courbe, nous avons, par une récurrence simple et facile, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) \in [+4;+\infty[$, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [+4;+\infty[$ et $g(u_n) \leqslant u_n$, c'est à dire $u_{n+1} \leqslant u_n$.
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle décroissante et minorée par $+4$; elle est donc convergente.
g étant continue, sa limite l vérifie $l > 0$ et $g(l) = l$. Or :

$$g(l) = l \iff \frac{l^2+16}{2l} \iff l = 4 \text{ puisque } l > 0$$

La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc $+4$

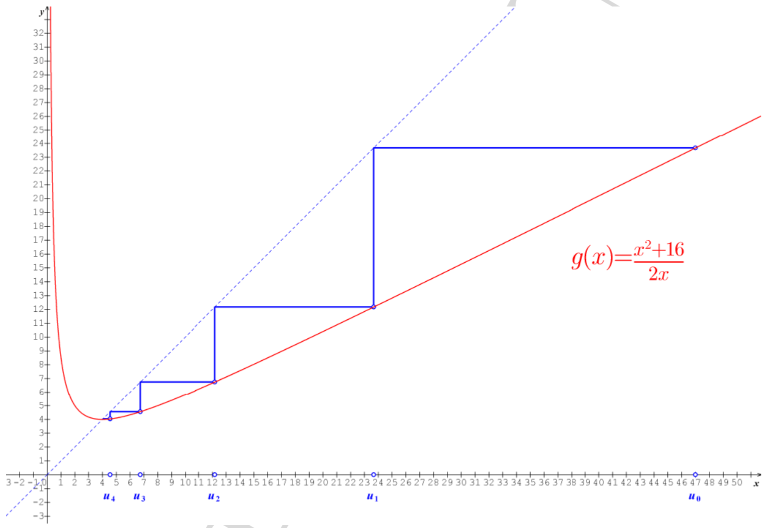

Figure 12.26 – Une visualisation de la suite lorsque $u_0 > 4$

ii. *En déduire que, pour tout $x \in [+4;+\infty[$, nous avons $f(x) = f(4)$*

L'équation de départ $f(x) = f\left(\dfrac{x^2+16}{2x}\right)$ peut aussi s'écrire $f(x) = f \circ g(x)$.
Considérons la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = f(u_n)$.
Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = f(u_n) = f \circ g(u_n) = f(u_{n+1}) = w_{n+1}$.
La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite constante et nous avons, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 = f(u_0) = f(x)$
Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = f(u_n) = f(x)$, par passage à la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x)$, et comme f est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) = f(4)$
Ainsi, pour tout $x \in [+4;+\infty[$, $f(x) = f(4)$.

(c) *Procéder de manière analogue pout démontrer que, pour tout $x \in]0;4[$, on a $f(x) = f(4)$*

Soit $x \in]0;+4]$.
On définit aussi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+16}{2u_n} = g(u_n)$.
Si $u_0 = x \in]0;+4]$, alors $u_1 = g(u_0) \geqslant 4$, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 4 à partir du terme u_1.
D'après l'étude précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$, et nous concluons de la même manière que, pour tout $x \in]0;+4]$, nous avons $f(x) = f(4)$

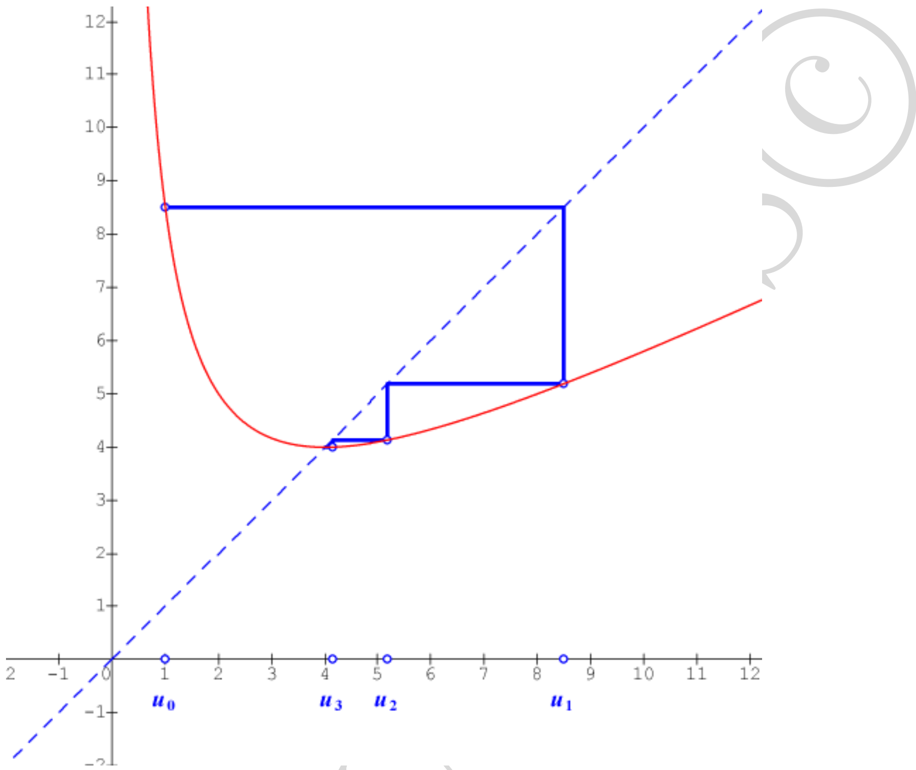

FIGURE 12.27 – Une visualisation de la suite lorsque $0 < u_0 < 4$

(d) *Conclure*

Les seules fonctions f continues sur $\mathbb{R}^{*+}$ vérifiant l'équation fonctionnelle $f(x) = f\left(\dfrac{x^2+16}{2x}\right)$ sont les fonctions constantes

Exercice 30 :

Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous ayions :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - f(x)f(y)$$

1. On peut tout d'abord remarquer que le fonction nulle $\mathcal{O}$ est solution de l'équation fonctionnelle
2. Supposons, maintenant, $f \neq \mathcal{O}$ et calculons $f(0)$
   Nous avons alors :
   $$f(0+0) = f(0) + f(0) - f(0)f(0) \Longleftrightarrow f(0) - (f(0))^2 = 0$$
   D'où nous tirons $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$
3. Supposons $f(0) = 1$
   Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $$f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0) - f(x)f(0) \Longleftrightarrow f(x) = f(x) + 1 - f(x) = 1$$
   Ainsi, si $f(0) = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ et f est la fonction constante égale à 1.
   Réciproquement, il est évident que la fonction constante et égale à 1 est solution de l'équation fonctionnelle

4. Supposons, maintenant que $f \neq \mathcal{O}$ et $f \neq 1$ et que donc $f(0) = 0$.
   Nous allons faire un « changement de variable » en posant $g = 1 - f$, c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - f(x)$; on peut alors remarquer que $g(0) = 1$ et que si f est continue sur $\mathbb{R}$, g est aussi continue sur $\mathbb{R}$
   g vérifie donc l'équation fonctionnelle :

$$\begin{aligned} 1 - g(x+y) = & \; (1 - g(x)) + (1 - g(y)) - ((1 - g(x)))((1 - g(y))) \\ = & \; 2 - g(x) - g(y) - (1 - g(y) - g(x) + g(x)g(y)) \\ = & \; 1 - g(x)g(y) \end{aligned}$$

   C'est à dire que g vérifie l'équation fonctionnelle $g(x+y) = g(x)g(y)$
   Les seules fonctions continues vérifiant cette équation fonctionnelle sont les fonctions exponentielles du type $g(x) = a^x$ avec a réel et $a > 0$.
   Ainsi les fonctions continues non constantes vérifiant l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - f(x)f(y)$$

   sont donc du type $f(x) = 1 - a^x$ avec $a > 0$

Les fonctions continues vérifiant l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y) - f(x)f(y)$ sont :
$\longrightarrow$ Les fonctions constantes $f = \mathcal{O}$ *(la fonction nulle)* et $f = 1$
$\longrightarrow$ Les fonctions du type $f(x) = 1 - a^x$ avec $a > 0$

Chapitre 13

Développements limités

13.1 Etude des développements limités

13.1.1 Définition de développement limité au voisinage de 0

Soit f une fonction définie au voisinage de zéro, sauf peut-être en zéro. On dit que cette fonction admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de zéro, s'il existe un intervalle ouvert I de centre 0, tel que, pour tout $x \in I$, x éventuellement non nul,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

- La partie $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ est appelée partie régulière, ou partie principale
- $x^n \varepsilon(x)$ est la partie complémentaire

Remarque 1 :

1. Si f admet, au voisinage de 0, un développement limité à l'ordre $n \geqslant 1$, $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = a_0$
2. Si f admet, au voisinage de 0, un développement limité à l'ordre $n \geqslant 1$ et si, maintenant, nous supposons f définie et continue en 0, alors $f(0) = a_0$ et nous avons :

$$\frac{f(x) - a_0}{x} = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} + x^{n-1} \varepsilon(x)$$

Alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - a_0}{x} = a_1$.
En d'autres termes, si une fonction f est continue en 0 et admet un développement limité d'ordre $n \geqslant 1$ au voisinage de 0, alors, f est dérivable en 0 et admet pour dérivée $f'(0) = a_1$

Remarque 2 :

On peut se poser plusieurs questions :

1. Quelles sont les conditions pour que f admette un développement limité au voisinage de 0 ?
2. Si f admet un développement limité au voisinage de 0, ce développement limité est-il unique ?

13.1.2 Théorème d'existence

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, contenant 0, alors, f, admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre n :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} \times f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} \times f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Démonstration

C'est la formule de Taylor-Young 11.4.5

Remarque 3 :

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$, et si $f^{(n+1)}$ existe et est majorée sur un intervalle I contenant 0, la formule de Taylor nous montre que f admet un développement limité sur I :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} \times f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} \times f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

Comme $\left|f^{(n+1)}(\theta x)\right| \leqslant M$, la formule de Taylor nous permet de majorer l'erreur commise en n'utilisant que le polynôme pour approcher f

13.1.3 Théorème

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, alors, ce développement est unique.

Démonstration

On suppose, comme d'habitude, que f admet deux développements différents, c'est à dire :

$$\begin{aligned} f(x) = & \; a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x) \\ = & \; b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + x^n\varepsilon'(x) \end{aligned}$$

Pour lequel, il existe au moins un k_0 tel que $a_{k_0} \neq b_{k_0} \Longleftrightarrow a_{k_0} - b_{k_0} \neq 0$
Alors, $(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n + x^n(\varepsilon(x) - \varepsilon'(x)) = 0$
Soit k le plus petit entier tel que $(a_k - b_k) \neq 0$; alors, pour $x \neq 0$, on simplifie par x^k, et nous obtenons :

$$(a_k - b_k) + (a_{k+1} - b_{k+1})x + \cdots + (a_n - b_n)x^{n-k} + x^{n-k}(\varepsilon(x) - \varepsilon'(x)) = 0$$

Or,

$$\lim_{x\to 0}\left((a_k - b_k) + (a_{k+1} - b_{k+1})x + \cdots + (a_n - b_n)x^{n-k} + x^{n-k}(\varepsilon(x) - \varepsilon'(x))\right) = a_k - b_k$$

Or, nous devrions avoir $a_k - b_k = 0$; Il y a donc contradiction.
Le développement limité est donc unique

13.1.4 Proposition

Soit f une fonction qui admet un développement limité à l'ordre n en 0. Alors,
- ▷ Sif est paire, tous les termes d'ordre impairs sont nuls
- ▷ Si f est impaire, tous les termes d'ordre pairs sont nuls

Démonstration

On suppose que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$

1. **On suppose f paire**
   Alors, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(-x)$, et en utilisant le développement de f et en remplaçant x par $-x$, nous avons :

$$\begin{aligned} f(-x) = & \; a_0 + a_1(-x) + a_2(-x)^2 + \cdots + a_n(-x)^n + (-x)^n\varepsilon(-x) \\ = & \; a_0 - a_1x + a_2x^2 + \cdots + (-1)^n a_nx^n + (-1)^n x^n\varepsilon'(x) \end{aligned}$$

   Où nous avons posé $\varepsilon'(x) = \varepsilon(-x)$

D'après l'unicité des développements limités, et comme $f(x) = f(-x)$, nous avons

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_1 & = -a_1 & \Longrightarrow & 2a_1 = 0 & \Longrightarrow & a_1 = 0 \\ a_3 & = -a_3 & \Longrightarrow & 2a_3 = 0 & \Longrightarrow & a_3 = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2p+1} & = -a_{2p+1} & \Longrightarrow & 2a_{2p+1} = 0 & \Longrightarrow & a_{2p+1} = 0 \end{array}\right.$$

Les termes d'ordre impair sont donc nuls.

2. **Si f est impaire,** la méthode est la même pour montrer que $a_{2p} = 0$

Exemple 1 :

1. Le développement limité de $\cos x$ au voisinage de 0

   La fonction $\cos x$ est une fonction paire. Nous allons calculer le développement limité de la fonction $\cos x$ au voisinage de 0 et montrer que les termes de rang impair sont nuls

   Nous allons utiliser la formule de Taylor-Young 11.4.5

   Il suffit donc de connaître la forme des dérivées n-*iemes* de la fonction cosinus *(déjà étudiée dans le chapitre sur les dérivées)*

   Nous avons donc : $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ et donc, $f^{(n)}(0) = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$

   C'est à dire : $\left\{\begin{array}{ll} f^{(n)}(0) = 0, & \text{si n est impair;} \\ f^{(n)}(0) = (-1)^p, & \text{si n=2p} \end{array}\right.$

   D'où, au voisinage de zéro, nous obtenons :

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p}\varepsilon(x)$$

   Les termes de rang impair sont bien nuls

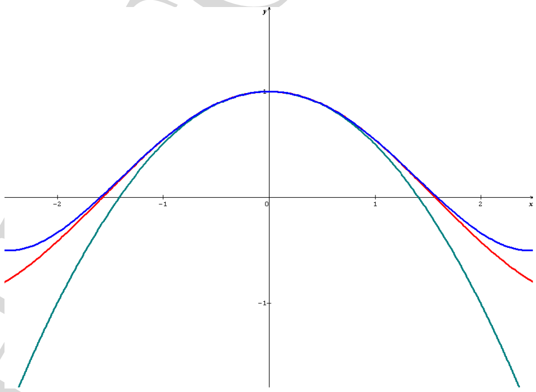

FIGURE 13.1 – Deux fonctions polynômes approchant $\cos x$ en 0 : $1 - \dfrac{x^2}{2}$ et $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$

2. Le développement limité de $\sin x$ au voisinage de 0

   La fonction $\sin x$ est une fonction impaire. Nous allons calculer le développement limité de la fonction $\sin x$ au voisinage de 0 et montrer que les termes de rang pair sont nuls

   Nous allons utiliser la formule de Taylor-Young 11.4.5

   Il suffit donc de connaître la forme des dérivées n-*iemes* de la fonction sinus *(déjà étudiée dans le chapitre sur les dérivées)*

   Nous avons donc : $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ et donc, $f^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

   C'est à dire : $\left\{\begin{array}{ll} f^{(n)}(0) = 0, & \text{si n est pair;} \\ f^{(n)}(0) = (-1)^p, & \text{si n=2p+1} \end{array}\right.$

D'où, au voisinage de zéro, nous obtenons :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$$

Les termes de rang pair sont bien nuls

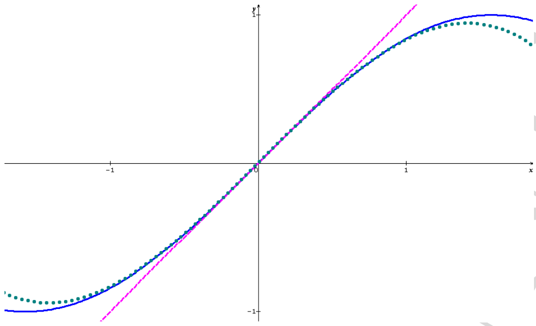

FIGURE 13.2 – Deux fonctions polynômes approchant $\sin x$ en 0 : x et $x - \dfrac{x^3}{6}$

13.1.5 Théorème

Supposons que f admette au voisinage de zéro le développement limité d'ordre n

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Alors, pour tout entier p tel que $p < n$, f admet au voisinage de zéro, le développement limité d'ordre p

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p + x^p \varepsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon^{'}(x) = 0$$

Démonstration

On suppose que $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$
Soit $p < n$.
Alors, $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p + x^p \left(a_{p+1}x + a_{p+2}x^2 + \ldots + a_n x^{n-p} + x^{n-p}\varepsilon(x)\right)$,
Et en posant $\varepsilon'(x) = \left(a_{p+1}x + a_{p+2}x^2 + \ldots + a_n x^{n-p} + x^{n-p}\varepsilon(x)\right)$, nous avons bien $\lim_{x\to 0} \varepsilon'(x) = 0$
Ce que nous voulions

Remarque 4 :

Soit k, le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$
Alors,

$$f(x) = a_k x^k \left(1 + \frac{a_{k+1}}{a_k}x + \frac{a_{k+2}}{a_k}x^2 + \frac{a_{k+3}}{a_k}x^3 + \dots + \frac{a_n}{a_k}x^{n-k} + x^{n-k}\varepsilon(x)\right) \text{ où } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Donc, comme

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{a_k x^k} = \lim_{x\to 0} 1 + \frac{a_{k+1}}{a_k}x + \frac{a_{k+2}}{a_k}x^2 + \frac{a_{k+3}}{a_k}x^3 + \dots + \frac{a_n}{a_k}x^{n-k} + x^{n-k}\varepsilon(x) = 1$$

Nous avons : $f(x) \underset{x\to 0}{\approxeq} a_k x^k$

13.2 Exemples de développements limités

La formule de Taylor fournit des développements limité : pour calculer des développements limités, il suffit d'utiliser la formule de Taylor-Young, et de savoir calculer des dérivées successives.

13.2.1 Les polynômes

Les polynômes sont leurs propres développements limités

Remarque 5 :

C'est donc, pour les polynômes, très simple !!

Exemple :

Considérons le polynôme $P(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$.
Quel est le développement limité de P, au voisinage de 0, à l'ordre 3 ?
Nous avons : $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)$ est une fonction, cette fois ci, bien définie : $\varepsilon(x) = x + x^2 + x^3 + x^4$

13.2.2 Développement limité de la fonction sinus

C'est un développement limité important ; il a déjà été travaillé dans le paragraphe précédent.
Nous rappelons ici son expression :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$$

13.2.3 Développement limité de la fonction cosinus

De la même manière, nous avons, toujours d'après le paragraphe précédent :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p}\varepsilon(x)$$

13.2.4 Développement limité de la fonction exponentielle

Les dérivées successives de la fonction exponentielle sont toutes égales, et de plus, $f^{(n)}(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; nous avons donc :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

13.2.5 Développement limité de la fonction exponentielle de base quelconque

C'est à dire que nous devons chercher le développement limité de a^x où $a > 0$.
Vous pouvez démontrer que $f^{(n)}(x) = (\ln a)^n e^{x \ln a}$, et nous avons donc $f^{(n)}(0) = (\ln a)^n$
D'où :

$$a^x = 1 + x\ln a + (\ln a)^2 \frac{x^2}{2} + (\ln a)^3 \frac{x^3}{3!} + (\ln a)^4 \frac{x^4}{4!} + \cdots + (\ln a)^n \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

On doit remarquer que si $a = e$, nous retrouvons le développement limité de e^x

Exercice 1 :

Démontrer que la dérivée n-ième de a^x est $f^{(n)}(x) = (\ln a)^n e^{x \ln a}$

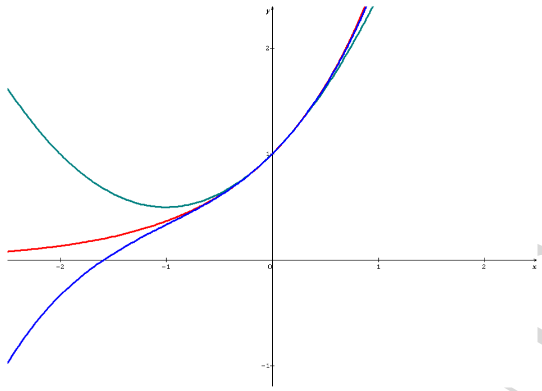

FIGURE 13.3 – Deux fonctions polynômes approchant e^x en 0 : $1+x+\dfrac{x^2}{2}$ et $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$

13.2.6 Développement limité de $\dfrac{1}{1-x}$

Il suffit de revenir à la somme des termes d'une suite géométrique

Rappel :

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Ce qui veut dire que :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Autrement dit, $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+x^n\dfrac{x}{1-x}$

En posant $\varepsilon(x)=\dfrac{x}{1-x}$, nous avons bien $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.
Nous avons alors le développement limité, à l'ordre n, au voisinage de 0 :

$$\boxed{\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)}$$

Exercice 2 :

En calculant les dérivées successives de $\dfrac{1}{1-x}$ et en utilisant la formule de Tay-lor-Young, retrouver le développement limité de $\dfrac{1}{1-x}$

13.2.7 Développement limité de $(1+x)^m$ en 0 où $m\in\mathbb{R}$ et $x>-1$

Ici, c'est un vrai prpoblème. Il faut donc le prendre comme un problème résolu.

1. **Calcul des dérivées successives de $(1+x)^m$ où $m\in\mathbb{R}$**
   Comme à chaque fois, il faut recalculer les dérivées successives, puis utiliser la formule de Taylor-Young.
   Nous avons :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= m(1+x)^{m-1}\\
f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2}\\
f^{(k)}(x) &= m(m-1)\cdots(m-(k-1))(1+x)^{m-k}=\left(\prod_{j=0}^{k-1}(m-j)\right)(1+x)^{m-k}
\end{aligned}$$

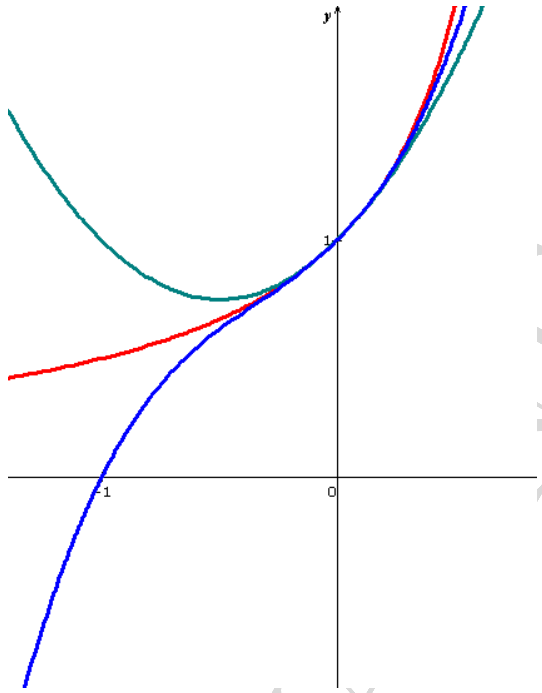

FIGURE 13.4 – Deux fonctions polynômes approchant $\dfrac{1}{1-x}$ en 0

De telle sorte que

$$f^{(k)}(0) = m(m-1)\cdots(m-(k-1)) = \prod_{j=0}^{k-1}(m-j)$$

2. **Développement limité de** $(1+x)^m$
   En utilisant la formule de Taylor-Young, nous avons le développement limité de $(1+x)^m$ en 0 où $m \in \mathbb{R}$ et $x > -1$:

$$\boxed{\begin{aligned}(1+x)^m = \quad & 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots \\ & \cdots + m(m-1)\cdots(m-(n-1))\frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)\end{aligned}}$$

13.2.8 Développement limité de $\sqrt{1+x}$

Il suffit de faire, dans le développement limité précédent 13.2.7 $m = \dfrac{1}{2}$; nous avons ainsi le développement limité de $\sqrt{1+x}$, à l'ordre 4 ($m = \dfrac{1}{2}$ et $n = 4$) :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{x^3}{3!} - \frac{15}{16} \times \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$$

C'est à dire :

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + x^4\varepsilon(x)}$$

13.2.9 Développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$

On retrouve le même développement limité que ci-dessus, en faisant cette fois-ci, $m = -1$ dans 13.2.7.

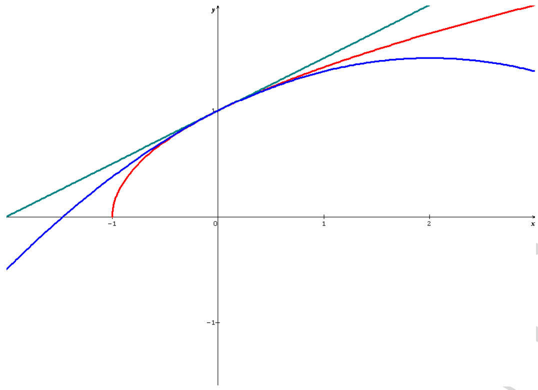

FIGURE 13.5 – Deux fonctions polynômes approchant $\sqrt{1+x}$: la droite $y = 1 + \dfrac{x}{2}$ et la courbe $y = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{8}$

Ainsi, à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}(1+x)^{-1} &= 1 - x + (-1)(-1-1)\frac{x^2}{2} + (-1)(-1-1)(-1-2)\frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x)}$$

Remarque 6 :

Quel lien y-a-t-il entre $(1+x)^m$ où $m \in \mathbb{R}$ et $x > -1$ et $(1+x)^m$ où $m \in \mathbb{N}$?

Si m est entier on retrouve le binôme de Newton

Si m n'est pas entier on note alors

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(k-1))}{k!}$$

et lorsque $m \in \mathbb{N}$, on remarque que $\dbinom{m}{k} = \mathrm{C}_m^k$ [1]

1. La notation $\binom{m}{k}$ est la notation américaine, valable même si $m \in \mathbb{R}$, alors que la notation C_m^k est l'ancienne notation française, uniquement valable si $m \in \mathbb{N}$

13.3 Opérations sur les développements limités

13.3.1 Somme

Soient f et g, deux fonctions qui admettent des développements limités à l'ordre n, au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Et

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + x^n \varepsilon'(x)$$

Alors, la fonction $f+g$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, et

$$(f+g)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \cdots + (a_n+b_n)x^n + x^n\varepsilon_1(x)$$

Où nous avons posé $\varepsilon_1(x) = \varepsilon(x) + \varepsilon'(x)$

Exemple 2 :

Donner le développement limité à l'ordre maximum de $f+g$ au voisinage de 0, sachant que :

— $f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^5\varepsilon_1(x)$
— $g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + 7x^5 - 2x^6 + x^6\varepsilon_2(x)$

où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$

Il faut faire remarquer que nous ne pouvons manipuler que des développement limité qui sont **tous du même ordre** ;

— Ici, l'ordre maximum sera l'ordre minimum des développements, soit celui de f, c'est à dire 5
— g admet aussi un développement limité à l'ordre 5 qui est donné par :

$$g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + 7x^5 + x^5\varepsilon_2(x)$$

Ainsi, $f+g$ admet un développement limité à l'ordre 5 et ce développement limité est donné par :

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= \left(2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^5\varepsilon_1(x)\right) + \left(1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + 7x^5 + x^5\varepsilon_2(x)\right) \\ &= 3 - 2x + 4x^2 + x^4 + 7x^5 + x^5\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Où nous avons posé $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$

13.3.2 Produits

Soient f et g, deux fonctions qui admettent des développements limités à l'ordre n, au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x)$$

Et

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$$

Alors, la fonction $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0,

$$(fg)(x) = (c_0) + (c_1)x + (c_2)x^2 + \cdots + (c_n)x^n + x^n\varepsilon(x)$$

où $c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j$

Remarque 7 :

1. Tout se passe comme si le développement limité de $f(x)g(x)$ s'obtient en faisant

<u>**le produit des parties principales :**</u>

$$\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right)\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n\right)$$

En ne retenant que les termes de degré inférieur ou égal à n

2. Il est aussi clair que si f admet pour développement limité

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf admet pour développement limité :

$$(\lambda f)(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \cdots + \lambda a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Exemple 3 :

Calculez le développement limité de fg sachant que :
- $f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4 \varepsilon_1(x)$
- $g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4 \varepsilon_2(x)$

où $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

Ici, c'est assez simple ; sachant que les deux fonctions admettent un développement limité au même ordre 4, la fonction fg admettra, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre 4.
- Nous faisons donc le produite des parties principales
- Et nous ne retenons que les termes de degré inférieur ou égal à 4

Nous avons donc, pour le produit des parties principales :

$$\begin{aligned}\left(2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4\right)\left(1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4\right) = \quad & 2 - 6x + 10x^2 - 4x^3 + 6x^4 \\ & +x - 3x^2 + 5x^3 - 2x^4 + 3x^5 \\ & -x^2 + 3x^3 - 5x^4 + 2x^5 - 3x^6 \\ & +2x^3 - 6x^4 - 10x^5 - 4x^6 + 6x^7 \\ & -2x^4 + 6x^5 - 10x^6 + 4x^7 - 6x^8\end{aligned}$$

On ne retient que les termes de degré inférieur ou égal à 4 *(on aurait donc pu se passer de calculs superflus !)* D'où :

$$f(x) g(x) = 2 - 5x + 6x^2 + 6x^3 - 9x^4 + x^4 \varepsilon(x)$$

13.3.3 Le Quotient

Soient f et g, deux fonctions qui admettent des développements limités à l'ordre n, au voisinage de 0 : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ et $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + x^n \varepsilon'(x)$

Alors, pour que la fonction $\dfrac{f}{g}$ admette un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, il faut que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = b_0 \neq 0$

On fait alors la division des parties principales $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ et $B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$ <u>suivant les puissances croissantes</u>

Exemple 4 :

Chercons le développement limité, à l'ordre 4, au voisinage de 0 de $\tan x$

Comme $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, nous allons donner les développement limité de $\sin x$ et $\cos x$, à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned}\sin x = \quad & x - \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon_1(x) \\ \cos x = \quad & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon_2(x)\end{aligned}$$

Puis, nous faisons la division euclidienne des parties principales suivant les puissances croissantes :

$$\begin{array}{r|l} x-\dfrac{x^3}{6} & 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24} \\ \hline -x+\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^5}{24} & x+\dfrac{x^3}{3} \\ -\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{24} & \end{array}$$

Et on s'arrête là, puisque nous ne souhaitons avoir qu'un développement limité à l'ordre 4.
D'où le développement limité, à l'ordre 4, au voisinage de 0 de $\tan x$ est donné par :

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)}$$

13.3.4 Fonctions composées

Plutôt que de faire de grandes théories, néanmoins nécessaires, un exemple est intéressant, avant de se lancer dans le grand bain.

Donner le développement de $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$ au voisinage de 0, et à l'ordre 4

Nous allons appeler $u(x) = \sin x$ et donc, $f(x) = \sqrt{1+u(x)}$. Il faut remarquer que $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$

En fait, nous avons $f(x) = (1+u(x))^{\frac{1}{2}}$, et, comme lorsque x est voisin de zéro, $u(x)$ est aussi voisin de zéro, nous avons le développement limité suivant :

$$(1+u(x))^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u(x) - \frac{1}{8}u(x)^2 + \frac{1}{16}u(x)^3 - \frac{5}{128}u(x)^4 + x^4\varepsilon(x)$$

Or, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_1(x)$

Nous allons donc élever la partie principale de $\sin x$ au carré, puis au cube, et nous retiendrons que les termes de degré inférieur ou égal à 4

$$\begin{aligned} u(x) &= \quad x - \frac{x^3}{6} \\ u(x)^2 &= \quad \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} - \frac{x^4}{3} \\ u(x)^3 &= \quad \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 = x^3 - \frac{x^9}{216} - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{12} \end{aligned}$$

On ne retient que les termes de degré inférieur ou égal à 4, et nous avons donc :

$$\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{16}\left(x^3\right) - \frac{5}{128}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

C'est à dire, en ordonnant les termes

$$\boxed{\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{384} + x^4\varepsilon(x)}$$

Remarque 8 :

Cette proposition nous autorise à faire des changements de variables

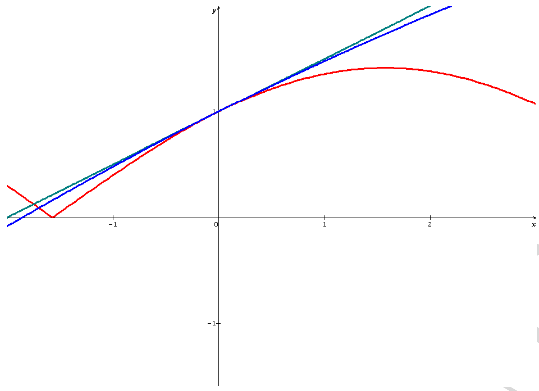

FIGURE 13.6 – Deux fonctions polynômes approchant $\sqrt{1+\sin x}$: la droite $y = 1 + \dfrac{x}{2}$ et la courbe $y = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{48}$

Exemple 5 :

1. Quel est le développement limité de e^{-x} ?
   Nous connaissons le développement limité de e^x :
   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$
   Et donc :
   $$\boxed{e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon_1(x)}$$
   où nous avons posé $\varepsilon_1(x) = (-1)^n \varepsilon(-x)$
2. Quel est le développement limité de $\cosh x$?
   Par définition, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. En utilisant les résultats sur la somme et le produit, le développement limité de $\cosh x$ est donné par :
   $$\boxed{\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \varepsilon(x)}$$
   On peut remarquer que, comme la fonction $\cosh x$ est paire, les termes de rang impair du développement limité sont nuls.
3. Quel est le développement limité de $\sinh x$?
   Par définition, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. En utilisant les résultats sur la somme et le produit, le développement limité de $\sinh x$ est donné par :
   $$\boxed{\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)}$$
   On peut remarquer que, comme la fonction $\sinh x$ est impaire, les termes de rang pair du développement limité sont nuls.

13.3.5 Dérivation

Soit f, une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0.
Si f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Alors, $f^{'}$ admet en 0 le développement limité d'ordre $n-1$

$$\boxed{f^{'}(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_{n-1} x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x)}$$

Démonstration

Soit f, une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0.
Alors, avec la formule de Taylor-Young,

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x)$$

$f^{'}$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et alors :

$$f^{'}(x) = f^{'}(0) + x f^{''}(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(3)}(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(0) + x^{n-1}\varepsilon(x)$$

Ainsi, en posant

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

et

$$f^{'}(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x)$$

nous avons : $b_k = \dfrac{f^{(k+1)}(0)}{k!} = \dfrac{(k+1) f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} = (k+1) a_{k+1}$

Remarque 9 :

1. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0, alors le développement limité de f' au voisinage de 0 est :

$$f'(x) = f'(0) + x f''(0) + \frac{f^3(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$$

2. Le problème est bien simplifié lors que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$

Exemple 6 :

Donnons le développement limité de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

Il faut remarquer que $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ est la fonction dérivée de $\dfrac{1}{(1-x)}$.

Nous connaissons le développement limité de $\dfrac{1}{(1-x)}$:

$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Le développement limité de $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ est donc :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + n x^{n-1} + (n+1) x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Exercice 3 :

En utilisant la dérivation, retrouver le développement limité de $\sin x$ à partir de celui de $\cos x$ *(et réciproquement !)*

13.3.6 Intégration-Primitivation

Soit f, une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, voisinage de 0 admettant au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Alors, toute primitive de f notée F admet un développement limité d'ordre $(n+1)$ au voisinage de 0, et ce développement limité est de la forme :

$$\boxed{F(x) = K + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)}$$

Avec $K = F(0)$

Démonstration

f étant continue sur I admet sur cet intervalle, une primitive F et cette primmitive est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$
F admet donc un développement limité

$$F(x) = F(0) + xF^{'}(0) + \frac{F^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)$$

Comme dans le théorème précédent, on retrouve que $a_k = \dfrac{F^{(k+1)}(0)}{k!}$, et donc que $\dfrac{a_k}{k+1} = \dfrac{F^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}$

Exemple 7 :

Recherchons le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 :

Comme tout à l'heure, il faut remarquer que $\ln(1+x)$ est une primitive de $\dfrac{1}{(1+x)}$; or, le développement limité de $\dfrac{1}{(1+x)}$ est donné par :

$$\frac{1}{(1+x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Et donc le développement limité de $\ln(1+x)$ est donné par :

$$\ln(1+x) = K + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

De $K = \ln(1+0) = 0$, le développement limité de $\ln(1+x)$ est donné par :

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)}$$

13.4 Exercices sur les développements limités

Quelques conseils

1. Dans les calculs, les développements limités manipulés doivent **être tous du même ordre**
2. Dans les produits et les compositions de développements limités, on sera donc amené à ne pas tenir compte des termes négligeables devant x^n, n étant l'ordre fixé demandé.

3. Pour un développement limité de $g \circ f$ au voisinage de x_0, penser que le développement de la fonction g se fera au voisinage de $f(x_0)$
4. N'effectuer un quotient de développements limités que **si le dénominateur a un terme constant non nul** : pour s'y ramener, on mettra éventuellement une puissance de x en facteur
5. Certaines opérations (facteur x^p, dérivation, intégration) **modifient l'ordre du développement limité** : essayer de le prévoir pour bien atteindre l'ordre souhaité.
6. Quand l'ordre du développement limité n'est pas précisé dans la question, il faudra parfois **faire des essais** pour parvenir à des résultats significatifs
7. Le développement limité en 0, à l'ordre n, de f', permet d'obtenir par intégration terme à terme le développement en 0, à l'ordre $n+1$, de f, et en établit du même coup l'existence. C'est la méthode utilisée pour $\ln(1+x)$, $\arcsin x$, etc...La dérivation d'un développement limité exige plus de précautions

13.4.1 Exercices d'application directe

Exercice 4 :

Calculez les développements limités suivants :

1. $\sin x + \cosh x$ à l'ordre 3, au voisinage de 0
2. $\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}$ à l'ordre 3, au voisinage de 0
3. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ à l'ordre 3, au voisinage de 0
4. $(1+x)^2 + \sinh x$ à l'ordre 3, au voisinage de 0

Exercice 5 :

Calculez les développements limités suivants :

1. $f(x)\,g(x)$, à l'ordre maximum possible, au voisinage de 0, sachant que :
   — $f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 - x^6 + x^7\varepsilon_1(x)$
   — $g(x) = -3x + 5x^2 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$
   où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$
2. $x^2 \cos x$ à l'ordre 4, au voisinage de 0
3. $\sin x \sinh x$ à l'ordre 4, au voisinage de 0

Exercice 6 :

Calculez les développements limités suivants :

1. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, à l'ordre maximum possible, au voisinage de 0, sachant que :

   ▷ $f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$ ▷ $g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$

   où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$
2. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, à l'ordre maximum possible, au voisinage de 0, sachant que :

   ▷ $f(x) = x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$ ▷ $g(x) = -3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$

   où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$
3. $\dfrac{\ln(1+x)}{\cos x}$ à l'ordre 3, au voisinage de 0
4. $\dfrac{1-\cos x}{(\sinh x)^2}$ à l'ordre 2, au voisinage de 0

5. $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4, au voisinage de 0
6. $\dfrac{x}{e^x - 1}$ à l'ordre 4, au voisinage de 0
7. $\dfrac{x}{\sin x}$ à l'ordre 4, au voisinage de 0

Exercice 7 :

1. Donnez le développement limité, au voisinage de 0 de

   ▷ $\dfrac{1}{1+x^2}$ ▷ $\dfrac{1}{1-x^2}$ ▷ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. Donnez le développement de $f \circ g$ à l'ordre maximum possible, au voisinage de zéro, sachant que

   ▷ $f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$ ▷ $g(x) = 2x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$

   où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

3. Donnez le développement limité, à l'ordre 4, au voisinage de zéro de $e^{\sin x}$

Exercice 8 :

Est-il exact qu'au voisinage de 0, nous ayions l'égalité : $\dfrac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$?

Exercice 9 :

Rechercher les développements limités des fonctions suivantes, au voisinage de 0 :

1. $\ln(1-x)$
2. $\arctan x$
3. $\arcsin x$
4. $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

13.5 Généralisation des développements limités

Tout l'exposé précédent a mis en place les développements limités ***au voisinage de 0.*** *En mathématiques, il n'est pas question de privilégier un point.*
Nous allons donc étudier les développements limités en un point x_0, et en ∞.
L'étude en ∞ s'appelle les développements asymptotiques.

13.5.1 Développement limité au voisinage de x_0

On dit que f admet, au voisinage de x_0, un développement limité, si la fonction $F(X) = f(x_0 + X)$ admet, au voisinage de 0, un développement limité.

Remarque 10 :

Tout se passe comme si nous faisions le changement de variable $x = x_0 + X$; ainsi, si

$$F(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots + a_nX^n + X^n\varepsilon(x)$$

Nous avons alors

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Exemple 8 :

1. **Méthode de changement de variable**
   Cherchons le dévelopement limité de e^x, à l'ordre n, au voisinage de 1
   On fait donc le changement de variables $X = x - 1 \Leftrightarrow x = X + 1$, ce qui veut dire que si x est voisin de 1, alors X est voisin de zéro. Nous connaissons le développement limité de e^X au voisinage de 0 et $e^x = e^{X+1} = e \times e^X$. Or,
   $$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + \cdots + \frac{X^n}{n!} + X^n \varepsilon(X)$$
   donc
   $$e^x = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} + (x-1)^n \varepsilon((x-1))$$
   C'est donc le développement limité de e^x, à l'ordre n, au voisinage de 1
2. **Utilisation de la formule de Taylor Young**
   Donnons le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 3 et au voisinage de $\frac{\pi}{4}$
   On utilise donc la formule de Taylor-Young ; il faut calculer les dérivée successives de $\cos x$ en $\frac{\pi}{4}$; elles sont connues : $\cos^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)$ D'où,
   $$\begin{cases} \cos^{(0)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos^{(1)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos^{(2)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
   Nous avons donc, le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 3 et au voisinage de $\frac{\pi}{4}$
   $$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \varepsilon(x)$$

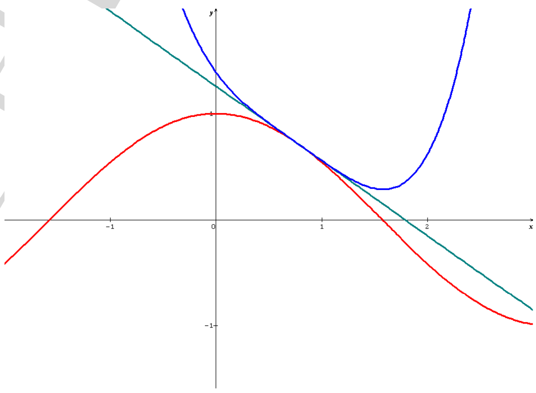

FIGURE 13.7 – Approximation de $\cos x$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$

Exercice 10 :

Utiliser la formule de Taylor-Young pour calculer le développement limité de e^x, à l'ordre n, au voisinage de 1

13.5.2 Développements asymptotiques au voisinage de l'infini

Soit f une fonction définie au voisinage de l'infini ; on dit que f admet, au voisinage de ∞, un développement asymptotique, si la fonction $F(X) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet, au voisinage de 0, un développement limité.

Remarque 11 :

Tout se passe comme si nous faisions le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$
Ainsi, si, au voisinage de 0,

$$F(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \cdots + a_n X^n + X^n \varepsilon(x)$$

Nous avons alors

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

Exemple 9 :

Donnons un développement asymptotique, à l'ordre 4, au voisinage de $+\infty$ de $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}$

Nous avons :

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x} = \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}$$

En utilisant la définition, nous faisons le changement de variables $X = \dfrac{1}{x}$, et nous obtenons alors :

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{1-X^2}{1+2X}$$

Nous faisons alors un développement limité de $\dfrac{1}{1+2X}$, à l'ordre 4, en zéro, et nous obtenons :

$$\frac{1}{1+2X} = 1 - 2X + 4X^2 - 8X^3 + 16X^4 + X^4\varepsilon(X)$$

Donc, pour otenir le développement limité de $\dfrac{1-X^2}{1+2X}$, on multiplie la partie principale du développement limité de $\dfrac{1}{1+2X}$ par $1-X^2$ en ne retenant que les termes de degré inférieur ou égal à 4. On obtient ainsi :

$$\frac{1-X^2}{1+2X} = 1 - 2X + 3X^2 - 6X^3 + 12X^4 + X^4\varepsilon(X)$$

et donc,

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^2} + \frac{12}{x^4} + \frac{1}{x^4}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

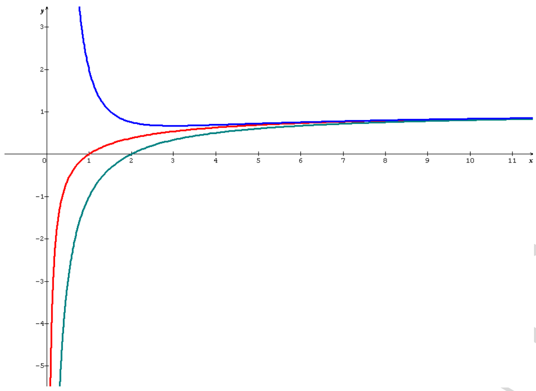

FIGURE 13.8 – Comportement asymptotique de $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x}$ en $+\infty$

Remarque 12 :

Pour otenir le développement limité de $\dfrac{1-X^2}{1+2X}$ au voisinage de 0, il était aussi tout à fait possible d'utiliser la division euclidienne des polynômes suivant les puissances croissantes.

13.5.3 Développement asymptotique au voisinage de 0

Soit f une fonction définie au voisinage de 0, n'admettant pas forcément de développement limité en 0
On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que la fonction $\varphi(x) = x^k f(x)$ admette un développerment limité d'ordre n au voisinage de 0

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + +a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

et donc

$$f(x) = \frac{a_0}{x^k} + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_2}{x^{k-2}} + \frac{a_3}{x^{k-3}} + \cdots + \frac{a_n}{x^{n-k}} + \frac{1}{x^{n-k}}\varepsilon(x)$$

est le développement asymptotique de f au voisinage de 0

Exemple 10 :

Recherche du développement asymptotique, au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{x-x^2}$

Or, il est évident que $\dfrac{1}{x-x^2} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{1-x}$

Or, le développement limité, à l'ordre 4, en 0 de $\dfrac{1}{1-x}$ est donné par :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^4 \varepsilon(x)$$

et donc,

$$\frac{1}{x-x^2} = \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^3 + x^3 \varepsilon(x)$$

13.5.4 Exercices

Exercice 11 :

Calculez les développements limités suivants :

1. $\sinh x$, à l'ordre 3, au voisinage de 1
2. $\ln x$ à l'ordre 3, au voisinage de 2

Exercice 12 :

Donner le développement asymptotique, à l'ordre 3, au voisinage de $+\infty$ de :

1. La fonction $e^{\frac{1}{x}}$
2. Puis de la fonction $\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$
3. Et enfin, du produit des 2 fonctions : la fonction $e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

Exercice 13 :

Donnez le développement asymptotique, au voisinage de 0 et à l'ordre 4 de $\dfrac{1}{\sin x}$

13.6 Application des développements limités

13.6.1 Application à la recherche des limites

Ici aussi, nous allons donner des exemples :

Exemple 11 :

Rechercher $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+\cos x)-2\tan x}{2x-\sin x-\tan x}$

On fait un développement limité à l'ordre 3 des différentes fonctions.

$$\begin{cases}\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2}+x^3\varepsilon_1(x)\\ \tan x = x+\dfrac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_2(x)\\ \sin x = x-\dfrac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_3(x)\end{cases}$$

Donc, si $f(x)=\dfrac{x(1+\cos x)-2\tan x}{2x-\sin x-\tan x}$, au voisinage de 0, nous avons

$$f(x)=\frac{x\left(2-\dfrac{x^2}{2}+x^3\varepsilon_1(x)\right)-2\left(x+\dfrac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_2(x)\right)}{2x-\left(x-\dfrac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_3(x)\right)-\left(x+\dfrac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_2(x)\right)}$$

d'où

$$f(x)=\frac{-\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{2}{3}x^3+x^3\varepsilon(x)}{\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^3}{3}+x^3\varepsilon'(x)}=\frac{-\dfrac{7}{6}x^3+x^3\varepsilon(x)}{-\dfrac{x^3}{6}+x^3\varepsilon'(x)}=\frac{\dfrac{7}{6}+\varepsilon(x)}{\dfrac{1}{6}+\varepsilon'(x)}$$

Et donc, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=7$

13.6.2 Application à la recherche d'asymptotes

La recherche de développement asymptotique nous permet de connaître le comportement des fonctions en ∞, et donc de trouver les courbes asymptotes *(droites, ou autre chose..)*

Exemple 12 :

Soit $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.
On fait un développement asymptotique de f au voisinage de l'infini.
Auparavant, nous avons : $f(x) = |x|\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} = |x|\sqrt{\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}}$, et en faisant le changement de variables $X = \dfrac{1}{x}$, il ne nous reste plus qu'à chercher le développement limité, au voisinage de 0 de $(1-X)^{-\frac{1}{2}}$.
Nous avons :

$$(1-X)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{X}{2} + \frac{3}{8}X^2 + \frac{5}{16}X^3 + X^3\varepsilon(X)$$

et donc, en remplaçant X par $\dfrac{1}{x}$, nous avons :

$$f(x) = |x|\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8}\times\frac{1}{x^2} + \frac{5}{16}\times\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Donc :

- ▷ Si $x > 0$, alors $f(x) = x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{16}\times\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$
- ▷ Si $x < 0$, alors $f(x) = -x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{16}\times\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$

D'où, au voisinage de $+\infty$, f admet pour asymptote la droite $y = x + \dfrac{1}{2}$, et en $-\infty$, la droite $y = -x - \dfrac{1}{2}$

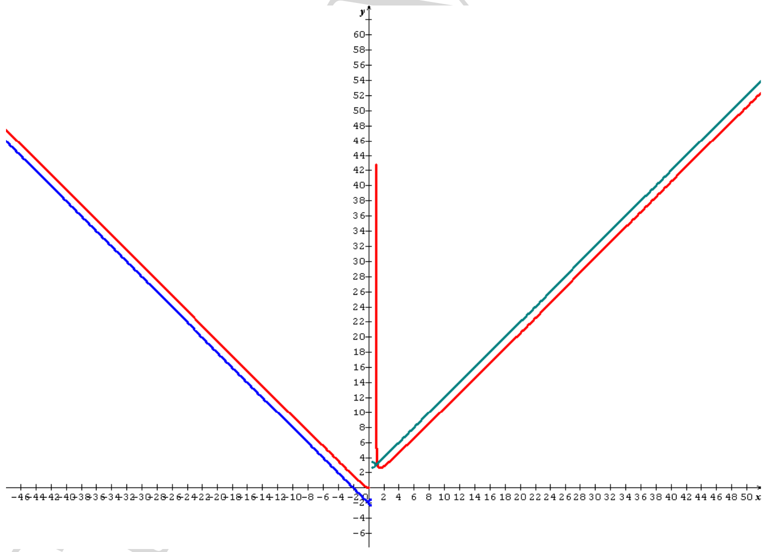

FIGURE 13.9 – Graphe de $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ avec ses asymptotes

13.6.3 Exercices

Exercice 14 :

Etudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^3+2x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\dfrac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \cos x - e^x}{\ln(1+x^2)}$

Exercice 15 :

Etudier les asymptotes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$
2. $f(x) = \dfrac{x^3 e^{-\frac{1}{x}}}{x-1}$
3. $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$

Exercice 16 :

Dans cet exercice, on considère $a > 0$ et $b > 0$

1. Donner un développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de a^x
2. En déduire le développement limité , à l'ordre 2, au voisinage de 0 de $f(x) = \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)$
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $u_n = \left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 17 :

1. On considère la fonction suivante : $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$
   (a) Ecrire le développement limité de f, à l'ordre 3, au voisinage de 0
   (b) A la lecture du développement limité, donner l'équation de la tangente au graphe de f en 0
2. Ecrire le développement asymptotique de f, à l'ordre 3, au voisinage de l'infini.

Exercice 18 :

Toutes les questions de ce problème sont indépendantes les unes des autres.

1. Ecrire le développement limité de $\ln x$ à l'ordre 4 au voisinage de 5
2. Ecrire le développement limité de $e^{\sqrt[3]{1+x}}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0
3. Quel est le développement limité de $\arcsin x$, au voisinage de 0, à l'ordre 7
4. Donner un développement asymptotique de $\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3; en déduire une droite asymptote, en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

DANS LES 2 EXERCICES QUI SUIVENT, À CHAQUE QUESTION CORRESPOND DES AFFIRMATIONS NUMÉROTÉES. IL FAUT DONC DONNER LES AFFIRMATIONS CORRECTES

Exercice 19 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(\cosh x)$.
On se propose de déterminer quelques propriétés de f.

Question 1

1. La fonction cosh est paire
2. Un développement limité de la fonction cosh à l'ordre 4, au voisinage de 0 est :

$$\cosh x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

3. Un développement limité de la fonction $\ln(1+h)$ à l'ordre 2, au voisinage de 0 est :

$$\ln(1+h) = 1 - h + \frac{h^2}{2} + h^2 \varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

4. Un développement limité de la fonction f à l'ordre 4, au voisinage de 0 est :

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + x^4 \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

5. La courbe représentative admet la première bissectrice comme tangente à l'origine

Question 2

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :$f'(x) = 1 - \tanh x$
2. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
3. La fonction f peut s'écrire $f(x) = \ln 2 + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$
4. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln 2$
5. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 20 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ avec a, b et c trois paramètres réels strictement positifs

Question 1

1. La fonction f n'est pas définie pour x strictement négatif
2. Le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de e^x est

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

3. Le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de a^x est

$$a^x = 1 + ax + \frac{a^2 x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

4. Le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de $\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ est

$$\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = 1 + x\ln\left(\sqrt[3]{abc}\right) + \frac{x^2\left(\ln^2 a + \ln^2 b + \ln^2 c\right)}{3} + x^2\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

5. $\ln(1+x) = x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

Question 2

1. $f(x) = \dfrac{e^{\frac{\ln\left(a^x+b^x+c^x\right)}{x}}}{3}$
2. Le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 0 de $\ln\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)$ est :

$$\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right) = x\ln\left(\sqrt[3]{abc}\right) + x\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{a+b+c}{3}$
4. Si $d > 0$ le développement limité à l'ordre 1, au voisinage de 0 de $\ln\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x+d^x}{4}\right)$ est

$$\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x+d^x}{4}\right) = x\ln\left(\sqrt[3]{abcd}\right) + x\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x+d^x}{4}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[4]{abcd}$

13.7 Comparaison de fonctions

Soient 2 fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et un point $a \in I$. Nous supposerons ici que f et$g$ sont deux fonctions qui ne s'annulent pas sur un voisinage de a privé de a.
Il s'agit ici de comparer les 2 fonctions au voisinage de a.
Pour cela, formons le rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ et regardons ce qui se passe lorsque $x \longrightarrow a$.
Trois cas intéressants se présentent alors :

1. Cas 1 :
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est borné au voisinage de a. On dira que$f$ est dominé par g ; on écrit $f \in O(g)$
2. Cas 2 :
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers a. On dira que f est négligeable devant g et on écrit $f \in o(g)$
3. Cas 3 :
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 lorsque x tend vers a. On dira que f et g sont équivalentes au voisinage de a,et on écrit $f \simeq g$

13.7.1 Définition de fonction dominée

Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a \in I$.
On appelle $O(g)$ l'ensemble des fonctions dominées par g au voisinage de a, c'est à dire :

$$O(g) = \left\{ \begin{array}{c} f : I \longrightarrow \mathbb{C} \text{ telles que } \exists K_f > 0 \text{ et } V_a \text{ voisinage de } a \text{ tel que} \\ (\forall x \in I \cap V_a)\,(|f(x)| \leqslant K_f\,|g(x)|) \end{array} \right\}$$

Remarque 13 :

1. Cet intervalle I peut être de toutes les formes : $]a;b[$, $]a;+\infty[$, $]-\infty;b[$
2. Il faut remarquer que l'on considère toujours le voisinage d'un point a qui peut, éventuellement, être infini. Souvent, si on sait où nous nous situons, nous omettons de préciser ce point a

Exemple 13 :

1. Toutes les fonctions bornées sur un intervalle I sont des éléments de $O(1)$, puisque, pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant M$
2. Soit f la fonction polynômiale $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^2$, alors :
   $\longrightarrow$ $f \in O\left(x^5\right)$ au voisinage de ∞ *(que ce soit $+\infty$ ou $-\infty$)*
   $\longrightarrow$ $f \in O\left(x^2\right)$ au voisinage de 0

13.7.2 Proposition

Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. Si $f_1 \in O(g)$ et $f_2 \in O(g)$, alors $f_1 + f_2 \in O(g)$
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $f \in O(g)$, alors $\lambda f \in O(g)$
3. $O(g)$ est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Démonstration

1. Montrons que si $f_1 \in O(g)$ et $f_2 \in O(g)$, alors $f_1 + f_2 \in O(g)$
   Soient $f_1 \in O(g)$ et $f_2 \in O(g)$
   Alors, il existe $K_{f_1} > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f_1(x)| \leqslant K_{f_1}\,|g(x)|$
   De même, il existe $K_{f_2} > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f_2(x)| \leqslant K_{f_2}\,|g(x)|$
   Ainsi, pour tout $x \in I$:
   $$|f_1(x) + f_2(x)| \leqslant |f_1(x)| + |f_2(x)| \leqslant K_{f_1}\,|g(x)| + K_{f_2}\,|g(x)| = (K_{f_1} + K_{f_2})\,|g(x)|$$
   Ainsi, $f_1 + f_2 \in O(g)$.
   Ce que nous voulions
2. Montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $f \in O(g)$, alors $\lambda f \in O(g)$
   Démonstration facile.
   Soient $f \in O(g)$
   Alors, il existe $K_f > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant K_f\,|g(x)|$ Ainsi :
   $$|(\lambda f)(x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda| \times |f(x)| \leqslant |\lambda|\,K_f\,|g(x)|$$
   Ainsi $\lambda f \in O(g)$
3. Montrons que $O(g)$ est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
   ▷ Nous venons de montrer que $O(g)$ était stable par combinaison linéaire
   ▷ Il faut maintenant montrer que $O(g)$ est non vide.
   C'est simple, la fonction nulle, qui à tout $x \in I$ fait correspondre $O(x) = 0$ est bien un élément de $O(g)$

13.7.3 Propriété de transitivité

Soient $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $h : I \longrightarrow \mathbb{C}$, deux fonctions définies sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$
Si $f \in O(g)$ et $g \in O(h)$, alors $f \in O(h)$

Démonstration

- Si $g \in O(h)$, alors, il existe $M_g > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|g(x)| \leqslant M_g |h(x)|$
- Si $f \in O(g)$, alors, il existe $M_f > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant M_f |g(x)|$
- Donc, pour tout $x \in I$:

$$|f(x)| \leqslant M_f |g(x)| \leqslant M_f M_g |h(x)|$$

Et donc, $f \in O(h)$

13.7.4 Proposition

Si la fonction g ne s'annule pas sur I, nous avons $f \in O(g) \Longleftrightarrow (\exists K > 0)\left(\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant K\right)$

Démonstration

Evidente

Remarque 14 :

Ainsi, $f \in O(g)$ si et seulement si le rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est borné sur I

13.7.5 Définition de fonction négligeable devant une autre

Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a \in I$.
On appelle $o(g)$ l'ensemble des fonctions négligeables devant g au voisinage de a, c'est à dire :

$$o(g) = \left\{ \begin{array}{c} f : I \longrightarrow \mathbb{C} \text{ telles que } \exists \varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{C} \text{ et } V_a \text{ voisinage de } a \text{ tels que } \lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \text{ et } \varepsilon(x) > 0 \\ \text{et } (\forall x \in I \cap V_a)(|f(x)| = \varepsilon(x)|g(x)|) \end{array} \right\}$$

Remarque 15 :

Comme $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage W_a^ε de a tel que si $x \in W_a^\varepsilon$, alors $|\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon$
Une défnition équivalente de $f \in o(g)$ est donc donnée par :

$$f \in o(g) \Longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists W_a^\varepsilon)((x \in W_a^\varepsilon) \Longrightarrow (|f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|))$$

Exemple 14 :

Ci après quelques exemples et remarques.

1. On considère la fonction UN définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} UN : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & UN(x) = 1 \end{array} \right.$$

UN est donc une fonction constante.
Nous avons, au voisinage de tout $x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Longleftrightarrow f \in o(UN) \Longleftrightarrow f \in o(1)$.
En effet, puisque nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $|f(x)| = |f(x)| \times UN(x)$, et nous choisissons $\varepsilon(x) = |f(x)|$

Cette remarque est vraie aussi pour toute fonction K constante non nulle sur $\mathbb{R}$. En en effet ; soit K la fonction définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} K:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & K(x)=k \text{ avec } k\neq 0 \end{array}\right.$$

Alors, au voisinage de tout $x_0 \in \mathbb{R}$, nous avons l'équivalence :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \Longleftrightarrow f\in o(K)$$

En effet, puisque nous avons, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|=\dfrac{|f(x)|}{|k|}\times|K(x)|$.

Nous posons, bien entendu $\varepsilon(x)=\dfrac{|f(x)|}{|k|}$

Un traitement particulier est donc réservé à la fonction nulle $\mathcal{O}$

2. La fonction nulle $\mathcal{O}$ est, elle, négligeable, pour tout $x_0\in\mathbb{R}$ devant toute fonction f. Nous avons donc, pour toute fonction f définie au voisinage de $x_0\in\mathbb{R}$, $\mathcal{O}\in o(f)$
3. Pour toute fonction f, nous ne pouvons avoir $f\in\in o(f)$ sauf si la fonction f est la fonction nulle.

   En effet, $f\in o(f)\Longleftrightarrow |f(x)|=\varepsilon(x)|f(x)|\Longleftrightarrow |f(x)|(1-\varepsilon(x))=0$ avec, bien entendu $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$.

   Ce qui sous entend que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|(1-\varepsilon(x))=0$; comme $1-\varepsilon(x)\neq 0$, nous en déduisons que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|=0$, c'est à dire que f est la fonction nulle $\mathcal{O}$
4. Soient $m\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$ tels que $m>n$. Alors, en $+\infty$, nous avons $x^n\in o(x^m)$.

   En effet, nous avons $x^m=x^nx^{m-n}$, et comme $m-n<0$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{m-n}=0$ [2].

   Nous posons alors $\varepsilon(x)=x^{m-n}$. D'où le résultat.
5. Dans le même ordre d'idée, si $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$ avec $0<\alpha<\beta$, nous avons, en $+\infty$, $x^\alpha\in o\left(x^\beta\right)$. La démonstration est la même que ci-dessus

13.7.6 Proposition

Soit $g:I\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a\in I$. Soit $f:I\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a\in I$.
Si $f\in o(g)$, alors $f\in O(g)$

Démonstration

Supposons $f\in o(g)$. Alors, il existe $\varepsilon:I\longrightarrow\mathbb{C}$ et V_a voisinage de a tels que $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$, $\varepsilon(x)>0$ et $(\forall x\in I\cap V_a)\left(|f(x)|=\varepsilon(x)|g(x)|\right)$
Comme $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$, il existe un voisinage W de a tel que, pour tout $x\in W$, $0<\varepsilon(x)<1$. Et donc, pour tout $x\in I\cap V_a\cap W$, nous avons :

$$|f(x)|=\varepsilon(x)|g(x)|\Longrightarrow |f(x)|\leqslant|g(x)|$$

Et donc, $f\in O(g)$

13.7.7 Proposition

Soit $g:I\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a\in I$ et qui ne s'annule pas dans un voisinage de a. Alors, pour toute fonction $f:I\longrightarrow\mathbb{C}$, nous avons l'équivalence :

$$f\in o(g)\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

2. Nous avons, ici, enlevé les valeurs absolues, puisque, au voisinage de $+\infty$, les fonctions sont positives

Démonstration

La démonstration est simple : il suffit de poser $\varepsilon(x) = \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$

13.7.8 Propriétés

Toutes les fonctions définies ci-après, sont définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$; soit $a \in I$

1. Si, au voisinage de a, $f \in o(g)$ et $g \in o(h)$, alors $f \in o(h)$ *(Propriété de transitivité)*
2. Si, au voisinage de a, $f \in o(g)$, alors, pour toute fonction $h : I \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée, nous avons $fh \in o(g)$. En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in o(g)$
3. Si, au voisinage de a, $f \in o(g)$, alors, pour toute fonction $h : I \longrightarrow \mathbb{C}$, nous avons $fh \in o(gh)$. En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in o(\lambda g)$
4. Si, au voisinage de a, nous avons $f \in o(g)$ et $f_1 \in o(g_1)$, alors, nous avons $ff_1 \in o(gg_1)$
5. Si, au voisinage de a, nous avons $f \in o(g)$ et $f_1 \in o(g)$, alors, nous avons $f + f_1 \in o(g)$
6. Si, au voisinage de a, nous avons $f \in o(g)$ et $g \in O(h)$, alors, nous avons $f \in o(h)$

Démonstration

1. Supposons $f \in o(g)$ et $g \in o(h)$ et démontrons la propriété de transitivité
   $\longrightarrow$ Il existe alors $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a voisinage de a tels que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(x) > 0$ et $(\forall x \in I \cap V_a)\,(|f(x)| = \varepsilon(x)\,|g(x)|)$
   $\longrightarrow$ De même, Il existe alors $\varepsilon_1 : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a^1 voisinage de a tels que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$, $\varepsilon_1(x) > 0$ et $\left(\forall x \in I \cap V_a^1\right)(|g(x)| = \varepsilon_1(x)\,|h(x)|)$
   $\longrightarrow$ Donc, pour tout $x \in I \cap V_a \cap V_a^1$, nous avons :
   $$|f(x)| = \varepsilon(x)\,|g(x)| = \varepsilon(x)\,\varepsilon_1(x)\,|h(x)|$$
   En posant $E(x) = \varepsilon(x)\,\varepsilon_1(x)$, nous avons $E(x) > 0$ et $\lim\limits_{x\to a} E(x) = 0$, c'est à dire $f \in o(h)$
2. Supposons $f \in o(g)$ et soit $h : I \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée
   $\longrightarrow$ Il existe alors $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a voisinage de a tels que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(x) > 0$ et $(\forall x \in I \cap V_a)\,(|f(x)| = \varepsilon(x)\,|g(x)|)$
   $\longrightarrow$ Alors, pour tout $x \in I \cap V_a$, nous avons $|f(x)\,h(x)| = \varepsilon(x)\,|h(x)|\,|g(x)|$
   Posons $E(x) = \varepsilon(x)\,|h(x)|$; nous avons $E(x) > 0$ et comme, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $0 \leqslant |h(x)| \leqslant M$, nous avons $0 < E(x) \leqslant M\varepsilon(x)$. Et comme $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, nous avons $\lim\limits_{x\to a} E(x) = 0$.
   D'où $fh \in o(g)$.
   Si h est la fonction constante telle que pour tout $x \in I$ $h(x) = \lambda$, nous avons donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in o(g)$
3. Supposons $f \in o(g)$ et soit $h : I \longrightarrow \mathbb{C}$
   On remarquera que h **n'est pas forcément bornée**
   $\longrightarrow$ Il existe alors $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a voisinage de a tels que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(x) > 0$ et $(\forall x \in I \cap V_a)\,(|f(x)| = \varepsilon(x)\,|g(x)|)$
   $\longrightarrow$ Alors, pour tout $x \in I \cap V_a$, nous avons $|f(x)\,h(x)| = \varepsilon(x)\,|h(x)|\,|g(x)|$
   La démonstration est donc terminée.
4. Supposons que $f \in o(g)$ et $f_1 \in o(g_1)$
   $\longrightarrow$ Il existe alors $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a voisinage de a tels que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(x) > 0$ et $(\forall x \in I \cap V_a)\,(|f(x)| = \varepsilon(x)\,|g(x)|)$
   $\longrightarrow$ De même, il existe $\varepsilon_1 : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a^1 voisinage de a tels que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_1(x) = 0$, $\varepsilon_1(x) > 0$ et $\left(\forall x \in I \cap V_a^1\right)(|f_1(x)| = \varepsilon_1(x)\,|g_1(x)|)$

Alors, pour tout $x \in I \cap V_a^1 \cap V_a$, nous avons $|f(x) f_1(x)| = \varepsilon(x) \varepsilon_1(x) |g(x)| |g_1(x)|$
En posant, comme tout à l'heure, $E(x) = \varepsilon(x) \varepsilon_1(x)$, nous avons, une nouvelle fois $\lim\limits_{x \to a} E(x) = 0$ et $E(x) > 0$
D'où $f f_1 \in o(g g_1)$

5. Supposons que $f \in o(g)$ et $f_1 \in o(g)$
$\longrightarrow$ Il existe alors $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a voisinage de a tels que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(x) > 0$ et $(\forall x \in I \cap V_a)(|f(x)| = \varepsilon(x)|g(x)|)$
$\longrightarrow$ De même, il existe $\varepsilon_1 : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et V_a^1 voisinage de a tels que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$, $\varepsilon_1(x) > 0$ et $\left(\forall x \in I \cap V_a^1\right)(|f_1(x)| = \varepsilon_1(x)|g(x)|)$
Alors, pour tout $x \in I \cap V_a^1 \cap V_a$, nous avons $|f(x) + f_1(x)| = (\varepsilon(x) + \varepsilon_1(x))|g(x)|$
En posant, comme tout à l'heure, $E(x) = \varepsilon(x) + \varepsilon_1(x)$, nous avons $\lim\limits_{x \to a} E(x) = 0$ et $E(x) > 0$
D'où $f + f_1 \in o(g)$

6. Supposons que $f \in o(g)$ et $g \in O(h)$
Nous allons utiliser des propriétés déjà démontrées :
$\longrightarrow$ Comme $f \in o(g)$, nous avons $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
$\longrightarrow$ Comme $g \in O(h)$, il existe W_a voisinage de a et $K > 0$ tels que $(\forall x \in I \cap W_a)\left(\dfrac{|g(x)|}{|h(x)|} \leqslant K\right)$
Ainsi, pour tout $x \in I \cap W_a$,
$$\left|\frac{f(x)}{h(x)}\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)}\right| \leqslant K \times \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$$
Comme $\lim\limits_{x \to a} K \times \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to a} \left|\dfrac{f(x)}{h(x)}\right| = 0$, c'est à dire, qu'au voisinage de a, $f \in o(h)$

13.7.9 Proposition

Soient $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction numérique. Alors, $o(g)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^I$

Démonstration

Il suffit d'utiliser 13.7.8

13.7.10 Exemples importants

Nous allons utiliser les résultats sur les croissances comparées des fonctions logarithmes et exponentielles.

1. Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, nous avons, en $+\infty$ $(\ln x)^\beta \in o(x^\alpha)$

   Démonstration

   Il suffit de se reporter à 12.4.7

2. Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, nous avons, en $+\infty$ $x^\alpha \in o\left((e^x)^\beta\right)$

   Démonstration

   Reportez vous à 12.4.3

3. Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, nous avons, en $+\infty$ $(\ln x)^\alpha \in o\left((e^x)^\beta\right)$

Démonstration

Il suffit d'utiliser la transitivité

Remarque 16 :

A la relecture de la section 12.4 il est très possible de formuler d'autres résultats

13.7.11 Définition de fonctions équivalentes

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$, 2 fonctions. Soit aussi $x_0 \in I$
f et g sont dites équivalentes en x_0 et on écrit : $f \underset{x_0}{\approx} g$ si et seulement si $f - g \in o(g)$

13.7.12 Proposition

On suppose que $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ ne s'annule pas sur I. Alors, nous avons :

$$f \underset{x_0}{\approx} g \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Démonstration

Nous ré-écrivons la définition de fonctions équivalentes :

$$f \underset{x_0}{\approx} g \Longleftrightarrow f - g \in o(g) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$$

Or, $\dfrac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} - 1$ et donc, de $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$, nous tirons $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

13.7.13 Proposition

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$, 2 fonctions. Soit aussi $x_0 \in I$

1. Si $f \underset{x_0}{\approx} g$, alors $f \in O(g)$ et $g \in O(f)$
2. Nous avons aussi $f - g \in o(g) \Longleftrightarrow f - g \in o(f)$

Démonstration

1. Soit $0 < \varepsilon < 1$. Il existe alors un voisinage $W_\varepsilon \subset I$ tel que si $x \in W_\varepsilon$, alors $|f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$.
   Alors, comme $||f(x)| - |g(x)|| \leqslant |f(x) - g(x)|$, nous avons $||f(x)| - |g(x)|| \leqslant \varepsilon |g(x)|$
   Or :
   $$||f(x)| - |g(x)|| \leqslant \varepsilon |g(x)| \Longleftrightarrow -\varepsilon |g(x)| \leqslant |f(x)| - |g(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$$
   Donc :
   - ⋆ Si $x \in W_\varepsilon$, alors $|f(x)| \leqslant (1 + \varepsilon) |g(x)|$ et donc $f \in O(g)$
   - ⋆ De même, si $x \in W_\varepsilon$, alors $|g(x)| \leqslant \dfrac{1}{1 - \varepsilon} |f(x)|$ et donc $g \in O(f)$ *(Nous avons choisi $0 < \varepsilon < 1$, et donc $1 - \varepsilon > 0$)*

   Ce que nous voulions
2. C'est assez simple. Supposons que $f - g \in o(g)$, alors $g \in O(f)$; et d'après 13.7.8 $f - g \in o(f)$.
   La réciproque est évidente.

13.7.14 Proposition

La relation $f \approx g$ entre 2 fonctions définies au voisinage d'un point x_0 est une relation d'équivalence

Démonstration

La démonstration ne pose pas de grandes difficultés.

1. **Elle est réflexive**
   Effectivement, puisque $f - f = \mathcal{O} \in o(f)$, c'est à dire $f \approx f$
2. **Elle est symétrique**
   En effet, supposons $f \approx g$; alors $f - g \in o(g)$, et nous venons de montrer que $f - g \in o(g) \Longleftrightarrow f - g \in o(f)$ et donc $g \approx f$
3. **Elle est transitive**
   Supposons $f \approx g$ et $g \approx h$
   Alors, $f - g \in o(g)$ et $g - h \in o(h)$.
   D'après 13.7.6, si $g - h \in o(h)$ alors $g - h \in O(h)$, et donc, clairement, $g \in O(h)$.
   Ainsi, si $f - g \in o(g)$ et $g \in O(h)$, alors $f - g \in o(h)$.
   Par addition, nous avons : $(f - g) + (g - h) \in o(h)$, c'est à dire $f - h \in o(h)$ et donc $f \approx h$

Remarque 17 :

Il était tout à fait possible *(et plus facile !)* d'utiliser : $f \underset{x_0}{\approx} g \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

→ **Pour la réflexivité**, évidemment que nous avons $f \underset{x_0}{\approx} f$ puisque $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{f(x)} = 1$

→ **Pour la symétrie**, si $f \underset{x_0}{\approx} g$, alors $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ et alors $\lim_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$, et donc $g \underset{x_0}{\approx} f$

→ **En ce qui concerne la transitivité**

Supposons $f \underset{x_0}{\approx} g$ et $g \underset{x_0}{\approx} h$; alors $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ et $\lim_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{h(x)} = 1$

Alors : $\dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \times \dfrac{g(x)}{h(x)}$. Et donc, en utilisant le produit des limites, nous avons :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \times \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 1$$

C'est à dire $f \underset{x_0}{\approx} h$

Exemple 15 :

1. En utilisant les limites remarquables, nous avons :
   - ⋆ Nous avons $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et donc $\ln(1+x) \underset{0}{\approx} x$
   - ⋆ Nous avons $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et donc $\sin x \underset{0}{\approx} x$
   - ⋆ Nous avons $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ et donc $e^x - 1 \underset{0}{\approx} x$
2. On suppose que f admette, au voisinage de 0 le développement limité

$$f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Avec $p \geqslant 0, n \geqslant p$, $a_p \neq 0$ et $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. Alors

$$f(x) \underset{0}{\approx} a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots + a_n x^n$$

En effet :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n} &= \frac{a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)}{a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n} \\ &= \frac{a_p x^p \left(1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}x + \cdots + \frac{a_n}{a_p}x^{n-p} + x^{n-p}\varepsilon_1(x)\right)}{a_p x^p \left(1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}x + \cdots + \frac{a_n}{a_p}x^{n-p}\right)} \text{ avec } \varepsilon_1(x) = \frac{\varepsilon(x)}{a_p} \\ &= \frac{1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}x + \cdots + \frac{a_n}{a_p}x^{n-p} + x^{n-p}\varepsilon_1(x)}{1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}x + \cdots + \frac{a_n}{a_p}x^{n-p}}\end{aligned}$$

Et nous avons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}x + \cdots + \frac{a_n}{a_p}x^{n-p} + x^{n-p}\varepsilon_1(x)}{1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}x + \cdots + \frac{a_n}{a_p}x^{n-p}} = 1$

C'est à dire $f(x) \underset{0}{\approx} a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n$

3. **Pour les polynômes**, nous avons, en $+\infty$ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \underset{+\infty}{\approx} a_n x^n$ et, en 0, $Q(x) = b_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_p x^p \underset{0}{\approx} b_p x^p$

13.7.15 Multiplication et quotients d'équivalents

Si, au voisinage d'un point x_0, nous avons $f \underset{x_0}{\approx} g$ et $f_1 \underset{x_0}{\approx} g_1$, alors, nous avons :

$$f \times f_1 \underset{x_0}{\approx} g \times g_1 \text{ et } \frac{f}{f_1} \underset{x_0}{\approx} \frac{g}{g_1}$$

Démonstration

Très simple : il suffit d'utiliser le fait que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1}{g_1} = 1$

Remarque 18 :

Nous n'avons pas du tout le même résultat avec l'addition

En clair

Si $f \underset{x_0}{\approx} g$ et $f_1 \underset{x_0}{\approx} g_1$, alors, nous n'avons pas $f + f_1 \underset{x_0}{\approx} g + g_1$.

Par exemple : $x - \cos x \underset{0}{\approx} 1$ et $\cos x \underset{0}{\approx} 1 + x^2$, mais nous n'avons pas $x - \cos x + \cos x \underset{0}{\approx} 2 + x^2$

Exercice 21 :

1. Vérifier que nous avons $e^x \underset{0}{\approx} e^{x^2}$, mais que nous n'avons pas $\ln e^x \underset{0}{\approx} \ln e^{x^2}$
2. De même, vérifier que $x \underset{+\infty}{\approx} x + \pi$, mais que nous n'avons pas $\sin x \underset{+\infty}{\approx} \sin(x + \pi)$

Conclusion : pas plus que pour l'addition $f \underset{x_0}{\approx} f_1$, alors, nous n'avons pas $g \circ f \underset{x_0}{\approx} g \circ f_1$

13.7.16 Proposition

Si $f \underset{x_0}{\approx} g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$

Démonstration

Il suffit d'écrire $f(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \times g(x)$ et de conclure.

Remarque 19 :

Des 2 théorèmes précédents, il résulte que si nous devons rechercher la limite d'un produit ou d'un quotient de fonctions, on peut remplacer chacune des fonctions par une fonction équivalente.

Exemple 16 :

Rechercher $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x - 1)\tan^2 x}{x\,(1-\cos x)}$

→ Nous avons $e^x - 1 \underset{0}{\approx} x$ et $\tan x \underset{0}{\approx} x$

→ De même $1 - \cos x \underset{0}{\approx} \dfrac{x^2}{2}$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x - 1)\tan^2 x}{x\,(1-\cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \times x^2}{x \times \frac{x^2}{2}} = 2$

Bien entendu, un développement limité *(à l'ordre 2)* aurait donné le même résultat.

13.8 Croissance comparée des suites

Les suites sont des cas particuliers de fonctions numériques, et nous étudions le comportement des suites en $+\infty$. Ce paragraphe est donc l'aplication ou l'adaptation de la section précédente.

13.8.1 Définition

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites numériques.

1. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on écrit $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\prec (v_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ s'il existe $A > 0$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N})\,(|u_n| \leqslant A\,|v_n|)$
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in N}$, et on écrit $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} << (v_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite zéro, telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang

Remarque 20 :

1. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $v_n \neq 0$, nous avons alors les équivalences suivantes :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\prec (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}}$$

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} << (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0}$$

2. En utilisant la définition de la limite, nous avons l'équivalence :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} << (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon\,|v_n|)}$$

3. C'est bien une adaptation aux suites des définitions données pour les fonctions.

13.8.2 Notations de Landau

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique

1. On appelle $O(v_n)$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dominées par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est à dire :

$$\boxed{O(v_n) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tel que } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\prec (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}}$$

2. On appelle $o(v_n)$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ négligeables devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est à dire :

$$\boxed{o(v_n) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tel que } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} << (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}}$$

Exemple 17 :

Quelques exemples simples :

1. Soient $\alpha < \beta$ 2 réels alors $\dfrac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha-\beta} = 0$ et donc, $n^\alpha \in o\left(n^\beta\right)$ i.e. n^α est négligeable devant n^β lorsque n devient très grand *(au voisinage de $+\infty$)*
   (a) On a donc la suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ négligeable devant la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(on a : $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = 1$)*
   (b) De même, la suite $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *(on a : $(\alpha = -3)$ et $(\beta = -1)$)*

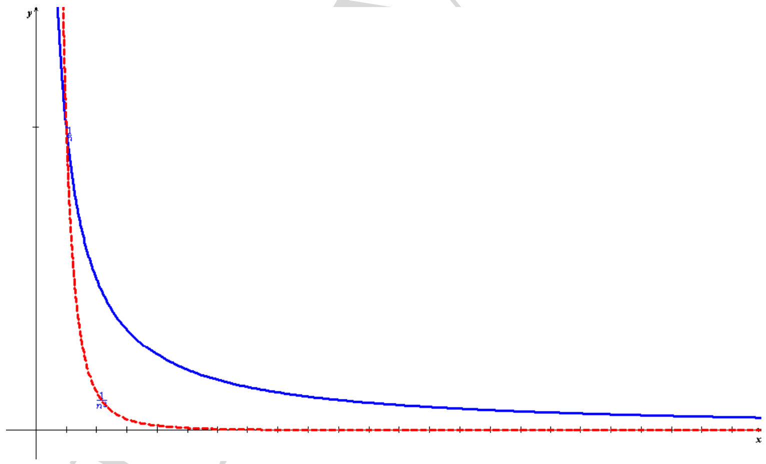

FIGURE 13.10 – Schéma montrant les deux suites $\dfrac{1}{n^3}$ et $\dfrac{1}{n}$

   (c) En particulier, si P est un polynôme de degré d, à coefficients dans $\mathbb{R}$, alors,

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \left(\alpha > d \Rightarrow (P(n))_{n\in\mathbb{N}} \in o(n^\alpha)\right)$$

   (d) Ceci veut donc dire que, par exemple, que la suite $\left(5n^{12} + 25456n^8 + \dfrac{\sqrt{5}}{23}n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $\left(n^{\frac{157}{12}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

2. Soient α et β 2 réels tels que $0 < \alpha < \beta$; alors, $0 < \dfrac{\alpha}{\beta} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n = 0$ et $\alpha^n \in o(\beta^n)$
   par exemple : 2^n est négligeable devant 3^n et $\dfrac{1}{3^n}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{2^n}$

Exercice 22 :

1. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, démontrer que n^β est négligeable devant e^n

Correction

Il faut donc démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\beta}{e^n} = 0$

Pour commencer, nous allons présenter autrement l'expression $\dfrac{n^\beta}{e^n}$.

$$\frac{n^\beta}{e^n} = \frac{e^{\beta\ln n}}{e^n} = e^{\beta\ln n - n} = e^{n\left(\beta\frac{\ln n}{n}-1\right)}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\beta\dfrac{\ln n}{n}-1\right) = -\infty$, et en utilisant les limites par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\left(\beta\frac{\ln n}{n}-1\right)} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\beta}{e^n} = 0$

2. De même, pour $\beta \in \mathbb{R}$, démontrer que n^β est négligeable devant a^n où $a > 1$

Correction

La démonstration est la même, sauf que a remplace e !!

$$\frac{n^\beta}{a^n} = \frac{e^{\beta\ln n}}{e^{n\ln a}} = e^{\beta\ln n - n\ln a} = e^{n\left(\beta\frac{\ln n}{n}-\ln a\right)}$$

Et on termine comme ci-dessus, car, comme $a > 1$, $\ln a > 0$

3. Pour $\beta > 0$ et $\alpha > 0$, démontrer que $(\ln n)^\alpha$ est négligeable devant n^β

Correction

Cette fois ci, la question est plus délicate. Il faut toujours démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0$

L'idée principale de la démonstration est d'utiliser la limite connue : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

L'objet est donc de s'y ramener. Nous avons donc :

$$\frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = \frac{(\ln n)^\alpha}{\left(n^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^\alpha} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\ln n^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^\alpha}{\left(n^{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^\alpha} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{\ln n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha$$

En posant $N = n^{\frac{\beta}{\alpha}}$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\ln n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha == \lim\limits_{N\to+\infty} \left(\dfrac{\ln N}{N}\right)^\alpha = 0$

Nous en concluons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0$, c'est à dire que si $\beta > 0$ et $\alpha > 0$, $(\ln n)^\alpha$ est négligeable devant n^β

13.8.3 Proposition

1. Si $\left(u_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{O}(v_n)$ et si $\left(u_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{O}(v_n)$ alors, $(\forall\lambda \in \mathbb{R})\,(\forall\mu \in \mathbb{R})\,\left(\lambda u_n^1 + \mu u_n^2 \in \mathcal{O}(v_n)\right)$
On dit alors que $\mathcal{O}(v_n)$ est stable par combinaison linéaire
$\mathcal{O}(v_n)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites $\mathbb{R}^\mathbb{N}$
2. De même, si $\left(u_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}} \in o(v_n)$ et si $\left(u_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \in o(v_n)$ alors, $(\forall\lambda \in \mathbb{R})\,(\forall\mu \in \mathbb{R})\,\left(\lambda u_n^1 + \mu u_n^2 \in o(v_n)\right)$
On dit alors que $o(v_n)$ est stable par combinaison linéaire
$o(v_n)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites $\mathbb{R}^\mathbb{N}$

Remarque 21 :

Une remarque sur la stabilité de l'addition et de la multiplication par un scalaire ; c'est un résultat que l'on retrouve pour un polynôme. Les ensembles $\mathcal{O}(v_n)$ et $o(v_n)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. *(Voir le cours d'Algèbre)*

13.8.4 Equivalence de suites

Voici un énoncé important ; nous retrouverons la notion d'équivalence tout au long des cours d'analyse.

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites équivalentes, et on écrit :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\approx} v_n}$$

Si et seulement si $u_n - v_n \in o(v_n)$

Remarque 22 :

1. La condition $u_n - v_n \in o(v_n)$, en fait un peu compliquée, est équivalente à la condition *(donnée par la définition)* :
   Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers zéro, telle que si $n > N_0$, alors $u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$, ou ce qui est équivalent, $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$
2. Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, la propriété $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\approx} v_n}$ **est équivalente à** $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1}$. C'est ce qui est précisé dans le théorème suivant

13.8.5 Théorème

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites numériques réelles.

1. Dans $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, la relation $u_n \approx v_n$ est une relation d'équivalence
2. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, alors,

$$\boxed{u_n \approx v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1}$$

Démonstration

1. Montrons que c'est une relation d'équivalence
   Réflexivité Evidemment, on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \approx (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; il suffit de prendre pour $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite nulle.
   Symétrie Supposons $u_n \approx v_n$; il faut donc montrer que $v_n \approx u_n$
   A partir d'un certain rang N_0 , nous avons $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$, et donc $v_n = \left(\dfrac{1}{1+\varepsilon_n}\right)u_n$, ou encore, $v_n = \left(1 - \dfrac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}\right)u_n$; si nous posons $\varepsilon'_n = \dfrac{-\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}$, nous avons : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0$,et donc $v_n \approx u_n$
   Transitivité Supposons $u_n \approx v_n$ et $v_n \approx w_n$; il faut donc démontrer que $u_n \approx w_n$
   Il existe donc un entier N_0 tel que si $n \geqslant N_0$, alors, $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$
   De même, il existe N_1 tel que, si $n \geqslant N_1$, alors, $v_n = (1+\varepsilon'_n)w_n$
   Donc, pour $n \geqslant \max(N_0, N_1)$, nous avons $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$ et $v_n = (1+\varepsilon'_n)w_n$, et, dès ce moment, $u_n v_n = (1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon'_n)u_n$. En posant $\varepsilon''_n = \varepsilon_n(1+\varepsilon'_n)+\varepsilon'_n$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon''_n = 0$
   On a donc $u_n \approx w_n$
2. La démonstration du second point est très facile. Nous allons, comme pour toutes les équivalences, la démontrer en deux temps.

(a) Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\approx} v_n$
Traduisons maintenant ce que ceci veut dire *(retour à la définition)* : à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ donc, si $n > N_0$, $\dfrac{u_n}{v_n} = 1+\varepsilon_n$, et de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, nous concluons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$

(b) Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$
Ceci veut donc dire, que nous avons $\dfrac{u_n}{v_n} = 1+\beta_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$; en fait, donc, nous pouvons conclure que $u_n = v_n\,(1+\beta_n)$; ici, nous avons donc $\beta_n = \varepsilon_n$

Remarque 23 :

Remarques très importantes

1. Si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, alors, pour tout $A > 0$, il existe N_A, entier positif tel que $n > N_A \Rightarrow |u_n| \leqslant A\,|v_n|$
De même, pour tout $B > 0$, il existe N_B tel que $n > N_B \Rightarrow |v_n| \leqslant B\,|u_n|$
Ces inégalités montrent la relation "forte" qu'est l'équivalence des suites.
Les démonstrations reposent sur le fait que les suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers zéro
De plus, avec ces inégalités, on voit que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule à partir d'un certain rang, il en est de même de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et réciproquement !
2. Si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, même si $\lim\limits_{n\to+\infty} = \infty$. On en conclue donc que, **dans une recherche d'existence ou de valeur de la limite, on peut remplacer une suite, par une autre suite équivalente**

Exemple 18 :

1. Soit P un polynôme, $P(X) = a_k X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \ldots + a_0$, alors, $P(n) \approx a_k n^k$
exemple : $125n^{258} + n^7\sqrt{\pi} \approx 125n^{258}$
On retrouve, ici, l'expresssion vue en Lycée :
$\boxed{\textbf{en } +\infty\textbf{, un polynôme tend comme son terme de plus haut degré.}}$
2. Autre exemple classique : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}} = 1$, donc, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{n}$
3. De même, en utilisant les limites classiques : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\dfrac{1}{n}} = 1$; donc, $\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{n}$
4. Dans les chapitres ultérieurs *(développements limités)*, nous aurons d'autres outils pour trouver des équivalents.

13.8.6 Proposition : Règles de calcul sur les suites équivalentes

1. Si $u_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2$ et si $v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} v_n^2$, alors $u_n^1 v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2 v_n^2$
2. Si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$ et si u_n et v_n ne s'annulent pas, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{v_n}$
3. Conséquence : Si $u_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2$ et si $v_n^1 \approx v_n^2$, et si u_n^2 et v_n^2 ne s'annulent pas, alors $\dfrac{u_n^1}{u_n^2} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{v_n^1}{v_n^2}$

Démonstration

1. *Démonstration du premier point*

   Supposons $u_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2$ et $v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} v_n^2$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^1}{u_n^2} = 1$, et, de même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n^1}{v_n^2} = 1$, ce qui montre que, en utilisant le produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^1 v_n^1}{u_n^2 v_n^2} = 1$, c'est à dire $u_n^1 v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2 v_n^2$

2. *Démonstration du second point*

   Il existe donc un entier N_0 tel que si $n \geqslant N_0$, alors, $u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$, donc, si $n \geqslant N_0$
   $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{(1+\varepsilon_n)\, v_n} = \dfrac{1}{(1+\varepsilon_n)} \times \dfrac{1}{v_n}$;
   Or, $\dfrac{1}{(1+\varepsilon_n)} = 1 - \frac{\varepsilon_n}{(1+\varepsilon_n)}$; en posant $E_n = -\dfrac{\varepsilon_n}{(1+\varepsilon_n)}$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n = 0$ et
   $\dfrac{1}{u_n} = (1+E_n)\dfrac{1}{v_n}$ donc $\dfrac{1}{u_n} \approx \dfrac{1}{v_n}$

3. *Démonstration du troisième point*

   Le troisième point est une synthèse des 2 points précédents.

Exemple 19 :

L'exemple type est la question posée par le rapport de deux polynômes.
Si $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \dfrac{a_k n^k + \ldots + a_0}{b_j n^j + \ldots + b_0}$, comme nous avons $P(n) \underset{+\infty}{\approx} a_k n^k$ et $Q(n) \underset{+\infty}{\approx} b_j n^j$, nous avons $u_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{a_k n^k}{b_j n^j}$, c'est à dire : $u_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{a_k}{b_j} n^{k-j}$

Exercice 23 :

1. En utilisant les équivalents, calculer les limites suivantes :

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + 2n\sin n + 1}{2n^2 + 3n + 1}$

   Nous avons $n^2 + 2n\sin n + 1 \underset{+\infty}{\approx} n^2$ et $2n^2 + 3n + 1 \underset{+\infty}{\approx} 2n^2$. nous en déduisons :

   $$\frac{n^2 + 2n\sin n + 1}{2n^2 + 3n + 1} \underset{+\infty}{\approx} \frac{n^2}{2n^2}$$

   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + 2n\sin n + 1}{2n^2 + 3n + 1} = \dfrac{1}{2}$

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n + n^2 + 3}{2^n + 3^n + 1}$

   La démonstration est la même :
   Nous avons $2^n + n^2 + 3 \underset{+\infty}{\approx} 2^n$ et $2^n + 3^n + 1 \underset{+\infty}{\approx} 3^n$. nous en déduisons :

   $$\frac{2^n + n^2 + 3}{2^n + 3^n + 1} \underset{+\infty}{\approx} \frac{2^n}{3^n}$$

   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n + n^2 + 3}{2^n + 3^n + 1} = 0$

2. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$ et que si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, alors $(u_n)^\alpha \underset{+\infty}{\approx} (v_n)^\alpha$

   Rien de plus simple. Par hypothèse, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^\alpha = 1$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} = 1$

3. On appelle $u_n^1 = n^3 + 4n^2$, $u_n^2 = n^3 + 1$, $v_n^1 = -n^3 + \dfrac{1}{n}$, $v_n^2 = -n^3 + 2n$. Montrer que l'on a $u_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2$, $v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} v_n^2$, mais pas $u_n^1 + v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2 + v_n^2$

   Il suffit de remarquer que $u_n^1 + v_n^1 = 4n^2 + \dfrac{1}{n}$ et que $u_n^2 + v_n^2 = 2n + 1$

   Avons nous $e^{n^3+4n^2} \underset{+\infty}{\approx} e^{n^3+1}$?

   Il suffit de faire le rapport $\frac{e^{n^3+4n^2}}{e^{n^3+1}} = e^{4n^2-1}$ qui ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers l'infini !

Remarque 24 :

On ne fait pas ce qu'on veut avec les équivalents *(par exemple additionner, prendre l'exponentielle ou le logarithme)* il faut, le plus souvent, revenir à la définition.

13.9 Correction des exercices

Exercice 4 :

Calculez les développements limités suivants :

1. $\sin x + \cosh x$ *à l'ordre 3, au voisinage de 0*

   Pas très difficile : nous avons $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ et $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$ et donc :

$$\boxed{\sin x + \cosh x = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)}$$

2. $\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}$ *à l'ordre 3, au voisinage de 0*

   Moins facile, surtout pour le calcul du développement limité de $\sqrt[3]{1+x}$
   - Le développement limité de $\sqrt{1+x}$ est donné par :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x)$$

   - On commence par le développement limité de $(1+x)^m$. A l'ordre 3, nous avons :

$$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$$

   Donc, pour $m = \dfrac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \\
&= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}\times\frac{x^2}{2} + \frac{10}{27}\times\frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \\
&= 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} + x^3\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

   D'où $\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + 1 + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{5x^3}{81} + x^3\varepsilon(x)$, d'où :

$$\boxed{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} = 2 + \frac{5x}{6} - \frac{17x^2}{72} + \frac{161x^3}{1296} + x^3\varepsilon(x)}$$

   OUF ! !

3. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$ *à l'ordre 3, au voisinage de 0*

   On ne se gène pas trop ! ! On utilise les formules d'addition, puis, on prend les développements limitésde $\cos x$ et $\sin x$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} = \sin x\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$$

   - $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$
   - $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$
   - D'où $\sin x + \cos x = 1 + x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$

   D'où :

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}x^2}{4} - \frac{\sqrt{2}x^3}{12} + x^3\varepsilon(x)}$$

4. $(1+x)^2 + \sinh x$ *à l'ordre 3, au voisinage de 0*

   Pas grandes difficultés

   - $(1+x)^2$ est un polynôme et est donc son propre développement limité . Donc,

   $$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 + x^3\varepsilon(x)$$

   - Nous avons déjà travaillé dans le cours, le développement limité de $\sinh x$:

   $$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

   Donc, bravement, le développement limité de $(1+x)^2 + \sinh x$ à l'ordre 3, au voisinage de 0 est :

   $$\boxed{(1+x)^2 + \sinh x = 1 + 3x + x^2 + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)}$$

Exercice 5 :

Il y a beaucoup de questions d'application directe ; souvent, je ne propose que la réponse

Calculez les développements limités suivants :

1. $f(x)\,g(x)$, *à l'ordre maximum possible, au voisinage de 0, sachant que :*
   — $f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 - x^6 + x^7\varepsilon_1(x)$
   — $g(x) = -3x + 5x^2 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$
   où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

   Aucune difficulté : l'ordre maximum est 4 et la partie principale du développement limité de $f(x)\,g(x)$ est donné par le produit des parties principales de f et g

2. $x^2 \cos x$ *à l'ordre 4, au voisinage de 0*

   Au voisinage de 0, $x^2\cos x = x^2 + \frac{x^4}{2} + x^4\varepsilon(x)$

3. $\sin x \sinh x$ *à l'ordre 4, au voisinage de 0*

   - Le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de $\sin x$ est :

   $$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$$

   - Le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de $\sinh x$ est :

   $$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$$

   - La partie principale du développement limité de $\sin x \sinh x$ est donnée par le produit des parties principales de $\sin x$ et $\sinh x$ où on ne retient que les puissances inférieures à 4 Elle est donc donnée par x^2

   Donc, le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de $\sin x \sinh x$ est :

   $$\sin x \sinh x = x^2 + x^4\varepsilon(x)$$

Exercice 6 :

Calculez les développements limités suivants :

1. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *à l'ordre maximum possible, au voisinage de 0, sachant que :*

▷ $f(x) = 2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$ ▷ $g(x) = 1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

L'ordre jusqu'auquel nous pouvons aller est bien entendu 4.
Il suffit donc de faire la division, suivant les puissances croissantes, des parties prinicipales $2 + x - x^2 + 2x^3 - 2x^4$ et $1 - 3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4$ en ne retenant que les termes d'ordre inférieur à 4. Ainsi, au voisinage de 0 :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 2 + 7x + 10x^2 + x^3 - 41x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$$

2. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *à l'ordre maximum possible, au voisinage de 0, sachant que :*

▷ $f(x) = x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$ ▷ $g(x) = -3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

Au voisinage de 0, nous avons :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x - x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^4\varepsilon_1(x)}{-3x + 5x^2 - 2x^3 + 3x^4 + x^4\varepsilon_2(x)} = \frac{1 - x + 2x^2 - 2x^3 + x^3\varepsilon_1(x)}{-3 + 5x - 2x^2 + 3x^3 + x^3\varepsilon_2(x)}$$

L'ordre jusqu'auquel nous pouvons aller est bien entendu 3.
Il suffit donc de faire la division, suivant les puissances croissantes, de $1 - x + 2x^2 - 2x^3$ et $-3 + 5x - 2x^2 + 3x^3$ en ne retenant que les termes d'ordre inférieur à 3. Ainsi, au voisinage de 0 :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{9}x - \frac{34}{27}x^2 + \frac{155}{27}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

3. $\dfrac{\ln(1+x)}{\cos x}$ *à l'ordre 3, au voisinage de 0*

- A l'ordre 3, le développement limité de $\ln(1+x)$ est :$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$
- De même, à l'ordre 3, le développement limité de $\cos x$ est : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$

Il suffit donc de faire la division, suivant les puissances croissantes, de $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ et $-1 - \dfrac{x^2}{2}$ en ne retenant que les termes d'ordre inférieur à 3. Ainsi, au voisinage de 0 :

$$\frac{\ln(1+x)}{\cos x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

4. $\dfrac{1-\cos x}{(\sinh x)^2}$ *à l'ordre 2, au voisinage de 0*

- Le développement limité de $\cos x$, au voisinage de 0 et à l'ordre 4 est donné par : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$ et donc celui, à l'ordre 4 de $1 - \cos x$ est donné par : $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$
- A l'ordre 4, le développement limité de $\sinh x$ est : $\sinh x = x + \dfrac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$ et donc celui, à l'ordre 4 de $(\sinh x)^2$ est $(\sinh x)^2 = x^2 + \dfrac{x^4}{3} + x^4\varepsilon(x)$

Donc $\dfrac{1-\cos x}{(\sinh x)^2} = \dfrac{\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)}{x^2 + \dfrac{x^4}{3} + x^4\varepsilon(x)} = \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{24} + x^2\varepsilon(x)}{1 + \dfrac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)}$

D'où, pour trouver le développement limité $\dfrac{1-\cos x}{(\sinh x)^2}$ à l'ordre 2, au voisinage de 0, il suffit donc de faire la division, suivant les puissances croissantes, de $\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{24}$ et $1+\dfrac{x^2}{3}$ en ne retenant que les termes d'ordre inférieur à 2. Ainsi, au voisinage de 0 :

$$\frac{1-\cos x}{(\sinh x)^2}=\frac{1}{2}-\frac{5x^2}{24}+x^2\varepsilon(x)$$

5. $\dfrac{1}{\cos x}$ *à l'ordre 4, au voisinage de 0*

Facile ! ! le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{\cos x}$ est donné par :

$$\frac{1}{\cos x}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+x^4\varepsilon(x)$$

6. $\dfrac{x}{e^x-1}$ *à l'ordre 4, au voisinage de 0*

Voici un énoncé devenu classique ! !

Il est facile de voir que le développement limité de e^x-1 à l'ordre 5 est donné par : $e^x-1=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)$ et donc :

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)}=\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+x^4\varepsilon(x)}$$

Et donc le développement limité de $\dfrac{x}{e^x-1}$ à l'ordre 4, au voisinage de 0 est :

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+\frac{19x^4}{720}+x^4\varepsilon(x)$$

7. $\dfrac{x}{\sin x}$ *à l'ordre 4, au voisinage de 0*

Question très ressemblante à la précédente !

A l'ordre 5, auvoisinage de 0, $\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)$ et donc :

$$\frac{x}{\sin x}=\frac{x}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)}=\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+x^4\varepsilon(x)}$$

Et donc le développement limité de $\dfrac{x}{\sin x}$ à l'ordre 4, au voisinage de 0 est :

$$\frac{x}{\sin x}=1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+x^4\varepsilon(x)$$

Chapitre 14

L'intégrale de Riemann

Nous avons travaillé, dans le cours de L_0, le calcul intégral. En fait, nous nous intéressions, uniquement, aux fonctions continues. L'objet de ce chapitre est d'étendre l'intégrale à une plus grande classe de fonctions que celle des seules fonctions continues. C'est un chapitre important, rigoureux, où l'intégrale de Riemann est complètement construite

14.1 Subdivisions d'un intervalle $[a; b]$

14.1.1 Définition

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On appelle subdivision du segment $[a; b]$ toute partie finie $S \subset [a; b]$ telle que $a \in S$ et $b \in S$

Remarque 1 :

1. Ce n'est pas la définition habituelle de subdivision, mais elle est très pratique. De façon générale, nous rangeons les éléments de S en une suite finie strictement croissante :
$$S: \quad a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$
2. Cette définition n'est donc en rien contradictoire avec celle donnée en 10.2.18
3. Le pas de la subdivision est donné par : $\rho(S) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |a_{i+1} - a_i|$

Exemple 1 :

1. Pour l'intervalle $[0; 1]$, nous avons les subdivisions :
$$S_1 = \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\} \quad S_2 = \left\{0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1\right\} \quad S_3 = \left\{0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right\} \quad S_4 = \left\{0; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; 1\right\}$$
Nous avons $\rho(S_1) = \frac{1}{2}$, $\rho(S_2) = \frac{1}{4}$, $\rho(S_3) = \frac{1}{3}$ et $\rho(S_4) = \frac{2}{5}$
2. La subdivision uniforme du segment $[a; b]$ est celle de points $s_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ où $0 \leqslant k \leqslant n$. Elle est de pas $\dfrac{b-a}{n}$
3. Dans les subdivisions de l'intervalle $[0; 1]$, S_1, S_2 et S_3 sont uniformes. S_4 ne l'est pas

14.1.2 Subdivision plus fine

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Une subdivision T du segment $[a; b]$ est plus fine qu'une subdivision S, si $S \subset T$

Exemple 2 :

Dans l'exemple précédent, S_2 est plus fine que S_1

Remarque 2 :

Pour être plus précis, une autre subdivision $T = \{t_0, t_1, \cdots, t_{m-1}, t_m\}$ est plus fine que la subdivision S si l'ensemble $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}, s_n\}$ est contenu dans l'ensemble $T = \{t_0, t_1, \cdots, t_{m-1}, t_m\}$ c'est à dire si chaque s_i est un t_j *(pour un indice j pouvant être $i \neq j$).*
Ceci revient à dire que tout intervalle $[t_j; t_{j+1}]$ est inclus dans un intervalle $[s_i; s_{i+1}]]$, c'est à dire que l'on a découpé l'intervalle $[a;b]$ en morceaux plus petits : c'est pour cette raison que l'on dit que T est plus fine que S. Illustrons ceci par un exemple :

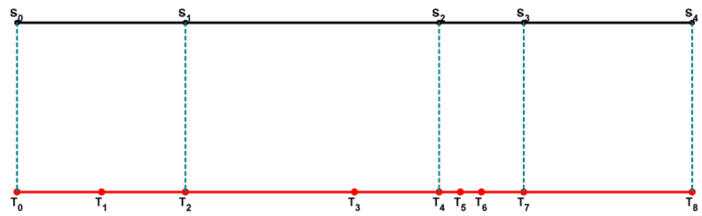

FIGURE 14.1 – Visualisation d'une subdivision T plus fine que la subdivision S

14.1.3 Définition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction numérique <u>bornée</u>.
Soit $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$ une subdivision de $[a;b]$. Alors, nous posons :

$\triangleright$ $\sigma(f, S) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \inf_{x \in [s_{k-1}; s_k[} f(x)$ $\qquad$ $\triangleright$ $\Sigma(f, S) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \sup_{x \in [s_{k-1}; s_k[} f(x)$

Remarque 3 :

1. Pour chaque k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, les expressions $\displaystyle\inf_{x \in [s_{k-1}; s_k[} f(x)$ et $\displaystyle\sup_{x \in [s_{k-1}; s_k[} f(x)$ existent puisque f est bornée sur $[a;b]$ et que $[s_{k-1}; s_k[\subset [a;b]$
2. D'autre part, $\sigma(f, S) \leqslant \Sigma(f, S)$
3. Les $\sigma(f, S)$ et $\Sigma(f, S)$ sont appelées <u>sommes de Darboux</u>

14.1.4 Proposition

Soient S et T 2 subdivisions d'un segment $[a;b]$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction numérique <u>bornée</u>
Si T est plus fine que S, alors :

$$\sigma(f, S) \leqslant \sigma(f, T) \text{ et } \Sigma(f, T) \leqslant \Sigma(f, S)$$

<u>**Démonstration**</u>

Soient donc $T = \{t_0, t_1, \cdots, t_{m-1}, t_m\}$ une subdivision de $[a;b]$, plus fine que la subdivision $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}, s_n\}$
Pour i tel que $0 \leqslant i \leqslant n-1$, existe alors j_0 tel que $0 \leqslant j_0 \leqslant m-1$ tel que :

$$[t_{j_0}; t_{j_0+1}[\cup [t_{j_0+1}; t_{j_0+2}[\cup \cdots \cup [t_{j_0+l}; t_{j_0+l+1}[= [s_i; s_{i+1}[$$

Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant l$, nous avons, puisque $[t_{j_0+k}; t_{j_0+k+1}[\subset [s_i; s_{i+1}[$:

$$\inf_{x\in[s_i;s_{i+1}[} f(x) \leqslant \inf_{x\in\left[t_{j_0+k};t_{j_0+k+1}\right[} f(x) \text{ et } \sup_{x\in\left[t_{j_0+k};t_{j_0+k+1}\right[} f(x) \leqslant \sup_{x\in[s_i;s_{i+1}[} f(x)$$

De telle sorte que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{l} (t_{j_0+k+1} - t_{j_0+k}) \inf_{x\in\left[t_{j_0+k};t_{j_0+k+1}\right[} f(x) \geqslant \sum_{k=0}^{l} (t_{j_0+k+1} - t_{j_0+k}) \inf_{x\in[s_i;s_{i+1}[} f(x) \\ = \inf_{x\in[s_i;s_{i+1}[} f(x) \sum_{k=0}^{l} (t_{j_0+k+1} - t_{j_0+k}) \\ = (s_{i+1} - s_i) \inf_{x\in[s_i;s_{i+1}[} f(x)\end{aligned}$$

De cette inégalité, nous tirons $\sigma(f,S) \leqslant \sigma(f,T)$.
Par les mêmes considérations, nous aurions $\Sigma(f,T) \leqslant \Sigma(f,S)$

14.1.5 Proposition

Pour toute subdivision S et T de l'intervalle $[a;b]$, nous avons $\sigma(f,S) \leqslant \Sigma(f,T)$

Démonstration

La démonstration n'est pas très difficile.
Nous avons $S \subset S \cup T$ et $T \subset S \cup T$, et donc :

$$\sigma(f,S) \leqslant \sigma(f, S\cup T) \leqslant \Sigma(f, S\cup T) \leqslant \Sigma(f,T)$$

Remarque 4 :

1. Nous en déduisons que pour toute subdivision S de $[a;b]$, l'ensemble des nombres $\sigma(f,S)$ admet une borne supérieure.
2. De même, pour toute subdivision S de $[a;b]$, l'ensemble des nombres $\Sigma(f,S)$ admet une borne inférieure.
3. Si $\mathcal{S}$ est l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a;b]$, nous avons :

$$\sup_{S\in\mathcal{S}} (\sigma(f,S)) \leqslant \inf_{S\in\mathcal{S}} (\Sigma(f,S))$$

14.1.6 Définition de fonction intégrable

Une fonction $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si :

1. f est bornée
2. Si $\mathcal{S}$ est l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a;b]$, nous avons :

$$\sup_{S\in\mathcal{S}} (\sigma(f,S)) = \inf_{S\in\mathcal{S}} (\Sigma(f,S))$$

La valeur comme de ces deux bornes est appelée intégrale définie de la fonction f sur $[a;b]$ et est notée :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 5 :

1. Pour démontrer qu'une fonction bornée $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, il suffit de trouver, pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de trouver une subdivision $S \in \mathcal{S}$ de l'intervalle $[a;b]$ tel que

$$|\sigma(f,S) - \Sigma(f,S)| = \Sigma(f,S) - \sigma(f,S) \leqslant \varepsilon$$

2. Variable d'intégration : dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ la « variable d'intégration » t est « muette », on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre *(sauf ici a, b ou f)*. Cette variable joue le même rôle que l'indice i de sommation dans $\displaystyle\sum_{i=5}^{n} u_i$ qui est lui aussi muet. Nous avons donc :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(\zeta)\ \mathrm{d}\zeta = \int_a^b f(y)\ \mathrm{d}y = \int_a^b f(\omega)\ \mathrm{d}\omega$$

14.1.7 Proposition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a;b]$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision S de l'intervalle $[a;b]$ telle que :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - \varepsilon \leqslant \sigma(f,S) \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \Sigma(f,S) \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \varepsilon$$

Ou, ce qui est équivalent

$$\Sigma(f,S) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sigma(f,S) + \varepsilon$$

Démonstration

C'est une démonstration assez simple et classique basée sur les définitions de sup et d'inf.
Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a;b]$
Soit donc $\varepsilon > 0$

- ▷ Comme $\displaystyle\sup_{S\in\mathcal{S}}(\sigma(f,S)) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$, il existe $S \in \mathcal{S}$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - \varepsilon \leqslant \sigma(f,S) \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$
- ▷ De même, comme $\displaystyle\inf_{S\in\mathcal{S}}(\Sigma(f,S)) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$, il existe $S \in \mathcal{S}$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \Sigma(f,S) \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \varepsilon$

Et donc, nous avons en synthèse :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - \varepsilon \leqslant \sigma(f,S) \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \Sigma(f,S) \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \varepsilon$$

et donc

$$\Sigma(f,S) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sigma(f,S) + \varepsilon$$

14.1.8 Définition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et $A \subset [a;b]$
On appelle oscillation de f dans A un nombre que l'on note $\omega(f,A)$ défini par :

$$\omega(f,A) = \left|\sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x)\right| = \sup_{x\in A} f(x) - \inf_{x\in A} f(x)$$

14.1.9 Proposition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée
Pour que f soit intégrable au sens de Riemann, il faut et il suffit que pour toute subdivision $S \in \mathcal{S}$ de l'intervalle $[a;b]$, lorsque le pas de la subdivision $\rho(S)$ tend vers zéro, alors la quantité

$$\Sigma(f,S) - \sigma(f,S) = \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1})\,\omega(f,[s_{i-1};s_i[)$$

tend vers 0

Démonstration

1. **Supposons que $\Sigma(f,S) - \sigma(f,S)$ tende vers 0 lorsque $\rho(S)$ tend vers 0**
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision $S \in \mathcal{S}$ de l'intervalle $[a;b]$,
   $$\rho(S) < \eta \Longrightarrow \Sigma(f,S) - \sigma(f,S) \leqslant \varepsilon$$
   Ce qui montre donc que f est intégrable
2. **Supposons que f est intégrable**
   Soit $\varepsilon > 0$
   Il existe alors une subdivision $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_n\} \in \mathcal{S}$ de l'intervalle $[a;b]$ telle que :
   $$0 \leqslant \Sigma(f,S) - \sigma(f,S) = \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1})\,\omega(f,[s_{i-1};s_i[) \leqslant \varepsilon$$
   → Nous appelons $M = \omega(f,[a;b])$, $\theta_0 = \dfrac{\varepsilon}{nM}$, $\theta_1 = \inf\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (s_{i+1} - s_i)$ et $\theta = \min\{\theta_0, \theta_1\}$
   Nous avons $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{nM}$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \inf\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (s_{i+1} - s_i)$
   → Soit $T = \{t_0, t_1, \cdots, t_m\} \in \mathcal{S}$ une subdivision de $[a;b]$ telle que $\rho(T) \leqslant \theta$, ce qui veut dire que pour tout j, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, $(t_{j+1} - t_j) \leqslant \theta$
   → Alors, il y a au plus n intervalles $[t_{j-1};t_j[$ qui contiennent un point $s_i \in S$, et donc :
   $$\begin{aligned} 0 \leqslant \Sigma(f,S) - \sigma(f,S) &= \sum_{j=1}^{m} (t_j - t_{j-1})\,\omega(f,[t_{j-1};t_j[) \\ &= \sum_{j \text{ tels que } s_i \in [t_{j-1};t_j[} (t_j - t_{j-1}))\omega(f,[t_{j-1};t_j[) \\ &\quad + \sum_{j \text{ tels que } s_i \notin [t_{j-1};t_j[} (t_j - t_{j-1})\,\omega(f,[t_{j-1};t_j[) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1})\,\omega(f,[s_{i-1};s_i[) + n\rho(T)\,\omega(f,[a,b[) \\ &\leqslant \Sigma(f,S) - \sigma(f,S) + n\theta\omega(f,[a,b[) \\ &\leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$
   Ce que nous voulions

14.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

14.2.1 Rappel de la définition de fonction en escalier

Cette définition a déjà été donnée en 10.2.18

Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$.
On appelle fonction en escalier ou fonction étagée toute fonction $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle il existe une subdivision $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_n\}$ de l'intervalle $[a;b]$ telle que f soit constante sur les intervalles $[s_i;s_{i+1}[$ où nous avons, pour tout $x \in [s_i;s_{i+1}[$, $f(x) = C_i$

Remarque 6 :

Il est clair que la subdivision S n'est pas unique, en particulier pour toute subdivision T plus fine que S, f est constante sur chacun des intervalles ouverts ayant pour extrémités deux points consécutifs de T. Il y a donc une infinité de subdivisions S telles que f, fonction en escalier soit constante sur chacun des intervalles ouverts de S *(c'est à dire les intervalles ayant pour extrémités deux points consécutifs de S)*. Nous appellerons subdivision associée à f, fonction en escalier, toute subdivision S telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts de S. La moins fine des subdivisions associées à f, fonction en escalier, est constituée des points a et b et des points de discontinuité de f dans $]a, b[$.

14.2.2 Proposition

Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$. Toute fonction en escalier f sur $[a;b]$ de subdivision adaptée subdivision $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_n\}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$ et

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i)\, C_i$$

Démonstration

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier sur $[a;b]$ et $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_n\}$ une subdivision adaptée à f, c'est à dire que pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant n-1$ et tout $x \in [s_i; s_{i+1}[$, $f(x) = c_i$. Alors :

- ▷ $\sigma(f, S) = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \inf_{x \in [s_{k-1}; s_k[} f(x) = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1})\, c_k$
- ▷ $\Sigma(f, S) = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \sup_{x \in [s_{k-1}; s_k[} f(x) = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1})\, c_k$
- ▷ Ainsi, $\sigma(f, S) = \Sigma(f, S)$, c'est à dire $\Sigma(f, S) - \sigma(f, S) = 0$

La fonction f est donc intégrable et $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i)\, C_i$

14.2.3 Proposition

Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors, toute fonction monotone sur $[a;b]$ est intégrable sur $[a;b]$

Démonstration

1. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction monotone sur $[a;b]$; ceci veut dire qu'elle est ou croissante, ou décroissante. Supposons f croissante.
   Alors, pour tout $x \in [a;b]$, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$
2. Soit $\varepsilon > 0$ et $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_n\}$ une subdivision de $[a;b]$ de pas $\rho(S) < \varepsilon$. Alors :

$$\begin{aligned}
\Sigma(f, S) - \sigma(f, S) &= \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i)\, \omega(f, [s_i : s_{i+1}[) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i)(f(s_{i+1}) - f(s_i)) \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon (f(s_{i+1}) - f(s_i)) = \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} (f(s_{i+1}) - f(s_i)) = \varepsilon (f(b) - f(a))
\end{aligned}$$

D'après la proposition 14.1.9, la fonction f est intégrable

14.2.4 Définition de fonction caractéristique

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On appelle fonction caractéristique de A, la fonction 1_A définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1_A : \mathbb{R} & \longrightarrow & \{0;1\} \\ x & \longmapsto & 1_A(x) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Remarque 7 :

1. La fonction caractéristique de A est aussi appelée **fonction indicatrice** de A
2. Plutôt que 1_A, la fonction indicatrice est aussi notée χ_A
3. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier sur $[a;b]$ telle que $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_n\}$ soit une subdivision de l'intervalle $[a;b]$ adaptée à f, c'est à dire telle que f soit constante sur les intervalles $[s_i; s_{i+1}[$: nous avons, pour tout $x \in [s_i; s_{i+1}[$, $f(x) = C_i$.
   Alors nous pouvons écrire f :
   $$f = \sum_{i=0}^{n-1} c_i 1_{[s_i;s_{i+1}[} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \chi_{[s_i;s_{i+1}[}$$
4. Cette notion de fonction indicatrice ou de fonction caractéristique a déjà été étudiée dans la chapitre « Logique » de L_0

Exercice 1 :

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Démontrer que :

1. $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A\cap B}$
2. $1_{A\cap B} = 1_A \times 1_B$
3. $1_{A^c} = 1 - 1_A$ où A^c désigne le complémentaire ensembliste de A

Exercice très facile !

14.2.5 Ensemble mesurable au sens de Riemann

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est mesurable au sens de Riemann si sa fonction caractérisique 1_A est intégrable au sens de Riemann

14.2.6 Proposition

1. Soit $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ un sous ensemble fini d'un intervalle $[a;b] \subset \mathbb{R}$; alors A est Riemann-mesurable
2. Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$; alors $A = \mathbb{Q} \cap [a;b]$ qui est l'ensemble des rationnels contenus dans l'intervalle $[a;b]$ n'est pas Riemann-mesurable

Démonstration

1. **Soit $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ un sous ensemble fini de $[a;b]$**
   Pour toute subdivision $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_p\}$ de $[a;b]$, il y a au plus n intervalles $[s_i; s_{i+1}[$ contenant les a_i, et pour ces intervalles, nous pouvons écrire $\omega(1_A, [s_i : s_{i+1}[) = 1$, et sur les intervalles ne contenant pas les a_i, nous avons $\omega(1_A, [s_i : s_{i+1}[) = 0$; donc :
   $$\begin{aligned} \Sigma(1_A, S) - \sigma(1_A, S) &= \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i)\, \omega(f, [s_i : s_{i+1}[) \\ &= \sum_{i \text{ tels que } a_i \in [s_i;s_{i+1}[} (s_{i+1} - s_i) \\ &\leqslant n\rho(S) \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. En choisissant une subdivision S telle que $\rho(S) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{n}$, nous avons

$$\Sigma(1_A, S) - \sigma(1_A, S) \leqslant \varepsilon$$

Donc, si A est fini, 1_A est Riemann-intégrable.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$, nous avons $\displaystyle\int_a^b 1_A(x)\, \mathrm{d}x = 0$

2. **Soit** $[a;b]$ **un intervalle de** $\mathbb{R}$ **et considérons** $A = \mathbb{Q} \cap [a;b]$
   Soit $S = \{s_0, s_1, , s_2, \cdots, s_n\}$ une subdivision de l'intervalle $[a;b]$. Quelque soit le pas $\rho(S)$ de la subdivision, pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant n-1$, il existe au moins un rationnenel $r_i \in [s_i : s_{i+1}[$ et un irrationnel $x_i \in [s_i : s_{i+1}[$, de telle sorte que, pour toute subdivision $S = \{s_0, s_1, , s_2, \cdots, s_n\}$ de l'intervalle $[a;b]$, et pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $\omega(f, [s_i : s_{i+1}[) = 1$. Donc, pour toute subdivision de $[a;b]$:

$$\Sigma(1_A, S) - \sigma(1_A, S) = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i)\, \omega(f, [s_i : s_{i+1}[) = \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i) = b - a$$

   Donc, quelle soit la subdivision, nous ne pourrons pas rendre $\Sigma(1_A, S) - \sigma(1_A, S)$ aussi petite que nous le souhaitons
   Ainsi, si $A = \mathbb{Q} \cap [a;b]$, alors 1_A n'est pas intégrable, et donc A n'est pas Riemann-mesurable.

Remarque 8 :

Dans le cas où $A = \mathbb{Q} \cap [a;b]$, 1_A est souvent notée $1_{\mathbb{Q}}$

14.2.7 Théorème

1. $\mathcal{I}([a;b])$ est l'ensemble des fonctions intégrables sur l'intervalle $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   Alors :
   $\mathcal{I}([a;b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a;b]}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$
2. L'application $I : \mathcal{I}([a;b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à tout $f \in \mathcal{I}([a;b])$ associe $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ est une forme linéaire
3. Soient $f \in \mathcal{I}([a;b])$ et $g \in \mathcal{I}([a;b])$ 2 fonctions telles que, pour tout $t \in [a;b]$, nous ayions $f(t) \leqslant g(t)$, alors $I(f) \leqslant I(g)$ c'est à dire $\displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t$
4. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable. Par convention, nous posons $\displaystyle\int_b^a f(t)\, \mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$

Démonstration

1. Pour montrer que $\mathcal{I}([a;b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a;b]}$, il faut montrer que si $f \in \mathcal{I}([a;b])$ et $g \in \mathcal{I}([a;b])$ alors $f + g \in \mathcal{I}([a;b])$ et que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in \mathcal{I}([a;b])$
   (a) **Soient** $f \in \mathcal{I}([a;b])$ **et** $g \in \mathcal{I}([a;b])$ **; montrons que** $f + g \in \mathcal{I}([a;b])$
   ▷ Tout d'abord, il y a un résultat que nous allons utiliser tout au long de cette démonstration et que nous allons rappeler.
   Soit $A \subset [a;b]$, alors, pour tout $x \in A$, nous avons : $\inf\limits_{x \in A} f(x) \leqslant f(x)$ et $\inf\limits_{x \in A} g(x) \leqslant g(x)$ et donc $\inf\limits_{x \in A} f(x) + \inf\limits_{x \in A} g(x) \leqslant f(x) + g(x)$
   D'où, nous avons $\inf\limits_{x \in A} f(x) + \inf\limits_{x \in A} g(x) \leqslant \inf\limits_{x \in A} (f(x) + g(x))$

- De même, pour tout $x \in A$, nous avons : $\sup\limits_{x\in A} f(x) \geqslant f(x)$ et $\sup\limits_{x\in A} g(x) \geqslant g(x)$ et donc $\sup\limits_{x\in A} f(x) + \sup\limits_{x\in A} g(x) \geqslant f(x) + g(x)$
  D'où, nous avons, en particulier $\sup\limits_{x\in A} f(x) + \sup\limits_{x\in A} g(x) \geqslant \sup\limits_{x\in A} (f(x) + g(x))$
  En synthèse, nous avons :
  $$\inf_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x) \leqslant \inf_{x\in A} (f(x) + g(x)) \leqslant \sup_{x\in A} (f(x) + g(x)) \leqslant \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x)$$
- Soit $S = \{s_0, s_1, \cdots, s_n\}$ une subdivision de l'intervalle $[a;b]$ adapté à f et g. Alors :
  $$\begin{aligned} \sigma(f,S) + \sigma(g,S) = & \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i) \left(\inf_{x\in[s_i;s_{i+1}[} f(x) + \inf_{x\in[s_i;s_{i+1}[} g(x) \right) \\ \leqslant & \sum_{i=0}^{n-1} (s_{i+1} - s_i) \left(\inf_{x\in[s_i;s_{i+1}[} (f(x) + g(x)) \right) = \sigma(f+g,S) \end{aligned}$$
  En synthèse, nous avons donc $\sigma(f,S) + \sigma(g,S) \leqslant \sigma(f+g,S)$
- De la même manière, et en utilisant les mêmes arguments, nous avons
  $$\Sigma(f+g,S) \leqslant \Sigma(f,S) + \Sigma(g,S)$$
  D'où les inégalités multiples que nous avons en synthèse :
  $$\sigma(f,S) + \sigma(g,S) \leqslant \sigma(f+g,S) \leqslant \Sigma(f+g,S) \leqslant \Sigma(f,S) + \Sigma(g,S)$$
- Pour montrer que $f+g$ est intégrable sur $[a;b]$, il faut montrer que
  $$\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f+g,S) = \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f+g,S)$$
  où $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a;b]$
  f et g étant intégrable, nous avons par la définition de fonction intégrable 14.1.6 :
  $$\sup_{S\in\mathcal{S}} (\sigma(f,S)) = \inf_{S\in\mathcal{S}} (\Sigma(f,S)) \text{ et } \sup_{S\in\mathcal{S}} (\sigma(g,S)) = \inf_{S\in\mathcal{S}} (\Sigma(g,S))$$
  Appelons $\lambda = \sup\limits_{S\in\mathcal{S}} (\sigma(f,S)) = \inf\limits_{S\in\mathcal{S}} (\Sigma(f,S))$ et $\mu = \sup\limits_{S\in\mathcal{S}} (\sigma(g,S)) = \inf\limits_{S\in\mathcal{S}} (\Sigma(g,S))$
  En utilisant les inégalité précédentes, nous avons :
  $$\sup_{S\in\mathcal{S}} (\sigma(f,S)) + \sup_{S\in\mathcal{S}} (\sigma(g,S)) \leqslant \sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f+g,S) \leqslant \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f+g,S) \leqslant \inf_{S\in\mathcal{S}} (\Sigma(f,S)) + \inf_{S\in\mathcal{S}} (\Sigma(g,S))$$
  C'est à dire :
  $$\lambda + \mu \leqslant \sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f+g,S) \leqslant \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f+g,S) \leqslant \lambda + \mu$$
  C'est à dire que nous avons $\sup\limits_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f+g,S) = \inf\limits_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f+g,S) = \lambda + \mu$
- Nous venons de démontrer 2 choses :
  - La première, c'est que si $f \in \mathcal{I}([a;b])$ et $g \in \mathcal{I}([a;b])$ alors $f + g \in \mathcal{I}([a;b])$
  - La seconde, c'est que $I(f+g) = I(f) + I(g)$, c'est à dire
  $$\int_a^b (f+g)(t) \text{ dt} = \int_a^b f(t) + g(t) \text{ dt} = \int_a^b f(t) \text{ dt} + \int_a^b g(t) \text{ dt}$$

(b) **Soient $f \in \mathcal{I}([a;b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; montrons que $\lambda f \in \mathcal{I}([a;b])$**
Soient $f \in \mathcal{I}([a;b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; nous devons donc montrer que $\sup\limits_{S\in\mathcal{S}} \sigma(\lambda f,S) \leqslant \inf\limits_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(\lambda f,S)$

→ Pour tout $A \subset [a;b]$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \geqslant 0$ nous avons :

$$\inf_{x\in A} \lambda f(x) = \lambda \inf_{x\in A} f(x) \text{ et } \sup_{x\in A} \lambda f(x) = \lambda \sup_{x\in A} f(x)$$

Et donc, pour toute subdivision S de l'intervalle $[a;b]$, nous avons :

$$\sigma(\lambda f, S) = \lambda\sigma(f,S) \text{ et } \Sigma(\lambda f, S) = \lambda\Sigma(f,S)$$

Et donc :

$$\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(\lambda f, S) = \lambda \sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f,S) \text{ et } \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(\lambda f, S) = \lambda \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f,S)$$

Comme f est intégrable, nous avons $\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f,S) = \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f,S) = \mu$

Nous avons donc : $\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(\lambda f, S) = \lambda\mu = \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(\lambda f, S)$

Ce qui montre que si $f \in \mathcal{I}([a;b])$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \geqslant 0$, $\lambda f \in \mathcal{I}([a;b])$ et nous avons, de plus, montré que $I(\lambda f) = \lambda I(f)$, c'est à dire

$$\int_a^b (\lambda f)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

→ Montrons que si $f \in \mathcal{I}([a;b])$ alors $-f \in \mathcal{I}([a;b])$

Pour toute partie $A \subset [a;b]$, nous avons :

$$-\inf_{x\in A} f(x) = \sup_{x\in A} -f(x) \text{ et } \inf_{x\in A} -f(x) = -\sup_{x\in A} f(x)$$

Ce qui nous conduit à écrire

$$\sigma(f,S) = -\Sigma(f,S) \text{ et } \Sigma(-f,S) = -\sigma(f,S)$$

Et donc

$$\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(-f,S) = -\sup_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f,S) \text{ et } \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(-f,S) = -\inf_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f,S)$$

Si f est intégrable, nous avons $\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f,S) = \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f,S) = \mu$ et donc :

$$\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(-f,S) = -\sup_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f,S) = -\mu \text{ et } \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(-f,S) = -\mu$$

Nous avons donc $\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(-f,S) = \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(-f,S) = -\mu$.

Donc, $-f \in \mathcal{I}([a;b])$ et $I(-f) = -I(f)$, c'est à dire

$$\int_a^b (-f)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b -f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

→ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \leqslant 0$. On pose $\lambda = -\lambda'$. Alors :

$$I(\lambda f) = I(-\lambda' f) = \lambda' I(-f) = -\lambda' I(f) = \lambda I(f)$$

Donc si $f \in \mathcal{I}([a;b])$ alors $\lambda f \in \mathcal{I}([a;b])$ lorsque $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \leqslant 0$

En conclusion, nous avons démontré 2 résultats :

- ⋄ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si $f \in \mathcal{I}([a;b])$ alors $\lambda f \in \mathcal{I}([a;b])$.
- ⋄ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $I(\lambda f) = \lambda I(f)$, c'est à dire, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (\lambda f)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Nous venons donc de montrer que $\mathcal{I}([a;b])$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

2. Nous avons aussi démontré, dans le point précédent que, pour toute fonction $f \in \mathcal{I}([a;b])$, $g \in \mathcal{I}([a;b])$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ que :
   ⋆ $I(f+g) = I(f) + I(g)$
   ⋆ $I(\lambda f) = \lambda I(f)$
   L'application $I : \mathcal{I}([a;b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ est donc une forme linéaire.
   Il est clair que nous pouvons écrire, pour toute fonction $f \in \mathcal{I}([a;b])$, $g \in \mathcal{I}([a;b])$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$ que :
   $$\int_a^b \lambda f(t) + \mu f(t) \text{ d}t = \lambda \int_a^b f(t) \text{ d}t + \mu \int_a^b f(t) \text{ d}t$$
3. **Soient $f \in \mathcal{I}([a;b])$ et $g \in \mathcal{I}([a;b])$ 2 fonctions telles que, pour tout $t \in [a;b]$, nous ayions $f(t) \leqslant g(t)$**
   Soit $A \subset [a;b]$. Alors, de l'inégalité $f(t) \leqslant g(t)$, nous tirons :
   $$\inf_{x \in A} f(x) \leqslant \inf_{x \in A} g(x) \text{ et } \sup_{x \in A} f(x) \leqslant \sup_{x \in A} g(x)$$
   Et donc, pour toute subdivision S de l'intervalle $[a;b]$, nous avons :
   $$\sigma(f,S) \leqslant \sigma(g,S) \text{ et } \Sigma(f,S) \leqslant \Sigma(g,S)$$
   Et en passant au sup ou à l'inf, nous avons :
   $$\sup_{S \in \mathcal{S}} \sigma(f,S) \leqslant \sup_{S \in \mathcal{S}} \sigma(g,S) \text{ et } \inf_{S \in \mathcal{S}} \Sigma(f,S) \leqslant \inf_{S \in \mathcal{S}} \Sigma(g,S)$$
   Des égalités $\sup_{S \in \mathcal{S}} \sigma(f,S) = \inf_{S \in \mathcal{S}} \sigma(f,S)$ et $\sup_{S \in \mathcal{S}} \sigma(g,S) = \inf_{S \in \mathcal{S}} \sigma(g,S)$, nous déduisons $I(f) \leqslant I(g)$, c'est à dire $\int_a^b f(t) \text{ d}t \leqslant \int_a^b g(t) \text{ d}t$

Remarque 9 :

1. La propriété $f(t) \leqslant g(t) \Longrightarrow \int_a^b f(t) \text{ d}t \leqslant \int_a^b g(t) \text{ d}t$ est dite propriété de **positivité de l'intégrale**.
2. La convention $\int_b^a f(t) \text{ d}t = -\int_a^b f(t) \text{ d}t$ ne vient pas « ex cathédra »
   Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable.
   Cette propriété peut se justifier en reprenant toute l'étude précédente avec des subdivisions S de $[a;b]$ par des suites finies décroissantes $S = \{b = s_0 > s_1 > \cdots > s_{n-1} > s_n = a\}$.
   En conservant les mêmes définitions de $\sigma(f,S)$ et $\Sigma(f,S)$, le seul changement par rapport aux subdivisions croissantes de $[a;b]$ est que les expressions $(s_k - s_{k-1})$ sont négatives ce qui implique une inversion des inégalités entre $\sigma(f,S)$ et $\Sigma(f,S)$; on a maintenant $\Sigma(f,S) \leqslant \sigma(f,S)$
   Associons à chaque subdivision décroissante S de $[a;b]$, la subdivision ***retournée*** $S' = \{s'_0 < s'_1 < \cdots < s'n\}$ définie par $s'_0 = s_n = a, \ldots, s'_n = s_0 = b$
   Alors S' est une subdivision croissante de $[a;b]$ et $\sigma(f,S) = -\Sigma(f,S')$ et $\Sigma(f,S) = -\sigma(f,S')$.
   Nous en déduisons immédiatement que, en posant $\mathcal{S}_d$ l'ensemble des subdivisions décroissantes et $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions croissantes :
   ▷ $\sup_{S \in \mathcal{S}_d} \sigma(f,S) = -\inf_{S' \in \mathcal{S}} \Sigma(f,S) = -\int_a^b f(t) \text{ d}t$
   ▷ $\inf_{S \in \mathcal{S}_d} \Sigma(f,S) = -\sup_{S' \in \mathcal{S}} \sigma(f,S) = -\int_a^b f(t) \text{ d}t$
   Et donc $\sup_{S \in \mathcal{S}_d} \sigma(f,S) = \inf_{S \in \mathcal{S}_d} \Sigma(f,S) = \int_b^a f(t) \text{ d}t = -\int_a^b f(t) \text{ d}t$
   Tout ceci légitime donc la propriété $\int_b^a f(t) \text{ d}t = -\int_a^b f(t) \text{ d}t$

14.2.8 Proposition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur $[a;b]$, c'est à dire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n\in\mathcal{I}([a;b])$
On suppose que cette suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f. Alors :

1. La fonction f est intégrable sur $[a;b]$ (i.e. $f\in\mathcal{I}([a;b])$)
2. Et nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration

1. **Démontrons que la fonction f est intégrable**
Ce n'est pas la partie la plus facile du théorème à démontrer ; mais sans avoir démontré cette question, on ne peut pas aller plus loin
Soit $\varepsilon>0$. Il existe alors $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que, si $n\geqslant N_\varepsilon$ alors, pour tout $t\in[a;b]$, $|f_n(t)-f(t)|\leqslant\varepsilon$.
Ainsi, pour ce $n\geqslant N_\varepsilon$, nous avons, $t\in[a;b]$ $-\varepsilon\leqslant f(t)-f_n(t)\leqslant\varepsilon$ ou encore :
$$f_n(t)-\varepsilon\leqslant f(t)\leqslant f_n(t)+\varepsilon$$
Ainsi, pour tout $A\subset[a;b]$, nous avons :
$$\sup_{x\in A}(f_n(t)-\varepsilon)=\sup_{x\in A}f_n(t)-\varepsilon\leqslant\sup_{x\in A}f(t)\leqslant\sup_{x\in A}(f_n(t)+\varepsilon)=\sup_{x\in A}f_n(t)+\varepsilon$$
De même :
$$\inf_{x\in A}f_n(t)-\varepsilon\leqslant\inf_{x\in A}f(t)\leqslant\inf_{x\in A}f_n(t)+\varepsilon$$
Et en multipliant par -1 :
$$-\inf_{x\in A}f_n(t)-\varepsilon\leqslant-\inf_{x\in A}f(t)\leqslant-\inf_{x\in A}f_n(t)+\varepsilon$$
Et en additionnant, nous obtenons :
$$\sup_{x\in A}f_n(t)-\inf_{x\in A}f_n(t)-2\varepsilon\leqslant\sup_{x\in A}f(t)-\inf_{x\in A}f(t)\leqslant\sup_{x\in A}f_n(t)-\inf_{x\in A}f_n(t)+2\varepsilon$$
C'est à dire :
$$0\leqslant\omega(f,A)\leqslant\omega(f_n,A)+2\varepsilon$$
Ainsi, pour toute subdivision S de l'intervalle $[a;b]$, nous avons :
$$\Sigma(f,S)-\sigma(f,S)\leqslant\Sigma(f_n,S)-\sigma(f_n,S)+2\varepsilon(b-a)$$
Toujours pour $n\geqslant N_\varepsilon$, chacune des f_n étant intégrable sur $[a;b]$, il existe une subdivision S de l'intervalle $[a;b]$ telle que $\Sigma(f_n,S)-\sigma(f_n,S)\leqslant\varepsilon$
Et donc, il existe une subdivision S de l'intervalle $[a;b]$ telle que :
$$\Sigma(f,S)-\sigma(f,S)\leqslant\varepsilon+2\varepsilon(b-a)=\varepsilon(1+2(b-a))$$
Ce qui montre que f est intégrable
2. **Démontrons maintenant que** $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
f étant intégrable, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe. Alors, en utilisant les résultats de 14.2.7 sur la linéarité et la positivité de l'intégrale, nous avons :
$$\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|=\left|\int_a^b f_n(t)-f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b|f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Soit $\varepsilon > 0$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite qui converge uniformément vers f, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors, pour tout $t \in [a; b]$ $|f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$

Alors, pour $n \geqslant N_\varepsilon$, nous avons $\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon(b-a)$

Ce qui montre bien que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque 10 :

1. Nous avons là, un exemple de permutation entre intégrale et limites ; s'il y a convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Il est très difficile de s'affranchir de la convergence uniforme pour permuter limite et intégrale. Le résultat suivant tente de le faire, mais c'est bien dans un cas particulier.

14.2.9 Proposition

Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle $[a; b]$. On suppose que :

1. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est décroissante sur $[a; b]$, c'est à dire :

$$(\forall x \in [a; b])\,[(\forall y \in [a; b])\,((x \leqslant y) \Longrightarrow (f_n(x) \geqslant f_n(y)))$$

2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f

Alors :

1. f est intégrable sur $[a; b]$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration

1. **Montrons que f est intégrable sur $[a; b]$**
   Nous allons montrer que f est aussi décroissante sur l'intervalle $[a; b]$; étant monotone, d'après 14.2.3, f est donc intégrable.
   - Soient $x \in [a; b]$ et $y \in [a; b]$ tels que $x \leqslant y$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f_n(x) \geqslant f_n(y)$ et donc, en passant à la limite, la limite respectant la relation d'ordre : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y)$, c'est à dire $f(x) \geqslant f(y)$
     f est donc décroissante
   - Donc, f décroissante sur $[a; b]$ y est donc monotone, donc intégrable.
2. **Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$**
   - Pour toute subdivision $S = \{s_0, s_1, s_2, \cdots, s_p\}$ de $[a; b]$, nous avons

$$\Sigma(f, S) = \sum_{i=0}^{p-1}(s_{i+1} - s_i)\sup_{x\in[s_i;s_{i+1}[} f(x)$$

     f étant décroissante, nous avons :

$$\Sigma(f, S) = \sum_{i=0}^{p-1}(s_{i+1} - s_i)\sup_{x\in[s_i;s_{i+1}[} f(x) = \sum_{i=0}^{p-1}(s_{i+1} - s_i) f(s_i)$$

et, par le même raisonnement $\sigma(f,S)=\sum_{i=0}^{p-1}(s_{i+1}-s_i)\,f(s_{i+1})$

- Nous avons les même calculs pour les fonctions f_n : $\Sigma(f_n,S)=\sum_{i=0}^{p-1}(s_{i+1}-s_i)\,f_n(s_i)$ et $\sigma(f_n,S)=\sum_{i=0}^{p-1}(s_{i+1}-s_i)\,f_n(s_{i+1})$
- f étant intégrable sur $[a;b]$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une subdivision $S=\{s_0,s_1,s_2,\cdots,s_p\}$ telle que :

$$\Sigma(f,S)-\varepsilon\leqslant\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sigma(f,S)+\varepsilon$$

- Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, pour chaque i tel que $0\leqslant i\leqslant p$, il existe $N_\varepsilon^i\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geqslant N_\varepsilon^i$ alors $|f(s_i)-f_n(s_i)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{b-a}$
En posant $N_\varepsilon=\max\left\{N_\varepsilon^i \text{ où } 0\leqslant i\leqslant p\right\}$, alors pour tout i tel que $0\leqslant i\leqslant p$, si $n\geqslant N_\varepsilon$, alors $|f(s_i)-f_n(s_i)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{b-a}$
- Nous avons $\Sigma(f,S)-\Sigma(f_n,S)=\sum_{i=0}^{p-1}(s_{i+1}-s_i)\,(f(s_i)-f_n(s_i))$, et en passant à la valeur absolue, nous avons, pour $n\geqslant N_\varepsilon$:

$$|\Sigma(f,S)-\Sigma(f_n,S)|\leqslant\sum_{i=0}^{p-1}(s_{i+1}-s_i)\,|f(s_i)-f_n(s_i)|\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=0}^{p-1}(s_{i+1}-s_i)=\varepsilon$$

C'est à dire que nous avons $-\varepsilon\leqslant\Sigma(f,S)-\Sigma(f_n,S)\leqslant\varepsilon$ et donc $\Sigma(f,S)\geqslant\Sigma(f_n,S)-\varepsilon$
- Par le même raisonnement, nous avons $|\Sigma(f,S)-\Sigma(f_n,S)|\leqslant\varepsilon$ et donc $-\varepsilon\leqslant\sigma(f,S)-\sigma(f_n,S)\leqslant\varepsilon$ d'où $\sigma(f,S)\leqslant\sigma(f_n,S)+\varepsilon$
- Utilisons maintenant l'inégalité $\Sigma(f,S)-\varepsilon\leqslant\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sigma(f,S)+\varepsilon$
Des inégalités $\Sigma(f_n,S)-\varepsilon\leqslant\Sigma(f,S)$ et $\sigma(f,S)\leqslant\sigma(f_n,S)+\varepsilon$, nous déduisons que :

$$\Sigma(f_n,S)-2\varepsilon\leqslant\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sigma(f_n,S)+2\varepsilon$$

Des inégalités $\sigma(f_n,S)\leqslant\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\Sigma(f_n,S)$, nous déduisons :

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t-2\varepsilon\leqslant\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t+2\varepsilon\iff\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant2\varepsilon$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geqslant N_\varepsilon$, alors $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant2\varepsilon$, ce qui exprime que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque 11 :

Nous avons, à nouveau $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et une permutation des signes intégrale et limite

14.2.10 Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a;b]$

Démonstration

Ce théorème est la conséquence et la synthèse de 10.8.10 et 14.2.8

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$; alors, d'après 10.8.10, f est limite uniforme d'une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers
2. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, e_n est Riemann-intégrable sur $[a;b]$; f étant limite uniforme des $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'après 14.2.8, f est donc Riemann-intégrable

Remarque 12 :

1. Nous avons donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} e_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b e_n(t)\,\mathrm{d}t$
2. Le corollaire ci-après est un résultat plus faible que 14.2.8 mais d'une utilité beaucoup plus grande ; c'est toujours un résultat de permutation de limites et d'intégrales

14.2.11 Corollaire de 14.2.8

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a;b]$
On suppose que cette suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de fonctions continues sur $[a;b]$ convergeant uniformément vers une fonction f, f est continue sur $[a;b]$
Etant continues, les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f sont intégrables sur $[a;b]$ et donc, d'après 14.2.8, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 3 :

C'est plutôt un contre-exemple !
On considère la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0;1]$ par :

$$\begin{cases} f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto f_n(x) = \begin{cases} n^2 x \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ -n^2\left(x - \frac{2}{n}\right) \text{ si } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n} \\ 0 \text{ si } \frac{2}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \end{cases}$$

Dont nous avons des graphes en figure 14.2.
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle $\mathcal{O}$; elles sont toutes continues et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$ alors que $\displaystyle\int_0^1 \mathcal{O}(x)\,\mathrm{d}x = 0$

- Il n'y a donc pas de permutation possible des limites et des intégrales
- D'autre part, $\displaystyle\sup_{x\in[0;1]} f_n(x) = n$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle $\mathcal{O}$ puisque $\displaystyle\sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - \mathcal{O}(x)| = \sup_{x\in[0;1]} |f_n(x)| = n$.
  Nous n'avons donc pas $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - \mathcal{O}(x)| = 0$

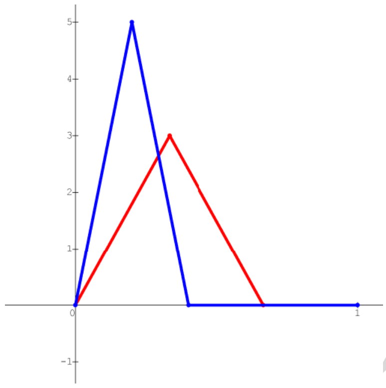

FIGURE 14.2 – Graphe de f_n pour $n = 3$ et $n = 5$

14.2.12 Définition de fonction réglée

On dit qu'une fonction $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est réglée sur $[a; b]$ s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément sur $[a; b]$ vers f

Exemple 4 :

Un premier exemple de fonctions réglées sont les fonctions continues

14.2.13 Théorème

Soit f une fonction réglée sur un intervalle $[a; b]$. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$

Démonstration

Comme le théorème précédent, ce théorème est la conséquence et la synthèse de 10.8.10 et 14.2.8

Remarque 13 :

Il existe des fonctions Riemann-intégrables et non réglées

Soit $E = \left\{\dfrac{1}{2^n} \text{ où } n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et nous considérons $f = 1_E$, la fonction indicatrice de E.

1. La fonction f est bornée et Riemann intégrable sur $[0; 1]$
   - ▷ Que f soit bornée est évident
   - ▷ Soit S la subdivision de $[0; 1]$ suivante :

$$S = \left\{s_0 = 0; s_1^1 = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n}}; s_1^2 = \frac{1}{2^n}; s_1^3 = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}}; \cdots\right.$$
$$\cdots s_k^1 = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{2n}}; s_k^2 = \frac{1}{2^k}; s_k^3 = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{2n}}; \cdots$$
$$\left.\cdots s_n^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2n}}; s_n^2 = \frac{1}{2}; s_n^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2n}}; s_{3n+2} = 1\right\}$$

Pour l'intervalle $\left[0; \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{2n}}\right[$ nous avons $\inf\limits_{x\in\left[0;\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}}\right[} f(x) = 0$ et $\sup\limits_{x\in\left[0;\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}}\right[} f(x) = 1$ puisqu'il y a une infinité d'éléments de E dans $\left[0; \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{2n}}\right[$

En ce qui concerne l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^{2n}}; 1\right[$, nous avons $\inf\limits_{x\in\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2n}};1\right[} f(x) = \sup\limits_{x\in\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2n}};1\right[} f(x) = 0$ puisqu'il n'y a aucun élément de E dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^{2n}}; 1\right[$

Pour les autres intervalles, nous avons $\inf_{x\in[t_k;t_{k+1}[} f(x) = 0$ et $\sup_{x\in[t_k;t_{k+1}[} f(x) = 1$, de telle sorte que :

$$\sigma(f,S) = 0 \text{ et } \Sigma(f,S) = \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n}}\right) + 2n\left(\frac{1}{2^{2n}}\right) = \frac{1}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{2n}}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{2n}} = 0$, nous avons $\inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f,S) = 0$. Comme $\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f,S) = 0$, nous avons :

$$\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f,S) = \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f,S)$$

Et donc f est intégrable et telle que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

2. La fonction f n'est pas réglée sur $[0;1]$

   Soit $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f.
   Soit $S = \{0 = s_0^m, s_1^m, \cdots, s_p^m = 1\}$, une subdivision adaptée à φ_m, c'est à dire que, pour tout $x \in [s_i^m; s_i^{m+1}[$, $\varphi_m(x) = \lambda_i^m$
   Soit $\varepsilon > 0$
   Il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $m \geqslant N_\varepsilon$, alors, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $|\varphi_m(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$
   Soit donc $m \geqslant N_\varepsilon$ et observons l'intervalle $[0; s_1^m[$.
   Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^n} \in [0; s_1^m[$; ainsi, sur l'intervalle $[0; s_1^m[$, nous devons avoir, à la fois $|\lambda_0^m| \leqslant \varepsilon$ et $|\lambda_0^m - 1| \leqslant \varepsilon$, ce qui est impossible pour tout $\varepsilon > 0$; il suffit de prendre, par exemple $\varepsilon = \frac{1}{3}$
   En conclusion, il ne peut y avoir de suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f ; ainsi, f n'est pas une fonction réglée.

14.3 Caractérisation des fonctions intégrables au sens de Riemann

14.3.1 Définition d'ensemble négligeable

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que A est négligeable si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite d'intervalles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles $I_n =]a_n; b_n[$ tels que :

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n - a_n) \leqslant \varepsilon$$

Exemple 5 :

Soit $x \in \mathbb{R}$; alors l'ensemble $A = \{x\}$ est négligeable.

En effet, soit $\varepsilon > 0$;
Alors $\{x\} \subset \left]x - \frac{\varepsilon}{3}; x + \frac{\varepsilon}{3}\right[$, et nous avons $\left(x + \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(x - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$
L'ensemble $A = \{x\}$ est donc négligeable.

14.3.2 Proposition

Toute réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable

Démonstration

Soit $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'ensembles négligeables.
Soit $\varepsilon > 0$
Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe une suite $\left(I_n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles $I_n^k = \left]a_n^k ; b_n^k\right[$ tels que $N_k \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n^k$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(b_n^k - a_n^k\right) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2^k}$.

Alors $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} N_k \subset \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n^k\right)$ et nous avons $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_n^k\right)$ qui est une famille dénombrable d'intervalles telle que $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(b_n^k - a_n^k\right)\right) \leqslant \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{\varepsilon}{2^k} = 2\varepsilon$

Ainsi $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} N_k$ est négligeable

Exemple 6 :

Ainsi, tout sous ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est négligeables : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, l'ensemble des termes d'une suite.

Remarque 14 :

De la négligeabilité de $\{x\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, dans la définition 14.3.1, les intervalles ouverts $I_n = \left]a_n ; b_n\right[$ peuvent être remplacés par des intervalles fermés $I_n^f = [a_n ; b_n]$

14.3.3 Définition

Soient $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique et $x_0 \in A$.
On appelle oscillation de f en x_0 le nombre

$$\omega(f, x_0) = \inf_{v\in\mathcal{V}(x_0)} \omega(f, V) = \inf_{v\in\mathcal{V}(x_0)} \left(\sup_{x\in V} f(x) - \inf_{x\in V} f(x)\right)$$

Où $\mathcal{V}(x_0)$ désigne l'ensemble des voisinages de x_0

14.3.4 Proposition

Soient $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique et $x_0 \in A$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si $\omega(f, x_0) = 0$

Démonstration

1. **Supposons f continue en x_0**
   Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que $|x - x_0| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$
   C'est à dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que si $x \in V$, alors $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.
   Nous pouvons en déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que si $x \in V$, alors $\left(\sup\limits_{x\in V} f(x) - \inf\limits_{x\in V} f(x)\right) \leqslant \varepsilon$.
   Nous pouvons donc en déduire que $\inf\limits_{v\in\mathcal{V}(x_0)} \left(\sup\limits_{x\in V} f(x) - \inf\limits_{x\in V} f(x)\right) \leqslant \varepsilon$, et comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons $\inf\limits_{v\in\mathcal{V}(x_0)} \left(\sup\limits_{x\in V} f(x) - \inf\limits_{x\in V} f(x)\right) = 0$
   C'est à dire $\omega(f, x_0) = 0$
2. **Supposons maintenant que $\omega(f, x_0) = 0$**

Ceci signifie donc que $\inf\limits_{v\in\mathcal{V}(x_0)}\left(\sup\limits_{x\in V} f(x) - \inf\limits_{x\in V} f(x)\right) = 0$ et que, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $0 \leqslant \left(\sup\limits_{x\in V} f(x) - \inf\limits_{x\in V} f(x)\right) \leqslant \varepsilon$

Comme nous avons, pour tout $x \in V$:

$$\begin{cases} \inf\limits_{x\in V} f(x) \leqslant f(x) \leqslant \sup\limits_{x\in V} f(x) \\ \inf\limits_{x\in V} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \sup\limits_{x\in V} f(x) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \inf\limits_{x\in V} f(x) \leqslant f(x) \leqslant \sup\limits_{x\in V} f(x) \\ -\sup\limits_{x\in V} f(x) \leqslant -f(x_0) \leqslant -\inf\limits_{x\in V} f(x) \end{cases}$$

Nous avons alors $\inf\limits_{x\in V} f(x) - \sup\limits_{x\in V} f(x) \leqslant f(x) - f(x_0) \leqslant \sup\limits_{x\in V} f(x) - \inf\limits_{x\in V} f(x)$, c'est à dire $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \sup\limits_{x\in V} f(x) - \inf\limits_{x\in V} f(x) \leqslant \varepsilon$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que si $x \in V$ alors $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$

f est donc continue en x_0

14.3.5 Proposition

Soient $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique et $h \geqslant 0$. Nous appelons E_h l'ensemble suivant :

$$E_h = \{x \in A \text{ tel que } \omega(x, f) \geqslant h\}$$

Alors E_h est un sous-ensemble fermé de A

Démonstration

Nous appelons $\overline{E_h}$ l'adhérence de E_h ; comme $\overline{E_h}$ est un fermé, nous allons démontrer que $\overline{E_h} = E_h$

1. **Tout d'abord, nous avons $\overline{E_h} \subset E_h$**
2. **Démontrons maintenant que $E_h \subset \overline{E_h}$**

   Soit $x \in \overline{E_h}$, un point adhérent à E_h ; montrons que nous avons aussi $x \in E_h$

   Comme $x \in \overline{E_h}$, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, nous avons $V \cap E_h \neq \emptyset$ et il existe donc $y \in E_h$ tel que $y \in V$.

   Comme $y \in E_h$, alors $\omega(y, f) \geqslant h$ et donc $\omega(f, V) \geqslant h$. Comme, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, nous avons $\omega(f, V) \geqslant h$, nous avons, en particulier $\inf\limits_{v\in\mathcal{V}(x)}\left(\sup\limits_{x\in V} f(x) - \inf\limits_{x\in V} f(x)\right) \geqslant h$, c'est à dire $\omega(x, f) \geqslant h$.

   Donc $x \in E_h$ et, pour conclure, $E_h \subset \overline{E_h}$

En conclusion $E_h = \overline{E_h}$ et E_h est un ensemble fermé.

14.3.6 Proposition

Soient $[a;b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique bornée
f est intégrable sur $[a;b]$ si et seulement si l'ensemble des points de discontinuité de f est négligeable

Démonstration

Appelons E l'ensemble des points où la fonctions f est discontinue.

1. **Supposons f intégrable sur** $[a;b]$

   On appelle toujours $E_h = \{x \in [a;b] \text{ tel que } \omega(x, f) \geqslant h\}$. En rappelant que f est continue en $x_0 \in [a;b]$ si et seulement si $\omega(x_0, f) = 0$, nous avons $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} E_{\frac{1}{n}}$

   Si nous montrons que, pour tout $h > 0$, E_h est un ensemble négligeable, alors, d'après 14.3.2, E, réunion dénombrable d'ensembles négligeables, est un ensemble négligeable

   Soit $\varepsilon > 0$ et $h > 0$

f étant intégrable, il existe une subdivision S de $[a;b]$, c'est à dire $S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_p = b\}$ telle que :

$$\Sigma(f, S) - \sigma(f, S) \leqslant h \times \varepsilon \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} (s_i - s_{i-1})\, \omega(f, [s_{i-1}; s_i[) \leqslant h \times \varepsilon$$

Regardons, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, un intervalle particulier $[s_{i-1}; s_i[$ et supposons que $E_h \cap [s_{i-1}; s_i[\neq \emptyset$, c'est à dire qu'il existe $x_0 \in E_h \cap [s_{i-1}; s_i[$.

Nous avons :

- ▷ D'une part : $E_h \subset \displaystyle\bigcup_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ \text{tel que} \\ E_h\cap[s_{i-1};s_i[\neq\emptyset}} (E_h \cap [s_{i-1}; s_i[)$
- ▷ D'autre part $\omega(x_0, f) = \displaystyle\inf_{v\in\mathcal{V}(x_0)} (\omega(f, V)) \geqslant h$, et donc, en particulier $\omega(f, [s_{i-1}; s_i[) \geqslant h$

Nous avons :

$$\sum_{i=1}^{p} (s_i - s_{i-1})\, \omega(f, [s_{i-1}; s_i[) =$$
$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ \text{tel que} \\ E_h\cap[s_{i-1};s_i[\neq\emptyset}} (s_i - s_{i-1})\, \omega(f, [s_{i-1}; s_i[) + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ \text{tel que} \\ E_h\cap[s_{i-1};s_i[=\emptyset}} (s_i - s_{i-1})\, \omega(f, [s_{i-1}; s_i[)$$

Et nous avons donc $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ \text{tel que} \\ E_h\cap[s_{i-1};s_i[\neq\emptyset}} (s_i - s_{i-1})\, \omega(f, [s_{i-1}; s_i[) \leqslant \varepsilon h$

De $\omega(f, [s_{i-1}; s_i[) \geqslant h$, nous tirons :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ \text{tel que} \\ E_h\cap[s_{i-1};s_i[\neq\emptyset}} (s_i - s_{i-1})\, \omega(f, [s_{i-1}; s_i[) \geqslant \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ \text{tel que} \\ E_h\cap[s_{i-1};s_i[\neq\emptyset}} (s_i - s_{i-1})\, h$$

Nous avons donc :

$$h \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ \text{tel que} \\ E_h\cap[s_{i-1};s_i[\neq\emptyset}} (s_i - s_{i-1}) \leqslant \varepsilon h \Longleftrightarrow \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ \text{tel que} \\ E_h\cap[s_{i-1};s_i[\neq\emptyset}} (s_i - s_{i-1}) \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, E_h est inclus dans une somme finie d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à ε.

Ainsi E_h est négligeable, et E ensemble des points où la fonctions f est discontinue, réunion dénombrable d'ensembles négligeables, est un ensemble négligeable

2. **Supposons que E l'ensemble des points où la fonctions f est discontinue soit négligeable**

   Soit $\varepsilon > 0$

   (a) Nous appelons $E_\varepsilon = \{x \in [a;b] \text{ tels que } \omega(x, f) \geqslant \varepsilon\}$

   Comme $\omega(x_0, f) = 0$ si et seulement si f est continue en x_0, nous avons $E_\varepsilon \subset E$, et comme E est négligeable, E_ε est aussi négligeable.

   Il existe donc une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles $I_n =]a_n; b_n[$ tels que

   $$E_\varepsilon \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ et } \sum_{n_i n\mathbb{N}} (b_n - a_n) \leqslant \varepsilon$$

   (b) E_ε est un fermé de $[a;b]$ et est donc un compact de $[a;b]$. D'après la propriété de Borel-Lebesgue, on peut extraire de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite finie $(I_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ telle que $E_\varepsilon \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} I_k$, et comme $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} I_k \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, nous avons $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} (b_k - a_k) \leqslant \varepsilon$

(c) Quittes à ré-organiser les $(I_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$, nous les supposons disjoints et ordonnés de telle sorte que pour $1 \leqslant k \leqslant p$, nous ayons $b_k < a_{k+1}$

(d) La réunion $\bigcup\limits_{k=1}^{p} I_k$ est un ouvert de $[a;b]$ et donc $K = [a;b] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p} I_k$ est un fermé de $[a;b]$, donc compact dans $[a;b]$

(e) K ne contenant aucun point de discontinuité de f, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{K}$, f continue en x et $\omega(x, f) = 0$ et donc, que pour tout $x \in K$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$ inclus dans $[a;b]$ tel que $\omega(f, V) \leqslant \varepsilon$

(f) Regardons un segment $[b_k, a_{k+1}]$. Tout d'abord, $[b_k, a_{k+1}] \subset K$. Nous pouvons trouver une subdivision S de $[b_k, a_{k+1}]$ $S = \{b_k = s_0 < s_1 < \cdots < s_j = a_{k+1}\}$ telle que $\omega(f, [s_{j-1}; s_j[) \leqslant \varepsilon$

(g) Soit T une subdivision de l'intervalle $[a;b]$, c'est à dire $T = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_s = b\}$ où les $(t_j)_{1\leqslant j\leqslant s-1}$ sont les points a_i, b_j ou s_j des subdivisions construites précédemment. Considérons alors $\sum\limits_{r=1}^{s} (t_r - t_{r-1})\, \omega(f, [t_{r-1}; t_r[)$

Nous avons alors à regarder 2 choses :

▷ Si l'intervalle $[t_{r-1}; t_r[\subset K$, alors $\omega(f, [t_{r-1}; t_r[) \leqslant \varepsilon$ et donc :

$$\sum_{\substack{r \text{ tels que} \\ [t_{r-1};t_r[\subset K}} (t_r - t_{r-1})\, \omega(f, [t_{r-1}; t_r[) \leqslant \varepsilon \sum_{\substack{r \text{ tels que} \\ [t_{r-1};t_r[\subset K}} (t_r - t_{r-1}) \leqslant \varepsilon (b-a)$$

▷ Ou bien si l'intervalle $[t_{r-1}; t_r[\subset \bigcup\limits_{k=1}^{p} I_k = [a;b] \setminus K$, alors $\omega(f, [t_{r-1}; t_r[) \leqslant M$ puisque f est bornée et donc :

$$\sum_{\substack{r \text{ tels que} \\ [t_{r-1};t_r[\subset \bigcup\limits_{k=1}^{p} I_k}} (t_r - t_{r-1})\, \omega(f, [t_{r-1}; t_r[) \leqslant M \sum_{\substack{r \text{ tels que} \\ [t_{r-1};t_r[\subset \bigcup\limits_{k=1}^{p} I_k}} (t_r - t_{r-1}) \leqslant M\varepsilon$$

Et donc, nous avons trouvé une subdivision T telle que :

$$\sum_{r=1}^{s} (t_r - t_{r-1})\, \omega(f, [t_{r-1}; t_r[) = \Sigma(f, T) - \sigma(f, T) \leqslant \varepsilon (M + (b-a))$$

Ce qui montre que f est bien intégrable.

Et la proposition est démontrée.

Remarque 15 :

1. Voilà une démonstration très délicate ; il faut prendre du temps pour la comprendre, voire la réécrire.
2. C'est un résultat important qui généralise l'intégrale vue en L_0 qui se limitait aux fonctions continues.

14.3.7 Corollaire

1. Le produit de 2 fonctions f et g intégrables au sens de Riemann est intégrable au sens de Riemann
2. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann, alors $|f|$ est aussi intégrable au sens de Riemann, et

$$\left| \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, \mathrm{d}t$$

Démonstration

1. **Montrons que le produit de 2 fonctions intégrables est intégrable**
   Soient f et g 2 fonctions intégrables au sens de Riemann sur l'intervalle $[a;b]$.
   E_f est l'ensemble des discontinuités de la fonction f, E_g est l'ensemble des discontinuités de la fonction g et E_{fg} est l'ensemble des discontinuités de la fonction fg.
   f et g étant intégrables, les ensembles E_f et E_g sont négligeables.
   Nous avons $E_{fg} \subset E_f \cup E_g$; $E_f \cup E_g$ étant réunion d'ensembles négligeables est négligeable. Il en est donc de même de E_{fg}.
   Donc, la fonction fg est intégrable.
2. **Supposons $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann**
   (a) **Montrons que $|f|$ est intégrable au sens de Riemann**
   Nous appelons E_f l'ensemble des discontinuités de la fonction f et $E_{|f|}$ est l'ensemble des discontinuités de la fonction $|f|$
   Nous savons que la fonction $|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, et donc, par composition, $|f|$ est continue partout où f est continue et donc $E_f = E_{|f|}$.
   f étant intégrable, E_f est négligeable et donc $E_{|f|}$ aussi.
   Ainsi,$|f|$ est intégrable au sens de Riemann
   (b) **Montrons que** $\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$
   Pour tout $t \in [a;b]$, nous avons $-|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$ et donc, en utilisant la positivité de l'intégrale *(cf 14.2.7)*, nous avons :
   $$-\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t \Longrightarrow \left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$$

Exercice 2 :

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable et à valeurs positives. Démontrer que la fonction $\sqrt{f}$ est intégrable sur l'intervalle $[a;b]$

Remarque 16 :

1. D'après ce corollaire, si f est intégrable sur l'intervalle $[a;b]$, alors $f^2 = f \times f$ est aussi intégrable sur $[a;b]$, c'est à dire que l'intégrale $\int_a^b (f(t))^2\ \mathrm{d}t$ existe
2. La propriété $\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ est bien une conséquence de la propriété de positivité de l'intégrale.
3. Si $f \in \mathcal{I}([a;b])$, alors f est une fonction bornée sur $[a;b]$. Si $\mathcal{B}([a;b])$ est l'espace des fonctions bornées sur l'intervalle $[a;b]$, nous avons $\mathcal{I}([a;b]) \subset \mathcal{B}([a;b])$.
   Ainsi, pour $f \in \mathcal{I}([a;b])$, le nombre $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f(x)|$ est bien défini. On démontre que $\|f\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}([a;b])$, appelée **norme de la convergence uniforme**

   Nous avons $\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$
   En effet, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $0 \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ et donc, en passant à l'intégrale, et en utilisant cette positivité de l'intégrale, $\int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \|f\|_\infty\ \mathrm{d}x = (b-a)\|f\|_\infty$.
   Comme $\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$, nous avons bien l'inégalité $\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$

4. Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann ; il nous est possible de modifier f en un nombre fini de points. Elle reste intégrable et sonintégrale ne change pas.

Exercice 3 :

Soient $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions intégrables au sens de Riemann.

1. Démontrer que les fonctions $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont intégrables au sens de Riemann sur $[a; b]$
2. On appelle $\mathcal{O}$ la fonction nulle, $f^+ = \max(f, \mathcal{O})$ et $f^- = \max(-f, \mathcal{O}) = -\min(f, \mathcal{O})$.
Démontrer que f^+ et f^- sont intégrables sur $[a; b]$ et que

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b f^+(t)\, \mathrm{d}t - \int_a^b f^-(t)\, \mathrm{d}t$$

Exercice 4 :

1. **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
On généralise ici l'inégalité établie pour les fonctions continues
Soient $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions intégrables au sens de Riemann. Démontrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\, \mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b (g(t))^2\, \mathrm{d}t}$$

2. **Applications de l'inégalité de Schwarz**
(a) Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\left(\int_0^1 x^k f(x)\, \mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{1}{2k+1} \int_0^1 f(x)^2\, dx$$

(b) On suppose, cette fois ci que $f : [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$, intégrable. Montrer que

$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 f(x)^2\, dx \leqslant \int_0^1 f(x)\, dx$$

(c) Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$, à valeurs réelles strictement positives. Montrer que :

$$\left(\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x\right) \times \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\, \mathrm{d}x\right) \geqslant 1$$

(d) Soient $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions intégrables sur $[a; b]$ telles que il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $x \in [a; b]$, $f(x)\, g(x) \geqslant \lambda$. Démontrer que

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \times \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x \geqslant \lambda (b-a)^2$$

14.3.8 Définition

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$,$c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$.
Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique. On dit que f est Riemann-intégrable sur l'intervalle $[c; d]$ si la restriction de f à l'intervalle $[c; d]$ est Riemann-intégrable. On note alors $\displaystyle\int_c^d f(t)\, \mathrm{d}t$ l'intégrale de cette restriction.

14.3.9 Proposition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique ; alors :

1. f est intégrable sur l'intervalle $[a;b]$ si et seulement si, pour tout $c \in]a;b[$, f est intégrable sur $[a;c]$ et sur $[c;b]$
2. Dans ce cas, nous avons, pour tout $c \in]a;b[$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$

Démonstration

1. **Démonstration du premier point**
La démonstration de ce premier point, utilise pleinement la proposition 14.3.6
   (a) Si f est intégrable sur $[a;b]$, alors f est bornée sur $[a;b]$ et l'ensemble des points de discontinuité de f sur $[a;b]$, noté $E_f^{[a;b]}$ est négligeable.
   Soit $c \in]a;b[$
   - ▷ Si f est bornée sur $[a;b]$, comme $[a;c] \subset [a;b]$ et $[c;b] \subset [a;b]$, f est aussi bornée sur les intervalles $[a;c]$ et $[c;b]$
   - ▷ Si $E_f^{[a;c]}$ est l'ensemble des points de discontinuité de f sur $[a;c]$, nous avons $E_f^{[a;c]} \subset E_f^{[a;b]}$, et donc $E_f^{[a;c]}$ est un ensemble négligeable.
   f est donc intégrable sur $[a;c]$
   - ▷ Par le même raisonnement, f est intégrable sur $[c;b]$

   Ainsi, f est intégrable sur $[a;c]$ et sur $[c;b]$

   (b) Réciproquement, supposons que pour tout $c \in]a;b[$, f est intégrable sur $[a;c]$ et sur $[c;b]$
   - ▷ Donc f est bornée sur $[a;c]$ et sur $[c;b]$, et donc f est bornée sur $[a;c] \cup [c;b] = [a;b]$
   - ▷ Les ensembles de points de discontinuité sur les 2 intervalles $E_f^{[a;c]}$ et $E_f^{[c;b]}$ sont négligeables et donc $E_f^{[a;b]} = E_f^{[a;c]} \cup E_f^{[a;c]}$ est aussi négligeable

   f est donc intégrable sur l'intervalle $[a;b]$
2. **Démonstration du second point**
Soit f intégrable sur l'intervalle $[a;b]$ et soit $c \in]a;b[$. Alors, f est intégrable sur $[a;c]$ et $[c;b]$.
Si S_1 est une subdivision de $[a;c]$ et S_2 une subdivision $[c;b]$, alors $S = S_1 \cup S_2$ est une subdivision de $[a;b]$. Nous avons alors :

$$\sigma(f,S) = \sigma(f,S_1) + \sigma(f,S_2) \text{ et } \Sigma(f,S) = \Sigma(f,S_1) + \Sigma(f,S_2)$$

Ainsi

$$\inf_{S_1 \in \mathcal{S}_1} \sigma(f,S_1) + \inf_{S_2 \in \mathcal{S}_2} \sigma(f,S_2) \leqslant \inf_{S \in \mathcal{S}} \sigma(f,S)$$

Et

$$\sup_{S \in \mathcal{S}} \Sigma(f,S) \leqslant \sup_{S_1 \in \mathcal{S}_1} \Sigma(f,S_1) + \sup_{S_2 \in \mathcal{S}_2} \Sigma(f,S_2)$$

Comme :
   - ▷ f est intégrable sur $[a;c]$, nous avons :
$$\inf_{S_1 \in \mathcal{S}_1} \sigma(f,S_1) = \sup_{S_1 \in \mathcal{S}_1} \Sigma(f,S_1) = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$$
   - ▷ f est intégrable sur $[c;b]$, nous avons :
$$\inf_{S_2 \in \mathcal{S}_2} \sigma(f,S_2) = \sup_{S_2 \in \mathcal{S}_2} \Sigma(f,S_2) = \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$
   - ▷ f est intégrable sur $[a;b]$, nous avons :
$$\inf_{S \in \mathcal{S}} \sigma(f,S) = \sup_{S \in \mathcal{S}} \Sigma(f,S) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

Et donc, nous avons

$$\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

C'est à dire

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

14.3.10 Corollaire : Relation de Chasles

Pour tout réels a, b, c, nous avons :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

pourvu que f soit intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[\min(a,b,c), \max(a,b,c)]$.

Démonstration

La démonstration est simple et est laissée dans sa grande partie au lecteur
Supposons $b = [\min(a,b,c)\}$ et $c = \max(a,b,c)$
Alors, d'après 14.3.9, nous avons $\displaystyle\int_b^c f(t)\ \mathrm{d}t = \int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$ En transposant, nous avons :

$$-\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_b^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t \Longleftrightarrow \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$$

Ce que nous voulions

Remarque 17 :

1. Contrairement à 14.3.9, il n'est pas nécessaire d'avoir $c \in]a;b[$
2. D'après la relation de Chasles, si f est intégrable sur l'intervalle $[a;b]$ alors, pour tout $c \in [a;b]$, nous avons $\displaystyle\int_c^c f(t)\ \mathrm{d}t = 0$

   La démonstration n'est pas difficile :
   Soient $c \in [a;b]$ et $d \in [a;b]$; alors :

$$\int_c^c f(t)\ \mathrm{d}t = \int_c^d f(t)\ \mathrm{d}t + \int_d^c f(t)\ \mathrm{d}t = \int_c^d f(t)\ \mathrm{d}t - \int_c^d f(t)\ \mathrm{d}t = 0$$

14.3.11 Définition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $S = \{a = s_0, s_1, \cdots, s_n = b\}$ une subdivision de $[a;b]$ à pas constants, c'est à dire telle que :

- $\triangleright$ $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$
- $\triangleright$ $x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$

On appelle somme de Riemann de f sur $[a;b]$, l'expression :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

Remarque 18 :

1. Le pas de la subdivision S est donc $\rho(S) = \dfrac{b-a}{n}$
2. On peut définir une autre somme de Riemann, pour lesquels nous aurions les mêmes résultats :

$$S_n^1(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$$

3. Il y a aussi une autre définition des sommes de Riemann, plus générale, qui donne aussi les mêmes résultats :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \text{ où } \xi_k \in [x_k; x_{k+1}[$$

Cette fois-ci, ξ_k n'est pas forcémenr une borne de $[x_k; x_{k+1}[$

14.3.12 Théorème

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$ sa somme de Riemenn sur l'intervalle $[a;b]$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration

1. Tout d'abord, f étant continue, d'après 14.2.10 l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existe
2. D'après 10.8.10 toute fonction continue est limite uniforme d'une fonction en escalier. Le résultat donne même l'expression de cette suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{cases} e_n(x) = f(x_k) \text{ si } x \in [x_k; x_{k+1}[\text{ pour } k = 0, \dots, n-1 \text{ et } x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n} \\ e_n(b) = f(b) \end{cases}$$

D'après 14.2.8, la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b e_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. En utilisant la relation de Chasles, nous avons $\displaystyle\int_a^b e_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} e_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Or, $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} e_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}x = f(x_k)(x_{k+1}-x_k) = f(x_k)\left(\frac{b-a}{n}\right)$

Et donc $\displaystyle\int_a^b e_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$

D'où, nous avons bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Exemple 7 :

Soit $1_{\mathbb{Q}} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, c'est à dire la fonction telle que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1_{\mathbb{Q}} : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1_{\mathbb{Q}}(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Nous allons montrer que $1_{\mathbb{Q}}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann **à l'aide des sommes de Riemann**

1. **Tout d'abord, redémontrons que $1_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue sur** $[0,1]$
   En effet, il nous faut pas oublier que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et même que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$. Donc, soit $x \in [0,1]$; il y a alors 2 possibilités :
   → Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $1_{\mathbb{Q}}(x) = 0$; il existe une suite de rationels $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = x$; or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1_{\mathbb{Q}}(q_n) = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1_{\mathbb{Q}}(q_n) = 1 \neq 1_{\mathbb{Q}}(x) = 0$
   → De même, si $x \in \mathbb{Q}$
2. **Montrons que $1_{\mathbb{Q}}$ n'est pas Riemann-Intégrable à l'aide des sommes de Riemann**
   On note σ_n la subdivision $0 = a_0^{(n)} < a_1^{(n)} < \cdots < a_{n-1}^{(n)} < a_n^{(n)} = 1$ une subdivision de l'intervalle $[0,1]$ dont le pas tend vers 0 avec n.
   Soit un point quelconque $\xi_n(i) \in \left] a_{i-1}^{(n)} \; ; \; a_i^{(n)} \right[$ et on définit la somme de Riemann associée à σ_n et à la suite ξ_n :
   $$S(1_{\mathbb{Q}}, \sigma_n, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} 1_{\mathbb{Q}}(\xi_n(i)) \left(a_i^{(n)} - a_{i-1}^{(n)} \right)$$
   Si $1_{\mathbb{Q}}$ est intégrable, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} S(1_{\mathbb{Q}}, \sigma_n, \xi_n) = \displaystyle\int_0^1 1_{\mathbb{Q}}(t)\ dt$
   On choisit la subdivision σ_n simple suivante : $\left\{0; \dfrac{1}{n}; \dfrac{2}{n} \cdots \dfrac{n-1}{n}; 1\right\}$, c'est à dire que $a_i^{(n)} = \dfrac{i}{n}$, c'est à dire $a_i^{(n)} - a_{i-1}^{(n)} = \dfrac{1}{n}$, et donc, $S(1_{\mathbb{Q}}, \sigma_n, \xi_n) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1_{\mathbb{Q}}(\xi_n(i))$ où $\xi_n(i) \in \left] \dfrac{i-1}{n} \; ; \; \dfrac{i}{n} \right[$
   De la densité de $\mathbb{Q}$ dans $[0,1]$, on peut trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant i \leqslant n$ des $\xi_n(i) \in \left] \dfrac{i-1}{n} \; ; \; \dfrac{i}{n} \right[$ tels que $\xi_n(i) \in \mathbb{Q}$ et alors $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1_{\mathbb{Q}}(\xi_n(i)) = 1$
   De la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $[0,1]$, on peut trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant i \leqslant n$ des $\xi'_n(i) \in \left] \dfrac{i-1}{n} \; ; \; \dfrac{i}{n} \right[$ tels que $\xi'_n(i) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et alors $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1_{\mathbb{Q}}(\xi'_n(i)) = 0$
   On vient donc d'extraire 2 sous-suites de la somme de Riemann qui admettent des limites différentes ; il y a donc contradiction et $1_{\mathbb{Q}}$ n'est pas Riemann-intégrable sur l'intervalle $[0,1]$

14.3.13 Quelques exercices

Exercice 5 :

1. Soit $x > 0$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}} = \dfrac{e^x - 1}{x}$
2. Utiliser ce résultat pour établir que pour tout nombre $x > 0$ $\displaystyle\int_0^x e^t \,\mathrm{d}t = e^x - 1$

Exercice 6 :

Soit $\alpha > 0$

1. Pour quelles valeurs de α, l'intégrale $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2\right) \mathrm{d}x$ est-elle définie ?
2. Donner la valeur de cette intégrale I_α lorsqu'elle est définie.

14.4 Fonctions définies par des intégrales

14.4.1 Théorème

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann.
Pour tout $x \in [a;b]$, nous définissons $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$.
Alors F est continue sur $[a;b]$

Démonstration

1. F est bien définie puisque f, intégrable sur $[a;b]$, est intégrable sur tout intervalle $[a;x] \subset [a;b]$
2. Soient $x \in [a;b]$ et $y \in [a;b]$, alors :

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^y f(t)\ \mathrm{d}t\right| = \left|\int_y^x f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_\infty |x-y|$$

F est donc lipschitzienne, donc uniformément continue, et donc continue.

Remarque 19 :

Dans la démonstration, nous avons utilisé l'inégalité $\left|\displaystyle\int_y^x f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_\infty |x-y|$. la justification en est simple.

1. Si $x < y$, nous avons $\left|\displaystyle\int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_x^y |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty (y-x)$
2. Si $x > y$, nous avons $\left|\displaystyle\int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant -\displaystyle\int_x^y |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant -\|f\|_\infty (y-x) = \|f\|_\infty (x-y)$

Et donc, à chaque fois $\left|\displaystyle\int_y^x f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \|f\|_\infty |x-y|$

14.4.2 Théorème

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann.
Pour tout $x \in [a;b]$, nous définissons $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$.
Si f admet une limite l en $c \in [a;b]$, alors F est dérivable en c et $F'(c) = l$

Démonstration

Pour montrer que F est dérivable en c et de dérivée $F'(c) = l$, il faut montrer que $\displaystyle\lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = l$

→ Tout d'abord, $\dfrac{F(x) - F(c)}{x-c} = \dfrac{1}{x-c}\left(\displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t\right) = \dfrac{1}{x-c}\left(\displaystyle\int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t\right)$

→ Ensuite, $l = \dfrac{1}{x-c}\displaystyle\int_c^x l\,\mathrm{d}t$

→ Et donc :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(c)}{x-c} - l\right| &= \left|\frac{1}{x-c}\left(\int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t\right) - \frac{1}{x-c}\int_c^x l\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\frac{1}{x-c}\int_c^x (f(t) - l)\ \mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{1}{|x-c|}\int_c^x |f(t) - l|\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Nous avons fait le choix de $x \geqslant c$; le cas $x \leqslant c$ est totalement identique.

→ Soit $\varepsilon > 0$
Comme $\lim_{x \to c} f(x) = l$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$, si $|x - c| \leqslant \eta_\varepsilon$, alors $|f(x) - l| \leqslant \varepsilon$.
Si $t \in [x;c]$, alors $|t - c| \leqslant |x - c| \leqslant \eta_\varepsilon$ et donc $|f(t) - l| \leqslant \varepsilon$.

→ Ainsi, si $|x - c| \leqslant \eta_\varepsilon$, alors $\dfrac{1}{|x - c|} \displaystyle\int_c^x |f(t) - l| \, \mathrm{d}t \leqslant \dfrac{1}{|x - c|} \times (x - c) \times \varepsilon = \varepsilon$

Et donc, $\lim_{x \to c} \dfrac{F(x) - F(c)}{x - c} = l$. F est donc dérivable en c et $F'(c) = l$

14.4.3 Corollaire

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$. Alors,

1. La fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t) \, dt$ est dérivable sur $[a;b]$ de dérivée $F'(x) = f(x)$
2. Toute fonction continue sur $[a;b]$ admet une primitive sur l'intervalle $[a;b]$

Démonstration

La démonstration est simple, puisque pour tout $x_0 \in [a;b]$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Il suffit alors d'utiliser le théorème précédent.

Et donc, si $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$, comme nous avons $F'(x) = f(x)$, $\displaystyle\int_a^x f(t) \, dt$ apparaît donc comme une primitive de f

Remarque 20 :

1. L'exposé sur les fonctions primitives a été faite en L_0 ; nous ne la ferons pas ici.
2. Il existe des fonctions non-intégrable au sens de Riemann mais qui admettent des primitives

   Par exemple, considérons la fonction $f : [0;+1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f : [0;+1] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad x & \longmapsto \quad f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

   Cette fonction f admet pour primitive sur $[0;+1]$ la fonction F définie par :

$$F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } F(0) = 0$$

   Mais, f **n'est pas intégrable au sens de Riemann sur** $[0;+1]$ puisque non bornée.

   En effet, si nous considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$, elle est telle que $f(x_n) = -2\sqrt{2n\pi}$ et $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = -\infty$ et f n'est pas bornée et n'est donc pas Riemann-intégrable.
3. Une fonction intégrable au sens de Riemann n'admet pas nécessairement de primitive. Par exemple, une fonction en escalier, non continue, n'est la dérivée d'aucune fonction
4. L'intégration au sens de Riemann n'est donc pas l'opération inverse de la dérivation.

14.4.4 Définition

Une fonction $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision S de $[a;b]$, $S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\}$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]s_{i-1};s_i[$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, se prolonge en une fonction $f_i : [s_{i-1};s_i] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Remarque 21 :

1. L'ensemble des points où une fonction f continue par morceaux n'est pas continue est un ensemble fini donc négligeable. La fonction f est donc intégrable sur $[a;b]$, c'est à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ existe.
2. De même, la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est définie pour tout $x \in [a;b]$. La fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$, excepté éventuellement aux points de $S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\}$; nous avons aussi $F'(x) = f(x)$

14.4.5 Théorème

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a;b]$. On suppose de plus que f admette, sur $[a;b]$ une primitive F. Alors

1. Nous avons $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)$
2. En particulier, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $\displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = F(x) - F(a)$

Démonstration

1. **Montrons que** $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)$
   - ▷ Soit $S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\}$ une subdivision du segment $[a;b]$. Alors :
   $$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(F(s_i) - F(s_{i-1})\right)$$
   - ▷ Comme F est dérivable sur $[a;b]$ et de dérivée $F' = f$, on peut lui applique le théorème des accroissements finis :

     Pour tout $x \in [a;b]$ et tout $y \in [a;b]$, il existe $t \in]x;y[$ tel que
   $$F(x) - F(y) = (x-y)\,F'(t) \Longleftrightarrow F(x) - F(y) = (x-y)\,f(t)$$
   - ▷ Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe $\xi_i \in]s_{i-1};s_i[$ tel que
   $$F(s_i) - F(s_{i-1}) = (s_i - s_{i-1})\,f(\xi_i)$$
   Et nous avons donc :
   $$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(F(s_i) - F(s_{i-1})\right) = \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1})\,f(\xi_i)$$
   - ▷ Comme $\sigma(f,S) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) \inf_{t\in[s_{i-1};s_i[} f(t)$ et $\Sigma(f,S) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) \sup_{t\in[s_{i-1};s_i[} f(t)$, nous avons :
   $$\sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) \inf_{t\in[s_{i-1};s_i[} f(t) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1})\,f(\xi_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) \sup_{t\in[s_{i-1};s_i[} f(t)$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$\sigma(f,S) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant \Sigma(f,S)$$
   Cette inégalité étant vraie pour toute subdivision $S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\}$ de l'intervalle $[a;b]$

▷ f étant intégrable sur $[a;b]$, nous avons :

$$\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(f,S) = \inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(f,S) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

De l'inégalité $\sigma(f,S) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant \Sigma(f,S)$, vraie pour toute subdivision, nous déduisons alors que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

2. Pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $[a;x] \subset [a;b]$ et, f étant intégrable sur $[a;b]$ l'est aussi sur $[a;x]$ et si F est une primitive sur $[a;b]$, l'est aussi sur $[a;x]$, et donc, d'après le point ci-dessus, $\displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = F(x) - F(a)$

Remarque 22 :

L'intérêt de cette démonstration est de la faire pour des fonnctions intégrables au sens de riemann, ce qui englobe des fonctions qui ne sont pas forcément continues *(mais qui admettent des primitives)*.

14.4.6 Intégration par parties

Soient f et g 2 fonctions intégrables au sens de Riemann sur l'intervalle $[a;b]$.
On suppose que f et g admettent, sur $[a;b]$, des primitives respectives F et G. Alors :

1. Les fonctions gF et fG sont intégrables au sens de Riemann sur $[a;b]$
2. Nous avons, de plus, $\displaystyle\int_a^b F(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b f(t)\,G(t)\ \mathrm{d}t$

Démonstration

1. Si F est une primitive de f, alors F est dérivable et donc continue sur $[a;b]$ et donc Riemann-intégrable sur $[a;b]$. Le produit de 2 fonctions intégrables étant intégrable, nous avons gF qui est intégrable au sens de Riemann.
De la même manière, la fonction fG est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a;b]$
2. F et G étant dérivables, nous avons $(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg$. Ainsi :
→ $\displaystyle\int_a^b (FG)'(t)\ \mathrm{d}t = [F(t)\,G(t)]_a^b = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a)$
→ Mais, nous avons aussi :
$$\int_a^b (FG)'(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b (fG)(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b (gF)(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,G(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,F(t)\ \mathrm{d}t$$
→ C'est à dire que nous avons :
$$F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) = \int_a^b f(t)\,G(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,F(t)\ \mathrm{d}t$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\int_a^b F(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^b f(t)\,G(t)\ \mathrm{d}t$$
Ce que nous voulions

Remarque 23 :

1. Si f et g sont continues sur l'intervalle $[a;b]$, elles sont alors Riemann-intégrables sur $[a;b]$ et admettent une primitive sur $[a;b]$. La formule d'intégration par parties peut dont leurs être appliquée.
2. Les résultats de L_0 sont toujours applicables :

Soient u et v 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a;b]$; alors :

$$\int_a^b u(t)\, v'(t)\; \mathrm{d}t = [u(t)\, v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\, v(t)\; \mathrm{d}t$$

3. Comme toujours, la formule d'intégration par parties est utile lors que les primitives à chercher sont peu comodes ! !

Exemple 8 :

Pour $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, calculer $\displaystyle\int_0^x \arctan t\, \mathrm{d}t$

Evidemment, nous ne connaissons pas la primitive de $\arctan t$; une intégration par parties s'impose ici :

$$\begin{bmatrix} u(t) = \arctan t & u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \\ v'(t) = 1 & v(t) = t \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^x \arctan t\, \mathrm{d}t &= [t \arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^x \\ &= x \arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} \end{aligned}$$

Exercice 7 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, nous considérons la fonction $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$ Trouver une relation de récurrence permettant le calcul de $I_n(x)$.

14.4.7 Intégration par parties généralisée

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, u et v 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[a;b]$; alors :

$$\int_a^b u(t)\, v^{(n)}(t)\; \mathrm{d}t = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, u^{(k)}(t)\, v^{(n-1-k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)}(t)\, v(t)\; \mathrm{d}t$$

Démonstration

Nous allons faire cette démonstration par récurrence sur n

1. **Vérifions pour** $n = 1$
   Elle est évidemment vraie pour $n = 1$, puisque c'est la formule d'intégration par parties classique
2. **Supposons la propriété vraie à l'ordre** n
3. **Démontrons que cette propriété est vraie à l'ordre** $n+1$
   Soient donc u et v 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a;b]$, et nous allons calculer $\displaystyle\int_a^b u(t)\, v^{(n+1)}(t)\; \mathrm{d}t$

   → Pour commencer, nous allons considérer que $v^{(n+1)}(t) = \left(v^{(n)}\right)'(t)$, de telle sorte que l'intégrale de départ $\displaystyle\int_a^b u(t)\, v^{(n+1)}(t)\; \mathrm{d}t$ devient :

   $$\int_a^b u(t)\, v^{(n+1)}(t)\; \mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\left(v^{(n)}\right)'(t)\; \mathrm{d}t$$

   à laquelle nous allons appliquer l'intégration par parties classique

→ Nous posons donc :

$$\left[\begin{array}{ll} U(t) = u(t) & U'(t) = u'(t) \\ V'(t) = \left(v^{(n)}\right)'(t) & V(t) = v^{(n)}(t) \end{array}\right]$$

De telle sorte que :

$$\int_a^b u(t)\, v^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = [U(t)\, V(t)]_a^b - \int_a^b U'(t)\, V(t)\ \mathrm{d}t = \left[u(t)\, v^{(n)}(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\, v^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t$$

→ Nous allons, maintenant, nous intéresser à l'intégrale $\displaystyle\int_a^b u'(t)\, v^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t$

Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a;b]$, la fonction u' est alors de classe $\mathcal{C}^n$ et v est aussi de classe $\mathcal{C}^n$, on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence et nous avons :

$$\begin{aligned}\int_a^b u'(t)\, v^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t = & \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, u'^{(k)}(t)\, v^{(n-1-k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n+1)}(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t \\ = & \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, u^{(k+1)}(t)\, v^{(n-1-k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n+1)}(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

→ En ré-injectant ce que nous venons de trouver, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_a^b u(t)\, v^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = \quad & \left[u(t)\, v^{(n)}(t)\right]_a^b - \left(\left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, u^{(k+1)}(t)\, v^{(n-1-k)}(t)\right]_a^b + \right. \\ & \left. (-1)^n \int_a^b u^{(n+1)}(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b u(t)\, v^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = & \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1}\, u^{(k+1)}(t)\, v^{(n-1-k)}(t) + u(t)\, v^{(n)}(t)\right]_a^b + \\ & (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)}(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t \\ = & \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\, u^{(k)}(t)\, v^{(n-k)}(t) + u(t)\, v^{(n)}(t)\right]_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)}(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t \\ = & \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, u^{(k)}(t)\, v^{(n-k)}(t)\right]_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)}(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

→ Nous avons donc :

$$\int_a^b u(t)\, v^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, u^{(k)}(t)\, v^{(n-k)}(t)\right]_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)}(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t$$

Ce que nous voulions

14.4.8 Proposition : translation et changement d'échelle

1. Translation
   Soit $c \in \mathbb{R}$ et $f : [a+c;b+c] \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a+c;b+c]$. Alors :
   $$\int_a^b f(x+c)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,\mathrm{d}y$$
2. Changement d'échelle
   Soit $c \in \mathbb{R}^*$ et $f : [ac;bc] \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[ac;bc]$ [a]. Alors :
   $$\int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(y)\,\mathrm{d}y$$

a. Bien entendu, si $c > 0$, nous avons bien l'intervalle $[ac;bc]$ et si $c < 0$, c'est l'intervalle $[bc;ac]$

Démonstration

1. **On démontre que** $\displaystyle\int_a^b f(x+c)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,\mathrm{d}y$
   Soit g la fonction suivante définie sur $[a;b]$ par :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} g : [a;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = f(x+c) \end{array}\right.$$
   - ▷ A chaque subdivision S de $[a;b]$ $S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\}$ correspond une subdivision S' de $[a+c;b+c]$ $S' = \{a+c = s'_0 < s'_1 = s_1 + c < \cdots < s'_n = b+c\}$
   - ▷ f étant intégrable sur $[a+c;b+c]$, y est bornée ; de par sa définition, g est aussi bornée. De plus, nous avons :
     $$\inf_{x\in[s_{i-1};s_i[} g(x) = \inf_{x\in[s_{i-1}+c;s_i+c[} f(x) \text{ et } \sup_{x\in[s_{i-1};s_i[} g(x) = \sup_{x\in[s_{i-1}+c;s_i+c[} f(x)$$
     De telle sorte que $\sigma(g,S) = \sigma(f,S')$ et $\Sigma(g,S) = \Sigma(f,S')$
   - ▷ On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{S}'$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a+c;b+c]$. La correspondance :
     $$\begin{array}{rcl} \tau_c : \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S}' \\ S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\} & \longmapsto & \tau_c(S) = S' = \{a+c = s'_0 < s'_1 = s_1 + c < \cdots < s'_n = b+c\} \end{array}$$
     est une bijection. Et donc :
     $$\inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(g,S) = \inf_{S'\in\mathcal{S}'} \Sigma(f,S') \text{ et } \sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(g,S) = \sup_{S'\in\mathcal{S}'} \sigma(f,S')$$
   - ▷ La fonction f étant intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a+c;b+c]$, nous avons $\displaystyle\inf_{S'\in\mathcal{S}'} \Sigma(f,S') = \sup_{S'\in\mathcal{S}'} \sigma(f,S') = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,\mathrm{d}y$
     Nous avons donc $\displaystyle\inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(g,S) = \sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(g,S)$, ce qui montre que g est intégrable sur $[a;b]$, que $\displaystyle\inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(g,S) = \sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(g,S) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, et qu'en sus :
     $$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,\mathrm{d}y \Longleftrightarrow \int_a^b f(x+c)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,\mathrm{d}y$$

   Ce que nous voulions
2. **On démontre que** $\displaystyle\int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(y)\,\mathrm{d}y$

→ On suppose $c > 0$
Soit g la fonction suivante définie sur $[a;b]$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} g : [a;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = f(xc) \end{array}\right.$$

- ▷ A chaque subdivision S de $[a;b]$ $S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\}$ correspond une subdivision S' de $[ac;bc]$ $S' = \{ac = s'_0 < s'_1 = s_1 c < \cdots < s'_n = bc\}$
- ▷ f étant intégrable sur $[ac;bc]$, y est bornée ; de par sa définition, g est aussi bornée. De plus, nous avons :

$$\inf_{x\in[s_{i-1};s_i[} g(x) = \inf_{x\in[s_{i-1};s_i[} f(cx) = \inf_{u\in[cs_{i-1};cs_i[} f(u) \tag{14.1}$$

Rappelons que $\sigma(g,S) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) \inf_{x\in[s_{i-1};s_i[} g(x)$ et que

$$\sigma(f,S') = \sum_{i=1}^{n} (cs_i - cs_{i-1}) \inf_{u\in[cs_{i-1};cs_i[} f(u) = c\sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) \inf_{u\in[cs_{i-1};cs_i[} f(u)$$

De l'égalité 14.1, nous tirons que $\sigma(f,S') = c\sigma(g,S)$
De la même manière, nous démontrerions que $\Sigma(f,S') = c\Sigma(g,S)$

- ▷ On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{S}'$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[ac;bc]$. La correspondance :

$$\begin{array}{rcl} H_c : \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S}' \\ S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\} & \longmapsto & H_c(S) = S' = \{ac = s'_0 < s'_1 = s_1 c < \cdots < s'_n = bc\} \end{array}$$

est une bijection. Et donc :

$$c\inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(g,S) = \inf_{S'\in\mathcal{S}'} \Sigma(f,S') \text{ et } c\sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(g,S) = \sup_{S'\in\mathcal{S}'} \sigma(f,S')$$

- ▷ La fonction f étant intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[ac;bc]$, nous avons $\displaystyle\inf_{S'\in\mathcal{S}'} \Sigma(f,S') = \sup_{S'\in\mathcal{S}'} \sigma(f,S') = \int_{ac}^{bc} f(y)\,\mathrm{d}y$
Nous avons donc $\displaystyle\inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(g,S) = \sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(g,S)$, ce qui montre que g est intégrable sur $[a;b]$, que $\displaystyle\inf_{S\in\mathcal{S}} \Sigma(g,S) = \sup_{S\in\mathcal{S}} \sigma(g,S) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, et qu'en sus :

$$c\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{ac}^{bc} f(y)\,\mathrm{d}y \iff c\int_a^b f(xc)\,\mathrm{d}x = \int_{ac}^{bc} f(y)\,\mathrm{d}y \iff \int_a^b f(xc)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(y)\,\mathrm{d}y$$

→ On suppose $c < 0$
Nous avons alors $bc < ac$.
A toute subdivison S de $[a;b]$ $S = \{a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b\}$ correspond une subdivision S' de $[bc;ac]$

$$S' = \{bc = s'_0 = cs_n < s'_1 = s_{n-1}c < \cdots < s'_k = cs_{n-k} < s'_n = ac = cs_0\}$$

Nous avons

$$\left(s'_i - s'_{i-1}\right) = cs_{n-i} - cs_{n-i+1} = -c\left(s_{n-i+1} - s_{n-i}\right)$$

De telle sorte que $\sigma(f,S') = -c\Sigma(g,S)$.
De la même manière on démontrerait que $\Sigma(f,S') = -c\sigma(g,S)$
En utilisant les mêmes arguments d'intégrabilité qu'au point précédent, nous obtenons

$$-c\int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}x = \int_{cb}^{ca} f(u)\,\mathrm{d}u \iff \int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{c}\int_{cb}^{ca} f(u)\,\mathrm{d}u \iff \int_a^b f(cx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(u)\,\mathrm{d}u$$

Ce que nous voulions

Remarque 24 :

L'intérêt de ces deux énoncés est qu'ils sont valables **avec n'importe quelle fonction f Riemann-intégrable.**

Exemple 9 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur tout segment $[a;b] \subset \mathbb{R}$, périodique de période T, c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons : $f(x+T) = f(x)$

1. **Pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons $\displaystyle\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^{a+T} f(u)\,\mathrm{d}u$**

   Soit donc $a \in \mathbb{R}$; en utilisant la relation de Chasles, nous avons :

   $$\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u + \int_a^{a+T} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{a+T}^T f(u)\,\mathrm{d}u$$

   D'après 14.4.8, nous avons, pour tout $a \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int_0^a f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_{0+T}^{a+T} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_T^{a+T} f(u)\,\mathrm{d}u$

   De la périodicité de f, nous avons :

   $\displaystyle\int_0^a f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$, et donc $\displaystyle\int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_{a+T}^T f(u)\,\mathrm{d}u$

   En conclusion, $\displaystyle\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^{a+T} f(u)\,\mathrm{d}u$

2. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\displaystyle\int_a^{a+nT} f(u)\,\mathrm{d}u = n\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$**

   Cette démonstration se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

   - ▷ C'est bien sûr vrai pour $n = 0$, puisque $\displaystyle 0 \times \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^a f(u)\,\mathrm{d}u = 0$
   - ▷ Supposons que $\displaystyle\int_a^{a+nT} f(u)\,\mathrm{d}u = n\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$
   - ▷ Démontrons la propriété à l'ordre $n+1$.
     Alors :

     $$\begin{aligned}\int_a^{a+(n+1)T} f(u)\,\mathrm{d}u &= \int_a^{a+nT} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{a+nT}^{a+(n+1)T} f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_a^{a+nT} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{a+nT}^{a+nT+T} f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= n\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u \text{ (hypothèse de récurrence et question précédente)} \\ &= (n+1)\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\displaystyle\int_a^{a+nT} f(u)\,\mathrm{d}u = n\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$

3. **Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_a^{a+nT} f(u)\,\mathrm{d}u = n\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u$**

   La question a déjà été démontrée sur $\mathbb{N}$. Nous allons le faire maintenant pour les entiers négatifs.
   Soit donc $n \in \mathbb{Z}^-$, c'est à dire que n est un entier négatif ; on pose $n' = -n$; alors :

$$\begin{aligned}\int_a^{a+nT} f(u)\,\mathrm{d}u &= \int_a^{a-n'T} f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_{a-n'T}^{a} f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_{a-n'T}^{a-n'T+n'T} f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= -n'\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= n\int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

14.4.9 Proposition

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann et admettant, sur l'intervalle $[a;b]$, une primitive F
Soit $[c;d] \subset \mathbb{R}$ un segment de $\mathbb{R}$ et $\varphi : [c;d] \longrightarrow [a;b]$ une fonction dérivable et telle que $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$
On suppose de plus que $f \circ \varphi$ et φ' sont intégrables au sens de Riemann sur $[c;d]$. Alors :

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_c^d (f\circ\varphi)(u) \times \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Démonstration

1. Si $f \circ \varphi$ et φ' sont intégrables au sens de Riemann sur $[c;d]$, alors le produit $(f\circ\varphi)\times\varphi'$ est une fonction Riemann-intégrable sur $[c;d]$
2. Comme F est une primitive de F, nous avons $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = F(b) - F(a)$
3. La fonction $F\circ\varphi$ est dérivable de dérivée $(F\circ\varphi)' = F'\circ\varphi\times\varphi' = f\circ\varphi\times\varphi'$ et donc :

$$\begin{aligned}\int_c^d (F\circ\varphi)'(u)\,\mathrm{d}u &= [(F\circ\varphi)(u)]_c^d = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Et donc, $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_c^d (f\circ\varphi)(u)\times\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$

Remarque 25 :

1. Les hypothèses de la proposition sont vérifiées si f est continue sur l'intervalle $[a;b]$ et φ de classe $\mathcal{C}^1$
2. Les hypothèses de la proposition sont tout autant vérifiées si f est continue par morceaux sur l'intervalle $[a;b]$ et φ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

14.4.10 Corollaire

1. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann et admettant, sur l'intervalle $[a;b]$, une primitive F
2. Soit $[c;d] \subset \mathbb{R}$ un segment de $\mathbb{R}$ et $\varphi : [c;d] \longrightarrow [a;b]$ une fonction dérivable
3. On suppose F intégrable au sens de Riemann sur le segment d'extrémités $\varphi(d)$ et $\varphi(c)$ (c'est à dire sur les intervalles $[\varphi(d);\varphi(c)]$ ou $[\varphi(c);\varphi(d)]$)
4. On suppose de plus que $f \circ \varphi$ et φ' sont intégrables au sens de Riemann sur $[c;d]$.

Alors

1. Le produit $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ est une fonction Riemann-intégrable sur $[c;d]$
2. $\displaystyle\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_c^d (f \circ \varphi)(u) \times \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$

Exemple 10 :

1. **Calculer** $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}\,\mathrm{d}t$
   Voilà un exemple qui ne vole pas très haut.
   - ▷ D'abord, faire un changement de variable n'est pas très utile !! En effet, si $u(t) = 1 + e^t$, l'expression $\dfrac{e^t}{e^t+1} = \dfrac{u'(t)}{1+u(t)}$ admet pour primitive la fonction $\ln u(t)$, de telle sorte que :
   $$\int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left(e^t+1\right)\right]_0^x = \ln\left(e^x+1\right) - \ln 2$$
   - ▷ Mais, pour le sport, faisons un changement de variable en posant $u = e^t$. Alors :
   $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = e^t \Longleftrightarrow \mathrm{d}u = e^t\,\mathrm{d}t$$
   D'où :
   $$\int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}\,\mathrm{d}t = \int_1^{e^x} \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \left[\ln(1+u)\right]_1^{e^x} = \ln\left(e^x+1\right) - \ln 2$$
2. **Calculer** $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{t^6+1}\,\mathrm{d}t$
   Faisons, ici, le changement de variables $u = t^3$, alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 3t^2 \Longleftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}u}{3} = t^2\,\mathrm{d}t$. D'où :
   $$\int_0^x \frac{t^2}{t^6+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_0^{x^3} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \left[\arctan u\right]_0^{x^3} = \arctan x^3$$
   Et voilà le travail

14.5 Fonctions à valeurs complexes

14.5.1 Définition

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Nous écrivons :

$$f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$$

Où $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des fonctions définies sur l'intervalle $[a;b]$ et à valeurs réelles
On dit que f est Riemann-intégrable sur $[a;b]$ si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des fonctions Riemann-intégrable sur $[a;b]$ et nous avons alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 26 :

1. Donc, par définition :

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Les propriétés des fonctions à valeurs complexes Riemann-intégrables seront déduites des propriétés des fonctions Riemann-intégrables à valeurs réelles

14.5.2 Proposition

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions à valeurs complexes Riemann-intégrables sur l'intervalle $[a;b]$. Alors :

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et tout $\beta \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
2. Nous avons : $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$
3. Nous avons, pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant (b-a) \sup_{x\in[a;b]} |f(x)|$

Démonstration

1. La démonstration du premier point est évidemment la conséquence de la linéarité de l'intégration des fonctions numériques à valeurs réelles Riemann-intégrables.
2. La proposition a déjà été démontrée pour les fonctions numériques à valeurs réelles et Riemann-intégrables. La démonstration pour les fonctions à valeurs complexes n'est pas aussi évidente. Nous allons commencer par démontrer un lemme *(qui pourrait être un exercice sur les nombres complexes)*

Lemme

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$|\alpha x + \beta y| \leqslant \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,|z|$$

Démonstration

→ En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons $|\alpha x + \beta y| \leqslant |\alpha x| + |\beta y|$, c'est à dire qu'en élevant au carré :

$$|\alpha x + \beta y|^2 \leqslant (|\alpha x| + |\beta y|)^2 = \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + 2|\alpha||x||\beta||y|$$

→ Nous utilisons, maintenant, une inégalité classique :

$$2|\alpha||x||\beta||y| = 2|\beta||x||\alpha||y| = 2|\beta x||\alpha y| \leqslant (\beta x)^2 + (\alpha y)^2$$

→ Et alors :

$$|\alpha x + \beta y|^2 \leqslant \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + (\beta x)^2 + (\alpha y)^2 = \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\left(x^2 + y^2\right) = \left(\alpha^2 + \beta^2\right)|z|^2$$

C'est à dire $|\alpha x + \beta y| \leqslant \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,|z|$

Ce que nous voulions

- ▷ Nous avons

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|^2 &= \left(\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\right)^2+\left(\mathrm{Im}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\right)^2\\ &= \left(\int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

- ▷ D'autre part, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$,comme nous avons des fonctions à valeurs réelles, nous avons :

$$\begin{aligned}\left|\alpha\int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b \alpha\,\mathrm{Re}(f)(x)+\beta\,\mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant \int_a^b \left|\alpha\,\mathrm{Re}(f)(x)+\beta\,\mathrm{Im}(f)(x)\right|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

- ▷ D'après le lemme :

$$\left|\alpha\,\mathrm{Re}(f)(x)+\beta\,\mathrm{Im}(f)(x)\right|\leqslant\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,|f(x)|$$

D'où en intégrant :

$$\int_a^b \left|\alpha\,\mathrm{Re}(f)(x)+\beta\,\mathrm{Im}(f)(x)\right|\,\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

En synthèse :

$$\left|\alpha\int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

- ▷ Choisissons $\alpha=\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x$ et $\beta=\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\left|\alpha\int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\left(\int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\right|\\ &= \left(\int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\\ &= \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|^2\end{aligned}$$

Et donc :

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{\left(\int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}=\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

L'inégalité de synthèse devient :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|^2\leqslant\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\times\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\iff\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Ce que nous voulions

3. L'inégalité $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant(b-a)\sup_{x\in[a;b]}|f(x)|$ est des plus classiques et est une conséquence de l'inégalité précédente

Remarque 27 :

Il y a une autre façon, tout aussi alambiquée, de démontrer que $\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$.
Soit donc $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a;b]$

1. Si $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0$, comme $|f(x)| \geqslant 0$, nous avons $\int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x \geqslant 0$ et donc
$$\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$$
2. Supposons, maintenant que $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ soit un réel strictement positif ; alors :
$$\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$$
puisque $\mathrm{Re}(f)(x) \leqslant |f(x)|$
3. Supposons que $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ soit un complexe non nul.

   Alors, nous pouvons écrire $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

   ▷ Nous avons $\rho = e^{-i\theta} \times \rho e^{i\theta} = e^{-i\theta} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b e^{-i\theta} f(x)\ \mathrm{d}x$

   ▷ Nous avons $\int_a^b e^{-i\theta} f(x)\ \mathrm{d}x$ qui est donc un réel strictement positif, et donc, d'après le point précédent :
$$\left|\int_a^b e^{-i\theta} f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b \left|e^{-i\theta} f(x)\right|\ \mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$$
   ▷ D'autre part :
$$\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| = \left|e^{-i\theta}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b e^{-i\theta} f(x)\ \mathrm{d}x\right|$$
   Comme $\left|\int_a^b e^{-i\theta} f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$, nous avons $\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$

Et voilà le travail ! !

Remarque 28 :

Tous les résultats de l'intégration au sens de Riemann pour les fonctions réelles s'appliquent aux fonctions à valeurs complexes.

14.6 Exercices complémentaires

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};+1\right]$ par
$$f(x) = \frac{2}{3+\left[\frac{1}{x}\right]} \text{ où } [\bullet] \text{ désigne la partie entière}$$
Faire une représentation graphique de f et calculer $\int_{\frac{1}{4}}^1 f(x)\ dx$

Exercice 9 :

Les 2 questions de cet exercice sont indépendantes, mais liées par le même thème

1. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < c$ et soit $f : [a;c] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann. Montrer que :

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \max\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x; \frac{1}{c-b}\int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x\right\}$$

2. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions numériques réelles intégrables au sens de Riemann. Montrer que :
   (a) $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Inf}(f,g)(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{Inf}\left(\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t; \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t\right)$
   (b) $\displaystyle\int_a^b \sup(f,g)(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \sup\left(\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t; \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t\right)$

Exercice 10 :

1. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, **continue et positive**, c'est à dire telle que $(\forall x \in [a;b])\,(f(x) \geqslant 0)$. On suppose de plus que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0$.
   Démontrez que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[a;b]$
2. Soient $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, **continue**. On pose $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ et on suppose que

$$\int_a^b f(t)\ dt = M(b-a)$$

   Démontrer que f est une fonction constante.

Exercice 11 :

Une histoire de points fixes

1. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ telle qu'il existe $x_1 \in [a;b]$ telle que $f(x_1) > 0$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0$. Démontrer qu'il existe $x_2 \in [a;b]$ telle que $f(x_2) < 0$
2. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ Montrer que f a un point fixe.

Exercice 12 :

Cet exercice est en lien avec l'exercice précédent et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions intégrables au sens de Riemann sur l'intervalle $[a;b]$

On suppose que ces deux fonctions vérifient la relation :

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\ \mathrm{d}x\right]^2 = \int_a^b (f(x))^2\ \mathrm{d}x \times \int_a^b (g(x))^2\ \mathrm{d}x$$

Et que $\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\ \mathrm{d}x \times \int_a^b (g(x))^2\ \mathrm{d}x \neq 0$

1. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^b (f(x) - kg(x))^2\ \mathrm{d}x = 0$
2. Que conclure si les 2 fonctions f et g sont continues sur l'intervalle $[a;b]$?

Exercice 13 :

Le Lemme de Riemann-Lebesgue
Cet exercice est sur un thème commun. On commence par une question facile -résolue dans le cours de L_0-, pour terminer par des questions plus complexes.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$, et $b \in \mathbb{R}$ tels que que $a < b$. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a; b]$. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_a^b f(t) \sin ntdt = 0$
2. Soit f une fonction en escalier sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. Démontrez que :
$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin nx\ dx = 0$$
3. Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. Démontrez que :
$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin nx\ dx = 0$$
4. *Que se passe-t-il si on modifie un tout petit peu l'énoncé, en y ajoutant, par exemple une valeur absolue ? C'est l'objet de cette question*
Soit donc f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a\ ;\ b]$. montrer que :
$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) |\sin nx|\ dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x)\ dx$$

Exercice 14 :

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue telle que $\left| \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \right| = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\ dt$.
Montrer que f a un signe constant sur l'intervalle $[a; b]$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 15 :

Formules de la moyenne

1. Première formule de la moyenne
Soient a et b 2 nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
On appelle : $m = \inf\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$
   (a) Démontrer qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$
   (b) En donner une interprétation géométrique
2. Seconde formule de la moyenne
Nous nous mettons dans les hypothèses de la question précédente, c'est à dire :
— a et b sont 2 nombres réels tels que $a < b$;
— $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue
— On appelle $m = \inf\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$
On suppose de plus que $g : [a; b] \to \mathbb{R}$ est une fonction positive et intégrable.
   (a) Montrer que $F : [a; b] \to \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = f(x) \displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ est continue, et trouver ses extrema en fonction de m et M
   (b) Montrer que nous avons $m \displaystyle\int_a^b g(t)\, dt \leq \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \leq M \int_a^b g(t)\, dt$
   (c) En déduire qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = f(c) \int_a^b g(t)\, dt$
   (d) Que pouvez vous dire lorsque g est la fonction constante toujours égale à 1 ?

Exercice 16 :

Voici une rafale de questions qui portent toutes sur le même thème, mais qui conservent un degré certain d'indépendance

1. Soient a et b 2 nombres réels tels que $a < b$ et soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. Soit $u : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive, c'est à dire telle que pour tout $x \in [a;b]$, $u(x) > 0$

   Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^n \, u(x) \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} = \sup\limits_{x \in [a;b]} |f(x)|$

2. Dans cette question, on suppose que, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \neq 0$ *(c'est à dire que, comme f est continue, ou bien $f(x) > 0$, ou bien $f(x) < 0$)*. Donner alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^{-n} \, u(x) \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{-1}{n}}$

14.6.1 Sommes de Riemann

Exercice 17 :

1. En utilisant les sommes de Riemann, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

2. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 18 :

Donner $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)}$

Exercice 19 :

Mise à part la question 4, ce n'est pas, à proprement parler, un exercice sur les sommes de Riemann. C'est, par contre, l'étude de la série harmonique, un exemple important de série numérique divergente

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

   Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$

2. On appelle $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Démontrer que $\ln(n+1) \leqslant S_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

3. Démontrer qu'en $+\infty$, $S_n \underset{+\infty}{\simeq} \ln n$

4. Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Donner la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\alpha + k\beta}$. Faire le lien avec les questions précédentes

Exercice 20 :

Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{+\infty}{\approx} 2\left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{n}$

Exercice 21 :

Sans utiliser de primitive, calculer, pour $a < b$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b e^x \, \mathrm{d}x$

Exercice 22 :

Soient $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann sur $[0;1]$ et $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et à dérivée bornée. Il faut montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

Exercice 23 :

Soient $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0;1]$ et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Il faut montrer que :

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi \circ f(x)\, \mathrm{d}x$$

C'est **l'inégalité de Jensen**

Exercice 24 :

Soient $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$ et telle que cette dérivée soit bornée sur $]0;1[$. On appelle $M = \sup_{x\in]0;1[} |f'(x)|$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\left|\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}$$

Exercice 25 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère la subdivision de l'intervalle $[a;b]$ à pas constant $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour $k = 0, \ldots, n$. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$. Donner :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\left(\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)\right)$$

14.6.2 Calculs de primitives

Exercice 26 :

Calculer $\displaystyle\int_0^\pi e^{(1+i)t}\, dt$. En déduire $\displaystyle\int_0^\pi e^t \cos t dt$

Exercice 27 :

Le symbole $\displaystyle\int f(t)\, dt$ désigne l'ensemble des primitives. Donner :

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{ch}x}$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x} dx$
3. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}} dx$

14.6.3 Intégrales fonctions de la borne inférieure ou supérieure

Exercice 28 :

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[-1;+1]$. Démontrer que la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_0^{\sin x} f(t)\, dt$$

est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 29 :

On considère la fonction partie entière notée $[x]$. Pour $x > 0$, on considère $F(x) = \int_0^x [t]\,dt$

1. Calculez F et démontrez qu'elle est continue.
2. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Que manque-t-il pour qu'elle soit dérivable ? ?

Exercice 30 :

Soit k un réel strictement positif. On considère la fonction F définie pour $x > 0$ par :

$$F(x) = \int_0^1 s^k \sin sx \, ds$$

1. Etablir l'égalité $F(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}} \displaystyle\int_0^x u^k \sin u \, du$
2. En déduire que F est dérivable pour $x > 0$ et vérifie la relation $xF'(x) + (k+1)F(x) = \sin x$

Exercice 31 :

On considère une fonction f, continue sur l'intervalle $[0,1]$.
On définit F sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \min(x,t)\, f(t)\, dt$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer F''
2. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\, dt \right) du$

Exercice 32 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ +1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

On pose $F(x) = \displaystyle\int_{1-x}^{1+x} f(t)\ dt$

1. Vérifier que F est impaire et que l'on peut donc restreindre l'étude à $[0\ ;\ +\infty[$. Tracer la représentation graphique de F
2. En quels points F est-elle dérivable ? ?
3. On pose $G(x) = \displaystyle\int_{1-x}^{1+x} F(t)\ dt$. G est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? En tracer la représentation graphique

Exercice 33 :

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et F la fonction définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(t)\ dt \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } F(0) = f(0)$$

1. Montrer que F est continue en 0
2. En prenant pour f, la fonction valeur absolue, montrer que F n'est pas forcément dérivable.

Exercice 34 :

Soit $a > 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$ telle que $f(0) = 0$

L'objet de l'exercice est de démontrer que $\displaystyle\int_0^a |f(x) f'(x)|\ dx \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a (f'(x))^2\ dx$

1. Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^x |f'(t)|\ dt$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$ telle que $g(0) = 0$
2. Vérifier que $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\ dt$ et démontrer que $|f(x)| \leqslant g(x)$
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^a |f(x) f'(x)|\ dx \leqslant \frac{1}{2}(g(a))^2$
4. En utilisant l'inégalité de Schwarz, démontrez que $(g(a))^2 \leqslant a\displaystyle\int_0^a (f'(x))^2\ dx$ et conclure

14.6.4 Suites et intégrales

Exercice 35 :

On considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Exercice 36 :

Donner

1. $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\sin x)\ \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\sin x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 37 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales I_n et J_n, définies par :

$$I_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{n}{2}}\ dt \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n\ du$$

1. En faisant un changement de variables approprié, démontrez que $I_n = J_{n+1}$
2. Démontrez que nous avons $0 \leqslant J_{n+1} \leqslant J_n$
3. (a) Montrer que nous avons $J_n = J_{n-2} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2}\cos^2 u\ du$

   (b) On appelle $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2}\cos^2 u\ \ du$; en intégrant par parties, montrez que $K_n = \dfrac{1}{n-1}J_n$

   (c) En déduire que $J_n = \dfrac{n-1}{n}J_{n-2}$ et que $I_n = \dfrac{n}{n+1}I_{n-2}$
4. (a) En déduire que $I_{2p} = \dfrac{(2^p \times p!)^2}{(2p+1)!}$

   (b) En déduire que $I_{2p+1} = \dfrac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}\dfrac{\pi}{2}$

   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 38 :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

Il faut démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = f(1)$

Exercice 39 :

Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $[1;e]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = n\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)\,\mathrm{d}x$$

Il faut démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

14.6.5 Miscelleanous

Exercice 40 :

Sur les suites équiréparties

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite numérique telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\in[0;1]$.
Pour tout $\alpha\in[0;1]$ et tout $\beta\in[0;1]$ tels que $\alpha\leqslant\beta$, on pose :

$$k_n(\alpha,\beta) = \mathrm{Card}\,\{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } \alpha\leqslant u_m\leqslant\beta\}$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **équirépartie** si, pour tout $\alpha\in[0;1]$ et tout $\beta\in[0;1]$ tels que $\alpha\leqslant\beta$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{k_n(\alpha,\beta)}{n} = \beta-\alpha$

1. **Propriétés élémentaires**
   (a) Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie, alors elle n'admet pas de limite
   (b) Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(\alpha,\beta) = +\infty$
   (c) Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie, alors l'ensemble $S=\{u_n \text{ où } n\in\mathbb{N}^*\}$ des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $[0;1]$
2. **Une simplification du critère**
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $[0;1]$. Pour tout $\alpha\in[0;1]$ et tout $\beta\in[0;1]$ tels que $\alpha<\beta$, on pose :
   $$K_n(\alpha,\beta) = \mathrm{Card}\,\{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } \alpha< u_m<\beta\}$$
   Et
   $$K_n(\beta) = K_n(0,\beta) = \mathrm{Card}\,\{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } 0< u_m<\beta\} \text{ pour } 0<\beta\leqslant 1$$
   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si, pour tout $\beta\in\,]0;+1]$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{K_n(\beta)}{n} = \beta$
3. **Caractérisation des suites équiréparties**
   Démontrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si pour toute application f intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[0;1]$, nous avons :
   $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n)}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$
4. Soient $\alpha\in[0;1]$ et $\beta\in[0;1]$ tels que $\alpha\leqslant\beta$. Nous appelons $S_n(\alpha,\beta)$ la somme des u_i tels que $1\leqslant i\leqslant n$ et $\alpha<u_i<\beta$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n(\alpha,\beta)}{n} = \dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}$

Exercice 41 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ 2 réels tels que $a < b$. Calculer $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\,\mathrm{d}x$

14.7 Quelques exercices corrigés

Exercice 2 :

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable et à valeurs positives. Démontrer que la fonction $\sqrt{f}$ est intégrable sur l'intervalle $[a;b]$

Rien de bien sorcier : il suffit de réutiliser la démonstration de 14.3.7
Nous appelons donc E_f l'ensemble des discontinuités de la fonction f et $E_{\sqrt{f}}$ est l'ensemble des discontinuités de la fonction $\sqrt{f}$
Nous savons que la fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et comme f est à valeurs positives, la fonction $\sqrt{f}$ est bien définie sur l'intervalle $[a;b]$
Par composition, la fonction $\sqrt{f}$ est continue partout où f est continue et donc $E_f = E_{\sqrt{f}}$.
f étant intégrable, E_f est négligeable et donc $E_{\sqrt{f}}$ aussi.
Ainsi,$\sqrt{f}$ est intégrable au sens de Riemann

Exercice 3 :

Soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions intégrables au sens de Riemann. Démontrer que les fonctions $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont intégrables au sens de Riemann sur $[a;b]$

Très simple : il suffit de remarquer que $\min(f,g) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$ et $\max(f,g) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ et de conclure en utilisant le fait que les fonctions intégrables forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Exercice 4 :

1. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*
   Soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions intégrables au sens de Riemann. Démontrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\ \mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b (g(t))^2\ \mathrm{d}t}$$

La démonstration n'est pas nouvelle!!
Soit t un réel quelconque. Par le corollaire 14.3.7, puisque f et g sont intégrables au sens de Riemann, les fonctions f^2, g^2, fg et $(tf+g)^2$ sont aussi intégrables au sens de Riemann.

De manière classique, posons $P(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))^2\ \mathrm{d}t$

Il est clair que $P(\lambda)$ est positif ou nul pour tout λ réel. Or en développant le carré $(\lambda f(t) + g(t))^2$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale, nous obtenons :

$$P(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b (f(t))^2\ \mathrm{d}t + 2\lambda \int_a^b f(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b (g(t))^2\ \mathrm{d}t$$

On reconnaît, là, un trinôme du second degré du type $A\lambda^2 + B\lambda + C$ dont les coefficients A, B et C sont des intégrales. Ce trinôme ne peut avoir de signe constant, celui de $A = \displaystyle\int_a^b (f(t))^2\ \mathrm{d}t$, que si son discriminant $\Delta = B^2 - 4AC$ est négatif ou nul
Remplaçant A, B et C par leurs expressions sous forme d'intégrales, on en déduit :

$$\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t\right)^2 - \int_a^b (f(t))^2\ \mathrm{d}t \int_a^b (g(t))^2\ \mathrm{d}t \leqslant 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\ \mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b (g(t))^2\ \mathrm{d}t}$$

Q.E.D.

2. *Applications de l'inégalité de Schwarz*

   (a) *Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$\left(\int_0^1 x^k f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{1}{2k+1}\int_0^1 f(x)^2\,dx$$

Nous avons $g(x) = x^k$, et donc, en appliquant l'inégalité de Schwarz, nous avons :

$$\left(\int_0^1 x^k f(x)\,dx\right)^2 \overset{\text{Schwarz}}{\leqslant} \int_0^1 \left(x^k\right)^2 dx \times \int_0^1 (f(x))^2\,dx = \int_0^1 x^{2k}dx \times \int_0^1 (f(x))^2\,dx = \frac{1}{2k+1}\int_0^1 f(x)^2\,dx$$

   (b) *On suppose, cette fois ci que $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$, intégrable. Montrer que*

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 f(x)^2\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx$$

Pas de grande nouveauté : on choisit, ici $g(x) = 1$, et donc, en appliquant l'inégalité de Schwarz, nous avons :

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \overset{\text{Schwarz}}{\leqslant} \int_0^1 1^2 dx \times \int_0^1 (f(x))^2\,dx = \int_0^1 (f(x))^2\,dx$$

Or, comme f est à valeurs dans $[0;1]$, nous avons $(f(x))^2 \leqslant f(x)$. En utilisant la positivité de l'intégrale, nous avons : $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx$.

En synthèse, nous avons bien $\displaystyle\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx$

   (c) *Soit f une fonction continue sur $[0;1]$, à valeurs réelles strictement positives. Montrer que :*

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \geqslant 1$$

▷ De manière simple, nous avons :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 \mathrm{d}x \text{ et } \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

▷ D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\left(\int_0^1 f(x) \times \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 \mathrm{d}x \times \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

▷ Comme $\displaystyle\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \times \frac{1}{f(x)}\right)^2 = 1$ et

$$\int_0^1 \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 \mathrm{d}x \times \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\right)^2 \mathrm{d}x = \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)$$

Nous avons bien :

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \geqslant 1$$

Ce que nous voulions

(d) *Soient $f:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ 2 fonctions intégrables sur $[a;b]$ telles que il existe $\lambda>0$ tel que pour tout $x\in[a;b]$, $f(x)\,g(x)\geqslant\lambda$. Démontrer que*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\times\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\lambda(b-a)^2$$

▷ Tout d'abord, f et g ne s'annulent jamais sur $[a;b]$ puisque si il existe $x_0\in[a;b]$ tel que $f(x_0)=0$, alors $f(x)\,g(x)=0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
D'autre part, comme nous avons $f(x)\,g(x)\geqslant\lambda>0$, f et g sont de même signe sur $[a;b]$

▷ Supposons que pour tout $x\in[a;b]$, nous ayions $f(x)>0$ et $g(x)>0$
Posons $\varphi(x)=\sqrt{f(x)}$ et $\psi(x)=\sqrt{g(x)}$ et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à φ et ψ :

$$\left(\int_a^b\varphi(t)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_a^b(\varphi(t))^2\,\mathrm{d}t\times\int_a^b(\psi(t))^2\,\mathrm{d}t$$

C'est à dire :

$$\left(\int_a^b\sqrt{f(x)\,g(x)}\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\times\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, $\sqrt{f(x)\,g(x)}\geqslant\sqrt{\lambda}$, et donc :

$$\left(\int_a^b\sqrt{f(x)\,g(x)}\,\mathrm{d}t\right)^2\geqslant\left(\int_a^b\sqrt{\lambda}\,\mathrm{d}t\right)^2=\left(\sqrt{\lambda}\,(b-a)\right)^2=\lambda(b-a)^2$$

Nous avons donc : $\lambda(b-a)^2\leqslant\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\times\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

▷ La démonstration pour le cas où pour tout $x\in[a;b]$, nous avons $f(x)<0$ et $g(x)<0$ est tout à fait semblable

Ce que nous voulions

Exercice 5 :

Je dirais volontiers que cet exercice est un peu tarabiscoté ; il y a tellement plus simple pour résoudre la question ! ! Cependant, je l'ai laissé dans son jus, tel que je l'ai trouvé, puisqu'il met en pratique les sommes de Riemann.... Donc.....

1. *Soit $x>0$. Démontrer que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}e^{\frac{px}{n}}=\frac{e^x-1}{x}$

▷ Premièrement, nous pouvons écrire $e^{\frac{px}{n}}=\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^p$, de telle sorte que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}e^{\frac{px}{n}}=\sum_{p=0}^{n-1}\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^p$ et cette somme apparaît donc comme la somme des termes d'une suite géométrique. Donc :

$$\sum_{p=0}^{n-1}e^{\frac{px}{n}}=\sum_{p=0}^{n-1}\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^p=\frac{1-\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{x}{n}}}=\frac{1-e^x}{1-e^{\frac{x}{n}}}$$

▷ De telle sorte que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}e^{\frac{px}{n}}=\frac{1}{n}\times\frac{1-e^x}{1-e^{\frac{x}{n}}}$.

Or, $\displaystyle\frac{1}{n}\times\frac{1}{1-e^{\frac{x}{n}}}=\frac{1}{x}\times\frac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}}$ et, pour terminer :

$$\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}e^{\frac{px}{n}}=\frac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}}\times\frac{1-e^x}{x}$$

- Pour connaître la limite lorsque n tend vers $+\infty$, nous allons utiliser la limite remarquable :

$$\lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{e^u - 1} = 1$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{x}{n} = 0$, nous avons donc : $\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{x}{n}}{1 - e^{\frac{x}{n}}} = -1$

Et donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}} = -1 \times \frac{1 - e^x}{x} = \frac{e^x - 1}{x}$

Ce que nous voulions

2. *Utiliser ce résultat pour établir que pour tout nombre $x > 0$ $\int_0^x e^t \, \mathrm{d}t = e^x - 1$*

- Pour résoudre cette question, nous subdivisons l'intervalle $[0; x]$ en n intervalles de longueur égale à $\frac{x}{n}$.

  Nous obtenons ainsi une subdivision $S = \{0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = x\}$ où $s_k = \frac{kx}{n}$ pour $k = 0, \cdots, n$
- Si f est une fonction intégrable sur l'intervalle $[0; x]$, nous avons la somme de Riemann $S_n(f) = \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k)$ qui est telle que $\lim_{n \to +\infty} S_n(f) = \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$
- Pour $f(t) = e^t$ qui est intégrable sur tout intervalle $[0; x]$ où $x > 0$, nous avons :

$$S_n(f) = \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}} = \int_0^x e^t \, \mathrm{d}t$$

- Nous avons montré, dans la question 1 que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} e^{\frac{px}{n}} = \frac{e^x - 1}{x}$, et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}} = x \times \frac{e^x - 1}{x} = e^x - 1$$

En conclusion $\int_0^x e^t \, \mathrm{d}t = e^x - 1$

Exercice 6 :

Soit $\alpha > 0$

1. *Pour quelles valeurs de α, l'intégrale $I_\alpha = \int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2\right) \mathrm{d}x$ est-elle définie ?*

Il est clair que $\ln\left(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2\right)$ est défini si, pour tout $x \in [0; 2\pi]$, nous avons $1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2 > 0$

- Appelons $P(\alpha) = 1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2$. Considérant P comme un polynôme en α du second degré, le discriminant nous apportera beaucoup d'informations :

$$\Delta = \cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$$

Comme $\Delta \leqslant 0$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $P(\alpha) \geqslant 0$
Si $\Delta = 0$, alors il existe une valeur de α telle que $P(\alpha) = 0$. donc :

$$\Delta = 0 \Longleftrightarrow \sin x = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Et alors, $P(\alpha)$ devient :

$$P(\alpha) = 1 - 2\alpha \cos k\pi + \alpha^2 = 1 - 2\alpha (-1)^k + \alpha^2 = \left(\alpha - (-1)^k\right)^2$$

Ainsi $P(\alpha)$ s'annule si $\alpha = -1$ ou si $\alpha = 1$, lorsque x, considéré comme paramètre, vout $x = k\pi$

- ▷ Comme nous avons choisi $\alpha > 0$, nous excluons donc la valeur $\alpha = 1$. Ainsi,l'intégrale I_α est définie si $\alpha > 0$ et $\alpha \neq +1$
- ▷ Si $\alpha = 1$, alors $f(x) = \ln\left(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2\right)$ devient $f(x) = \ln\left(2\left(1 - \cos x\right)\right)$, laquelle n'est pas définie en $x = 0$

2. *Donner la valeur de cette intégrale I_α lorsqu'elle est définie.*

Ainsi, nous choisissons $\alpha > 0$ et $\alpha \neq +1$.

Pour calculer cette intégrale, nous allons utiliser les sommes de Riemann.

- ▷ Nous divisons donc l'intervalle $[0; 2\pi]$ en n subdivisions à pas constants, c'est à dire une subdivision $S = \{0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 2\pi\}$ où $s_k = \dfrac{2k\pi}{n}$ où $k = 0, \cdots, n$.

  La somme de Riemann associée est donc $S_n(f) = \dfrac{2\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(s_k) = \dfrac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1 - 2\alpha\cos\dfrac{2k\pi}{n} + \alpha^2\right)$.

  D'après le théorème 14.3.12, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1 - 2\alpha\cos\frac{2k\pi}{n} + \alpha^2\right) = \int_0^{2\pi}\ln\left(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2\right)\,dx$$

- ▷ Première remarque, nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1 - 2\alpha\cos\frac{2k\pi}{n} + \alpha^2\right) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - 2\alpha\cos\frac{2k\pi}{n} + \alpha^2\right)\right)$.
- ▷ Considérons le polynôme $1 - 2\alpha\cos\dfrac{2k\pi}{n} + \alpha^2$

  Ce polynôme admet 2 racines complexes et conjuguées $\alpha_1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et $\alpha_2 = e^{\frac{-2ik\pi}{n}}$, de telle sorte que $1 - 2\alpha\cos\dfrac{2k\pi}{n} + \alpha^2 = \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(1 - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right)$.

  Donc :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - 2\alpha\cos\frac{2k\pi}{n} + \alpha^2\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(1 - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right)$$

- ▷ $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine n-ième de 1, et la famille $\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}; 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$ est la famille de toutes les racines n-ièmes de 1 et donc

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = (\alpha^n - 1)$$

  De même, $e^{\frac{-2ik\pi}{n}}$ est une racine n-ième de 1, et la famille $\left\{e^{\frac{-2ik\pi}{n}}; 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$ est la famille de toutes les racines n-ièmes de 1 et donc

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right) = (\alpha^n - 1)$$

  De telle sorte que :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(1 - e^{\frac{-2ik\pi}{n}}\right) = (\alpha^n - 1)^2 = |\alpha^n - 1|^2$$

- ▷ Nous avons maintenant $S_n(f) = \dfrac{2\pi}{n}\ln|\alpha^n - 1|^2 = \dfrac{4\pi}{n}\ln|\alpha^n - 1|$

  $\longrightarrow$ Supposons $0 < \alpha < 1$

  Alors, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\alpha^n = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln|\alpha^n - 1| = 0$; comme nous avons aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{4\pi}{n} = 0$, nous en concluons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n(f) = 0$, c'est à dire :

$$I_\alpha = \int_0^{2\pi}\ln\left(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2\right)\,dx = 0$$

$\longrightarrow$ Supposons $\alpha > 1$

Alors $\ln|\alpha^n - 1| = \ln\left(\alpha^n \left|1 - \frac{1}{\alpha^n}\right|\right) = n\ln\alpha + \ln\left|1 - \frac{1}{\alpha^n}\right|$ et donc :

$$S_n(f) = \frac{4\pi}{n}\left(n\ln\alpha + \ln\left|1 - \frac{1}{\alpha^n}\right|\right) = 4\pi\ln\alpha + \frac{4\pi}{n}\ln\left|1 - \frac{1}{\alpha^n}\right|$$

En suivant le raisonnement de tout à l'heure, *(puisque si $\alpha > 1$, alors $\frac{1}{\alpha} < 1$)*, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \frac{4\pi}{n}\ln\left|1 - \frac{1}{\alpha^n}\right| = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = 4\pi\ln\alpha$, c'est à dire :

$$I_\alpha = \int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2\right)\, \mathrm{d}x = 4\pi\ln\alpha$$

Exercice 7 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, nous considérons la fonction $I_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$ Trouver une relation de récurrence permettant le calcul de $I_n(x)$.

1. Nous faisons donc une intégration par parties
   - Nous avons donc :
   $$\left[\begin{array}{ll} u' = 1 & u = t \\ v = \frac{1}{(1+t^3)^n} & v' = \frac{-3nt^2}{(1+t^3)^{n+1}} \end{array}\right]$$
   Nous avons alors :
   $$I_n(x) = \left[\frac{t}{(1+t^3)^n}\right]_0^x + 3n\int_0^x \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{(1+x^3)^n} + 3n\int_0^x \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$
   - Penchons nous maintenant sur $\int_0^x \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$

   Nous pouvons écrire :
   $$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{t^3+1-1}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{t^3+1}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{1}{(1+t^3)^n}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = I_n(x) - I_{n+1}(x)\end{aligned}$$
   - Nous en déduisons donc que $I_n(x) = \frac{x}{(1+x^3)^n} + 3n\left(I_n(x) - I_{n+1}(x)\right)$

   C'est à dire : $3nI_{n+1}(x) = (3n-1)I_n(x) + \frac{x}{(1+x^3)^n}$
2. **Pour connaître les intégrales successives, calculons $I_1(x)$**

   Nous avons $I_1(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$
   - Nous commençons par décomposer en éléments simples $\frac{1}{1+t^3}$. Clairement, après calculs classiques, nous avons :
   $$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{2-t}{t^2-t+1}\right)$$
   - Nous avons $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(1+x)$

▷ D'autre part, $t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. D'où :

$$\int_0^x \frac{2-t}{t^2 - t + 1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2-t}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t$$

Faisons le changement de variables $u = t - \frac{1}{2}$ et alors $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$. Alors,

$$\int_0^x \frac{2-t}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{2} - u}{u^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u = \int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{2}}{u^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u - \int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{u}{u^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u$$

▷ Intéressons nous à l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{u}{u^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u$, parce que c'est la plus simple !! Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{u}{u^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u = & \ \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{2u}{u^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u \\
= & \ \frac{1}{2}\left[\ln\left(u^2 + \frac{3}{4}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \\
= & \ \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - x + 1\right) \\
= & \ \ln\left(\sqrt{x^2 - x + 1}\right)
\end{aligned}$$

▷ Considérons, maintenant, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{2}}{u^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{2}}{u^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u = & \ \frac{3}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u \\
= & \ \frac{3}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}u^2 + 1\right)}\,\mathrm{d}u \\
= & \ \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)}\,\mathrm{d}u \\
= & \ 2\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Faisons le changement de variables $v = \frac{2u}{\sqrt{3}}$ et donc $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2}{\sqrt{3}} \iff \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}v$ et donc :

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{2}}{u^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u = & \ 2\int_{-\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)}\,\mathrm{d}u \\
= & \ 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)} \frac{1}{\left(v^2 + 1\right)}\,\mathrm{d}v \\
= & \ \sqrt{3}\left[\arctan v\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)} \\
= & \ \sqrt{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
= & \ \sqrt{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right) + \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

En remontant, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
I_1(x) = & \ \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right) + \frac{\pi}{6}\right) \\
= & \ \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(1+x)^2}{x^2 - x + 1}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)\right) + \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

14.7.1 Correction des exercices complémentaires

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};+1\right]$ par

$$f(x) = \frac{2}{3+\left[\frac{1}{x}\right]} \quad \text{où } [\bullet] \text{ désigne la partie entière}$$

Faire une représentation graphique de f et calculer $\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(x)\ dx$

Petit rappel simple à faire : pour $x \in \mathbb{R}$, nous avons toujours $[x] \leqslant x < [x]+1$

Donc, pour $x \in \left]\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{3}\right]$, nous avons $3 \leqslant \frac{1}{x} < 4$, et donc $\left[\frac{1}{x}\right] = 3$ d'où $f(x) = \frac{2}{3+3} = \frac{1}{3}$

Par des calculs semblables :

— Si $x \in \left]\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$

— Si $x \in \left]\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$, $f(x) = \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2}$

— $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{7}$

D'où le graphe (figure 14.3)

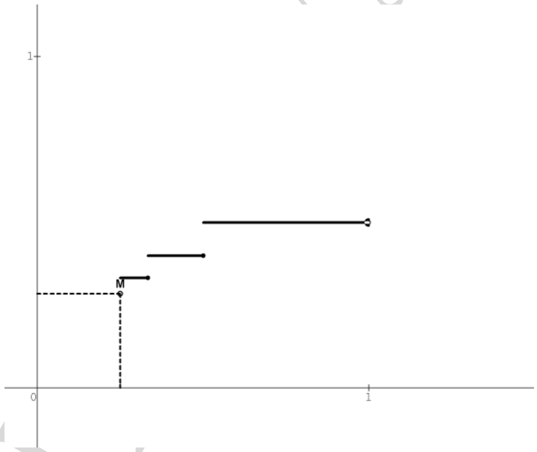

FIGURE 14.3 – Le graphe de f

Et maintenant, il ne reste plus qu'à donner l'intégrale :

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(x)\ dx = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{31}{90}$$

Exercice 9 :

1. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < c$ et soit $f : [a;c] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann. Montrer que :*

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \max\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x; \frac{1}{c-b}\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

Nous appelons $M = \max\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x; \frac{1}{c-b}\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\right\}$. Alors :

▷ Nous avons, de manière évidente :

$$M \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow M(b-a) \geqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

et

$$M \geqslant \frac{1}{c-b}\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow M(c-b) \geqslant \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

▷ En additionnant, nous obtenons :

$$M(b-a) + M(c-b) \geqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow M(c-a) \geqslant \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

C'est à dire $M \geqslant \dfrac{1}{c-a}\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, autrement dit :

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \max\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x; \frac{1}{c-b}\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$

Q.E.D.

2. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions numériques réelles intégrables au sens de Riemann.*

(a) *Montrer que* $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Inf}(f,g)(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{Inf}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t; \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$

Nous avons déjà montré dans le cours que si f et g étaient 2 fonctions numériques réelles intégrables au sens de Riemann alors $\mathrm{Inf}(f,g)$ était une fonction Riemann-Intégrable.

D'autre part, nous avons $\mathrm{Inf}(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$ et donc :

$$\int_a^b \mathrm{Inf}(f,g)(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t\right)$$

Nous avons

$$\left|\int_a^b f(t) - g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t \Longleftrightarrow -\left|\int_a^b f(t)-g(t)\,\mathrm{d}t\right| \geqslant -\int_a^b |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t$$

C'est à dire :

$$\int_a^b \mathrm{Inf}(f,g)(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \left|\int_a^b f(t)-g(t)\,\mathrm{d}t\right|\right)$$

Or, $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)-g(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right|$, et donc :

$$\int_a^b \mathrm{Inf}(f,g)(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right|\right)$$

Or, $\mathrm{Inf}\left(\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t; \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right|\right)$

Nous avons donc bien $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Inf}(f,g)(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{Inf}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t; \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$

(b) *Montrer que* $\displaystyle\int_a^b \sup(f,g)(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \sup\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t; \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$

La démonstration de cette inégalité est absolument semblable ; il suffit de partir de l'égalité $\sup(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ et de dérouler ensuite la démonstration.

Cette question donne une démonstration d'une inégalité qui porrait être intéressante :

$$\boxed{\int_a^b \operatorname{Inf}(f,g)(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \operatorname{Inf}\left(\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t; \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t\right) \leqslant \sup\left(\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t; \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t\right) \leqslant \int_a^b \sup(f,g)(t)\ \mathrm{d}t}$$

Exercice 10 :

1. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue et positive, c'est à dire telle que $(\forall x \in [a;b])\,(f(x) \geqslant 0)$. On suppose de plus que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0$. Démontrez que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[a;b]$*

   Supposons que f soit non nulle sur l'intervalle $[a;b]$, c'est à dire qu'il existe $x_0 \in [a;b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$

   De la continuité de f, pour $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0)|}{2} > 0$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$, si $|x - x_0| < \eta_\varepsilon$, alors $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \dfrac{|f(x_0)|}{2}$

   Remarquons que l'inégalité triangulaire nous permet d'écrire :

   $$||f(x)| - |f(x_0)|| \leqslant |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{|f(x_0)|}{2} \Longrightarrow -\frac{|f(x_0)|}{2} \leqslant |f(x)| - |f(x_0)| \leqslant \frac{|f(x_0)|}{2}$$

   Ainsi si $x \in [a;b]$, si $|x - x_0| < \eta_\varepsilon$, alors $|f(x)| \geqslant \dfrac{|f(x_0)|}{2}$.

   Appelons $\alpha = \max\{a; x_0 - \eta_\varepsilon\}$ et $\beta = \min\{b; x_0 + \eta_\varepsilon\}$; ainsi, si $x \in [a;b]$ est tel que $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ alors $|f(x)| \geqslant \dfrac{|f(x_0)|}{2}$. Nous avons alors :

   $$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{|f(x_0)|}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{|f(x_0)|}{2}(\beta - \alpha) > 0$$

   Ce qui est donc en contradiction avec le fait que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0$

   Ainsi, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f(x) = 0$ et la fonction f est donc nulle sur l'intervalle $[a;b]$.

   Ce que nous voulions.

2. *Soient $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue. On pose $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ et on suppose que*

   $$\int_a^b f(t)\ dt = M(b - a)$$

   Démontrer que f est une fonction constante.

   ⋆ Premièrement, il faut faire remarque que, f étant continue sur $[a;b]$, l'existence de M est bien réelle.

   ⋆ D'autre part, la fonction $g = M - f$ est une fonction continue et positive sur $[a;b]$

   ⋆ De plus $M(b - a) = \displaystyle\int_a^b M\ dt$, et nous avons donc :

   $$M(b-a) - \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b M\ dt - \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b M - f(t)\ dt = \int_a^b g(t)\ dt = 0$$

   Comme g est positive sur $[a;b]$ et que $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt = 0$ on en déduit que g est nulle sur $[a;b]$, et donc, que pour tout $x \in [a;b]$, $M - f(x) = 0 \Longleftrightarrow M = f(x)$. f est donc constante sur l'intervalle $[a;b]$

Exercice 11 :

1. *Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ telle qu'il existe $x_1 \in [a;b]$ telle que $f(x_1) > 0$ et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Démontrer qu'il existe $x_2 \in [a;b]$ telle que $f(x_2) < 0$*

   Supposons que, pour tout $x \in [a;b]$, nous ayions $f(x) \geqslant 0$; alors, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ ce qui est compatible avec $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

   On sait qu'il existe $x_1 \in [a;b]$ telle que $f(x_1) > 0$; comme f est continue, il existe un intervalle $[\alpha;\beta]$, contenant x_1 tel que, pour tout $x \in [\alpha;\beta]$, nous ayions $f(x) > 0$. Soit $m = \inf\limits_{x\in[\alpha;\beta]} f(x)$; alors $m > 0$ et nous avons $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x > m(\beta-\alpha) > 0$, et alors :

   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > m(\beta-\alpha) > 0$$

   Cette inégalité esr contradictoire avec l'hypothèse $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

   Il existe donc $x_2 \in [a;b]$ telle que $f(x_2) < 0$

   De la continuité de f sur l'intervalle $[a;b]$, par le théorème de la valeur intermédiaire, on peut déduire qu'il existe $x_0 \in]x_1;x_2[$ tel que $f(x_0) = 0$

2. *Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ vérifiant $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Montrer que f a un point fixe.*

   Considérons la fonction $g(x) = f(x) - x$

   (a) g est continue sur $[0;1]$ comme somme de fonctions continues sur $[0;1]$

   (b) Nous avons $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) - x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 0$

   (c) Supposons que f n'admette pas de point fixe, c'est à dire qu'il n'existe pas de point $x_0 \in [0;1]$ tel que $f(x_0) = x_0$ ou, ce qui est équivalent, qu'il n'existe pas de point $x_0 \in [0;1]$ tel que $g(x_0) = 0$

   g étant continue sur $[0;1]$, alors g ne change pas de signe sur $[0;1]$; Ainsi, supposons que, pour tout $x \in [0;1]$, $g(x) > 0$. Alors, comme l'intégrale respecte la relation d'ordre, $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x > 0$, ce qui est en contradiction avec le fait que $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

   Ainsi, l'hypothèse que nous avons faite que f n'admette pas de point fixe est fausse, et donc il existe $x_0 \in [0;1]$ tel que $f(x_0) = x_0$

Exercice 12 :

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soient $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions intégrables au sens de Riemann sur l'intervalle $[a;b]$ On suppose que ces deux fonctions vérifient la relation :

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 = \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x \times \int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x$$

Et que $\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x \times \int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x \neq 0$

1. *Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b (f(x) - kg(x))^2\,\mathrm{d}x = 0$*

→ Considérons l'expression $P(k) = \int_a^b (f(x) - kg(x))^2 \, \mathrm{d}x$. En développant l'intérieur de l'intégrale, nous avons :

$$\begin{aligned} P(k) = \int_a^b (f(x) - kg(x))^2 \, \mathrm{d}x &= \int_a^b (f(x))^2 + k^2 (g(x))^2 - 2kf(x)g(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x + k^2 \int_a^b (g(x))^2 \, \mathrm{d}x - 2k \int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x \\ &= k^2 \int_a^b (g(x))^2 \, \mathrm{d}x - 2k \int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

→ P apparaît ainsi comme un polynôme du second degré en k dont nous cherchons des racines ; le discriminant Δ est donné par :

$$\Delta = \left(\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_a^b (g(x))^2 \, \mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x\right) = 0$$

puisque nous avons, par hypothèses $\left[\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x\right]^2 = \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x \times \int_a^b (g(x))^2 \, \mathrm{d}x$

P admet donc une racine double $k_0 = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x}{\int_a^b (g(x))^2 \, \mathrm{d}x}$

→ Ce nombre k_0 que nous venons de trouver vérifie donc $\int_a^b (f(x) - k_0 g(x))^2 \, \mathrm{d}x = 0$

2. *Que conclure si les 2 fonctions f et g sont continues sur l'intervalle $[a; b]$?*

   Si f et g sont continues sur $[a; b]$, alors, d'après l'exercice précédent, $f(x) - k_0 g(x) = 0$, c'est à dire :

$$f(x) = k_0 g(x) \Longleftrightarrow f(x) = g(x) \times \frac{\int_a^b f(x)g(x) \, \mathrm{d}x}{\int_a^b (g(x))^2 \, \mathrm{d}x}$$

Exercice 13 :

1. *Soit f une fonction en escalier sur l'intervalle $[a; b]$. Démontrez que :*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0$$

   (a) Nous allons d'abord démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \sin nx \, dx = 0$

   Cette question n'est pas très difficile : c'est un simple calcul de primitive.

$$\int_a^b \sin nx \, dx = \left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_a^b = \frac{\cos na - \cos nb}{n}$$

   Or, $\left|\dfrac{\cos na - \cos nb}{n}\right| \leqslant \dfrac{2}{n}$ Comme $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, nous en déduisons que $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{\cos na - \cos nb}{n} = 0$, autrement dit, que $\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \sin nx \, dx = 0$

   (b) Soit f une fonction en escalier sur $[a; b]$

Soit $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ une subdivision de $[a\ ;\ b]$ adaptée à f. Pour simplifier, nous écrivons, pour $x \in]a_k\ a_{k+1}[$, $f(x) = \lambda_k$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\sin nx\ dx &= \sum_{k=0}^{p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\sin nx\ dx\\ &= \sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k\int_{a_k}^{a_{k+1}}\sin nx\ dx\end{aligned}$$

En adaptant ce qui a été trouvé ci-dessus, nous pouvons écrire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}}\sin nx\ dx = 0$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\ dx &= \sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k\times 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc, si f est une fonction en escalier sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(x)\sin nx\ dx = 0$

2. *Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. Démontrez que :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\ dx = 0$$

Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$

(a) L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a\ ;\ b]$ est dense dans l'espace des fonctions continues par morceaux sur $[a\ ;\ b]$, c'est à dire qu'il existe φ, fonction en escalier sur $[a\ ;\ b]$ telle que $\forall x \in [a\ ;\ b]$ nous ayons $|f(x) - \varphi(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$

(b) Nous avons $f(x)\sin nx = f(x)\sin nx - \varphi(x)\sin nx + \varphi(x)\sin nx$, et donc :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin nx\ dx\right| &= \left|\int_a^b f(x)\sin nx - \varphi(x)\sin nx\ dx + \int_a^b \varphi(x)\sin nx\ dx\right|\\ &\leqslant \left|\int_a^b f(x)\sin nx - \varphi(x)\sin nx\ dx\right| + \left|\int_a^b \varphi(x)\sin nx\ dx\right|\end{aligned}$$

(c) Nous regardons le premier membre $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\sin nx - \varphi(x)\sin nx\ dx\right|$

Nous avons :

$$\left|\int_a^b f(x)\sin nx - \varphi(x)\sin nx\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,|\sin nx|\ dx \leqslant \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\ dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\times(b-a)$$

(d) Nous regardons le second membre $\left|\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\sin nx\ dx\right|$

Nous savons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\sin nx\ dx\right| = 0$, il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N_\varepsilon$, alors $\left|\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\sin nx\ dx\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

(e) Donc, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N_\varepsilon$, alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\sin nx\ dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On vient donc de montrer que si f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\ dx = 0$

3. *Soit donc f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a\ ;\ b]$. montrer que :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx$$

Le résultat de cet exercice ne manque pas d'intriguer. L'ajout d'une simple valeur absolue modifie la limite !!

La résolution de cette question est très classique :
- ▷ On démontre d'abord le résultat pour les fonctions étagées *(ou en escalier)*
- ▷ Puis, on conclue par densité

(a) On montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b |\sin nx|\ dx = \frac{2}{\pi}\times(b-a)$

Il est intéressant de remarquer que $\int_a^b |\sin nx|\ dx = \int_0^b |\sin nx|\ dx - \int_0^a |\sin nx|\ dx$ et que les deux dernières intégrales sont semblables.

Nous allons donc étudier $\int_0^b |\sin nx|\ dx$ et nous en déduirons le résultat. Nous allons montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^b |\sin nx|\ dx = \frac{2}{\pi}\times b$

i. Par le changement de variable $u = nx$, pour lequel nous avons $dx = \frac{du}{n}$, nous obtenons :

$$\int_0^b |\sin nx|\ dx = \frac{1}{n}\int_0^{nb} |\sin u|\ du$$

ii. Il faut remarquer que la fonction $|\sin u|$ est périodique et de période π, et que, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\int_t^{t+\pi} |\sin u|\ du = \int_0^{\pi} |\sin u|\ du = \int_0^{\pi} \sin u\ du = [\cos u]_0^{\pi} = 2$$

iii. Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\pi \leqslant nb < (k+1)\pi$, c'est à dire que $k = \left[\frac{nb}{\pi}\right]$ où le symbole $[\bullet]$ désigne la partie entière. Alors :

$$\int_0^{nb} |\sin u|\ du = \int_0^{k\pi} |\sin u|\ du + \int_{k\pi}^{nb} |\sin u|\ du$$

iv. Regardons $\int_0^{k\pi} |\sin u|\ du$

$$\begin{aligned}\int_0^{k\pi} |\sin u|\ du &= \sum_{j=0}^{k-1}\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin u|\ du \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\int_0^{\pi} |\sin u|\ du = 2k\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{n}\int_0^{k\pi} |\sin u|\ du = \frac{2k}{n}$

v. Il faut maintenant rechercher $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{k}{n}$

Nous avons $\left[\dfrac{nb}{\pi}\right]\leqslant\dfrac{nb}{\pi}<\left[\dfrac{nb}{\pi}\right]+1$, c'est à dire

$$\frac{nb}{\pi}-1<\left[\frac{nb}{\pi}\right]\leqslant\frac{nb}{\pi}\Longleftrightarrow\frac{b}{\pi}-\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\left[\frac{nb}{\pi}\right]\leqslant\frac{b}{\pi}$$

C'est à dire

$$\frac{b}{\pi}-\frac{1}{n}<\frac{k}{n}\leqslant\frac{b}{\pi}$$

Et nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{k}{n}=\dfrac{b}{\pi}$

Et on conclue donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{k\pi}|\sin u|\ du=\dfrac{2b}{\pi}$

vi. Regardons, maintenant $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{k\pi}^{nb}|\sin u|\ du$

Nous avons :

$$\left|\frac{1}{n}\int_{k\pi}^{nb}|\sin u|\ du\right|=\frac{1}{n}\int_{k\pi}^{nb}|\sin u|\ du\leqslant\frac{nb-k\pi}{n}$$

De l'inégalité $k\pi\leqslant nb<(k+1)\,\pi$ on déduit $0\leqslant nb-k\pi<\pi$, et donc nous déduisons que

$$\left|\frac{1}{n}\int_{k\pi}^{nb}|\sin u|\ du\right|\leqslant\frac{nb-k\pi}{n}\leqslant\frac{\pi}{n}$$

Et nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{k\pi}^{nb}|\sin u|\ du=0$

vii. En conclusion, nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b|\sin nx|\ dx=\dfrac{2}{\pi}\times b$

De l'égalité $\displaystyle\int_a^b|\sin nx|\ dx=\int_0^b|\sin nx|\ dx-\int_0^a|\sin nx|\ dx$, nous déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b|\sin nx|\ dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^b|\sin nx|\ dx-\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^a|\sin nx|\ dx$, c'est à dire que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b|\sin nx|\ dx=\frac{2}{\pi}\times b-\frac{2}{\pi}\times a=\frac{2}{\pi}\times(b-a)$$

Ce que nous voulions.

(b) Soit f une fonction en escalier sur $[a\ ;\ b]$

Soit $a=a_0<a_1<\cdots<a_p=b$ une subdivision de $[a\ ;\ b]$ adaptée à f. Pour simplifier, nous écrivons, pour $x\in\,]a_k\ a_{k+1}[$, $f(x)=\lambda_k$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx &= \sum_{k=0}^{p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}f(x)\,|\sin nx|\ dx\\ &= \sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k\int_{a_k}^{a_{k+1}}|\sin nx|\ dx\end{aligned}$$

En adaptant ce qui a été trouvé ci-dessus, nous pouvons écrire que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{a_k}^{a_{k+1}}|\sin nx|\ dx=\frac{2\,(a_{k+1}-a_k)}{\pi}$$

De telle sorte que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx &= \sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k\times\frac{2(a_{k+1}-a_k)}{\pi}\\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k(a_{k+1}-a_k)\\ &= \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx\end{aligned}$$

(c) <u>Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\ ;\ b]$</u>

Nous allons conclure la question en montrant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx$

Soit $\varepsilon>0$

Nous allons essayer de majorer $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx-\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx\right|$

i. L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a\ ;\ b]$ est dense dans l'espace des fonctions continues par morceaux sur $[a\ ;\ b]$, c'est à dire qu'il existe φ, fonction en escalier sur $[a\ ;\ b]$ telle que $\forall x\in[a\ ;\ b]$ nous ayons $|f(x)-\varphi(x)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$

ii. Nous allons évaluer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx-\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx$ en introduisant des quantités qui pourront nous aider :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx-\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx = &\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx-\int_a^b \varphi(x)\,|\sin nx|\ dx\\ &+\int_a^b \varphi(x)\,|\sin nx|\ dx-\frac{2}{\pi}\int_a^b\varphi(x)\ dx\\ &+\frac{2}{\pi}\int_a^b\varphi(x)\ dx-\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx\end{aligned}$$

Et en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx-\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant &\left|\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx-\int_a^b \varphi(x)\,|\sin nx|\ dx\right|\\ &+\left|\int_a^b \varphi(x)\,|\sin nx|\ dx-\frac{2}{\pi}\int_a^b\varphi(x)\ dx\right|\\ &+\left|\frac{2}{\pi}\int_a^b\varphi(x)\ dx-\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx\right|\end{aligned}$$

iii. Etudions le premier terme $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx-\int_a^b \varphi(x)\,|\sin nx|\ dx\right|$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\ dx-\int_a^b \varphi(x)\,|\sin nx|\ dx\right| &= \left|\int_a^b (f(x)-\varphi(x))\,|\sin nx|\ dx\right|\\ &\leqslant \int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,|\sin nx|\ dx\\ &\leqslant \int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\ dx\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a)\text{ (lié à la densité des fonctions étagées)}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

Cette majoration est une majoration uniforme sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$

iv. Etudions le second terme $\left|\int_a^b \varphi(x)\left|\sin nx\right|\ dx - \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(x)\ dx\right|$

Nous avons montré que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi(x)\left|\sin nx\right|\ dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(x)\ dx$.

Il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N_\varepsilon$, alors $\left|\int_a^b \varphi(x)\left|\sin nx\right|\ dx - \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(x)\ dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$

v. Pour le troisième terme $\left|\frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(x)\ dx - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx\right|$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(x)\ dx - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx\right| &= \left|\frac{2}{\pi}\int_a^b (\varphi(x) - f(x))\ dx\right| \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\int_a^b \left|\varphi(x) - f(x)\right|\ dx \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\times\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) \text{ (toujours lié à la densité des fonctions étagées} \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\times\frac{\varepsilon}{3} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

A nouveau, cette majoration est une majoration uniforme sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$

Ainsi, pour un $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N_\varepsilon$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)\left|\sin nx\right|\ dx - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Nous venons donc de montrer que si f une fonction continue par morceaux sur $[a\ ;\ b]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\left|\sin nx\right|\ dx = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\ dx$

Exercice 14 :

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue telle que $\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| = \int_a^b \left|f(t)\right|\ dt$. Montrer que f a un signe constant sur l'intervalle $[a;b]$. La réciproque est-elle vraie ?

1. Pour commencer, supposons $f(t) \geqslant 0$

   Alors $\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| = \int_a^b f(t)\ dt$, et l'égalité $\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| = \int_a^b \left|f(t)\right|\ dt$ devient

   $$\int_a^b \left|f(t)\right|\ dt = \int_a^b f(t)\ dt \Longleftrightarrow \int_a^b \left|f(t)\right| - f(t)\ dt = 0$$

   Comme nous avons $f \leqslant |f|$, c'est à dire $\left|f(t)\right| - f(t) \geqslant 0$, de l'égalité $\int_a^b \left|f(t)\right| - f(t)\ dt = 0$, nous tirons que $\left|f(t)\right| - f(t) = 0$, c'est à dire que f est positive sur l'intervalle $[a;b]$
2. Si nous supposons, maintenant que $f(t) \leqslant 0$, la démonstration est tout à fait semblable.
3. Et évidemment, la réciproque est vraie!!!

Exercice 15 :

Seconde formule de la moyenne

Nous nous mettons dans les hypothèses suivantes :

- $\Rightarrow$ *a et b sont 2 nombres réels tels que $a < b$;*
- $\Rightarrow$ *$f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue*

⇒ On appelle $m = \inf\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ *et* $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$
On suppose de plus que $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction positive et intégrable.*

1. *Montrer que* $F : [a;b] \to \mathbb{R}$ *définie par :* $F(x) = f(x) \displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ *est continue, et trouver ses extrema en fonction de* m *et* M

   Puisque g est positive et intégrable sur $[a;b]$, nous avons $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \geqslant 0$; c'est donc un nombre positif ; appelons le k. Donc, $F(x) = kf(x)$, et, comme f est continue, F l'est aussi.

   Bien entendu, du fait que g est positive, nous avons $m \displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \leqslant F(x) \leqslant M \int_a^b g(t)\,dt$

2. *Montrer que nous avons* $m \displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \leqslant M \int_a^b g(t)\,dt$

   Nous avons, bien entendu, $m \leqslant f(t) \leqslant M$; en multipliant par $g(t) \geqslant 0$, nous obtenons :

   $$mg(t) \leqslant f(t)\,g(t) \leqslant Mg(t)$$

   En passant à l'intégration, nous obtenons le résultat.

3. *En déduire qu'il existe* $c \in [a;b]$ *tel que* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = f(c) \int_a^b g(t)\,dt$

   Nous venons de montrer que le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$ était compris entre les extrema de F. F étant une fonction continue, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, F atteint ses bornes et toutes valeurs comprises entre ses bornes. Il existe donc $c \in [a;b]$ tel que $F(c) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$, c'est à dire tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = f(c) \int_a^b g(t)\,dt$

4. *Que pouvez vous dire lorsque* g *est la fonction constante toujours égale à 1 ?*

   Si g est la fonction constante toujours égale à 1, alors g est positive et intégrable et il existe donc $c \in [a;b]$ tel que

   $$\int_a^b f(t)\,dt = f(c) \int_a^b dt = (b-a)\,f(c)$$

   C'est la première formule de la moyenne

Exercice 16 :

1. *Soient* a *et* b *2 nombres réels tels que* $a < b$ *et soit* $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue. Soit* $u : [a;b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et strictement positive, c'est à dire telle que pour tout* $x \in [a;b]$, $u(x) > 0$. *Montrer que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^n\, u(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} = \sup\limits_{x \in [a;b]} |f(x)|$

   (a) f est continue sur l'intervalle $[a;b]$, et donc, par composée des applications, $|f|$ est aussi continue sur l'intervalle $[a;b]$ et donc $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} |f(x)|$ est bien défini et est même atteint.

   Il existe donc $x_0 \in [a;b]$ tel que $|f(x_0)| = M$

   (b) Si $M = 0$, alors, bien évidemment, pour tout $x \in [a;b]$ nous avons $f(x) = 0$ et donc $\left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^n\, u(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} = 0$ et l'inégalité est vérifiée

(c) Supposons $M > 0$.
Soit $0 < \varepsilon < M$
Comme il existe $x_0 \in [a;b]$ tel que $|f(x_0)| = M$, il existe donc un intervalle $[\alpha;\beta]$, contenant x_0, tel que, pour tout $x \in [\alpha;\beta]$, nous ayions $M - \varepsilon \leqslant |f(x)| \leqslant M$
Nous en déduisons donc :
$\rightarrow$ Pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $|f(x)|^n \leqslant M^n$ et donc $|f(x)|^n u(x) \leqslant M^n u(x)$
$\rightarrow$ Pour tout $x \in [\alpha;\beta]$, nous avons $(M-\varepsilon)^n \leqslant |f(x)|^n$ et donc $(M-\varepsilon)^n u(x) \leqslant |f(x)|^n u(x)$

(d) Comme la fonction $|f(x)|^n u(x)$ est positive sur l'intervalle $[a;b]$ et que $[\alpha;\beta] \subset [a;b]$, nous avons :

$$0 \leqslant \int_\alpha^\beta |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x$$

Et donc

$$(M-\varepsilon)^n \int_\alpha^\beta u(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M^n \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$$

(e) La fonction $r(x) = x^{\frac{1}{n}}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, et donc :

$$(M-\varepsilon)\left(\int_\alpha^\beta u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M\left(\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

(f) L'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta u(x)\,\mathrm{d}x$ est un nombre $K > 0$; et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K^{\frac{1}{n}} = 1$, c'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_\alpha^\beta u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

De même, et pour les mêmes raisons, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = 1$

$\Rightarrow$ Il existe donc un entier $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \geqslant N_1$, nous ayions :

$$1-\varepsilon \leqslant \left(\int_\alpha^\beta u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant 1+\varepsilon$$

C'est à dire que si $n \geqslant N_1$, alors :

$$(M-\varepsilon)(1-\varepsilon) \leqslant (M-\varepsilon)\left(\int_\alpha^\beta u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

C'est à dire, tous calculs faits :

$$M - \varepsilon(M+1-\varepsilon) \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

$\Rightarrow$ De même, il existe un entier $N_2 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \geqslant N_2$, nous ayions :

$$1-\varepsilon \leqslant \left(\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant 1+\varepsilon$$

C'est à dire que si $n \geqslant N_2$, alors :

$$\left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M\left(\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M(1+\varepsilon)$$

C'est à dire, tous calculs faits :

$$\left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M + M\varepsilon$$

(g) Ainsi, si $N \geqslant \max\{N_1, N_2\}$, pour tout entier $n \geqslant N$, nous avons :

$$M - \varepsilon(M + 1 - \varepsilon) \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M + M\varepsilon$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$-\varepsilon(M + 1 - \varepsilon) \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} - M \leqslant M\varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = M$,

c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \sup\limits_{x\in[a;b]} |f(x)|$

Quelques commentaires

- ▷ L'énoncé ci-dessus est un énoncé très général englobant plusieurs autres résultats. Nous pourrions encore trouver plus général :
  Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. Soit $u : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive, c'est à dire telle que pour tout $x \in [a;b]$, $u(x) > 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$. Alors :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^\lambda u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\lambda}} = \sup_{x\in[a;b]} |f(x)|$$

  La généralisation résidant dans le fait que λ est réel, mais la démonstration est semblable
- ▷ Il est possible de faire jouer plusieurs rôles à la fonction u :
  - ⋆ Si u est la fonction constante $u(x) = 1$, nous obtenons le résultat ultra-classique :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{x\in[a;b]} |f(x)|$$

  - ⋆ Si u est la fonction constante $u(x) = \dfrac{1}{b-a}$, nous obtenons le résultat :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{x\in[a;b]} |f(x)|$$

    En fait, nous nous intéressons, ici, à la valeurs moyenne de la fonction $F(x) = |f(x)|^n$ sur l'intervalle $[a;b]$
- ▷ la fonction u est, en fait, une fonction de poids.

2. *Dans cette question, on suppose que, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \neq 0$.*

   Donner alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^{-n} u(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{-1}{n}}$

$\longrightarrow$ On pose $g(x) = \dfrac{1}{|f(x)|}$; alors, pour tout $x \in [a;b]$, $g(x) > 0$ et $|f(x)|^{-n} = (g(x))^n$

$\longrightarrow$ D'autre part :

$$\left(\int_a^b |f(x)|^{-n} u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{-1}{n}} = \frac{1}{\left(\int_a^b |f(x)|^{-n} u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\left(\int_a^b (g(x))^n u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$\longrightarrow$ Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^{-n} u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{-1}{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (g(x))^n u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sup\limits_{x\in[a;b]} g(x)}$$

$\longrightarrow$ Or, comme $|f|$ est continue sur l'intervalle $[a;b]$, il existe des nombres m et M tels que $m \leqslant |f(x)| \leqslant M$. De plus, comme pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $|f(x)| > 0$, nous avons aussi $m > 0$. Ainsi :

$$m \leqslant |f(x)| \leqslant M \Longleftrightarrow \frac{1}{M} \leqslant \frac{1}{|f(x)|} \leqslant \frac{1}{m} \Longleftrightarrow \frac{1}{M} \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{m}$$

Et donc, $\sup\limits_{x\in[a;b]} g(x) = \dfrac{1}{m}$

Nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^{-n} u(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{-1}{n}} = m = \inf\limits_{x\in[a;b]} |f(x)|$

Exercice 17 :

1. *En utilisant les sommes de Riemann, calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$

En écrivant $x_k = \dfrac{k}{n}$ et $f(x) = \ln(1+x)$, nous sommes devant une somme de Riemann du type $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$ qui admet pour limite $\int_0^1 f(x)\ dx$. Ici, ce sera donc $\int_0^1 \ln(1+x)\ dx$ qui se calcule par une intégration par parties. Nous trouvons : $\int_0^1 \ln(1+x)\ dx = 2\ln 2 - 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right) = 2\ln 2 - 1 = \ln\left(\dfrac{4}{e}\right)$

2. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Pour nous simplifier la vie, nous écrivons : $A_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Dès lors, nous avons :

$$\begin{aligned}
\ln A_n &= \frac{1}{n}\left\{\ln(2n!) - \ln n! - n\ln n\right\}\\
&= \frac{1}{n}\left\{\sum_{k=2}^{2n}\ln k - \sum_{k=2}^{n}\ln k - n\ln n\right\}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}(\ln k - \ln n)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\ln\frac{k}{n}
\end{aligned}$$

On pose alors $k' = k - n \iff k = k' + n$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\ln A_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \ln \frac{k}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k'=1}^{n} \ln\left(\frac{k'+n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k'=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k'}{n}\right)\end{aligned}$$

D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{4}{e}\right)$, donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}$

Exercice 18 :

Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}$

Premièrement, remarquons que $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)} = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$, et qu'en posant $A_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$, nous allons, comme tout à l'heure, utiliser le logarithme de A_n.

$$\begin{aligned}\ln A_n &= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\end{aligned}$$

En écrivant $x_k = \frac{k}{n}$ et $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$, nous sommes devant une somme de Riemann du type $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ qui admet pour limite $\int_0^1 f(x)\ dx$. Ici, ce sera donc $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\ dx$ qui se calcule par une intégration par parties.

$$\begin{aligned} u &= \ln\left(1+x^2\right) & u' &= \frac{2x}{1+x^2} \\ v' &= 1 & v &= x\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\ dx &= \left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\ dx \\ &= \ln 2 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\ dx\end{aligned}$$

Calculons maintenant $\int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\ dx$

Nous avons : $\int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\ dx = \int_0^1 \frac{2x^2+2-2}{1+x^2}\ dx = \int_0^1 2 - \frac{2}{1+x^2}\ dx = \left[2x - 2\arctan x\right]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$

En conclusion, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln A_n = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$ et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)} = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$

Exercice 19 :

1. *On considère la fonction* $f : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{x}$ *Démontrer que, pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, *nous avons :* $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$

Nous allons utiliser la décroissance de f sur l'intervalle $[k\ ;\ k+1]$. Nous avons, pour $t \in [k\ ;\ k+1]$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

Et, en passant à l'intégration,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} \Longleftrightarrow \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

2. *On appelle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Démontrer que $\ln(n+1) \leqslant S_n$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$*

En sommant de $k = 1$ à n l'inégalité $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &\Longleftrightarrow \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant S_n \\
&\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) \leqslant S_n \\
&\Longleftrightarrow S_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) \leqslant S_n
\end{aligned}$$

Nous avons, en particulier $\ln(n+1) \leqslant S_n$, ce qui montre que $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

3. *Démontrer qu'en $+\infty$, $S_n \underset{+\infty}{\simeq} \ln n$*

On réutilise l'inégalité $S_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) \leqslant S_n$ que l'on peut écrire autrement :

$$\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}$$

En divisant par $\ln n$, nous obtenons :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leqslant \frac{S_n}{\ln n} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln n} + \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln n\,(n+1)}$$

Or :

— $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$

— $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln n\,(n+1)} = 0$

Et, donc, par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\ln n} = 1$, ce qui montre qu'en $+\infty$, $S_n \underset{+\infty}{\simeq} \ln n$

4. *Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Donner la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\alpha + k\beta}$.*

Nous avons : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\alpha + k\beta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha + \beta \frac{k}{n}}$.

En écrivant $x_k = \frac{k}{n}$ et $f(x) = \frac{1}{\alpha + \beta x}$, nous sommes devant une somme de Riemann du type $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ qui admet pour limite $\int_0^1 f(x)\ dx$. Ici, ce sera donc $\int_0^1 \frac{1}{\alpha + \beta x}\ dx$ qui s'intègre très facilement.

Nous avons $\int_0^1 \frac{1}{\alpha + \beta x}\ dx = \frac{1}{\beta} \int_0^1 \frac{\beta}{\alpha + \beta x}\ dx = \frac{1}{\beta} [\ln(\alpha + \beta x)]_0^1 = \frac{1}{\beta} (\ln(\alpha + \beta) - \ln(\alpha)) = \frac{1}{\beta} \ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n\alpha+k\beta}=\dfrac{1}{\beta}\ln\left(1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$

Faire le lien avec les questions précédentes

Le lien avec les questions précédente n'est pas très évident. Par contre, on peut dire que si on regroupe n termes qui forment une progression du type $\alpha n+k\beta$, la somme de l'inverse de ces n termes a une limite finie alors que la somme des inverses tend vers $+\infty$

Exercice 20 :

Démontrer que $\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\underset{+\infty}{\approx}2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n}$

Voilà un exercice qui ne pose pas tant de difficultés !!

▷ Tout d'abord, nous avons :

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$$

Et, nous avons là, quelque chose qui ressemble à une somme de Riemann.
Ben, en fait, pas vraiment !! Nous avons, en fait

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\frac{\sqrt{n}}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\right)$$

▷ Nous allons donc étudier $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$

Par les théorèmes des sommes de Riemann, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Or, $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u=\left[2\sqrt{u}\right]_1^2=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

▷ Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=2\left(\sqrt{2}-1\right)$, et de l'étude précédente, nous tirons

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}\underset{+\infty}{\approx}2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n}$$

Ce que nous voulions.

Exercice 21 :

Sans utiliser de primitive, calculer, pour $a<b$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b e^x\,\mathrm{d}x$

Nous allons utiliser les sommes de Riemann.

⇒ Nous subdivisons l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles réguliers de pas $\dfrac{b-a}{n}$; les points de la subdivision sont donc $x_k=a+k\times\dfrac{b-a}{n}$.

Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}e^{a+k\times\frac{b-a}{n}}=\displaystyle\int_a^b e^x\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow$ Nous avons : $e^{a+k\times\frac{b-a}{n}} = e^a \times e^{k\times\frac{b-a}{n}} = e^a \times \left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^k$. Donc :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{a+k\times\frac{b-a}{n}} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^a \times \left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^k = \frac{e^a\,(b-a)}{n} \times \frac{1-e^{b-a}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}$$

$\Rightarrow$ Nous avons

$$\frac{e^a\,(b-a)}{n} \times \frac{1-e^{b-a}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}} = e^a\left(1-e^{b-a}\right) \times \frac{\frac{b-a}{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}} = \left(e^a - e^b\right) \times \frac{\frac{b-a}{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}$$

Il nous faut donc calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{b-a}{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}$

Nous avons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-e^x} = -1$, d'où, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b-a}{n} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{b-a}{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}} = -1$

$\Rightarrow$ D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{a+k\times\frac{b-a}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(e^a-e^b\right)\times\dfrac{\frac{b-a}{n}}{1-e^{\frac{b-a}{n}}} = e^b - e^a$, c'est à dire : $\displaystyle\int_a^b e^x\,\mathrm{d}x = e^b - e^a$.

Ce qui ne nous surprend pas !!

Exercice 22 :

Soient $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann sur $[0;1]$ et $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et à dérivée bornée. Il faut montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

La question semble, quand même, assez bizarre puisque d'après les théorèmes sur les sommes de Riemann, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour résoudre la question, nous allons prendre des chemins de traverse. Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = {} & \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) + \\ & \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Et en passant aux valeurs absolues :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant {} & \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \\ & \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Etudions $\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)\right|$

Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\left|g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right|\end{aligned}$$

- $\star$ Appliquons le théorème des accroissements finis à g entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$.

  Il existe donc $c \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ tel que : $g'(c) = \dfrac{g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

  Comme la dérivée est majorée, nous avons $\left|\dfrac{g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right| \leqslant M$, c'est à dire :

$$\left|g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{n}$$

  Et nous avons donc :

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right)$$

- $\star$ La fonction f est Riemann-intégrable sur $[0;1]$, et donc $|f|$ l'est aussi.

  D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$

  Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{M}{n}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right) = 0$

$\Rightarrow$ Nous avons, d'après la remarque de début d'exercice

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right| = 0$$

$\Rightarrow$ En utilisant les règles d'addition dans les limites, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right| = 0$$

C'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$

Ce que nous voulions

Exercice 23 :

Soient $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0;1]$ et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Il faut montrer que :

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi\circ f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. φ étant convexe sur $\mathbb{R}$, alors, pour tout $y_i \in \mathbb{R}$ où $i = 1, \ldots, n$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$ avec $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$, nous avons :

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi(y_i)$$

2. φ étant convexe sur $\mathbb{R}$, est aussi continue sur $\mathbb{R}$ et donc $\varphi \circ f$ est aussi continue sur $[0;1]$, donc intégrable au sens de Riemann sur $[0;1]$ et donc $\displaystyle\int_0^1 \varphi \circ f(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie.
3. Soit $x_k = \dfrac{k}{n}$, pour $k = 0, \dots, n$ une subdivision de $[0;1]$, nous avons alors, par la convexité de φ :

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(f(x_i))$$

4. f continue sur $[0;1]$ est donc intégrable au sens de Riemann sur $[0;1]$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

De la continuité de φ, nous déduisons :

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right) = \varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

5. $\varphi \circ f$ étant intégrable au sens de Riemann sur $[0;1]$ nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(f(x_i)) = \int_0^1 \varphi \circ f(x)\,\mathrm{d}x$$

6. Les limites conservant la relation d'ordre, nous avons donc

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi \circ f(x)\,\mathrm{d}x$$

C'est l'inégalité de Jensen

Ce que nous voulions

Exercice 24 :

Soient $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$ et telle que cette dérivée soit bornée sur $]0;1[$. On appelle $M = \sup\limits_{x\in]0;1[} |f'(x)|$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}$$

1. Tout d'abord, il est bon de remarquer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$
2. On peut poursuivre ces préliminaires en remarquant aussi que $\dfrac{1}{n} \times f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\,\mathrm{d}x$
3. De telle sorte que

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\,\mathrm{d}x$$

4. D'après le théorème des accroissements finis appliqué entre x et $\frac{k}{n}$, il existe c tel que $\dfrac{f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)}{x-\frac{k}{n}}=f'(c)$
   De l'hypothèse de majoration de f', nous pouvons écrire :
   $$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant M\left|x-\frac{k}{n}\right|$$
   De telle sorte que
   $$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|x-\frac{k}{n}\right|\,\mathrm{d}x$$
5. Calculons maintenant $\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|x-\frac{k}{n}\right|\,\mathrm{d}x$
   C'est finalement assez simple, puisque :
   $$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|x-\frac{k}{n}\right|\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{k}{n}-x\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{\left(\frac{k}{n}-x\right)^2}{2}\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{2n^2}$$
6. Et donc $\displaystyle M\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|x-\frac{k}{n}\right|\,\mathrm{d}x=M\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n^2}=\frac{M}{2n}$
7. En conclusion, nous avons bien $\displaystyle\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}$

Ce que nous voulions

Exercice 25 :

Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$. On considère la subdivision de l'intervalle $[a;b]$ à pas constant $x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$ pour $k=0,\ldots,n$. Soit $f:[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$. Donner :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\right)\right)$$

1. Nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Que se passe-t-il donc lorsqu'on multiplie par n ?...C'est l'intérêt de cet exercice
2. Comme dans l'exercice précédent, nous avons
   $$\frac{b-a}{n}f(x_k)=\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_k)\,\mathrm{d}x\text{ et }\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)\,\mathrm{d}x$$
3. De telle sorte que :
   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)-f(x_k)\,\mathrm{d}x$$

4. Etudions de manière plus précise $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) - f(x_k)\ \mathrm{d}x$

   Nous appliquons le théorème des accroissements finis entre x et x_k. Il existe donc c compris entre x et x_k tel que :
$$\frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} = f'(c)$$

5. f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$, f' est donc continue sur $[a;b]$, et il existe donc $m_k \in \mathbb{R}$ et $M_k \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in [x_{k-1}; x_k]$, nous ayions $m_k \leqslant f'(c) \leqslant M_k$.
   Mieux, il existe $c_k \in [x_{k-1}; x_k]$ et $d_k \in [x_{k-1}; x_k]$ tels que $m_k = f'(c_k)$ et $M_k = f'(d_k)$

6. Donc, nous avons $m_k \leqslant \dfrac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} \leqslant M_k \Longleftrightarrow m_k(x_k - x) \leqslant f(x_k) - f(x) \leqslant M_k(x_k - x)$ et donc, en intégrant, nous avons :
$$m_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) - f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant M_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)\ \mathrm{d}x$$

7. Calculons maintenant $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)\ \mathrm{d}x$
$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{(x_k - x)^2}{2}\right]_{x_{k-1}}^{x_k} = \frac{(b-a)^2}{2n^2}$$
   de telle sorte que :
$$\frac{m_k (b-a)^2}{2n^2} \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) - f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{M_k (b-a)^2}{2n^2}$$

8. Et maintenant, en passant à la sommation :
$$\frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} m_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) - f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k$$
   Or, nous avons $\displaystyle\frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f'(c_k)$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f'(c_k) = \int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x$ puisque f' est continue et donc Riemann-intégrable sur l'intervalle $[a;b]$

9. Ainsi, $\displaystyle n\left(\frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f'(c_k)\right) = n \times \frac{(b-a)}{2n} \times \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f'(c_k)\right) = \frac{(b-a)}{2} \times \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f'(c_k)\right)$.
   De telle sorte que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f'(c_k)\right) = \frac{(b-a)}{2} \int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x$

10. De la même manière, nous démontrerions que
$$\lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k\right) = \lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f'(d_k)\right) = \frac{(b-a)}{2} \int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x$$

11. Ainsi $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) - f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{(b-a)}{2} \int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x$

12. En conclusion,
$$\lim_{n \to +\infty} \left(n\left(\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right)\right) = -\frac{(b-a)}{2} \int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x$$
   Ou encore, écrit de manière plus positive :
$$\lim_{n \to +\infty} \left(n\left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right)\right) = \frac{(b-a)}{2} \int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x$$

Exercice 26 :

Calculer $\int_0^{\pi} e^{(1+i)t}\,dt$. *En déduire* $\int_0^{\pi} e^t \cos t dt$

Voilà un calcul tout simple :

$$\int_0^{\pi} e^{(1+i)t}\,dt = \frac{1}{1+i}\left[e^{(1+i)t}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{1+i}\left(e^{(1+i)\pi}-1\right) = \frac{-1}{1+i}\left(e^{\pi}+1\right)$$

En déduire $\int_0^{\pi} e^t \cos t dt$

C'est simplement la partie réelle de $\int_0^{\pi} e^{(1+i)t}\,dt$; donc :

$$\int_0^{\pi} e^t \cos t\,dt = \operatorname{Re}\left(\frac{-1\,(1-i)}{2}\left(e^{\pi}+1\right)\right) = \frac{-1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$$

Exercice 27 :

Le symbole $\int f(t)\,dt$ *désigne l'ensemble des primitives. Donner :*

1. $\int \frac{dx}{\text{ch}x}$

   Nous avons : $\int \frac{dx}{\text{ch}x} = \int \frac{2}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{2e^x}{1+e^{2x}}dx$.
   En faisant le changement de variables $u=e^x$, nous obtenons $du = e^x dx$ et l'intégrale devient :

   $$\int \frac{2e^x}{1+e^{2x}}dx = 2\int \frac{du}{1+u^2} = 2\arctan u + \lambda = 2\arctan e^x + \lambda \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

2. $\int \frac{\text{ch}x}{\text{ch}x - \text{sh}x}dx$

   On commence par écrire : $\frac{\text{ch}x}{\text{ch}x-\text{sh}x} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \times \frac{2}{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}} = \frac{e^x+e^{-x}}{2e^{-x}} = \frac{e^{2x}}{2}+\frac{1}{2}$.
   Le calcul de primitive devient évident

3. $\int e^{\sqrt{x}}dx$

   On fait le changement de variable $u=\sqrt{x}$ et donc $dx = 2udu$, de telle sorte que notre intégrale devient : $\int e^{\sqrt{x}}dx = \int 2ue^u du$ que l'on calcule par une intégration par parties.

   $$\begin{array}{ll} X = u & X' = 1 \\ Y' = e^u & Y = e^u \end{array}$$

   Donc, $\int 2ue^u du = 2\left(ue^u - \int e^u du\right) = 2e^u(u-1)+\lambda$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. Nous en déduisons que :

   $$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+\lambda \text{ avec } \lambda\in\mathbb{R}$$

Exercice 28 :

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[-1;+1]$. Démontrer que la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_0^{\sin x} f(t)\,dt$$

est dérivable et calculer sa dérivée.

C'est une question classique, mais importante.

Soit $G(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. f étant définie, et surtout continue sur $[-1;+1]$, G est définie, continue et dérivable sur $[-1;+1]$, et de dérivée $G'(x) = f(x)$.

F apparaît donc comme la composée $F(x) = G(\sin x)$ de 2 fonctions dérivables. La fonction $\sin x$ étant à valeurs dans $[-1;+1]$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est donnée par :

$$F'(x) = G'(\sin x) \times \cos x = f(\sin x) \times \cos x$$

Exercice 29 :

On considère la fonction partie entière notée $[x]$. Pour $x > 0$, on considère $F(x) = \int_0^x [t]\,dt$

1. *Calculer F*

   Supposons $x \geqslant 0$; alors, nous avons $[x] \leqslant x < [x] + 1$, et nous avons :

   $$F(x) = \int_0^x [t]\,dt = \int_0^{[x]} [t]\,dt + \int_{[x]}^x [t]\,dt = \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_k^{k+1} [t]\,dt + \int_{[x]}^x [t]\,dt = \sum_{k=0}^{[x]-1} \int_k^{k+1} k dt + \int_{[x]}^x [x]\,dt$$

   Nous avons donc :

   $$F(x) = \sum_{k=0}^{[x]-1} k + [x](x - [x]) = \frac{([x]-1)[x]}{2} + [x](x - [x]) = \frac{[x]}{2}(2x - [x] - 1)$$

   Démontrez que F est continue.

   Il suffit de vérifier qu'elle est continue en $n_0 \in \mathbb{Z}$

2. *Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?*

   Elle n'est pas dérivable en $n_0 \in \mathbb{Z}$; on trouve une dérivée à droite différente de la dérivée à gauche.

   Que manque-t-il pour qu'elle soit dérivable ? ?

   La fonction partie entière a des points de discontinuité en $n_0 \in \mathbb{Z}$. pour que F soit dérivable, il manque à la fonction partie entière d'être continue.

Exercice 30 :

Soit k un réel strictement positif. On considère la fonction F définie pour $x > 0$ par : $F(x) = \int_0^1 s^k \sin sx\,ds$

1. *Etablir l'égalité $F(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k \sin u\,du$*

   Il suffit de faire le changement de variable $u = sx$, et alors $\frac{du}{ds} = x \Longleftrightarrow \frac{du}{x} = ds$

   A ce moment là :

   $$F(x) = \int_0^1 s^k \sin sx\,ds = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k \sin u \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k \sin u du$$

   Ce que nous voulions

2. *En déduire que F est dérivable pour $x > 0$ et vérifie la relation $xF'(x) + (k+1)F(x) = \sin x$*

   La fonction numérique $u^k \sin u$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ et donc la fonction $H(x) = \int_0^x u^k \sin u du$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ de dérivée $H'(x) = x^k \sin x$

Donc, $F(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}} H(x)$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$. Touts calculs faits, nous trouvons $F'(x) = \dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{k+1}{x} F(x)$ ce qui équivaut, sur $\mathbb{R}^{*+}$ à $xF'(x) + (k+1) F(x) = \sin x$

Il est tout à fait possible de calculer F en résolvant l'équation différentielle linéaire du premier ordre $xy' + (k+1) y = \sin x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$

Exercice 31 :

On considère une fonction f, continue sur l'intervalle $[0, 1]$. On définit F sur l'intervalle $[0, 1]$ par : $F(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t)\, dt$

1. *Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer F''*

   Soit $x \in [0, 1]$; alors :

   $$F(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t)\, dt = \int_0^x t f(t)\, dt + \int_x^1 x f(t)\, dt = \int_0^x t f(t)\, dt - x \int_1^x f(t)\, dt$$

   F est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables. Nous avons :

   $$F'(x) = x f(x) - \int_1^x f(t)\, dt - x f(x) = -\int_1^x f(t)\, dt$$

   Comme f est continue, F' est à nouveau dérivable, et $F''(x) = -f(x)$

   f étant continue, F'' l'est aussi. F est donc bien de classe $\mathcal{C}^2$

2. *En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$, $F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\, dt \right) du$*

   De $F''(x) = -f(x)$, nous tirons $F'(x) = -\int_1^x f(t)\, dt$

   Et donc, $F(x) = \int_0^x F'(t)\ dt = \int_0^x \left(-\int_1^t f(u)\, du \right)\ dt = \int_0^x \left(\int_t^1 f(u)\, du \right)\ dt$

   Ce que nous voulions

Exercice 32 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ +1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

On pose $F(x) = \int_{1-x}^{1+x} f(t)\ dt$

1. *Vérifier que F est impaire et que l'on peut donc restreindre l'étude à $[0\ ;\ +\infty[$.*

   Il suffit de voir que $F(-x) = \int_{1+x}^{1-x} f(t)\ dt = -\int_{1-x}^{1+x} f(t)\ dt = -F(x)$. On peut donc restreindre l'étude à $[0;\ +\infty[$

   Tracer la représentation graphique de F

   On étudie F sur $[0;\ +\infty[$ et on construit le graphe par symétrie.

   — Si $0 \leqslant x \leqslant +1$, alors $1 - x \geqslant 0$, et de même, $1 + x \geqslant 0$; donc, $F(x) = \int_{1-x}^{1+x} f(t)\ dt = \int_{1-x}^{1+x} dt = 2x$

— Si $x \geqslant 1$ alors $1 - x \leqslant 0$, et $1 + x \geqslant 0$; donc,

$$F(x) = \int_{1-x}^{1+x} f(t)\ dt = \int_{1-x}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{1+x} f(t)\ dt = \int_{1-x}^{0} -1\ dt + \int_{0}^{1+x} 1\ dt = 2$$

D'où le graphe donné figure 14.4 :

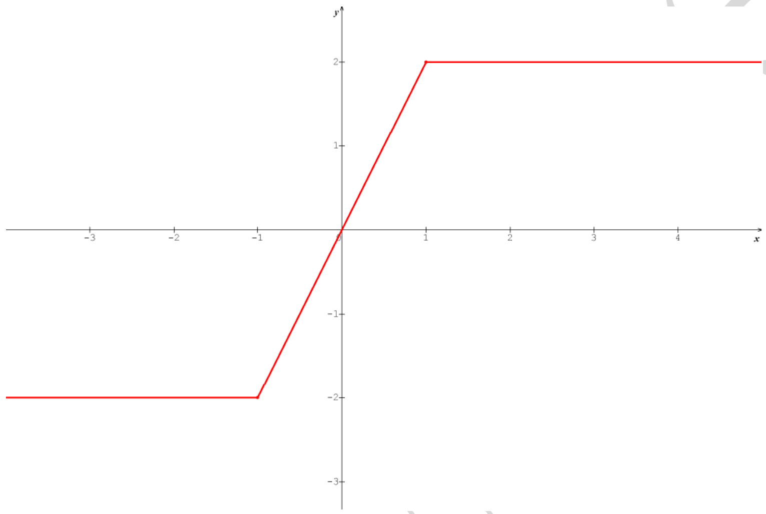

FIGURE 14.4 – Le graphe de F

2. *En quels points F est-elle dérivable ? ?*

   Il est clair que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf en $+1$ et en -1

3. *On pose $G(x) = \displaystyle\int_{1-x}^{1+x} F(t)\ dt$. G est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?*

   Il est clair que F étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $\displaystyle\int_{0}^{x} F(t)\ dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   D'autre part, $G(x) = \displaystyle\int_{1-x}^{1+x} F(t)\ dt = \int_{1-x}^{0} F(t)\ dt + \int_{0}^{1+x} F(t)\ dt$

   G est dérivable sur $\mathbb{R}$ en entier et de dérivée $G'(x) = F(1+x) + F(1-x)$

   D'autre part, comme F, G est impaire. L'étude de G se fera encore sur $[0;\ +\infty[$

   En tracer la représentation graphique

   On étudie G sur $[0;\ +\infty[$ et on construit le graphe par symétrie.

   — Si $0 \leqslant x \leqslant +2$, alors $-1 \leqslant 1 - x \geqslant +1$, et de même, $1 + x \geqslant 1$; donc :

$$\begin{aligned} G(x) = & \int_{1-x}^{1+x} F(t)\ dt \\ = & \int_{1-x}^{1} F(t)\ dt + \int_{1}^{1+x} F(t)\ dt \\ = & \int_{1-x}^{1} 2t\ dt + \int_{1}^{1+x} 2\ dt \\ = & \left[t^2\right]_{1-x}^{1} + [2t]_{1}^{1+x} \\ = & 4x - x^2 \end{aligned}$$

— Si $x \geqslant 2$ alors $1-x \leqslant -1$, et $1+x \geqslant 3$; donc :

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{1-x}^{1+x} F(t)\ dt \\ &= \int_{1-x}^{-1} F(t)\ dt + \int_{-1}^{1} F(t)\ dt + \int_{1}^{1+x} F(t)\ dt \\ &= \int_{1-x}^{-1} -2\ dt + \int_{-1}^{1} 2t\ dt + \int_{1}^{1+x} 2\ dt \\ &= -2(-1-1+x) + \left[t^2\right]_{-1}^{1} + 2(1+x-1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

D'où le graphe donné figure 14.5 :

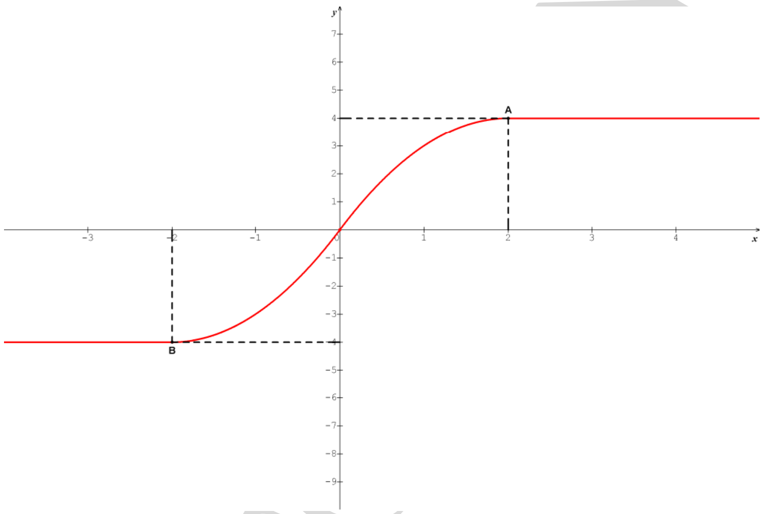

FIGURE 14.5 – Le graphe de G

Exercice 33 :

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et F la fonction définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\ dt \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } F(0) = f(0)$$

1. *Montrer que F est continue en 0*

   Si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $H(x) = \int_0^x f(t)\ dt$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $H'(x) = f(x)$

   Ici, nous avons $F(x) = \frac{1}{2x}(H(x) - H(-x))$. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2x}(H(x) - H(-x)) \\ &= \frac{1}{2x}(H(x) - H(0) + H(0) - H(-x)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{H(x) - H(0)}{x} + \frac{H(0) - H(-x)}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{H(x) - H(0)}{x} + \frac{H(-x) - H(0)}{-x}\right) \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{H(x)-H(0)}{x}=H'(0)=f(0)$ et, de même, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{H(-x)-H(0)}{-x}=H'(0)=f(0)$, de telle sorte que $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=f(0)$

F est donc continue en 0

2. *En prenant pour f, la fonction valeur absolue, montrer que F n'est pas forcément dérivable.*

Cette fois ci, nous avons $f(t)=|t|$

— Si $x>0$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\ dt \\ &= \frac{1}{2x}\left(\int_{-x}^{0}|t|\ dt+\int_{0}^{x}|t|\ dt\right) \\ &= \frac{1}{2x}\left(\int_{-x}^{0}-t\ dt+\int_{0}^{x}t\ dt\right) \\ &= \frac{1}{2x}\left(\left[\frac{-t^2}{2}\right]_{-x}^{0}+\left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{x}\right) \\ &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

— Si $x<0$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\ dt \\ &= \frac{1}{2x}\left(\int_{-x}^{0}|t|\ dt+\int_{0}^{x}|t|\ dt\right) \\ &= \frac{1}{2x}\left(\int_{-x}^{0}t\ dt+\int_{0}^{x}-t\ dt\right) \\ &= \frac{1}{2x}\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-x}^{0}+\left[\frac{-t^2}{2}\right]_{0}^{x}\right) \\ &= \frac{-x}{2} \end{aligned}$$

En fait, nous avons, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(t)=\dfrac{|t|}{2}$, ce qui montre que F n'est pas dérivable en 0.

Exercice 34 :

Soit $a>0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$ telle que $f(0)=0$. L'objet de l'exercice est de démontrer que $\displaystyle\int_0^a |f(x)f'(x)|\ dx \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a (f'(x))^2\ dx$

1. *Montrer que $g(x)=\displaystyle\int_0^x |f'(t)|\ dt$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$ telle que $g(0)=0$*

   Comme f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$, la fonction f' est continue sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$, et par composition, la fonction $|f'|$ est continue sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$.

   Donc, $\displaystyle\int_0^x |f'(t)|\ dt$ est une fonction dérivable de dérivée $|f'(x)|$, laquelle est continue. Donc, g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ a]$ telle que $g(0)=0$

2. *Vérifier que $f(x)=\displaystyle\int_0^x f'(t)\ dt$ et démontrer que $|f(x)|\leqslant g(x)$*

   Que $f(x)=\displaystyle\int_0^x f'(t)\ dt$ est évident.

   Donc, $|f(x)|=\left|\displaystyle\int_0^x f'(t)\ dt\right|\leqslant\displaystyle\int_0^x |f'(t)|\ dt=g(x)$

   Ce que nous voulions

3. *En déduire que* $\int_0^a |f(x)f'(x)|\ dx \leqslant \frac{1}{2}(g(a))^2$

   En utilisant la question précédente, nous avons :

   $$|f(x)f'(x)| = |f(x)|\,|f'(x)| \leqslant g(x)\,|f'(x)|$$

   Or, $|f'(x)| = g'(x)$, et nous concluons que $|f(x)f'(x)| \leqslant g(x)g'(x)$
   En passant à l'intégrale, nous avons :

   $$\int_0^a |f(x)f'(x)|\ dx \leqslant \int_0^a g(x)g'(x)\ dx = \left[\frac{(g(x))^2}{2}\right]_0^a = \frac{(g(a))^2}{2}$$

   Donc, $\int_0^a |f(x)f'(x)|\ dx \leqslant \frac{1}{2}(g(a))^2$

4. *En utilisant l'inégalité de Schwarz, démontrez que* $(g(a))^2 \leqslant a\int_0^a (f'(x))^2\ dx$ *et conclure*

   Nous avons $(g(a))^2 = \left(\int_0^a |f'(t)|\ dt\right)^2$.
   En écrivant $|f'(t)| = 1 \times |f'(t)|$, et en utilisant l'inégalité de Schwarz, nous avons :

   $$\left(\int_0^a |f'(t)|\ dt\right)^2 \leqslant \left(\int_0^a (1)^2\ dt\right)\left(\int_0^a (f'(t))^2\ dt\right) = a\int_0^a (f'(t))^2\ dt$$

   Nous avons donc : $(g(a))^2 \leqslant a\int_0^a (f'(t))^2\ dt$

   Nous en déduisons donc : $\int_0^a |f(x)f'(x)|\ dx \leqslant \frac{1}{2}(g(a))^2 \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a (f'(t))^2\ dt$

   Donc $\int_0^a |f(x)f'(x)|\ dx \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a (f'(x))^2\ dx$

   Ce que nous voulions

Exercice 35 :

On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

1. *En majorant la fonction intégrée, montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

   Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, nous avons $1 \leqslant 1+x \leqslant 2$, c'est à dire $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1$

   Donc, $|I_n| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leqslant \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, nous en déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

2. *Calculer* $I_n + I_{n+1}$

   Nous avons :

   $$\begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

3. *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

   Nous avons $\sum\limits_{k=0}^{n} (-x)^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$.

   En passant à l'intégrale, nous avons : $\int_0^1 \sum\limits_{k=0}^{n} (-x)^k \, dx = \int_0^1 \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} dx$

   Nous avons $\int_0^1 \sum\limits_{k=0}^{n} (-x)^k \, dx = \sum\limits_{k=0}^{n} \int_0^1 (-x)^k \, dx = \sum\limits_{k=0}^{n} \left[\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

   D'autre part, $\int_0^1 \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = \ln 2 + (-1)^n I_n$

   Nous avons donc $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 + (-1)^n I_n \iff \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 = (-1)^n I_n$

   Donc $\left| \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \right| = |I_n|$.

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$

   Ce que nous voulions. *(On remarquera que* $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$*)*

Exercice 36 :

1. *Donner* $\lim\limits_{a\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a \sin x) \, dx$

   ▷ D'après les formules trigonométriques, nous avons, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u$, de telle sorte que :

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\sin x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2\sin^2\left(\frac{a\sin x}{2}\right) dx = \frac{\pi}{2} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{a\sin x}{2}\right) dx$$

   ▷ Rappelons nous que nous avons, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin u| \leqslant |u|$, et donc, $\sin^2 u \leqslant u^2$.

   Donc, $0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{a\sin x}{2}\right) dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a\sin x}{2}\right)^2 dx = \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$

   Comme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$ est un nombre fixe, $\lim\limits_{a\to 0} \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = 0$.

   De $0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{a\sin x}{2}\right) dx \leqslant \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$, nous déduisons $\lim\limits_{a\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{a\sin x}{2}\right) dx = 0$ d'où $\lim\limits_{a\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2}$

2. *Donner* $\lim\limits_{a\to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\sin x} \, dx$

   (a) Nous allons utilise l'inégalité vraie pour tout $u \in \mathbb{R}$: $1 + u \leqslant e^u$ que nous allons appliquer à $-u$ en écrivant $1 - u \leqslant e^{-u}$.
   De la dernière inégalité, nous tirons facilement, pour tout $u \in \mathbb{R}^{*+}$, $0 < 1 - e^{-u} \leqslant u$

   (b) De là, nous tirons : $0 \leqslant 1 - e^{-a\sin x} \leqslant -a\sin x$ et en passant à l'intégrale :

   $$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - e^{-a\sin x} \, dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} -a\sin x \, dx = -a\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -a$$

(c) Nous en déduisons que $\lim_{a \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - e^{-a\sin x}\,\mathrm{d}x = 0$, c'est à dire $\lim_{a \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

Exercice 37 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales I_n et J_n, définies par :

$$I_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{n}{2}}\,dt \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n\,du$$

1. *En faisant un changement de variables approprié, démontrez que $I_n = J_{n+1}$*

   Le changement de variables le plus évident est donné par $t = \cos u$ avec $\frac{dt}{du} = -\sin u \iff dt = -du\sin u$

   Alors :

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{n}{2}}\,dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1-\cos^2 u\right)^{\frac{n}{2}} \times -\sin u\,du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 u\right)^{\frac{n}{2}} \sin u\,du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n+1}\,du = J_{n+1} \end{aligned}$$

   Nous avons bien $I_n = J_{n+1}$

2. *Démontrez que nous avons $0 \leqslant J_{n+1} \leqslant J_n$*

   Il y a, en fait, 2 choses à montrer : d'une par que J_n est positive, et d'autre part, que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   — J_n est positive

   Il suffit de remarquer que si $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n\,du$, comme nous avons $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$, nous avons $0 \leqslant \sin u \leqslant 1$; donc, $(\sin u)^n \geqslant 0$, et donc $J_n \geqslant 0$

   — La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

   Il suffit de faire la différence $J_{n+1} - J_n$

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n+1}\,du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n\,du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n+1} - (\sin u)^n\,du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n (\sin u - 1)\,du \end{aligned}$$

   Comme $\sin u - 1 \leqslant 0$ et $(\sin u)^n \geqslant 0$ car $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$, nous avons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n (\sin u - 1)\,du \leqslant 0$, c'est à dire $J_{n+1} - J_n \leqslant 0$

   C'est à dire que nous avons bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant J_{n+1} \leqslant J_n$

3. (a) *Montrer que nous avons $J_n = J_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \cos^2 u\,du$*

Rigoureusement, voici une question qui ne pose aucune difficulté.

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n \ du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \sin^2 u \, du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \left(1 - \cos^2 u\right) \ du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \ du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \cos^2 u \, du \\
&= J_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \cos^2 u \, du
\end{aligned}$$

(b) *On appelle* $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \cos^2 u \, du$ *; en intégrant par parties, montrez que* $K_n = \frac{1}{n-1} J_n$

Voilà qui n'est pas d'une évidence folle, mais qui n'est pas non plus insurmontable!!. Il suffit de bien choisir ses fonctions :

$$\begin{array}{ll}
X' = (\sin u)^{n-2} \cos u & X = \dfrac{(\sin u)^{n-1}}{n-1} \\
Y = \cos u & Y' = -\sin u
\end{array}$$

De telle sorte que :

$$\begin{aligned}
K_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \cos^2 u \, du \\
&= \left[\cos u \frac{(\sin u)^{n-1}}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin u)^{n-1}}{n-1} \times -\sin u \, du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin u)^{n-1}}{n-1} \times \sin u \, du \\
&= \frac{1}{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n \ du \\
&= \frac{1}{n-1} J_n
\end{aligned}$$

Donc $K_n = \frac{1}{n-1} J_n$

(c) *En déduire que* $J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$ *et que* $I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}$

Nous avons $J_n = J_{n-2} - K_n$, c'est à dire $J_n = J_{n-2} - \frac{1}{n-1} J_n$. Nous en déduisons que

$$J_n + \frac{1}{n-1} J_n = J_{n-2} \Longleftrightarrow \frac{n}{n-1} J_n = J_{n-2} \Longleftrightarrow J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

Et, en remplaçant J_n par I_{n-1} et J_{n-2} par I_{n-3}, nous obtenons l'égalité $I_{n-1} = \frac{n-1}{n} I_{n-3}$, ce qui est équivalent à $I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}$

4. (a) *En déduire que* $I_{2p} = \dfrac{\left(2^p \times p!\right)^2}{(2p+1)!}$

Nous avons $I_{2p} = \dfrac{2p}{2p+1} I_{2p-2}$, puis, $I_{2p-2} = \dfrac{2p-2}{2p-1} I_{2p-4}$ et en mettant cela en tableau :

$$\begin{aligned}
I_{2p} &= \frac{2p}{2p+1} I_{2p-2} \\
I_{2p-2} &= \frac{2p-2}{2p-1} I_{2p-4} \\
\vdots &\ \vdots \\
I_{2p-2k} &= \frac{2p-2k}{2p-(2k-1)} I_{2p-2(k+1)} \\
\vdots &\ \vdots \\
I_2 &= \frac{2}{1} I_0
\end{aligned}$$

De telle sorte qu'en faisant le produit, nous obtenons :

$$\prod_{k=1}^{p} I_{2k} = \prod_{k=1}^{p} \frac{2k}{2k+1} I_{2(k-1)}$$

En simplifiant, nous obtenons : $I_{2p} = \left(\prod\limits_{k=1}^{p} \dfrac{2k}{2k+1}\right) I_0$.

Le calcul de I_0, nous donne : $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^0 dt = 1$. Donc, $I_{2p} = \prod\limits_{k=1}^{p} \dfrac{2k}{2k+1}$

Continuons le calcul :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{p} \frac{2k}{2k+1} &= \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p}{3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2p+1)} \\
&= \frac{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p)(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p)}{(3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2p+1))(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p)} \\
&= \frac{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2p)^2}{(2p+1)!} \\
&= \frac{(2^p \times p!)^2}{(2p+1)!}
\end{aligned}$$

Donc, $I_{2p} = \dfrac{(2^p \times p!)^2}{(2p+1)!}$

(b) *En déduire que* $I_{2p+1} = \dfrac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} \dfrac{\pi}{2}$

La méthode de résolution est la même que celle utilisée précédemment.
Nous avons $I_{2p+1} = \dfrac{2p+1}{2p+2} I_{2p-1}$, puis, $I_{2p-1} = \dfrac{2p-1}{2p} I_{2p-3}$ et en mettant cela en tableau :

$$\begin{aligned}
I_{2p+1} &= \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p-1} \\
I_{2p-1} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-3} \\
\vdots &\ \vdots \\
I_{2p-(2k-1)} &= \frac{2p-(2k-1)}{2p-(2k-2)} I_{2p-(2k+1)} \\
\vdots &\ \vdots \\
I_3 &= \frac{3}{4} I_1
\end{aligned}$$

De telle sorte qu'en faisant le produit, nous obtenons :

$$\prod_{k=1}^{p} I_{2k+1} = \prod_{k=1}^{p} \frac{2k+1}{2k+2} I_{2k-1}$$

En simplifiant, nous obtenons : $I_{2p+1} = \left(\prod_{k=1}^{p} \frac{2k+1}{2k+2}\right) I_1$.

Le calcul de I_1, nous donne : $I_1 = J_2$ et $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^2 \ du$. Il faut donc linéariser $\sin^2 u$.

Nous avons $\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u \iff \sin^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}$, de telle sorte que :

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^2 \ du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2u}{2} \ du = \frac{1}{2}\left[u - \frac{\sin 2u}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Il faut, maintenant, calculer $\prod_{k=1}^{p} \frac{2k+1}{2k+2}$

Continuons le calcul :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{p} \frac{2k+1}{2k+2} &= \frac{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2p+1)}{4\times 6\times 8\times\cdots\times(2p+2)} \\
&= \frac{(3\times 5\times 7\times\cdots\times(2p+1))\,(2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p+2))}{(4\times 6\times 8\times\cdots\times(2p+2))\,(2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p+2))} \\
&= \frac{(2p+2)!\times 2}{(2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p+2))^2} \\
&= \frac{(2p+2)!\times 2}{\left(2^{p+1}(p+1)!\right)^2}
\end{aligned}$$

Donc, $I_{2p+1} = \frac{(2p+2)!\times 2}{\left(2^{p+1}(p+1)!\right)^2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{(2p+2)!}{\left(2^{p+1}(p+1)!\right)^2} \times \frac{\pi}{2}$

Ce que nous voulions.

(c) *En déduire que* $\lim_{n\to+\infty} nI_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

— Si n est pair, c'est à dire $n = 2p$, nous devons alors évaluer $2pI_{2p}I_{2p+1}$

$$2pI_{2p}I_{2p+1} = \frac{2p\left(2^p\times p!\right)^2}{(2p+1)!} \times \frac{(2p+2)!}{\left(2^{p+1}(p+1)!\right)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{2p\,(2p+2)}{\left(2\,(p+1)\right)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{2p}{2p+2}\frac{\pi}{2}$$

Nous avons bien $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} nI_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

— Si n est impair, c'est à dire $n = 2p+1$, nous devons alors évaluer $(2p+1)\,I_{2p+1}I_{2p+2}$

$$(2p+1)\,I_{2p+1}I_{2p+2} = (2p+1)\,\frac{(2p+2)!}{\left(2^{p+1}(p+1)!\right)^2}\frac{\pi}{2}\times\frac{\left(2^{p+1}\times(p+1)!\right)^2}{(2p+3)!} = \frac{2p+1}{2p+3}\frac{\pi}{2} = \frac{n}{n+2}\frac{\pi}{2}$$

A nouveau, nous avons bien $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} nI_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} nI_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 38 :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

Il faut démontrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = f(1)$

1. Pour commencer, nous supposons que f est une fonction constante sur $[0;1]$, c'est à dire que, pour tout $x\in[0;1]$, alors $f(x) = k$.
   Démontrons que $\lim_{n\to+\infty} I_n = k$

Pas exactement compliqué :

$$I_n = n\int_0^1 x^n k \, \mathrm{d}x = kn\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = kn\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{kn}{n+1}$$

Nous avons bien $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = k = f(1)$

2. Nous allons nous ramener au cas où $f(1) = 0$

$\longrightarrow$ En effet, supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = f(1) = 0$ et soit φ une fonction continue sur l'intervalle $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Alors, f définie par $f(x) = \varphi(x) - \varphi(1)$ est telle que $f(1) = 0$. Donc

$$n\int_0^1 x^n \varphi(x)\, \mathrm{d}x = n\int_0^1 x^n \left(f(x) + \varphi(1)\right) \mathrm{d}x = n\int_0^1 x^n f(x)\, \mathrm{d}x + \varphi(1) \times n\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x$$

Nous avons déjà démontré que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(1) \times n\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \varphi(1)$

$\longrightarrow$ Ainsi, si $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\, \mathrm{d}x = f(1) = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(1)$

$\longrightarrow$ Il nous suffit donc de supposer que $f(1) = 0$

3. Soit donc f une fonction continue sur l'intervalle $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $f(1) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$

$\longrightarrow$ f est continue en 0.

Il existe donc $\eta > 0$ tel que si $1 - \eta < x < 1$, alors $|f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc,

$$\left|n\int_{1-\eta}^1 x^n f(x)\, \mathrm{d}x\right| \leqslant n\int_{1-\eta}^1 x^n |f(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant n \times \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{1-\eta}^1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{n}{n+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

$\longrightarrow$ Maintenant, regardons $n\int_0^{1-\eta} x^n f(x)\, \mathrm{d}x$

f étant continue sur l'intervalle $[0;1]$, est bornée l'intervalle $[0;1]$. Soit donc $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [0;1]$, nous ayions $|f(x)| \leqslant M$. Alors :

$$\left|n\int_0^{1-\eta} x^n f(x)\, \mathrm{d}x\right| \leqslant n\int_0^{1-\eta} x^n |f(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant M \times \frac{n(1-\eta)^{n+1}}{n+1}$$

Comme $0 < 1 - \eta < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\eta)^{n+1} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} M \times \frac{n(1-\eta)^{n+1}}{n+1} = 0$

$\longrightarrow$ Il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $0 \leqslant M \times \frac{n(1-\eta)^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, c'est à dire $\left|n\int_0^{1-\eta} x^n f(x)\, \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

4. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$ alors $|I_n| \leqslant \varepsilon$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Et nous avons ainsi démontré que, pour f fonction continue sur l'intervalle $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\int_0^1 x^n f(x)\, \mathrm{d}x\right) = f(1)$

Exercice 39 :

Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $[1;e]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $I_n = n\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)\, \mathrm{d}x$

Il faut démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_1^e \frac{f(x)}{x}\, \mathrm{d}x$

1. Nous commençons par faire le changement de variables $u = x^n \iff x = u^{\frac{1}{n}}$ et donc

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1} \iff \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \times u^{\frac{1-n}{n}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n} \times u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u = \frac{u^{\frac{1}{n}}}{n} \times \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

D'où nous obtenons $I_n = n\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n)\,\mathrm{d}x = n\int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} f(u) \times \frac{u^{\frac{1}{n}}}{n} \times \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} u^{\frac{1}{n}}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$

2. Pour tout $x > -1$, nous avons $\ln(1+x) \leqslant x$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant n \times \dfrac{1}{n} = 1$ et donc, en passant à l'exponentielle, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e$, c'est à dire $\left[1, \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right] \subset [1, e]$.

Remarquons que nous avons aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

3. Pour tout $u \in \left[1, \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$, nous avons $1 \leqslant u^{\frac{1}{n}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n} \iff 0 \leqslant u^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} I_n - \int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = & \int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} u^{\frac{1}{n}}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \\ = & \int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \left(u^{\frac{1}{n}} - 1\right)\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \\ \leqslant & \frac{1}{n}\int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

D'où nous tirons

$$\left|I_n - \int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \left|\frac{f(u)}{u}\right|\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{n}\int_1^e \left|\frac{f(u)}{u}\right|\,\mathrm{d}u$$

La fonction $\left|\dfrac{f(u)}{u}\right|$ étant intégrable sur l'intervalle $[1; e]$, l'expression $\displaystyle\int_1^e \left|\frac{f(u)}{u}\right|\,\mathrm{d}u$ est un nombre fixe et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_1^e \left|\frac{f(u)}{u}\right|\,\mathrm{d}u = 0$

C'est à dire, conséquence de la majoration, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|I_n - \int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right| = 0$ et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

4. Considérons maintenant la fonction F définie sur l'intervalle $[1; e]$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$

De l'intégrabilité de $\dfrac{f(u)}{u}$, on déduit que F est une fonction continue et donc

$$\lim_{n\to+\infty} F\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = F\left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = F(e)$$

C'est à dire :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^e \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

D'où nous déduisons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_1^e \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

14.7.2 Miscelleanous

Exercice 40 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite numérique telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0;1]$. Pour tout $\alpha \in [0;1]$ et tout $\beta \in [0;1]$ tels que $\alpha \leqslant \beta$, on pose :

$$k_n(\alpha,\beta) = \text{Card}\,\{m \in \mathbb{N}^* \textit{ tels que } m \leqslant n \textit{ et } \alpha \leqslant u_m \leqslant \beta\}$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si, pour tout $\alpha \in [0;1]$ et tout $\beta \in [0;1]$ tels que $\alpha \leqslant \beta$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k_n(\alpha,\beta)}{n} = \beta - \alpha$

1. *Propriétés élémentaires*

   Avant de commencer, nous pouvons donner un cas particulier.
   En effet, comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $[0;1]$, nous avons $k_n(0;1) = n$ et donc $\dfrac{k_n(0;1)}{n} = 1$.
   Pour la suite, nous poserons, pour $\alpha \in [0;1]$, $k_n(\alpha,\alpha) = \text{Card}\,\{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } u_m = \alpha\}$

   (a) *Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie, alors elle n'admet pas de limite*

   Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

   ▷ Tout d'abord, comme, pourt out $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0;1]$, nous avons $l \in [0;1]$
   ▷ Soit $\varepsilon > 0$.
   Il existe alors $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $u_n \in [l-\varepsilon; l+\varepsilon]$. On choisit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $[0;1] \setminus [l-\varepsilon; l+\varepsilon]$ contienne un intervalle $[\alpha;\beta]$ avec $\alpha < \beta$
   Alors, $k_n(\alpha,\beta) \leqslant N_\varepsilon$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k_n(\alpha,\beta)}{n} = 0 \neq \beta - \alpha$.
   Ce qui est en contradiction avec le fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie
   ▷ Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite.

   Il est alors possible de conclure qu'une suite équirépartie n'a ni valeur d'adhérence, ni point d'accumulation

   (b) *Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(\alpha,\beta) = +\infty$*

   Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit équirépartie ; alors, pour tout $\alpha \in [0;1]$ et tout $\beta \in [0;1]$, avec $\alpha \leqslant \beta$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k_n(\alpha,\beta)}{n} = \beta - \alpha$
   Donc, pour $0 < \varepsilon < \beta - \alpha$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors :

   $$\beta - \alpha - \varepsilon < \frac{k_n(\alpha,\beta)}{n} < \beta - \alpha + \varepsilon \Longleftrightarrow n(\beta-\alpha-\varepsilon) < k_n(\alpha,\beta) < n(\beta-\alpha+\varepsilon)$$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\beta-\alpha-\varepsilon) = +\infty$, nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(\alpha,\beta) = +\infty$

   (c) *Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie, alors l'ensemble $S = \{u_n \text{ où } n \in \mathbb{N}^*\}$ des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $[0;1]$*

   Pour montrer que $S = \{u_n \text{ où } n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[0;1]$, il faut montrer que, pour tout $\alpha \in [0;1]$ et tout $\beta \in [0;1]$ tels que $\alpha < \beta$, il existe $s \in S$ tel que $\alpha < s < \beta$; ce $s \in S$ étant un terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, c'est à dire qu'il existe $i_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $s = u_{i_0}$
   Soient donc $\alpha \in [0;1]$ et tout $\beta \in [0;1]$ tels que $\alpha < \beta$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant équirépartie, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{k_n(\alpha,\beta)}{n} = \beta - \alpha > 0$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{k_{n_0}(\alpha,\beta)}{n_0} > 0$, c'est à dire tel que $k_{n_0}(\alpha,\beta) > 0$, et comme $k_{n_0}(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}$, nous avons $k_{n_0}(\alpha,\beta) \geqslant 1$, c'est à dire qu'il existe $i_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha < u_{i_0} < \beta$
   S est donc bien dense dans $[0;1]$

2. *Une simplification du critère*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $[0;1]$. Pour tout $\alpha\in[0;1]$ et tout $\beta\in[0;1]$ tels que $\alpha<\beta$, on pose :

$$K_n(\alpha,\beta)=\text{Card}\,\{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } \alpha<u_m<\beta\}$$

Et

$$K_n(\beta)=K_n(0,\beta)=\text{Card}\,\{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } 0<u_m<\beta\} \text{ pour } 0<\beta\leqslant 1$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si, pour tout $\beta\in\,]0;+1]$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{K_n(\beta)}{n}=\beta$

La clef de cette démonstration de cette équivalence se situe dans l'égalité :

$$\begin{aligned}\{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } \alpha\leqslant u_m\leqslant\beta\} = \; & \{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } \alpha<u_m<\beta\}\\ & \cup\{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } \alpha=u_m\}\\ & \cup\{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } u_m=\beta\}\end{aligned}$$

C'est à dire, en passant aux cardinaux :

$$k_n(\alpha,\beta)=K_n(\alpha,\beta)+k_n(\alpha,\alpha)+k_n(\beta,\beta)$$

Et donc :

$$\frac{k_n(\alpha,\beta)}{n}=\frac{K_n(\alpha,\beta)}{n}+\frac{k_n(\alpha,\alpha)}{n}+\frac{k_n(\beta,\beta)}{n}$$

- Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit équirépartie
La suite étant équirépartie,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{k_n(\alpha,\alpha)}{n}=(\alpha-\alpha)=0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{k_n(\beta,\beta)}{n}=(\beta-\beta)=0$$

Et nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{K_n(\alpha,\beta)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{k_n(\alpha,\beta)}{n}=\beta-\alpha$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{K_n(\beta)}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{K_n(0,\beta)}{n}=\beta$

- Réciproquement, supposons que pour tout $\beta\in\,]0;+1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{K_n(\beta)}{n}=\beta$
Il faut donc démontrer que pour tout $\alpha\in[0;1]$ et tout $\beta\in[0;1]$ tels que $\alpha\leqslant\beta$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{k_n(\alpha,\beta)}{n}=(\beta-\alpha)$
  - Soient $\alpha\in[0;1]$ et $\beta\in[0;1]$ tels que $\alpha<\beta$. Alors :

$$\begin{aligned}\{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } \alpha<u_m<\beta\} = \; & \{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } 0\leqslant u_m<\beta\}\setminus\\ & \{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } 0\leqslant u_m\leqslant\alpha\}\end{aligned}$$

Comme $\{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } 0\leqslant u_m\leqslant\alpha\}\subset\{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } 0\leqslant u_m<\beta\}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\text{Card}\,(\{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } \alpha<u_m<\beta\}) = \; & \text{Card}\,(\{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } 0\leqslant u_m<\beta\})-\\ & \text{Card}\,(\{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } 0\leqslant u_m\leqslant\alpha\})\end{aligned}$$

Or :
→ $\text{Card}\,(\{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } 0\leqslant u_m<\beta\})=k_n(0,0)+K_n(0,\beta)$
→ $\text{Card}\,(\{m\in\mathbb{N}^* \text{ tels que } m\leqslant n \text{ et } 0\leqslant u_m\leqslant\alpha\})=k_n(0,0)+K_n(0,\alpha)+k_n(\alpha,\alpha)$
Et donc :

$$K_n(\alpha,\beta)=K_n(0,\beta)-K_n(0,\alpha)-k_n(\alpha,\alpha)$$

Comme $K_n(\alpha,\beta)\geqslant 0$, nous en déduisons $k_n(\alpha,\alpha)\leqslant K_n(0,\beta)-K_n(0,\alpha)$

▷ Soit, maintenant, $0 \leqslant \alpha < 1$ et $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \varepsilon < 1 - \alpha$. Alors, d'après ci-dessus :

$$k_n(\alpha, \alpha) \leqslant K_n(0, \alpha + \varepsilon) - K_n(0, \alpha) \Longleftrightarrow k_n(\alpha, \alpha) \leqslant K_n(\alpha + \varepsilon) - K_n(\alpha)$$

C'est à dire aussi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{k_n(\alpha, \alpha)}{n} \leqslant \dfrac{K_n(\alpha + \varepsilon)}{n} - \dfrac{K_n(\alpha)}{n}$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{K_n(\alpha + \varepsilon)}{n} = \alpha + \varepsilon$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{K_n(\alpha)}{n} = \alpha$, nous avons, et ce pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{k_n(\alpha, \alpha)}{n} \leqslant \varepsilon$$

Et donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{k_n(\alpha, \alpha)}{n} = 0$

▷ Pour terminer, nous avons, pour $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$:

$$\begin{aligned} k_n(\alpha, \beta) = &\ k_n(\alpha, \alpha) + K_n(\alpha, \beta) + k_n(\beta, \beta) \\ = &\ k_n(\alpha, \alpha) + (K_n(\beta) - K_n(\alpha) - k_n(\alpha, \alpha)) + k_n(\beta, \beta) \\ = &\ K_n(\beta) - K_n(\alpha) + k_n(\beta, \beta) \end{aligned}$$

D'où $\dfrac{k_n(\alpha, \beta)}{n} = \dfrac{K_n(\beta)}{n} - \dfrac{K_n(\alpha)}{n} + \dfrac{k_n(\beta, \beta)}{n}$, et par passage à la limite :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{k_n(\alpha, \beta)}{n} = \beta - \alpha$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc équirépartie

3. *Caractérisation des suites équiréparties*
Démontrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie si et seulement si pour toute application f intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[0; 1]$, nous avons :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{f(u_1) + f(u_2) + \cdots + f(u_n)}{n} \right) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$$

▷ **Supposons que pour toute fonction f Riemann-intégrable, nous ayions**

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{f(u_1) + f(u_2) + \cdots + f(u_n)}{n} \right) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$$

Soient $\alpha \in [0; 1]$ et $\beta \in [0; 1]$ tels que $\alpha \leqslant \beta$.
Il nous faut donc moncter que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{k_n(\alpha, \beta)}{n} = \beta - \alpha$.
Considérons la fonction indicatrice $1_{[\alpha;\beta]}$. Cette fonction est Riemann-Intégrable sur $[0; 1]$, et nous avons $\displaystyle\int_0^1 1_{[\alpha;\beta]}(t)\, \mathrm{d}t = \beta - \alpha$
L'expression $\left(1_{[\alpha;\beta]}(u_1) + 1_{[\alpha;\beta]}(u_2) + \cdots + 1_{[\alpha;\beta]}(u_n)\right)$ compte le nombre d'éléments de l'ensemble $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ qui sont dans l'intervalle $[\alpha; \beta]$. Ainsi :

$$1_{[\alpha;\beta]}(u_1) + 1_{[\alpha;\beta]}(u_2) + \cdots + 1_{[\alpha;\beta]}(u_n) = k_n(\alpha, \beta)$$

Et nous avons, en utilisant l'hypothèse, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{k_n(\alpha, \beta)}{n} = \displaystyle\int_0^1 1_{[\alpha;\beta]}(t)\, \mathrm{d}t = \beta - \alpha$, ce qui montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie

▷ **Réciproquement, supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie**
⇒ Reprenons la démonstration précédente et considérons la fonction indicatrice $1_{[\alpha;\beta]}$. Alors :

$$1_{[\alpha;\beta]}(u_1) + 1_{[\alpha;\beta]}(u_2) + \cdots + 1_{[\alpha;\beta]}(u_n) = \sum_{i=1}^{n} 1_{[\alpha;\beta]}(u_i) = k_n(\alpha, \beta)$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{k_n(\alpha, \beta)}{n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1_{[\alpha;\beta]}(u_1) + 1_{[\alpha;\beta]}(u_2) + \cdots + 1_{[\alpha;\beta]}(u_n)}{n} \right) = \beta - \alpha = \int_0^1 1_{[\alpha;\beta]}(t)\, \mathrm{d}t$$

⇒ Démontrons que la propriété est vraie pour toutes les fonctions en escalier.
Soit donc $f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i 1_{A_i}$, où $A_i = [\alpha_i ; \beta_i]$ une fonction en escalier.
Alors :

$$\begin{aligned} f(u_1) + f(u_2) + \cdots + f(u_n) = & \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i 1_{A_i}(u_k) \right) \\ = & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_i}(u_k) \right) \\ = & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i k_n(\alpha_i, \beta_i) \end{aligned}$$

De là, nous avons $\left(\dfrac{f(u_1) + f(u_2) + \cdots + f(u_n)}{n} \right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \dfrac{k_n(\alpha_i, \beta_i)}{n}$
En passant à la limite, et en utilisant le point précédent, nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{f(u_1) + f(u_2) + \cdots + f(u_n)}{n} \right) = & \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{k_n(\alpha_i, \beta_i)}{n} \\ = & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \lim_{n \to +\infty} \frac{k_n(\alpha_i, \beta_i)}{n} \\ = & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \int_0^1 1_{[\alpha_i;\beta_i]}(t) \, \mathrm{d}t \\ = & \int_0^1 \sum_{i=1}^{p} \lambda_i 1_{[\alpha_i;\beta_i]}(t) \, \mathrm{d}t \\ = & \int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Le résultat est donc vrai pour les fonctions en escaliers
⇒ Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[0; 1]$.
Il existe donc 2 fonctions en escaliers sur $[0; 1]$ appelées φ et ψ telles que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \text{ et } \int_0^1 (f - \varphi)(t) \, \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \int_0^1 (\psi - f)(t) \, \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ceci signifiant que :

$$\frac{\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \cdots + \varphi(u_n)}{n} \leqslant \frac{f(u_1) + f(u_2) + \cdots + f(u_n)}{n} \leqslant \frac{\psi(u_1) + \psi(u_2) + \cdots + \psi(u_n)}{n}$$

De plus, remarquant que $\displaystyle\int_0^1 (f - \varphi)(t) \, \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2} \Longleftrightarrow \int_0^1 (f - \varphi)(t) \, \mathrm{d}t - \frac{\varepsilon}{2} < 0$ et que nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f - \varphi)(t) \, \mathrm{d}t - \frac{\varepsilon}{2} = & \int_0^1 (f - \varphi)(t) - \frac{\varepsilon}{2} \, \mathrm{d}t \\ = & \int_0^1 (f(t) - \varepsilon) - \left(\varphi(t) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \mathrm{d}t \\ = & \int_0^1 (f(t) - \varepsilon) \, \mathrm{d}t - \int_0^1 \left(\varphi(t) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \mathrm{d}t \\ = & \left(\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t - \varepsilon \right) - \left(\int_0^1 \varphi(t) \, \mathrm{d}t - \frac{\varepsilon}{2} \right) \end{aligned}$$

D'où nous concluons que $\displaystyle\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t - \varepsilon < \int_0^1 \varphi(t) \, \mathrm{d}t - \frac{\varepsilon}{2}$

De la même manière, nous montrerions que $\displaystyle\int_0^1 \psi(t) \, \mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2} < \int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t + \varepsilon$

$\Rightarrow$ Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\cdots+\varphi(u_n)}{n}\right)=\displaystyle\int_0^1\varphi(t)\ \mathrm{d}t$, il existe $N_\varphi\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geqslant N_\varphi$, alors :

$$\left|\frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\cdots+\varphi(u_n)}{n}-\int_0^1\varphi(t)\ \mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

De même, il existe $N_\psi\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geqslant N_\psi$, alors :

$$\left|\frac{\psi(u_1)+\psi(u_2)+\cdots+\psi(u_n)}{n}-\int_0^1\psi(t)\ \mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Et donc, pour $n\geqslant N\geqslant\max\{N_\psi;N_\varphi\}$, nous avons :

$$\left|\frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\cdots+\varphi(u_n)}{n}-\int_0^1\varphi(t)\ \mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\left|\frac{\psi(u_1)+\psi(u_2)+\cdots+\psi(u_n)}{n}-\int_0^1\psi(t)\ \mathrm{d}t\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Et donc, pour $n\geqslant N\geqslant\max\{N_\psi;N_\varphi\}$, nous avons :

$$\int_0^1\varphi(t)\ \mathrm{d}t-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\cdots+\varphi(u_n)}{n}<\int_0^1\varphi(t)\ \mathrm{d}t+\frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\int_0^1\psi(t)\ \mathrm{d}t-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\psi(u_1)+\psi(u_2)+\cdots+\psi(u_n)}{n}<\int_0^1\psi(t)\ \mathrm{d}t+\frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow$ Ainsi, pour tout $\varepsilon>0$ et $n\geqslant N$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t-\varepsilon<&\int_0^1\varphi(t)\ \mathrm{d}t-\frac{\varepsilon}{2}\\ \leqslant&\ \frac{\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\cdots+\varphi(u_n)}{n}\\ \leqslant&\ \frac{f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n)}{n}\\ \leqslant&\ \frac{\psi(u_1)+\psi(u_2)+\cdots+\psi(u_n)}{n}\\ <&\int_0^1\psi(t)\ \mathrm{d}t+\frac{\varepsilon}{2}<\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t+\varepsilon\end{aligned}$$

C'est à dire que, pour tout $\varepsilon>0$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geqslant N$

$$\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t-\varepsilon<\frac{f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n)}{n}<\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t+\varepsilon$$

Ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n)}{n}\right)=\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$

4. *Soient $\alpha\in[0;1]$ et $\beta\in[0;1]$ tels que $\alpha\leqslant\beta$. Nous appelons $S_n(\alpha,\beta)$ la somme des u_i tels que $1\leqslant i\leqslant n$ et $\alpha<u_i<\beta$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n(\alpha,\beta)}{n}=\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}$*

   Soient $\alpha\in[0;1]$ et $\beta\in[0;1]$ tels que $\alpha\leqslant\beta$.
   Pour démontrer ce résultat, nous allons utiliser la fonction $f(x)=x\times 1_{[\alpha;\beta]}(x)$ qui est égale à x si $x\in[\alpha;\beta]$ et à 0 sinon.
   Cette fonction est Riemann-intégrable sur $[0;1]$ comme produit de 2 fonctions intégrables au sens de Riemann.
   Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n)}{n}\right)=\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$.
   Précisons les choses :

- ⋆ Tout d'abord $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t \times 1_{[\alpha;\beta]}(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_\alpha^\beta = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$
- ⋆ Puis :

$$f(u_1)+f(u_2)+\cdots+f(u_n) = u_1\times 1_{[\alpha;\beta]}(u_1)+u_2\times 1_{[\alpha;\beta]}(u_2)+\cdots+u_n\times 1_{[\alpha;\beta]}(u_n) = S_n(\alpha,\beta)$$

- ⋆ Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n(\alpha,\beta)}{n} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$

Exercice 41 :

Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ 2 réels tels que $a<b$. Calculer $\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\,\mathrm{d}x$

Le processus sera, peut-être un peu long. Nous allons y aller en plusieurs étapes.

1. Nous commençons par un premier changement de variable :

$$x=-t+\left(\frac{a+b}{2}\right) \iff t=-x+\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ et donc } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-1 \iff \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$$

Alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{b-a}{2}}^{\frac{a-b}{2}} \sqrt{\left(t+\left(\frac{b-a}{2}\right)\right)\left(-t+\left(\frac{b-a}{2}\right)\right)}\,(-\mathrm{d}t)\\ &= \int_{\frac{b-a}{2}}^{\frac{a-b}{2}} \sqrt{\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-t^2\right)}\,(-\mathrm{d}t)\\ &= \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \sqrt{\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-t^2\right)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

2. Nous pouvons écrire $\sqrt{\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-t^2\right)} = \frac{b-a}{2}\sqrt{\left(1-\left(\frac{2t}{b-a}\right)^2\right)}$

3. Faisons un second changement de variables : $u=\frac{2t}{b-a}$

Alors $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{b-a} \iff \mathrm{d}t=\frac{b-a}{2}\mathrm{d}u$. D'où :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \sqrt{\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-t^2\right)}\,\mathrm{d}t &= \frac{b-a}{2}\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \sqrt{\left(1-\left(\tfrac{2t}{b-a}\right)^2\right)}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1}\sqrt{(1-u^2)}\left(\frac{b-a}{2}\right)\mathrm{d}u = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\int_{-1}^{+1}\sqrt{(1-u^2)}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

4. Nous arrivons au bout en faisant un troisième changement de variable $u=\sin X$ et donc

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\cos X \iff \mathrm{d}u=\cos X\,\mathrm{d}X$$

D'où :

$$\begin{aligned}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\int_{-1}^{+1}\sqrt{(1-u^2)}\,\mathrm{d}u &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}}\sqrt{(1-\sin^2 X)}\cos X\,\mathrm{d}X\\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}}\sqrt{(\cos^2 X)}\cos X\,\mathrm{d}X\\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}}\cos^2 X\,\mathrm{d}X\end{aligned}$$

Des formules trigonométriques $\cos 2X = 2\cos^2 X - 1$, nous tirons $\cos^2 X = \dfrac{\cos 2X + 1}{2}$ et donc :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \cos^2 X \,\mathrm{d}X &= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos 2X + 1}{2} \,\mathrm{d}X \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2X}{2} + X\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{+\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{+\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

D'où nous tirons $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(b-x)(x-a)}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \times \frac{\pi}{2}$

Faisons un peu de morale

C'est quoi, la fonction $f(x) = \sqrt{(b-x)(x-a)}$?

C'est très simplement le demi-cercle supérieur d'un cercle de diamètre le segment $[a; b]$ donc de longueur $b - a$.

La question de cet exercice est donc de connaître l'aire de ce demi-cercle qui sera donc $\dfrac{1}{2} \times \pi \times R^2$.

Et quel est ce rayon R ?

Et bien, $R = \dfrac{b-a}{2}$ et donc l'aire de ce demi-cercle supérieur est $\dfrac{1}{2} \times \pi \times \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$ qui est exactement celle que nous avons trouvé dans l'exercice.

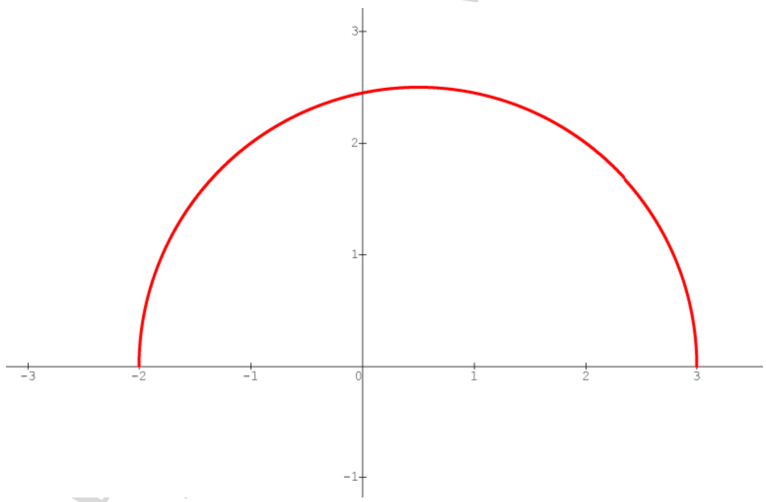

FIGURE 14.6 – La représentation graphique de la courbe $f(x) = \sqrt{(-2-x)(x-3)}$

Chapitre 15

Introduction aux équations différentielles

15.1 Généralités

15.1.1 Définition

On appelle équation différentielle du premier ordre, une équation de la forme :

$$y' = f(x, y(x)) \tag{15.1}$$

où $x \in I$ et $y : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable sur I et à valeurs dans un intervalle $J \subset \mathbb{R}$, et f une fonction définie sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
Dans ces cas, on dit que y est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

15.1.2 Définition

Soit $y' = f(x, y)$ une équation différentielle, où f est définie sur un domaine $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$. Les graphes des solutions s'appellent courbes intégrales

Exemple 1 :

1. Les solutions réelles définies sur un intervalle I de l'équation du premier ordre $y' = 1 + y^2$ sont les fonctions $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in I \qquad \varphi'(x) = 1 + \varphi^2(x)$$

Comme exemple de fonction, solution de l'équation, on trouve les fonctions tan sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
Ici, la fonction f est définie par $f(x, y) = 1 + y^2$

2. Ainsi, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une solution de l'équation 15.1 sur I est une fonction y, dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ est telle que :

$$(t, y(t))) \in \mathcal{U} \qquad y'(t) = f(t, y(t)) \text{ pour tout } t \in I$$

3. Le premier exemple qui nous vienne à l'idée est la recherche de primitive : chercher une primitive d'une fonction f, c'est résoudre l'équation différentielle $f' = F$
   (a) L'équation $y' = \dfrac{1}{x}$ a pour solutionS [1], une infinité de fonctions qui sont toutes de la forme $\ln|x| + K$ où $K \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$

1. Le S majuscule est ici, volontaire

(b) Plus généralement, si f est une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ *(Rappel : on dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$)*, l'équation $y' = f(x)$ a pour solutions les fonctions de la forme

$$y(x) = \int_a^x f(t)\ dt + K \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

En fait, nous avons $y(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t + y(a)$; c'est une forme du problème de Cauchy

4. Se pose, ici, le problème de l'unicité d'une solution d'une équation ; dans le cas des primitives, il y a une et une seule fonction vérifiant :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

5. Plus généralement, si elles existent, combien y-a-t-il de solutions à l'équation :

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

C'est le problème de Cauchy. L'unicité est le plus souvent fausse ; elle n'existe que dans des cas très précis. Nous y reviendrons

6. Soit $f(x) = 2x^2 + x + 1$; alors, f est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'^2 = 8y - 7 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Le problème inverse est : connaissant

$$\begin{cases} y'^2 = 8y - 7 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{15.2}$$

Quelles sont les fonctions qui vérifient (15.2) ?... Ce qui est un problème beaucoup plus complexe ! !

7. Les équations différentielles forment un vaste domaine de recherche des mathématiques ; ces équations sont issues de divers domaines de la vie quotidienne : économie, biologie, électronique, par exemples

Exercice 1 :

1. **Exercices de mise en équation**
   (a) A quelle condition le coefficient directeur de la tangente en chaque point est-il proportionnel à l'abscisse de ce point ? Quelles sont les fonctions f qui satisfont cette condition ?
   (b) Dans une population $\mathcal{P}$, de n individus, $x(t)$ est le nombre des individus atteints par une maladie contagieuse $\mathcal{M}$ à un moment donné par t
   La vitesse de propagation de l'épidémie est proportionnelle au nombre des individus atteints et aussi à la différence $n - x(t)$ des individus sains. En considérant x comme fonction d'une variable réelle, traduire les conditions ci-dessus par une condition portant sur la fonction x et sa dérivée
2. Résolution dans des cas simples
   (a) Donner 2 fonctions différentes définies sur $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$
   (b) En déduire une famille infinie de fonctions proportionnelles à leur dérivée.
3. Trouver une équation différentielle du premier ordre dont est solution, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction exponentielle $x \longmapsto e^{\alpha x}$

Remarque 1 :

Les équations différentielles du premier ordre ne sont pas les seules que nous aurons à étudier ou qui se trouvent dans la nature. Par exemple l'équation $y'' + 2\sin y = 0$ est une équation du second ordre.

15.1.3 Le problème de Cauchy

1. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$.
   On appelle Problème de Cauchy ou *équation différentielle aux conditions initiales* l'équation :
$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right. \tag{15.3}$$
2. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ résoudre le problème de Cauchy sur I, c'est trouver toutes les solutions de l'équation $y' = f(t, y(t))$ sur I, vérifiant $y(t_0) = y_0$

Remarque 2 :

En termes de courbe intégrale, on veut donc connaître toutes les courbes intégrales passant par (t_0, y_0)

Exercice 2 :

Donner le problème de Cauchy, vérifié par la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \longmapsto m(x - x_0) + y_0$

15.1.4 Solution maximale

On appelle solution maximale du problème de Cauchy 15.3 toute solution maximale pour la relation d'ordre sur les fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ par :
$$(I, f)\, \mathcal{R}\, (\mathcal{I}, g) \Longleftrightarrow I \subset \mathcal{I} \text{ et } f = g \text{ sur } I$$

Remarque 3 :

1. Une solution f sur I est maximale si elle ne peut être prolongée sur un intervalle strictement plus grand.
2. Soit φ, une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ solution d'un problème de Cauchy 15.3 ; la restriction φ_1 de φ à tout sous-intervalle de I est encore solution.
3. Inversement, il peut exister des solutions φ_2 prolongeant φ ; si la seule solution prolongeant φ est φ elle-même, on dit que φ est solution maximale.
4. On admet, pour le moment, que : **Toute solution se prolonge en une solution maximale**

Exemple 2 :

Le problème de Cauchy :
$$\left\{ \begin{array}{l} y' = xy^2 \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$$
admet une seule solution maximale, laquelle est définie sur $\left]-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right[$

En effet, $y' = xy^2 \Longleftrightarrow y'y^{-2} = x$, et donc :
$$\int y'(x)\,(y(x))^{-2}\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$
C'est à dire :
$$-\frac{1}{y(x)} = \frac{x^2}{2} + C \Longleftrightarrow y(x) = \frac{-1}{\frac{x^2}{2} + C}$$
Comme nous devons avoir $y(0) = 1$, nous en déduisons $C = -1$; d'où la solution au problème de Cauchy est donné par :
$$y(x) = \frac{2}{2 - x^2}$$

Autre remarque, nous avons ici, $f(x, y) = xy^2$

15.1.5 Interprétation graphique

Une fonction y est solution de 15.1, si en tout point de coordonnées $(x, y(x))$, la tangente à la courbe représentative de y a pour pente $f((x, y(x)))$. En chaque point (x, y) où la fonction f est définie, sa valeur donne la pente que doit avoir une solution passant par ce point.

On appelle isocline de coefficient α de l'équation 15.1, l'ensemble I_α des points M du plan pour lesquels les solutions de 15.1 ont une tangente de pente α en M
$M(x, y) \in I_\alpha$ si et seulement si $F(x, y) = \alpha$

Remarque 4 :

1. A tout point M de coordonnées (x_0, y_0), on peut associer une droite D_M passant par M et de coefficient directeur $f(x_0, y_0)$:
$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$
L'application $M \longmapsto D_M$ est appelée **champ des tangentes** associé à l'équation 15.1
2. Il n'y a pas de méthodes générales pour résoudre les équations différentielles du premier ordre. C'est seulement pour quelques familles d'entre elles *(Variables séparables, homogènes...)* que nous pouvons exhiber quelques méthodes.

15.2 Equations différentielles du premier ordre à variables séparées

15.2.1 Définition

On appelle équation différentielle à variables séparées, une équation de la forme :
$$\boxed{y' f(y) = g(x)}$$

Remarque 5 :

1. La résolution de ces équations équivaut à la résolution de $\displaystyle\int f \circ y(x) y'(x)\ dx = \int g(x)\ dx$ et si F est une primitive de f et G, primitive de g, nous avons
$$F(y(x)) = G(x) + k \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$
2. En supposant F bijective sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors $y(x) = F^{-1}[G(x)) + K)]$

Exemple 3 :

1. Premier exemple d'équation à variable séparée : $y' = y$
   Que sous-entend une telle question ? Il faut en fait trouver une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $y'(x) = y(x)$
   — Si y est la fonction nulle, c'est à dire identiquement égale à 0, y est solution de l'équation.
   — Supposons y non identiquement nulle, alors, $\dfrac{y'(x)}{y(x)} = 1$, ce qui conduit, en intégrant chaque membre, à :$\ln|y(x)| = x + K$ avec $K \in \mathbb{R}$, d'où $|y(x)| = Ce^x$ avec $C > 0$; donc, en fait, l'ensemble des solutions est donné par $y(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$
2. Résolution de $y' \cos y = x$
   De la même manière, l'équation est équivalente à $\displaystyle\int y'(x) \cos y(x)\ dx = \int x\ dx$ qui nous donne donc $\sin y(x) = \dfrac{x^2}{2} + K$ où $K \in \mathbb{R}$
   Pour qu'une solution soit définie, il faut que $\left|\dfrac{x^2}{2} + K\right| \leqslant 1$; alors, $y(x) = \arcsin\left(\dfrac{x^2}{2} + K\right)$ où $K \in \mathbb{R}$ et $\left|\dfrac{x^2}{2} + K\right| \leqslant 1$

3. Résoudre $y' \ln y = e^x$

   Cette équation est donc équivalente à $\displaystyle\int y'(x) \ln y(x)\, dx = \int e^x dx$. L'intégrale $\displaystyle\int y'(x) \ln y(x)\, dx$ se calcule par parties :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u' = y' & u = y \\ v = \ln y & v' = \dfrac{y'}{y} \end{array} \right\}$$

   Donc, $\displaystyle\int y'(x) \ln y(x)\, dx = y \ln y - \int y' = y \ln y - y$ et nous avons donc

$$y(x) \ln(y(x)) - y(x) = e^x + K$$

   On remarque que nous ne trouvons pas une expression de y, mais une relation fonctionnelle entre x et y beaucoup plus difficile à appréhender.

15.3 Equation différentielle linéaire

15.3.1 Définition

On appelle Equation différentielle linéaire du premier ordre toute équation de la forme

$$u(x) y' + v(x) y = w(x) \tag{15.4}$$

Où u, v et w sont des fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$
Résoudre cette équation sur I, c'est trouver toutes les fonctions y dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que

$$u(x) y'(x) + v(x) y(x) = w(x) \text{ pour tout } x \in I$$

Les courbes d'équation $y = y(x)$ sont appelées courbes intégrales de l'équation

Exemple 4 :

1. Prenons par exemple l'équation $2x(1+x) y' + (1+x) y = 1$. Si cette équation a une solution sur $\mathbb{R}$ en entier, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$2x(1+x) y'(x) + (1+x) y(x) = 1$$

   En particulier pour $x = -1$; nous montrons ainsi, facilement que si y est solution de l'équation, $y(-1)$ n'existe pas. Il faudra donc se restreindre à l'étude de l'équation à deux intervalles : $]-1; +\infty[$ ou bien $]-\infty; -1[$

2. **Contre-exemples :** Les équations $(y')^2 + y = 2$ et $y' + \ln y = 2$ sont des équations différentielles du premier ordre **non linéaire**

15.3.2 Proposition

On apelle $\mathcal{C}^1(I)$, le sous-espace vectoriel des fonctions une fois continuement différentiables sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}^0(I)$, le sous-espace vectoriel des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$
Soit L l'application ainsi définie :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L : \mathcal{C}^1(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ y & \longmapsto & L(y) = u(x) y' + v(x) y \end{array} \right.$$ [2]

Alors, L est une application linéaire

2. L'écriture $L(y) = u(x) y' + v(x) y$ n'est pas correcte. L'écriture correcte est $L(y) = uy' + vy$ avec $u \in \mathcal{C}^0(I)$ et $v \in \mathcal{C}^0(I)$, mais c'est celle qui est communément admise

Démonstration

La démonstration est simple et s'appuie essentiellement sur la linéarité de la dérivation.
Soient $y \in \mathcal{C}^1(I)$, $z \in \mathcal{C}^1(I)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} L(\lambda y + \mu z) &= u(x)(\lambda y + \mu z)' + v(x)(\lambda y + \mu z) \\ &= u(x)(\lambda y)' + u(x)(\mu z)' + v(x)(\lambda y) + v(x)(\mu z) \\ &= \lambda u(x)(y)' + \mu u(x)(z)' + \lambda v(x)(y) + \mu v(x)(z) \\ &= \lambda\left(u(x)(y)' + v(x)(y)\right) + \mu\left(u(x)(z)' + v(x)(z)\right) \\ &= \lambda L(y) + \mu L(z) \end{aligned}$$

L est donc bien une application linéaire.

15.3.3 Définition

L'équation différentielle $L(y) = 0$ est l'équation différentielle linéaire homogène associée à (15.4)

Remarque 6 :

1. C'est à dire que l'équation $u(x)y' + v(x)y = 0$ est l'équation différentielle linéaire homogène associée à $u(x)y' + v(x)y = w(x)$
2. Rechercher les fonctions $y \in \mathcal{C}^1(I)$ telles que $L(y) = 0$, c'est, en fait, rechercher le noyau de l'application linéaire L, c'est à dire $\ker L$

15.3.4 Théorème

L'ensemble S_0 des solutions de l'équation homogène $L(y) = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I)$
L'ensemble S des solutions de (15.4) est donné par :

$$S = \{y_p + y_0 \text{ où } y_0 \in S_0\} = y_p + S_0$$

avec $L(y_p) = f(x)$
C'est à dire que toutes les solutions de (15.4) sont de la forme $y_p + y_0$ où y_p est une solution particulière de (15.4) et y_0 parcourt toutes les solutions de l'équation homogène $L(y) = 0$

Démonstration

1. Que S_0 soit un sous espace vectoriel, c'est immédiat, puisque S_0 est le noyau de l'application linéaire L
2. Pour démontrer la seconde affirmation, on la démontre en deux temps.
   (a) Soit z une fonction de la forme $z = y_p + y_0$; alors,
   $$L(z) = L(y_p + y_0) = L(y_p) + L(y_0) = f(x) + 0 = f(x)$$
   z est donc bien solution de (15.4)
   (b) Réciproquement, soit y_1 une solution quelconque de (15.4) et considérons $z_1 = y_p - y_1$; alors,
   $$L(z_1) = L(y_p - y_1) = f(x) - f(x) = 0$$
   La différence $y_p - y_1$ est bien dans S_0

Remarque 7 :

1. On admettra que S_0 est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathcal{C}^1(I)$
2. S est alors un espace affine de dimension 1, passant par le point y_p et de direction S_0
3. Le théorème 15.3.4 n'est que l'application de la théorie des équations linéaires vue en Algèbre (voir 3.11.2)

Exemple 5 :

1. Dans la résolution, la mention de l'intervalle I est importante

   Par, exemple, soit à résoudre l'équation $xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$

   — Si y est solution sur $\mathbb{R}$ en entier, alors, nous avons :
   $$0y'(0) + y(0) = 0$$
   D'où nous tirons que $y(0) = 0$.
   Comme $(xy)' = xy' + y = 0$, nous en déduisons que $xy = k$, et, donc, par continuité de y sur $\mathbb{R}$, $k = 0$. La seule solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en entier est donc donnée par la fonction nulle $y = \mathcal{O}$

   — Si, maintenant, nous considérons l'intervalle $I =]0, +\infty[$, nous obtenons comme solution $y = \dfrac{k_1}{x}$ où $k_1 \in \mathbb{R}$

   — De même si nous considérons l'intervalle $I =]-\infty, 0[$, nous obtenons comme solution $y = \dfrac{k_2}{x}$ où $k_2 \in \mathbb{R}$

2. <u>**Résolvons maintenant l'équation** $xy' - 2y = 0$</u>.
   Comme tout à l'heure, si y est solution sur $\mathbb{R}$ en entier, alors, nous avons aussi, avec les mêmes arguments $y(0) = 0$

   — Comme $\left(\dfrac{y}{x^2}\right)' = \dfrac{y'x - 2y}{x^3}$, y est solution de l'équation $xy' - 2y = 0$ si et seulement si $\dfrac{y}{x^2} = k$ avec $k \in \mathbb{R}$

   — Donc, sur $I =]0, +\infty[$, nous obtenons comme solution $y = k_1x^2$ où $k_1 \in \mathbb{R}$ et sur $I =]-\infty, 0[$, nous obtenons comme solution $y = k_2x^2$ où $k_2 \in \mathbb{R}$

   — Existe-t-il une solution sur $\mathbb{R}$ en entier ? S'il existe donc une solution sur $\mathbb{R}$ en entier, il faut que y soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et que les restrictions sur $]0, +\infty[$ coïncident avec les fonctions $y = k_1x^2$ et que les restrictions sur $]-\infty, 0[$, coïncident avec $y = k_2x^2$. Autrement dit, estce que la fonction
   $$\left\{\begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y(x) = \left\{\begin{array}{l} k_1x^2 \text{ si } x \geqslant 0 \\ k_2x^2 \text{ si } x \leqslant 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$
   Le seul point posant difficulté est $x_0 = 0$; elle est évidemment continue en 0. On vérifie que cette fonction est dérivable en $x_0 = 0$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. y est donc une slution maximale sur $\mathbb{R}$

   Voir la figure 15.1

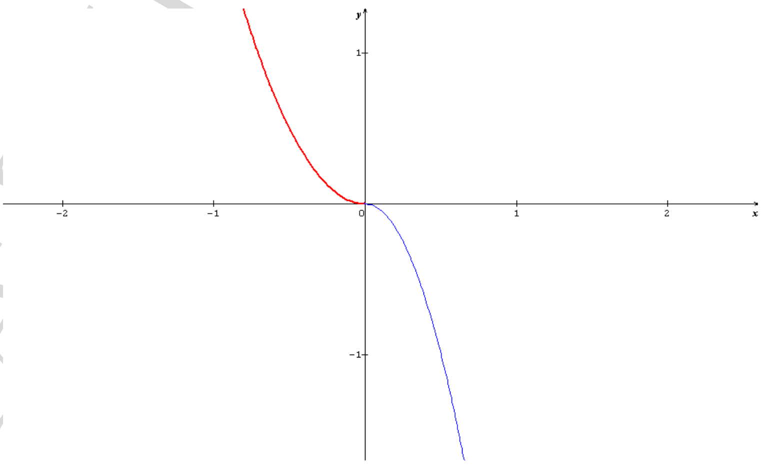

FIGURE 15.1 – Les courbes solutions de l'équation $xy' - 2y = 0$

15.3.5 Le problème de Cauchy dans le cas des équations linéaires

La présentation, ici, du problème de Cauchy, est une présentation très élémentaire

Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{C}$.
On appelle Problème de Cauchy ou équation différentielle avec conditions initiales, l'équation :

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) y' + v(x) y = w(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$$

Résoudre ce problème de Cauchy sur I, c'est trouver toutes les solutions y définies sur I vérifiant, pour tout $x \in I$ $u(x) y'(x) + v(x) y(x) = w(x)$ et $y(x_0) = y_0$

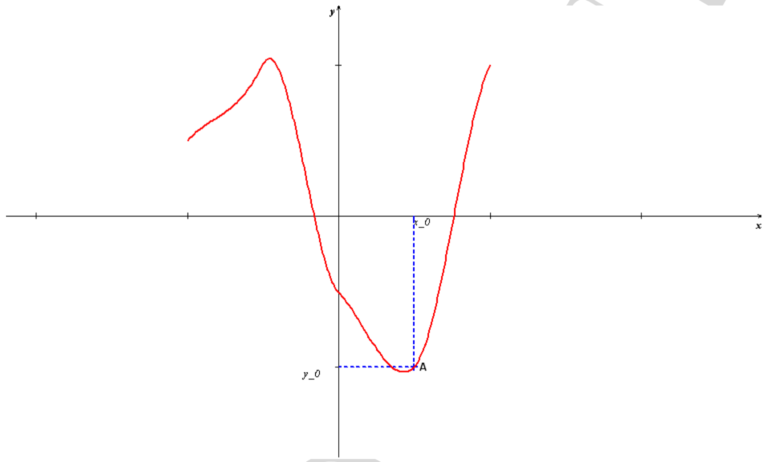

FIGURE 15.2 – En termes de courbes intégrales, il s'agit de trouver toutes les courbes qui passent par le point A de coordonnées (x_0, y_0)

Remarque 8 :

Un problème de Cauchy peut avoir plusieurs solutions (ou aucune)

Exemple 6 :

Reprenons les exemples

1. Dans la résolution de $xy' + y = 0$, le problème
$$\left\{\begin{array}{l} xy' + y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$$
n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, si $y_0 \neq 0$
Sur $I =]0, +\infty[$, le problème
$$\left\{\begin{array}{l} xy' + y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$$
a une solution et une seule définie par $y(x) = \dfrac{x_0 y_0}{x}$
2. Dans la résolution de $xy' - 2y = 0$, le problème
$$\left\{\begin{array}{l} xy' - 2y = 0 \\ y(0) = y_0 \end{array}\right.$$
n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, si $y_0 \neq 0$ et une infinité de solutions si $y_0 = 0$
Sur $I =]0, +\infty[$, le problème
$$\left\{\begin{array}{l} xy' - 2y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right.$$

a une solution et une seule définie par $y(x) = \dfrac{y_0}{x_0^2}x^2$

15.3.6 Problème de Cauchy : existence et unicité

Soient a et b, 2 fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$
Si a et b sont continues sur I, alors, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a une unique solution sur I

Démonstration

La fonction a étant continue sur I, admet, sur I une primitive A qui s'annule en x_0 :

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$$

Nous pouvons remarquer que $A(x_0) = 0$
On appelle $z(x) = e^{A(x)}y(x)$; nous avons, en particulier $z(x_0) = e^{A(x_0)}y(x_0) = y_0$
En calculant la dérivée de z, nous obtenons :

$$\begin{aligned} z'(x) = &\ e^{A(x)}y'(x) + a(x)e^{A(x)}y(x) \\ = &\ e^{A(x)}\left(y'(x) + a(x)y(x)\right) \\ = &\ e^{A(x)}b(x) \end{aligned}$$

D'où on tire $z(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{A(t)}b(t)\,dt + y_0$, et donc que

$$e^{A(x)}y(x) = \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}b(t)\,dt + y_0$$

C'est à dire

$$y(x) = e^{-A(x)}\left(\int_{x_0}^{x} e^{A(t)}b(t)\,dt + y_0\right)$$

Réciproquement, on démontre que la fonction y ainsi trouvée est solution du problème de Cauchy. On vient donc de montrer l'existence et l'unicité de y

Remarque 9 :

Le cas d'une équation $u(x)y' + v(x)y = w(x)$ se ramène au cas du théorème 15.3.6 si u, v et w sont continues sur I, et si u ne s'annule pas sur I.

15.4 Recherche de solutions

15.4.1 Equation différentielle linéaire homogène associée

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{15.5}$$

où a et b sont des fonctions réelles quelconques de x.
L'équation différentielle linéaire homogène associée (EDLHA) est

$$y' = a(x)y$$

Remarque 10 :

1. Le cas d'une équation $u(x)\,y' + v(x)\,y = w(x)$, du type de l'équation 15.4, se ramène au cas de l'équation 15.5 si u, v et w sont continues sur I, et si u ne s'annule pas sur I.
2. Si y_1 et y_2 sont solutions de l'EDLHA, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de l'EDLHA.
3. Autrement dit, on retrouve le fait que l'ensemble S_0 des solutions de l'EDLHA forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

15.4.2 Théorème : résolution de l'EDLHA

On suppose la fonction a continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, c'est à dire que $a \in \mathcal{C}^0(I)$, et soit α une primitive de a sur I, c'est à dire : $\alpha(x) = \displaystyle\int a(x)\ dx$; alors, les solutions maximales de l'EDLHA sont données par

$$y(x) = Ce^{\alpha(x)} \text{ où } C \in \mathbb{R}$$

Démonstration

L'EDLHA est donc $y' = a(x)\,y$ qui est une équation à variables séparables. La fonction nulle $\mathcal{O}$ est solution de cette équation ; supposons $y \neq \mathcal{O}$; on peut alors diviser par y, et nous obtenons l'équation différentielle

$$\frac{y'}{y} = a(x)$$

En intégrant chaque membre, nous obtenons :

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int a(x)\ dx$$

C'est à dire

$$\ln|y(x)| + K = \alpha(x) + K' \iff \ln|y(x)| = \alpha(x) + K_1$$

En passant à l'exponentielle, nous obtenons :

$$y(x) = Ce^{\alpha(x)} \text{ avec } C > 0$$

On peut remarquer que méme si $C < 0$, $y(x) = Ce^{\alpha(x)}$ est solution, et que, comme $\mathcal{O}$ est solution, l'ensemble des solutions de l'EDLHA est

$$\boxed{y(x) = Ce^{\alpha(x)} \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$$

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - y = 0$ et $y(0) = \lambda$
2. $3y' + 7y = 0$ et $y(2) = -7$
3. $y" + 4y' = 0$ et $y(0) = 8$
4. $y" - 9y' = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$
5. $xy' - 2y = 0$ et $y(0) = 1$
6. $y' + |x|\,y = 0$ et $y(0) = 1$

15.4.3 Première méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

Toutes les solutions de l'équation différentielle (15.5) s'obtiennent par addition d'une solution particulière de (15.5) et de la solution générale de l'EDLHA

Démonstration

C'est l'application du théorème 15.3.4

Exemple 7 :

Résolvons l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} 2y' + 3xy = x \\ y(0) = 0 \end{array}\right.$$

1. On résoud d'abord l'EDLHA $2y' + 3xy = 0$:

$$\begin{aligned} 2y' + 3xy = 0 &\iff 2y' = -3xy \\ &\iff \frac{y'}{y} = -\frac{3}{2}x \end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int -\frac{3}{2}xdx$, c'est à dire $\ln y(x) = -\dfrac{3x^2}{4} + K$, d'où nous avons $y(x) = Ce^{-\frac{3x^2}{4}}$ avec $C \in \mathbb{R}$, solution générale de l'EDLHA.

2. Recherchons maintenant une solution particulière de $2y' + 3xy = x$ que nous allons chercher parmi les fonctions constantes. On trouve facilement $y(x) = \dfrac{1}{3}$. La solution générale de l'équation est donc

$$y(x) = Ce^{-\frac{3x^2}{4}} + \frac{1}{3} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

3. Pour résoudre le problème de Cauchy posé, il faut trouver la constante C telle que $y(0) = 0$. Or, $y(0) = C + \dfrac{1}{3} = 0$, d'où $C = -\dfrac{1}{3}$. La solution du problème de Cauchy est donc :

$$y(x) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-\frac{3x^2}{4}}\right)$$

15.4.4 Seconde méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre : la variation de la constante

On considére l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' = a(x)y + b(x)$$

La résolution de cette équation par la méthode de variation de la constante comporte 2 étapes :

Première étape : On résout l'EDLHA, et on obtient une solution du type $y = Ce^{\alpha(x)}$

Seconde étape : On considére la solution $y = Ce^{\alpha(x)}$, et on considére C comme une fonction de x, c'est à dire que nous écrivons $y(x) = C(x)e^{\alpha(x)}$.
On calcule alors $y'(x)$, et nous remplaçons $y(x)$ et $y'(x)$, par leurs valeurs dans l'équation $y' = a(x)y + b(x)$, et nous obtenons ainsi $C(x)$ que nous remplaçons pour obtenir la solution générale de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$

Démonstration

Résolution de l'EDLHA Nous obtenons donc comme solution de cette équation, une famille de solutions du type $y = Ce^{\alpha(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$

Résolution générale Nous faisons le changement de variables $z = e^{-\alpha(x)}y$, c'est à dire

$$\left\{\begin{array}{l} y = e^{\alpha(x)}z \\ y' = z'e^{\alpha(x)} + za(x)e^{\alpha(x)} \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$y' = a(x)y + b(x) \Leftrightarrow z'e^{\alpha(x)} + za(x)e^{\alpha(x)} = a(x)e^{\alpha(x)}z + b(x)$$

C'est à dire

$$y' = a(x)y + b(x) \Leftrightarrow z'e^{\alpha(x)} = b(x) \Leftrightarrow z' = b(x)e^{-\alpha(x)}$$

En calculant $z(x) = \displaystyle\int b(x)e^{-\alpha(x)}\,dx$, et en le remplaçant, nous avons la solution

Remarque 11 :

Bien entendu, dans la démonstration, $z(x) = C(x)$

Exemple 8 :

Exemples de résolution

1. **Résoudre** $y' - 3y = \sin x$

Résolution de l'EDLHA On résoud $y' - 3y = 0$; c'est très facile : on trouve $y = Ce^{3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Variation de la constante On écrit donc $y(x) = C(x)e^{3x}$ et donc $y'(x) = C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x}$, d'où, en remplaçant dans l'équation de départ, nous obtenons :

$$C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x} - 3C(x)e^{3x} = \sin x$$

C'est à dire

$$C'(x)e^{3x} = \sin x \Leftrightarrow C'(x) = e^{-3x}\sin x$$

Le probléme, maintenant consiste à trouver l'ensemble des primitives de $e^{-3x}\sin x$. Comment calculer ces primitives ? C'est une question classique de double intégration par parties, ou encore de fonctions complexes *(*$\sin x$ *est la partie imaginaire de* e^{ix}*)*.

On écrit : $\left\{\begin{array}{ll} u = e^{-3x} & u' = -3e^{-3x} \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right\}$ d'où, le calcul de l'intégrale donne :

$$\int e^{-3x}\sin x\, dx = -e^{-3x}\cos x - 3\int e^{-3x}\cos x\, dx$$

Nous recommençons une seconde intégration par parties, en posant : $\left\{\begin{array}{ll} u = e^{-3x} & u' = -3e^{-3x} \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right\}$, et donc,

$$\int e^{-3x}\cos x\, dx = e^{-3x}\sin x + 3\int e^{-3x}\sin x\, dx$$

C'est à dire, que nous avons, en remplaçant :

$$\begin{aligned} \int e^{-3x}\sin x\, dx &= -e^{-3x}\cos x - 3\left(e^{-3x}\sin x + 3\int e^{-3x}\sin x\, dx\right) \\ &= -e^{-3x}\cos x - 3e^{-3x}\sin x - 9\int e^{-3x}\sin x\, dx \end{aligned}$$

D'où on tire : $\displaystyle\int e^{-3x}\sin x\, dx = -\frac{1}{10}e^{-3x}\cos x - \frac{3}{10}e^{-3x}\sin x + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Donc, la solution générale de l'équation $y' - 3y = \sin x$ est donnée par :

$$y(x) = e^{3x}\left(\frac{-1}{10}e^{-3x}\cos x + \frac{-3}{10}e^{-3x}\sin x + \lambda\right) = \lambda e^{3x} - \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$$

Avec $\lambda \in \mathbb{R}$

2. **Résoudre** $y'\sin x - y\cos x = \sin^2 x$

Tout d'abord, $\sin x$ n'étant pas la fonction nulle, on peut diviser par icelle et nous obtenons : $y' - y\cot x = \sin x$

Résolution de l'EDLHA On résoud donc $y' - y\cot x = 0$ qui est équivalente à

$$\frac{y'}{y} = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

D'où on tire $\ln|y| = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \ln|\sin x| + C$, d'où nous tirons $y(x) = C\sin x$

Variations de la constante Nous posons donc $y(x) = C(x)\sin x$ que nous dérivons donc.
$y'(x) = C'(x)\sin x + C(x)\cos x$, et en remplaçant,

$$y'\sin x - y\cos x = \sin^2 x \Leftrightarrow \sin x\left(C'(x)\sin x + C(x)\cos x\right) - \cos x\left(C(x)\sin x\right) = \sin^2 x$$

Ce qui donne

$$y'\sin x - y\cos x = \sin^2 x \Leftrightarrow C'(x)\sin^2 x = \sin^2 x \Leftrightarrow C'(x) = 1$$

D'où, $C(x) = x + k$, avec $k \in \mathbb{R}$

D'où nous tirons comme solution générale : $y(x) = (x+k)\sin x$ avec $k \in \mathbb{R}$

15.5 Quelques problèmes résolus

Nous allons résoudre, dans ce paragraphe quelques questions très classiques

15.5.1 Etude classique

Etude de l'équation différentielle

$$2x(1-x)y' + (1-x)y - 1 = 0 \tag{15.6}$$

1. **Sur l'intervalle** $]+1, +\infty[$
   (a) L'EDLHA associée est donnée par

   $$2x(1-x)y' + (1-x)y = 0$$

   Et comme $x > 1$, cette équation est équivalente à

   $$2xy' + y = 0$$

   Où nous tirons $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{2x}$ où nous trouvons $y(x) = \dfrac{C}{\sqrt{x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

   (b) En utilisant la variation de la constante, nous avons :

   $$\begin{cases} y(x) = \dfrac{C(x)}{\sqrt{x}} \\ y'(x) = \dfrac{C'(x)}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2}C(x)x^{\frac{-3}{2}} \end{cases}$$

   Donc, en remplaçant, nous avons :

   $$\begin{gathered} 2x(1-x)\left(\frac{C'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}C(x)x^{\frac{-3}{2}}\right) + (1-x)\left(\frac{C(x)}{2\sqrt{x}}\right) - 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ 2x^{\frac{1}{2}}(1-x)C'(x) - C(x)(1-x)x^{\frac{-1}{2}} + (1-x)C(x)x^{\frac{-1}{2}} - 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ 2x^{\frac{1}{2}}(1-x)C'(x) - 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ C'(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}(1-x)} \end{gathered}$$

   Et on conclue donc que $C(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}(1-x)}$

(c) Il faut maintenant calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}(1-x)}$

On fait le changement de variables $u = x^{\frac{1}{2}}$, et nous obtenons $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$, c'est à dire $dx = 2udu$

Ainsi, calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}(1-x)}$, c'est aussi calculer $\displaystyle\int \frac{2udu}{2u(1-u^2)} = \int \frac{du}{(1-u^2)}$

(d) En développant en éléments simples, nous obtenons :

$$\frac{1}{(1-u^2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1+u)} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-u)}$$

de telle sorte que :

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{(1-u^2)} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{(1+u)} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{(1-u)}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{(1+u)} - \frac{1}{2}\int \frac{-du}{(1-u)}\\ &= \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\ln|1-u|\\ &= \frac{1}{2}\ln(1+u) - \frac{1}{2}\ln(u-1)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u+1}{u-1}\right)\end{aligned}$$

Donc $C(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) + K$ où $K \in \mathbb{R}$

(e) Et la solution générale de 15.6 est donnée par :

$$\boxed{y(x) = x^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) + K\right) \text{ avec } K \in \mathbb{R}}$$

(f) On peut faire remarquer que, pour tout $K \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} y(x) = +\infty$

2. **Sur l'intervalle** $]0,1[$

(a) L'EDLHA est toujours $2xy' + y = 0$ d'où nous tirons $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{2x}$ où nous trouvons $y(x) = \dfrac{C}{\sqrt{x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

(b) En utilisant la variation de la constante, rien ne change et nous avons toujours :

$$C(x) = \int \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}(1-x)}$$

(c) On fait toujours le changement de variables $u = x^{\frac{1}{2}}$, et nous devons toujours calculer $\displaystyle\int \frac{du}{(1-u^2)}$.

Comme tout à l'heure,

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{(1-u^2)} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{(1+u)} - \frac{1}{2}\int \frac{-du}{(1-u)}\\ &= \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\ln|1-u|\end{aligned}$$

De $u \in]0,1[$, nous tirons $|1-u| = 1-u$ et

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{(1-u^2)} &= \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\ln|1-u|\\ &= \frac{1}{2}\ln(1+u) - \frac{1}{2}\ln(1-u)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\end{aligned}$$

Donc $C(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) + K$ où $K \in \mathbb{R}$

(d) Et la solution générale de 15.6 sur l'intervalle $]0,1[$ est donnée par :

$$\boxed{y(x) = x^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)+K\right) \text{ avec } K\in\mathbb{R}}$$

(e) On peut faire remarquer que, pour tout $K\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} y(x) = +\infty$

3. **Sur l'intervalle** $]-\infty,0[$

(a) L'EDLHA associée est donnée par

$$2x(1-x)y' + (1-x)y = 0$$

Et comme $x<0$, cette équation est équivalente à

$$2xy' + y = 0$$

Où nous tirons $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{1}{2x}$ où nous trouvons $\ln|y(x)| = -\dfrac{1}{2}\ln|x| + C$ et

$$y(x) = \frac{C}{\sqrt{-x}} = C|x|^{-\frac{1}{2}} \text{ avec} C\in\mathbb{R}$$

(b) En utilisant la variation de la constante, nous avons :

$$\begin{cases} y(x) = C(x)(-x)^{-\frac{1}{2}} \\ y'(x) = C'(x)(-x)^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}C(x)(-x)^{\frac{-3}{2}} \end{cases}$$

Donc, en remplaçant, nous avons :

$$2x(1-x)C'(x)(-x)^{-\frac{1}{2}} + 2x(1-x)\times\frac{1}{2}C(x)(-x)^{\frac{-3}{2}} + (1-x)C(x)(-x)^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0$$

En utilisant le fait que $(-x)^{-\frac{1}{2}} = |x|^{-\frac{1}{2}}$, et que comme $x<0$, $-x=|x|$, nous avons :

$$-2|x|(1-x)C'(x)|x|^{-\frac{1}{2}} - |x|(1-x)C(x)|x|^{\frac{-3}{2}} + (1-x)C(x)|x|^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0$$

Donc,

$$-2|x|(1-x)C'(x)|x|^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0$$

D'où $C'(x) = \dfrac{-1}{2(1-x)|x|^{\frac{1}{2}}}$. Et on conclue donc que

$$C(x) = \int \frac{-dx}{2(-x)^{\frac{1}{2}}(1-x)}$$

Comme $x<0$, on peut aussi écrire $\dfrac{-1}{2(-x)^{\frac{1}{2}}(1-x)} = \dfrac{-1}{2\sqrt{|x|}(1+|x|)}$

(c) On fait le changement de variables $u=\sqrt{-x}$, et nous obtenons $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{1}{2}(-x)^{\frac{-1}{2}} = -\dfrac{1}{2|x|^{\frac{1}{2}}}$,

c'est à dire $dx = -2udu$

Ainsi, calculer $\displaystyle\int \frac{-dx}{2\sqrt{-x}(1-x)}$, c'est aussi calculer

$$\int \frac{2udu}{2u(1+u^2)} = \int \frac{du}{(1+u^2)} = \arctan u + K$$

Donc $C(x) = \arctan\left(|x|^{\frac{1}{2}}\right) + K$ où $K\in\mathbb{R}$

(d) Et la solution générale de 15.6 sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ est donnée par :

$$\boxed{y(x) = |x|^{\frac{-1}{2}} \left(\arctan\left(|x|^{\frac{1}{2}}\right) + K\right) \text{ avec } K \in \mathbb{R}}$$

4. **Existence de solutions** $]-\infty, 1[$
Pour qu'une solution existe sur $]-\infty, 1[$, il faut que cette solution soit continue et dérivable sur cet intervalle. D'après l'équation 15.6, la seule valeur possible pour $y(0)$ est 1

(a) A droite de 0
$y(x)$ peut s'écrire $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{2}\left(\ln(1+\sqrt{x}) - \ln(1-\sqrt{x})\right) + K\right)$. On utilise alors le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 [3] :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

Donc

$$\begin{aligned}\ln(1+\sqrt{x}) - \ln(1-\sqrt{x}) &= \sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \left(-\sqrt{x} - \frac{x}{2} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + x^{\frac{3}{2}}\varepsilon(x) \\ &= 2\sqrt{x} + 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + x^{\frac{3}{2}}\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Et donc, $\dfrac{1}{2}\left(\ln(1+\sqrt{x}) - \ln(1-\sqrt{x})\right) = \sqrt{x} + \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + x^{\frac{3}{2}}\varepsilon(x)$, puis,

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\sqrt{x}\right) - \ln\left(1-\sqrt{x}\right)\right) + K\right) = \frac{K}{\sqrt{x}} + 1 + \frac{x}{3} + x\varepsilon(x)$$

Ainsi, si $K \neq 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y(x)$ n'existe pas, et si $K = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y(x) = 1$

(b) A gauche de 0
En utilisant le développement limité de $\arctan x$ au voisinage de 0, donné par :

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x)$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\arctan|x|^{\frac{1}{2}}}{|x|^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}}\left(|x|^{\frac{1}{2}} - \frac{|x|^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{|x|^{\frac{5}{2}}}{5} + |x|^{\frac{5}{2}}\varepsilon(x)\right) \\ &= 1 - \frac{|x|}{3} + \frac{|x|^2}{5} + |x|^2\varepsilon(x)\end{aligned}$$

D'où, au voisinage de 0, $y(x) = \dfrac{K}{|x|^{\frac{1}{2}}} + 1 - \dfrac{|x|}{3} + \dfrac{|x|^2}{5} + |x|^2\varepsilon(x)$

Ainsi, si $K \neq 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} y(x)$ n'existe pas, et si $K = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} y(x) = 1$

(c) La seule solution continue sur $]-\infty, +1[$ est donnée par :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} \text{ si } x < 0 \\ +1 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) \text{ si } 0 < x < +1 \end{cases}$$

3. Il était aussi tout à fait possible d'utiliser la limite remarquable $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(d) Il faut maintenant montrer qu'elle est dérivable en 0

Pour ce faire, nous allons utiliser les développements limités de $\ln(1+x)$ et $\arctan x$ au voisinage de 0.

i. A gauche de 0, nous devons évaluer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{y(x)-y(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{y(x)-1}{x}$

Or, $\dfrac{y(x)-1}{x} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\arctan |x|^{\frac{1}{2}}}{|x|^{\frac{1}{2}}} - 1\right)$. Nous avons déjà le développement limité de $\dfrac{\arctan |x|^{\frac{1}{2}}}{|x|^{\frac{1}{2}}}$ au voisinage de 0, et donc, au voisinage de 0, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{y(x)-1}{x} &= \frac{1}{x}\left(\frac{\arctan |x|^{\frac{1}{2}}}{|x|^{\frac{1}{2}}} - 1\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(1-\frac{|x|}{3}+\frac{|x|^2}{5}+|x|^2\varepsilon(x)-1\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(-\frac{|x|}{3}+\frac{|x|^2}{5}+|x|^2\varepsilon(x)\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{x}{3}+\frac{x^2}{5}+x^2\varepsilon(x)\right)\\ &= \frac{1}{3}+\frac{x}{5}+x\varepsilon(x)\end{aligned}$$

Et donc, $y'_g(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{y(x)-y(0)}{x} = \dfrac{1}{3}$

On montre ainsi que y est dérivable à gauche de 0, et de dérivée $y'_g(0) = \dfrac{1}{3}$

ii. De même, à droite de 0, nous devons évaluer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{y(x)-y(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{y(x)-1}{x}$

Or, $\dfrac{y(x)-1}{x} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)-1\right)$. Nous connaissons le développement limité de $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$ au voisinage de 0 qui est donné par :

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = 1+\frac{1}{3}x+x\varepsilon(x)$$

et donc :

$$\frac{y(x)-1}{x} = \frac{1}{3}+\varepsilon(x)$$

Nous avons donc : $y'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{y(x)-y(0)}{x} = \dfrac{1}{3}$

On montre ainsi que y est dérivable à droite de 0, et de dérivée $y'_d(0) = \dfrac{1}{3}$.

Comme $y'_d(0) = y'_g(0)$, la fonction y est dérivable en 0 et continue en 0. La seule solution de 15.6 sur l'intervalle $]-\infty, +1[$ est donnée par :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} \text{ si } x<0\\ +1 \text{ si } x=0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) \text{ si } 0<x<+1\end{cases}$$

Voir la figure 15.3

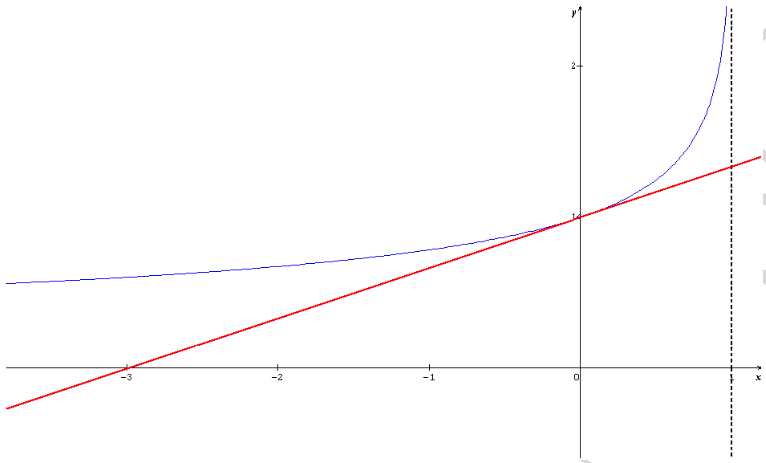

FIGURE 15.3 – La courbe solution de l'équation 15.6 sur l'intervalle $]-\infty, +1[$

15.5.2 Equation non linéaire homogène

Une équation homogène est une équation du type $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$ où F est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$

Exemple 9 :

1. **Résolvons l'équation** $y' = 1 - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$ **sur l'intervalle** $]0, +\infty[$

   Nous sommes bien devant le cas $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$ où $F(t) = 1 - t + t^2$

   (a) Posons $y(x) = xu(x)$

   (b) ; alors $y'(x) = xu'(x) + u(x)$

   (c) **On remplace alors dans l'équation** et on obtient :

$$xu'(x) + u(x) = 1 - u(x) + u(x)^2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$xu'(x) = 1 - 2u(x) + u(x)^2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$xu'(x) = (u(x) - 1)^2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{u'(x)}{(u(x)-1)^2} = \frac{1}{x}$$

   qui est, en fait, une équation à variables séparables, pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \neq 1$. En intégrant, nous obtenons :

$$\frac{1}{(1 - u(x))} = \ln x + K$$

   (d) Par calculs, on déduit donc que $u(x) = 1 - \frac{1}{\ln x + K}$, d'où

$$\boxed{y(x) = x - \frac{x}{\ln x + K}}$$

   avec $K \in \mathbb{R}$ et $x \neq e^{-K}$

   (e) Pour $u(x) = 1$, on obtient $y(x) = x$ qui est bien solution de l'équation proposée.

2. **Résolvons l'équation** $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ **sur l'intervalle** $]0, +\infty[$

(a) Cette équation est équivalente à $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ et où nous avons $F(t) = t + \sqrt{1+t^2}$

(b) **Nous faisons le changement de variables** $y(x) = xt(x)$; alors $y'(x) = xt'(x) + t(x)$

(c) **On remplace alors dans l'équation** et on obtient :

$$xt'(x) + t(x) = t(x) + \sqrt{1 + t(x)^2}$$

C'est à dire :

$$t'(x) = \frac{\sqrt{1+t(x)^2}}{x} \Longleftrightarrow \frac{t'(x)}{\sqrt{1+t(x)^2}} = \frac{1}{x}$$

(d) Les primitives de $\frac{t'(x)}{\sqrt{1+t(x)^2}}$ sont du type $\operatorname{argsh}(t(x)) + K$, et nous obtenons l'dentité :

$$\operatorname{argsh}(t(x)) = \ln x + K \Longleftrightarrow \operatorname{argsh}(t(x)) = \ln Kx \text{ avec } K > 0$$

D'où $t(x) = \frac{e^{\ln Kx} - e^{-\ln Kx}}{2}$, ce qui nous donne : $t(x) = \left(Kx - \frac{1}{Kx}\right) \times \frac{1}{2}$ avec $K > 0$.

L'ensemble des solutions est donc donné par : $y(x) = \frac{K^2x^2 - 1}{2K}$ avec $K > 0$

15.5.3 Equation de Bernouilli

On appelle équation de Bernouilli, toute équation différentielle de la forme :

$$y' + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0$$

Où f et g sont des fonctions numériques et α un réel différent de 0 ou de 1 *(sinon, nous avons affaire à des équations linéaires)*.

Résolution d'une équation de Bernouilli

1. **Faisons le changement de variables** $z = y^{1-\alpha}$. Alors, nous avons :

$$z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha} \Longleftrightarrow y' = \frac{z'y^\alpha}{1-\alpha}$$

2. **En remplaçant, nous obtenons :**

$$\begin{aligned} y' + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0 &\Longleftrightarrow \frac{z'y^\alpha}{1-\alpha} + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0 \\ &\Longleftrightarrow y^\alpha\left(\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} + g(x)\right) = 0 \end{aligned}$$

Nous nous ramenons ainsi à une équation linéaire en z : $\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z + g(x) = 0$

Exemple 10 :

1. **Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation** $y' + y = xy^2$
On peut remarquer que la fonction nulle est solution de l'équation. Supposons maintenant que y ne soit pas la fonction nulle $\mathcal{O}$

(a) Faisons le changement de variables $z = y^{-1} = \frac{1}{y}$, alors $z' = -y'y^{-2} = -\frac{y'}{y^2}$

(b) Comme y n'est pas la fonction nulle, on peut diviser par y^2 ; nous obtenons :

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = x \Longleftrightarrow -z' + z = x$$

(c) On résoud maintenant l'équation linéaire $-z' + z = x$

i. L'EDLHA est donnée par $-z' + z = 0$, d'où on tire, de manière classique $z(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$

ii. Il est facile de trouver une solution particulière $z_p : z_p(x) = x + 1$

iii. D'où la solution générale est donnée par : $z(x) = Ce^x + x + 1$ avec $C \in \mathbb{R}$

(d) On en déduit donc la solution y de l'équation de départ :

$$\begin{cases} y(x) = 0 \\ y(x) = \dfrac{1}{1 + x + Ce^x} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. **Résoudre** $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2y^5$ **sur** $\mathbb{R}^*$

On peut remarquer que la fonction nulle est solution de l'équation. Supposons maintenant que y ne soit pas la fonction nulle.

(a) On fait donc le changement de variables $z = y^{-4}$; alors, $z' = -4y'y^{-5}$

(b) En factorisant par y^5, nous obtenons :

$$\begin{aligned} y' - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5 &\iff y' - \frac{y}{2x} - 5x^2y^5 = 0 \\ &\iff y^5\left(y'y^{-5} - \frac{y^{-4}}{2x} - 5x^2\right) = 0 \\ &\iff y^5\left(\frac{z'}{-4} - \frac{z}{2x} - 5x^2\right) = 0 \end{aligned}$$

Comme y n'est pas la fonction nulle, résoudre $y^5\left(\dfrac{z'}{-4} - \dfrac{z}{2x} - 5x^2\right) = 0$, c'est résoudre

$$\frac{z'}{-4} - \frac{z}{2x} - 5x^2 = 0 \iff \frac{1}{4}z' + \frac{z}{2x} + 5x^2 = 0 \iff z' + \frac{2}{x}z + 20x^2 = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire classique.

(c) **Résolution de** $z' + \dfrac{2}{x}z + 20x^2 = 0$

i. L'équation différentielle linéaire homogène associée est $z' + \dfrac{2}{x}z = 0 \iff z' = -\dfrac{2}{x}z$ qui admet pour solution $z(x) = \dfrac{C}{x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$

ii. Utilisons la méthode de variation de la constante. Si $z(x) = \dfrac{C(x)}{x^2}$, alors $z'(x) = \dfrac{C'(x)x^2 - 2xC(x)}{x^4}$, et en remplaçant dans $z' + \dfrac{2}{x}z + 20x^2 = 0$, nous obtenons :

$$\frac{C'(x)x^2 - 2xC(x)}{x^4} + \frac{2}{x}\frac{C(x)}{x^2} + 20x^2 = 0$$

qui est équivalente à

$$\frac{C'(x)x^2 - 2xC(x) + 2xC(x) + 20x^6}{x^4} = 0$$

, c'est à dire $C'(x)x^2 + 20x^6 = 0$ d'où on tire que $C(x) = -4x^5 + K$

iii. Les solutions sont donc :

$$\begin{cases} z(x) = -4x^3 + \dfrac{K_1}{x^2} & \text{pour } x < 0 \text{ et } K_1 \in \mathbb{R} \\ z(x) = -4x^3 + \dfrac{K_2}{x^2} & \text{pour } x > 0 \text{ et } K_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(d) Les solutions de l'équation de départ sont donc :

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{-4x^3 + \dfrac{K_1}{x^2}}} & \text{pour } x < 0 \text{ et } K_1 \in \mathbb{R} \\ y(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{-4x^3 + \dfrac{K_2}{x^2}}} & \text{pour } x > 0 \text{ et } K_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

15.5.4 Equations fonctionnelles

Trouver toutes les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$2\int_0^x tf(t)\,dt - x\int_0^x f(t)\,dt = 0$$

Nous allons dériver l'expression $L(x) = 2\int_0^x tf(t)\,dt - x\int_0^x f(t)\,dt$

$$L'(x) = 2xf(x) - xf(x) - \int_0^x f(t)\,dt$$

On appelle $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; alors $F'(x) = f(x)$ et

$$L'(x) = xf(x) - F(x)$$

et nous avons à résoudre l'équation $xy' - y = 0$ qui donne comme solution $y(x) = Cx$ où $C \in \mathbb{R}$, et où on trouve que f est la fonction constante $f(x) = C$

15.6 Exercices sur les équations différentielles du premier ordre

15.6.1 Exercices résolus

Exercice 4 :

Résoudre, dans $\mathbb{R}^{*+}$, l'équation différentielle linéaire :

$$xy' - 2y + x\ln x = 0$$

1. **On résoud d'abord, l'équation différentielle linéaire homogène associée**
Cette équation est donnée par : $xy' - 2y = 0$. Pour $x > 0$, cette équation est équivalente à

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$$

En intégrant de part et d'autre, nous obtenons $\ln|y| = 2\ln x + C$, c'est à dire que nous obtenons comme solution de l'équation différentielle linéaire homogène associée :

$$\boxed{y(x) = Cx^2 \text{où } C \in \mathbb{R} \text{ et } x > 0}$$

2. **Recherche de la solution générale par variation de la constante**
On écrit $y(x) = C(x)x^2$; alors, $y'(x) = 2xC(x) + x^2C'(x)$. En remplaçant dans l'équation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} x\left(2xC(x) + x^2C'(x)\right) - 2x^2C(x) + x\ln x = & \; 2x^2C(x) + x^3C'(x) - 2x^2C(x) + x\ln x \\ = & \; x^3C'(x) + x\ln x \end{aligned}$$

Nous devons donc résoudre l'équation $x^3C'(x) + x\ln x = 0$, laquelle est équivalente, parce que $x > 0$, à :

$$\begin{aligned} x^2C'(x) + \ln x = 0 &\iff x^2C'(x) = -\ln x \\ &\iff C'(x) = \frac{-\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

Nous tirons donc que $C(x) = \displaystyle\int \frac{-\ln x}{x^2}\,dx$, que nous obtiendrons par une intégration par parties.

— Nous posons alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = \dfrac{-1}{x^2} & v = \dfrac{1}{x} \end{array} \right\}$$

— Alors,

$$\begin{aligned} \int \frac{-\ln x}{x^2}\,dx &= \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \frac{\ln x}{x} + \int \frac{-1}{x^2}\,dx \\ &= \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + K \text{ avec } K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que $C(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x} + K$ et que la solution générale de l'équation différentielle proposée est donnée par :

$$\boxed{y(x) = x\ln x + x + Kx^2 \text{ avec } K \in \mathbb{R}}$$

Exercice 5 :

1. Trouver $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{T^2-4} = \frac{A}{T+2} + \frac{B}{T-2}$$

2. Résoudre l'équation différentielle $z' = z^2 - 4$
3. Résoudre l'équation différentielle $y' = (y - 4x)^2$

1. **Trouver** $A \in \mathbb{R}$ **et** $B \in \mathbb{R}$ **tels que :** $\dfrac{1}{T^2-4} = \dfrac{A}{T+2} + \dfrac{B}{T-2}$

   Le plus simple est de procéder par indentification :

$$\begin{aligned} \frac{A}{T+2} + \frac{B}{T-2} &= \frac{A(T-2) + B(T+2)}{T^2-4} \\ &= \frac{(A+B)T + 2(B-A)}{T^2-4} \end{aligned}$$

   D'où nous tirons :

$$\left\{ \begin{array}{ll} B + A = & 0 \\ B - A = & \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

   D'où nous tirons $B = \dfrac{1}{4}$ et $A = \dfrac{-1}{4}$. Ainsi :

$$\boxed{\frac{1}{T^2-4} = \frac{\frac{1}{4}}{T-2} - \frac{\frac{1}{4}}{T+2}}$$

2. **Résoudre l'équation différentielle** $z' = z^2 - 4$

   (a) Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que les fonctions constantes $z(x) = +2$ et $z(x) = -2$ sont solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$ en entier

(b) Supposons maintenant $z(x) \neq +2$ et $z(x) \neq -2$; nous avons alors une équation à variables séparables. En effet,

$$z' = z^2 - 4 \Longleftrightarrow \frac{z'}{z^2 - 4} = 1$$

D'après l'étude précédente,

$$\frac{z'}{z^2 - 4} = \frac{1}{4}\left(\frac{z'}{z-2} - \frac{z'}{z+2}\right)$$

Nous avons donc à résoudre :

$$\int \frac{1}{4}\left(\frac{z'(x)}{z(x)-2} - \frac{z'(x)}{z(x)+2}\right) dx = \int 1\, dx$$

— Commençons par le plus simple : $\int 1\, dx = x + K$ où $K \in \mathbb{R}$

— Puis,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4}\left(\frac{z'(x)}{z(x)-2} - \frac{z'(x)}{z(x)+2}\right) dx &= \frac{1}{4}\int \frac{z'(x)}{z(x)-2} - \frac{z'(x)}{z(x)+2}\, dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\int \frac{z'(x)}{z(x)-2}\, dx - \int \frac{z'(x)}{z(x)+2}\, dx\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\ln|z(x)-2| - \ln|z(x)+2|\right) \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{z(x)-2}{z(x)+2}\right|\end{aligned}$$

— En revenant à l'égalité, nous obtenons : $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z(x)-2}{z(x)+2}\right| = x+K$, c'est à dire $\ln\left|\frac{z(x)-2}{z(x)+2}\right| = 4x + K$

En passant ensuite à l'exponentielle, nous obtenons : $\frac{z(x)-2}{z(x)+2} = Ce^{4x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. En faisant, maintenant, des calculs simples, nous obtenons :

$$z(x) = -2 + \frac{4}{1 - Ce^x}$$

(c) En synthèse, nous avons comme solution :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} z(x) = +2 \\ z(x) = -2 \\ z(x) = -2 + \dfrac{4}{1 - Ce^x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}\end{array}\right.}$$

3. **Résoudre l'équation différentielle** $y' = (y - 4x)^2$

Pour résoudre cette équation, nous faisons le changement de variables $z = y - 4x$; à ce moment là, $z' = y' - 4$, et en remplaçant, nous obtenons :

$$y' = (y - 4x)^2 \Longleftrightarrow z' + 4 = z^2 \Longleftrightarrow z' = z^2 - 4$$

Nous avons déjà résolu l'équation $z' = z^2 - 4$, d'où le ssolutions sont données par :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} y(x) = 4x + 2 \\ y(x) = 4x - 2 \\ y(x) = 4x - 2 + \dfrac{4}{1 - Ce^x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}\end{array}\right.}$$

Remarque : L'équation $y' = (y - 4x)^2$ n'est en aucun cas une équation de Bernouilli

15.6.2 Equations à variables séparables

Il faut remarquer que les équations à variables séparables ne sont pas forcément des équations linéaires

Exercice 6 :

Intégrer les équations différentielles à variables séparables suivantes :

1. $y' = 4e^{x+y}$; *on trouve comme réponse :* $y(x) = -\ln(k - 4e^x)$ *avec* $k > 0$
2. $y' \tan x = y$; *on trouve comme réponse :* $y(x) = k \sin x$ *avec* $k \in \mathbb{R}$
3. $y' = \sqrt{1-y^2}$ *on trouve comme réponse :* $y(x) = \sin(x+k)$ *avec* $k \in \mathbb{R}$ *ou* $y(x) = 1$
4. $xy' + y^2 = 0$; *on trouve comme réponse :* $y(x) = \dfrac{1}{k + \ln|x|}$ *avec* $k \in \mathbb{R}$ *ou bien* $y(x) = 0$

Exercice 7 :

Intégrer l'équation différentielle $\left(x^2 - x\right) y' = y^2 + y$; montrer qu'il existe plus d'une solution valant 0 pour $x = 1$

15.6.3 Equations différentielles linéaires

Exercice 8 :

Résoudre les équations différentielles du premier ordre :

1. $y' + y \sin x = 0$
2. $y' - y - e^{3x} = 0$
3. $y' - y + 1 = e^x$
4. $y' = 2xy + x^3$
5. $y'\left(1 + x^2\right) + x^2 y = x^2$
6. $xy' - y + x^\alpha \ln x = 0$, où $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 9 :

Résoudre l'équation différentielle $xy' - y + \ln x = 0$ *(Réponse :* $y(x) = \ln x + 1 + kx$ *avec* $k \in \mathbb{R}$*)*

Exercice 10 :

Soient a et b 2 réels avec $a \neq 0 (a \in \mathbb{R}^*)$ et $b \in \mathbb{R}$. Vérifier que la solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation

$$ay' + by = f(x)$$

vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$ s'écrit sous la forme

$$y(x) = \int_0^x f(u)\, \psi(x-u)\, du$$

Où ψ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, indépendante de f. Vérifier que ψ est solution de l'équation sans second membre

15.6.4 Autres équations différentielles

Exercice 11 :

Equations différentielles homogènes se ramenant à des équations à variables séparables
Faire le changement de variables $y(x) = xz(x)$

1. $x^2 y' - 2y^2 + xy = 0$. *On trouve comme réponse :* $y(x) = \dfrac{x}{1 - kx^2}$ *avec* $k \in \mathbb{R}$ *ou bien* $y(x) = 0$
2. (a) $xy' - y - x \cos \dfrac{y}{x} = 0$
   (b) $\left(xy' - y\right)^2 = x^2 - y^2$
   (c) $y = x\left(y' - \sqrt{1 + y'^2}\right)$

Exercice 12 :

Résoudre les équations de Bernouilli suivantes

1. $xy' - y - \sqrt{y} = 0$
2. $x^2y' + y + y^2 = 0$
3. $y' + xy = x^3y^3$
4. $y - y'\cos x = y^2 \cos x\,(1 - \sin x)$

Exercice 13 :

Donner une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions de la forme

$$x \longrightarrow \frac{C+x}{1+x^2} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 14 :

1. Résoudre l'équation différentielle $f' + xf^3 = 0$
2. On considère l'équation différentielle $y' = 3\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y^3}{x^5}\right)$

   Résoudre l'équation en faisant le changement de variables $z = yx^{-3}$

Exercice 15 :

1. Résoudre l'équation différentielle $2xz' + 2z = -1$
2. On considère l'équation différentielle $2xy' - y^2 + 1 = 0$
   (a) Vérifier que la fonction constante $y(x) = 1$ est solution
   (b) En posant $y = 1 + \frac{1}{z}$ résoudre l'équation différentielle.

15.6.5 Equations différentielles linéaires du premier ordre : problèmes de prolongement

Exercice 16 :

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $xy' - 2y + x = 0$, sur chacun des intervalles $]-\infty\ 0[$ et $]0\ +\infty[$
2. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ en entier
3. Si on exige que les solutions soient 2 fois dérivables, le résultat est-il modifié ?

Exercice 17 :

On considère l'équation différentielle du premier ordre : $xy' - 3y = 2x + 3$

1. Résoudre cette équation sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$
2. L'équation admet-elle une solution sur $\mathbb{R}$ en entier ?

Exercice 18 :

Résoudre, chercher les solutions maximales *(c'est à dire celles qu'on ne peut pas prolonger en d'autres solutions)* et tracer les courbes intégrales des équations différentielles suivantes :

1. $x^2y' + xy = 1$
2. $y'\sin x - 2y\cos x = 0$
3. $|x|\,y' + y = x^2$

Exercice 19 :

On considère l'équation différentielle $2x^2y' + y = 1$

1. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}^{-*}$; montrez que toutes les les solutions sur $\mathbb{R}^{-*}$ peuvent être prolongées en une solution sur $\mathbb{R}^{-}$
3. Existe-til une solution à l'équation définie sur $\mathbb{R}$

15.6.6 Application des équations différentielles aux équations fonctionnelles

Exercice 20 :

Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x) = x^4 + \int_0^x tf(t)\,dt$

Exercice 21 :

Soit g une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait $g(x) > 0$. On pose $G(x) = \int_a^x \frac{1}{g(t)} dt$.
Trouver toutes les solutions sur un intervalle $[t_0, t_1]$ à préciser du problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} y(t_0) = a \\ y' = g(y) \end{cases}$$

Exercice 22 :

L'objet de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right) \left(f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)\right) \tag{15.7}$$

1. Démontrer que $f(0) = 0$
2. En dérivant par rapport à x, démontrer que f vérifie l'équation différentielle :
$$f'(y) = f(y) + ae^y \text{ où } a = f'(0)$$
3. En déduire toutes les fonctions qui vérifient (15.7)

Exercice 23 :

L'objet du problème est de trouver toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{x}{3}\left(f(x) + 2f(0)\right) \tag{15.8}$$

On pose $\psi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

1. Démontrer que $\psi(x)$ vérifie l'équation différentielle du premier ordre
$$\frac{x}{3} y' - y = \frac{-2xf(0)}{3}$$
2. Résoudre cette équation différentielle
3. En déduire toutes les fonctions f qui vérifient (15.8)

Exercice 24 :

L'objet de cette question est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, vérifiant

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left(f(x) = \int_0^x tf(t)\,dt + 1\right)$$

1. Quelle est la seule valeur possible pour $f(0)$?
2. Démontrer que f est une solution de l'équation différentielle $y' - xy = 0$
3. En déduire f

15.7 Équations différentielles du second ordre

15.7.1 Définition

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre, toute équation de la forme :

$$u(x)\,y'' + v(x)\,y' + w(x)\,y = g(x) \tag{15.9}$$

où u, v, w et g sont des fonctions continues sur un intervalle I
L'équation différentielle linéaire homogène associée (EDLHA) est

$$u(x)\,y'' + v(x)\,y' + w(x)\,y = 0 \tag{15.10}$$

Remarque 12 :

1. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une solution de l'équation 15.9 sur I est une fonction y, 2 fois dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$
2. Pour I, intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^2(I)$ l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur I, alors, l'application :
$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^2(I) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(I) \\ y & \longmapsto & L(y) = u(x)\,y'' + v(x)\,y' + w(x)\,y \end{array}\right.$$
est linéaire.
3. Si y_1 et y_2 sont solutions de l'EDLHA15.10, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de l'EDLHA 15.10.
Autrement dit, **l'ensemble des solutions de l'EDLHA forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.**
C'est en fait le noyau de l'application L
4. Si y_1 et y_2 sont solutions de
$$u(x)\,y'' + v(x)\,y' + w(x)\,y = g(x)$$
, alors, $y_1 - y_2$ est solution de l'EDLHA associée.
5. La solution générale de $u(x)\,y'' + v(x)\,y' + w(x)\,y = g(x)$, s'obtient en **additionnant une solution particulière et la solution générale de l'EDLHA associée.** C'est un résultat de la théorie des équations linéaires.
6. On admet que l'ensemble des solutions de l'équation 15.10 forme un **espace vectoriel de dimension 2** et que l'ensemble des solutions de 15.9 forme un espace affine de dimension 2.

15.7.2 Définition

Soit I, un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0' \in \mathbb{R}$
On appelle Problème de Cauchy ou équation différentielle à conditions initiales, l'équation

$$\left\{\begin{array}{l} u(x)\,y'' + v(x)\,y' + w(x)\,y = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{array}\right. \tag{15.11}$$

On admet que le problème de Cauchy 15.11 admet une solution unique.

Remarque 13 :

En dehors du cas où les coefficients sont constants, il n'existe pas de méthode de recherche qui soit générale.

15.7.3 Exemples de résolution

Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation $x^2y'' + xy' - y = x^2$

1. **On recherche une solution particulière.** Au vu de la forme de l'équation, on la recherche du type $y(x) = ax^2 + bx + c$. Alors, $y'(x) = 2ax + b$ et $y''(x) = 2a$. En remplaçant dans l'équation, nous obtenons :
$$2ax^2 + x(2ax + b) - ax^2 - bx - c = x^2$$
Ceci est équivalent à :
$$3ax^2 - c = x^2$$
D'où on tire $a = \dfrac{1}{3}$ et $c = 0$. Une solution particulière est donc $y(x) = \dfrac{x^2}{3}$
2. **On cherches les solutions de l'EDLHA**
L'EDLHA est donc $x^2y'' + xy' - y = 0$. Au vu de la forme de l'équation, on la recherche du type $y(x) = x^\alpha$. Alors, $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et $y''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$. En remplaçant dans l'équation, nous obtenons : $\left(\alpha^2 - 1\right)x^\alpha = 0$ et alors, nous obtenons $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$. Nous obtenons alors 2 solutions linéairement indépendantes : $y(x) = x$ et $y(x) = \dfrac{1}{x}$. Les solutions de l'EDLHA sur $\mathbb{R}^*$ sont donc
$$y(x) = \lambda x + \frac{\mu}{x} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$
3. **La solution générale de l'équation est donc donnée par :**
$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{x^2}{3} + \lambda_1 x + \dfrac{\mu_1}{x} \text{ si } x < 0 \\ y(x) = \dfrac{x^2}{3} + \lambda_2 x + \dfrac{\mu_2}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$
4. **Recherche de la solution sur $\mathbb{R}$**
   — La continuité sur $\mathbb{R}$ implique la continuité en 0. Pour que la solution soit continue en 0, nous devrons avoir $\mu_1 = \mu_2 = 0$
   — La dérivabilité sur $\mathbb{R}$ implique la dérivabilité en 0. Pour que la solution soit dérivable en 0, nous devrons avoir, en plus $\lambda_1 = \lambda_2$

   Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc données par $y(x) = \dfrac{x^2}{3} + \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

15.7.4 Comment obtenir une seconde solution d'une EDLHA ?

Soit $u(x)y'' + v(x)y' + w(x)y = 0$ une équation différentielle du second ordre qui admet une solution y_0 sur un intervalle I. Alors
$y = y_0 z$ est solution sur I si et seulement si z' est solution d'une équation différentielle du premier ordre

Démonstration

La démonstration est simple. Soit y_0 solution de l'équation sur un intervalle I, et posons $y = y_0 z$

1. Calculons les dérivées successives (formule de Leibniz)

   — $y' = y_0'z + z'y_0$
   — $y'' = y_0''z + 2y_0'z' + z''y_0$
2. De $uy'' + vy' + wy = 0$, on tire, en remplaçant :
$$\begin{aligned} uy'' + vy' + wy = \;& u(y_0''z + 2y_0'z' + z''y_0) + v(y_0'z + z'y_0) + wy_0z \\ =\;& (uy_0'' + vy_0' + wy_0)z + (uy_0'')z'' + (vz_0 + 2uy_0')z' \end{aligned}$$
3. La fonction z doit donc vérifier l'équation $(uy_0'')z'' + (vz_0 + 2uy_0')z' = 0$

Ce que nous voulions

Exemple 11 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1+x)\,y''-3y'+(2-x)\,y=e^{-x}$

Une solution particulière de cette équation semble être de la forme ae^{-x}, dont la dérivée première est $-ae^{-x}$ et la dérivée seconde ae^{-x}. En remplaçant dans l'équation, nous obtenons :

$$(1+x)\,ae^{-x}+3ae^{-x}+(2-x)\,ae^{-x}=e^{-x}$$

C'est à dire :

$$(1+x)\,a+3a+(2-x)\,a=1 \iff 9a=1 \iff a=\frac{1}{6}$$

Une solution particulière de cette équation est donc $\dfrac{e^{-x}}{6}$

1. Résolution sur l'intervalle $]-1;+\infty[$
   (a) L'EDLHA à cette équation est $(1+x)\,y''-3y'+(2-x)\,y=0$ dont $y_0(x)=e^x$ est une solution évidente.
   (b) Soit $y=zy_0$ une autre solution ; alors :
   — $y'=y_0'z+z'y_0$
   — $y''=y_0''z+2y_0'z'+z''y_0$
   et, en remplaçant, nous obtenons :
   $$(1+x)\left[y_0''z+2y_0'z'+z''y_0\right]-3\left(y_0'z+z'y_0\right)+2\,(2-x)\,y_0z=0$$
   $$\iff$$
   $$z\left[(1+x)\,y_0''-3y_0+(2-x)\,y_0\right]+z''\left[(1+x)\,y_0\right]+z'\left[(2x-1)\,y_0\right]=0$$
   (c) z' est donc solution de
   $$z''\left[(1+x)\,y_0\right]+z'\left[(2x-1)\,y_0\right]=0$$
   $$\iff$$
   $$\left(z''\left[(1+x)\right]+z'\left[(2x-1)\right]\right)y_0=0$$
   $$\iff$$
   $$\left(z''\left[(1+x)\right]+z'\left[(2x-1)\right]\right)e^x=0$$
   $$\iff$$
   $$z''\,(1+x)+z'\,(2x-1)=0$$
   (d) Pour résoudre cette équation différentielle, nous posons $Z=z'$, et nous avons donc à résoudre l'équation différentielle, sur l'intervalle $]-1;+\infty[$
   $$Z'\,(1+x)+Z\,(2x-1)=0$$
   — Nous avons, pour $x\in\,]-1;+\infty[$, $\dfrac{Z'}{Z}=\dfrac{-2x+1}{x+1}=-2+\dfrac{3}{x+1}$, d'où nous tirons :
   $$\ln|Z(x)|=-2x+3\ln(x+1)+K$$
   d'où nous tirons
   $$Z(x)=C\,(x+1)^3\,e^{-2x}\text{ avec }C\in\mathbb{R}$$
   ce qui est équivalent à $z'(x)=C\,(x+1)^3\,e^{-2x}$ avec $C\in\mathbb{R}$
   — Pour calculer z, nous sommes condamnés à faire plusieurs intégrations par parties
   — Pour une première intégration par parties, nous posons :
   $$\left\{\begin{array}{ll} u=(x+1)^3 & u'=3\,(x+1)^2 \\ v'=e^{-2x} & v=\dfrac{-1}{2}e^{-2x}\end{array}\right\}$$
   Alors,
   $$\begin{aligned} z(x)=&\ C\left(\frac{-1}{2}e^{-2x}(x+1)^3-\int 3\,(x+1)^2\times\frac{-1}{2}e^{-2x}dx\right)\\ =&\ C\left(\frac{-1}{2}e^{-2x}(x+1)^3+\frac{3}{2}\int (x+1)^2\,e^{-2x}dx\right)\end{aligned}$$

— Pour la seconde intégration par parties, nous calculons $\int (x+1)^2 e^{-2x}dx$. Nous posons donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = (x+1)^2 & u' = 2(x+1) \\ v' = e^{-2x} & v = \frac{-1}{2}e^{-2x} \end{array} \right\}$$

D'où :

$$\begin{array}{rcl} \int (x+1)^2 e^{-2x}dx & = & \frac{-1}{2}e^{-2x}(x+1)^2 - \int 2(x+1) \times \frac{-1}{2}e^{-2x}dx \\ & = & \frac{-1}{2}e^{-2x}(x+1)^2 + \int (x+1)e^{-2x}dx \end{array}$$

— Et nous faisons une dernière intégration par parties pour calculer, cette fois ci $\int (x+1)e^{-2x}dx$. Nous posons donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = (x+1) & u' = 1 \\ v' = e^{-2x} & v = \frac{-1}{2}e^{-2x} \end{array} \right\}$$

Et donc :

$$\begin{array}{rcl} \int (x+1)e^{-2x}dx & = & \frac{-1}{2}e^{-2x}(x+1) - \int \times \frac{-1}{2}e^{-2x}dx \\ & = & \frac{-1}{2}e^{-2x}(x+1) + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx \\ & = & \frac{-1}{2}e^{-2x}(x+1) - \frac{1}{4}e^{-2x} + K \end{array}$$

Et maintenant, nous remontons :

$$\begin{array}{rcl} \int (x+1)^2 e^{-2x}dx & = & \frac{-1}{2}e^{-2x}(x+1)^2 + \int (x+1)e^{-2x}dx \\ & = & \frac{-1}{2}e^{-2x}(x+1)^2 + \left(\frac{-1}{2}e^{-2x}(x+1) - \frac{1}{4}e^{-2x} + K\right) \\ & = & -\frac{1}{2}e^{-2x}(x+1)^2 - \frac{1}{2}e^{-2x}(x+1) - \frac{1}{4}e^{-2x} + K \end{array}$$

D'où, nous avons $z(x)$:

$$\begin{array}{rcl} z(x) = & C\left(\frac{-1}{2}e^{-2x}(x+1)^3 + \frac{3}{2}\int (x+1)^2 e^{-2x}dx\right) \\ = & C\frac{-1}{2}e^{-2x}(x+1)^3 + C\frac{3}{2}\int (x+1)^2 e^{-2x}dx \\ = & C\frac{-1}{2}e^{-2x}(x+1)^3 + C\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}(x+1)^2 - \frac{1}{2}e^{-2x}(x+1) - \frac{1}{4}e^{-2x} + K\right) \end{array}$$

(e) En synthèse, nous avons : $z(x) = \lambda e^{-2x}\left(4x^3 + 18x^2 + 30x + 27\right) + \mu$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ Ce qui donne comme solution de l'équation, pour $x > -1$,

$$y(x) = \lambda e^{-x}\left(4x^3 + 18x^2 + 30x + 27\right) + \mu e^x \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

La solution générale sur $]-1; +\infty[$ est donc :

$$S(x) = \lambda e^{-x}\left(4x^3 + 18x^2 + 30x + 27\right) + \mu e^x + \frac{e^{-x}}{6} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

2. Résolution sur l'intervalle $]-\infty; -1[$
S'il existe des analogies avec l'étude précédente, il ne sera pas question de tout refaire !
   (a) L'EDLHA à cette équation est toujours $(1+x)y'' - 3y' + (2-x)y = 0$ avec la même solution évidente $y_0(x) = e^x$.

(b) Soit $y = zy_0$ une autre solution ; alors, de la même manière, nous arrivons à l'équation différentielle : $z''(1+x) + z'(2x-1) = 0$, puis, en posant $Z = z'$ nous avons donc à résoudre l'équation différentielle, sur l'intervalle $]-\infty;-1[$

$$Z'(1+x) + Z(2x-1) = 0$$

— Nous avons toujours, pour $x \in]-\infty;-1[$, $\dfrac{Z'}{Z} = \dfrac{-2x+1}{x+1} = -2 + \dfrac{3}{x+1}$, d'où nous tirons :

$$\ln|Z(x)| = -2x + 3\ln|x+1| + K$$

d'où nous tirons

$$Z(x) = C(x+1)^3 e^{-2x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

ce qui est équivalent à $z'(x) = C(x+1)^3 e^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

— Pour calculer z, nous sommes toujours condamnés à faire plusieurs intégrations par parties et nous avons $z(x) = \lambda e^{-2x}\left(4x^3 + 18x^2 + 30x + 27\right) + \mu$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, ce qui donne comme solution de l'équation, pour $x < -1$,

$$y(x) = \lambda e^{-x}\left(4x^3 + 18x^2 + 30x + 27\right) + \mu e^x \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

La solution générale sur $]-\infty;-1[$ est donc :

$$S(x) = \lambda e^{-x}\left(4x^3 + 18x^2 + 30x + 27\right) + \mu e^x + \frac{e^{-x}}{6} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

3. Existe-t-il une solution sur $\mathbb{R}$? Nous avons comme solutions :

$$\begin{cases} \text{Si } x < -1 & S_1(x) = \lambda_1 e^{-x}\left(4x^3 + 18x^2 + 30x + 27\right) + \mu_1 e^x + \dfrac{e^{-x}}{6} \text{ avec } \lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \mu_1 \in \mathbb{R} \\ \text{Si } x > -1 & S_2(x) = \lambda_2 e^{-x}\left(4x^3 + 18x^2 + 30x + 27\right) + \mu_2 e^x + \dfrac{e^{-x}}{6} \text{ avec } \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ et } \mu_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Une solution S sur $\mathbb{R}$ sera de classe $\mathcal{C}^2$; ici, le problème se posera en $x = -1$. Nous devrons donc avoir :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} S_1(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} S_2(x)$$
$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} S_1'(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} S_2'(x)$$
$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} S_1''(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} S_2''(x)$$

15.8 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

Le problème est plus simple si u, v et w sont des constantes ; nous résolvons alors une équation du type $Ay'' + By' + Cy = g(x)$,où $A \neq 0$, ou, ce qui est équivalent, $y'' + py' + qy = g(x)$ Nous commencerons par étudier l'EDLHA

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{15.12}$$

Il faudra toujours rappeler que $S_{15.12}$, ensemble des solutions de 15.12 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2

Exemple 12 :

Résolution de cas particuliers

1. $y'' = 0$
2. $y'' + py' = 0$ avec $p \neq 0$

15.8.1 Théorème

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2$
En supposant que (15.12) admette 2 solutions particulières f_1 et f_2 telles que

$$W_{f_1,f_2}(x_0) = \begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f'_1(x_0) & f'_2(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Alors, il existe une unique solution f telle que $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y'_0 \end{cases}$
$W_{f_1,f_2}(x_0)$ s'appelle le Wronskien de f_1 et de f_2 en x_0

Démonstration

Si f_1 et f_2 sont solutions de (15.12), alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f_1 + \mu f_2$ sont solutions de (15.12), car l'ensemble de ces solutions forment un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
Existe-t-il $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \lambda f_1(x_0)) + \mu f_2(x_0) = y_0 \\ \lambda f_1(x_0)) + \mu f_2(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

C'est un système linéaire du premier degré à 2 inconnues λ et μ qui admet des solutions uniques si le déterminant $W_{f_1,f_2}(x_0) = \begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f'_1(x_0) & f'_2(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$
λ et μ sont donc uniques et, parconséquent, f est unique.

15.8.2 Recherche d'une solution de 15.12

Pour $r \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x) = e^{rx}$ est solution de (15.12) si et seulement si $r^2 + pr + q = 0$
On appelle équation caractéristique de (15.12), l'équation $r^2 + pr + q = 0$

Démonstration

Supposons que la fonction $f(x) = e^{rx}$ soit solution de (15.12)
Il faut alors calculer les dérivées successives de f, puis remplacer. Nous avons :

$$\begin{cases} f(x) = e^{rx} \\ f'(x) = re^{rx} \\ f''(x) = r^2 e^{rx} \end{cases}$$

Donc, en remplaçant y par f dans (15.12), nous obtenons :

$$r^2 e^{rx} + pre^{rx} + qre^{rx} = 0 \Leftrightarrow e^{rx}\left(r^2 + pr + q\right) = 0$$

Comme $e^{rx} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation $e^{rx}\left(r^2 + pr + q\right) = 0$ est vérifiée si et seulement si $r^2 + pr + q = 0$

15.8.3 Proposition : cas où $p^2 - 4q = 0$

On considère l'équation 15.12 pour laquelle $p^2 - 4q = 0$

1. L'ensemble des solutions générales de (15.12) est alors
$$S_{(15.12)} = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ telles que } f(x) = (\lambda + \mu x)\, e^{-\frac{p}{2}x} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R} \right\}$$
2. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ donnés
Alors,(15.12) admet une unique solution f telle que
$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$$
Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (\lambda + \mu x)\, e^{-\frac{p}{2}x}$ où λ et μ sont définis par les conditions initiales.

Démonstration

1. Si $p^2 - 4q = 0$, alors, $\dfrac{-p}{2}$ est la seule solution de l'équation caractéristique $r^2 + pr + q = 0$, et alors, la fonction $f(x) = e^{\frac{-p}{2}x}$ est solution de l'équation (15.12)
2. Toute fonction f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire $f(x) = e^{\frac{-p}{2}x} g(x)$; quelles sont les conditions sur g pour que f soit solution de (15.12) ?
Il suffit alors de calculer les dérivées successives de f pour montrer que f est solution de (15.12) si et seulement si $g"(x) = 0$, c'est à dire si $g(x) = ax + b$; et donc, $f(x) = (ax + b)\, e^{\frac{-p}{2}x}$

Remarque 14 :

1. Ce qui montre que $S_{(15.12)}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2 ; il est engendré par les fonctions numériques, linéairement indépendantes $e^{-\frac{p}{2}x}$ et $xe^{-\frac{p}{2}x}$. Toutes les solutions de 15.12 s'écrivent alors $\lambda e^{-\frac{p}{2}x} + +\mu x e^{-\frac{p}{2}x}$
2. Les conditions initiales données par $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$ permetent de définir des λ et des μ particuliers.

Exercice 25 :

Trouver f, telle que f soit solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$, avec $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$

15.8.4 Proposition : cas où $p^2 - 4q > 0$

On considère l'équation 15.12 pour laquelle $p^2 - 4q > 0$

1. L'ensemble des solutions générales de (15.12) est alors
$$S_{(15.12)} = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ telles que } f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R} \}$$
et où r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique
2. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ donnés
Alors,(15.12) admet une unique solution f telle que
$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$$
Cette solution est définie par : $f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ où r_1 et r_2 sont les racines du polynôme caractéristique, et λ et μ définis par les conditions initiales.

Démonstration

1. Une première remarque consiste à dire que, $p^2 - 4q$ étant le discriminant d'une équation du second degré, il existe donc deux solutions distinctes r_1 et r_2
Les deux fonctions $f_1(x) = e^{r_1 x}$ et $f_2(x) = e^{r_2 x}$ sont solutions de (15.12). De la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 de $S_{(15.12)}$, nous déduisons que toutes les solutions de 15.12 sont du type $\lambda e^{-r_1 x} + \mu e^{-r_2 x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$
2. Le wronskien de f_1 et de f_2 est donné par :
$$W_{f_1,f_2}(x_0) = \begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{r_1 x_0} & e^{r_2 x_0} \\ r_1 e^{r_1 x_0} & r_2 e^{r_2 x_0} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\, e^{(r_1+r_2)x_0}$$
et nous avons sûrement pour tout $x \in \mathbb{R}$, $W_{f_1,f_2}(x) \neq 0$
Il existe donc une unique solution f, combinaison linéaire de f_1 et de f_2 telle que $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$

Remarque 15 :

1. Le fait que
$$S_{(15.12)} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ telles que } f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\}$$
montre une fois de plus que $S_{(15.12)}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2 ; il est engendré par les fonctions numériques, linéairement indépendantes $e^{r_1 x}$ et $e^{r_2 x}$
2. Les conditions initiales données par $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$ définissent donc des λ et des μ particuliers.
3. **Question :**[4] *L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ?*
Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 2$ sont les fonctions du type $\varphi(x) = ke^{2x} + 1$ où $k \in \mathbb{R}$

   Bien entendu l'affirmation fausse. Il y a 2 façons de démontrer qu'elle est fausse :
   ⇒ Tout d'abord, l'ensemble des solutions de l'équation $y'' - 3y' + 2y = 2$ est un espace affine de dimension 2 alors que l'ensemble de fonctions
   $$\{\varphi_k \text{ tels que } \varphi_k(x) = ke^{2x} + 1 \text{ avec } k \in \mathbb{R}\}$$
   est un espace affine de dimension 1
   On remarque que les fonctions $\varphi_k(x) = ke^{2x} + 1$ sont solutions de l'équation $y'' - 3y' + 2y = 2$ mais, **n'en décrivent pas toutes les solutions**
   ⇒ Ensuite, en résolvant explicitement cette équation, nous voyons que l'équation caractéristique de $y'' - 3y' + 2y = 0$ est $r^2 - 3r + 2 = 0$ qui admet 2 solutions $r_1 = 2$ et $r_2 = 1$.
   Ainsi, les solutions générales de l'équation différentielle linéaire homogène associée $y'' - 3y' + 2y = 0$ sont donc du type $k_1 e^x + k_2 e^{2x}$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$ et $k_2 \in \mathbb{R}$.
   Une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = 2$ est la fonction constante $y(x) = 1$ et donc, toutes les solutions de l'équation $y'' - 3y' + 2y = 2$ sont donc du type
   $$\Psi(x) = k_1 e^x + k_2 e^{2x} + 1 \text{ avec } k_1 \in \mathbb{R} \text{ et } k_2 \in \mathbb{R}$$
   Bien évidemment, l'assertion est fausse

Exemple 13 :

Trouver f, solution de l'équation $y" - 5y' + 6y = 0$, telle que : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$

4. Question posée au CAPES de Math 2023

15.8.5 Résolution dans le cas où $p^2 - 4q < 0$ et $p = 0$

Si $p = 0$, alors $-4q < 0$, ce qui veut dire que $q > 0$; on pose alors $q = \omega^2$, avec $\omega \neq 0$ et l'équation différentielle devient

$$y'' = -\omega^2 y \tag{15.13}$$

équation qui modélise la force de rappel des ressorts.

On considère l'équation 15.12 pour laquelle $p^2 - 4q < 0$ et $p = 0$

1. L'ensemble des solutions générales de (15.13) est alors

$$S_{(15.13)} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ telles que } f(x) = \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\}$$

   où $\omega = \sqrt{q}$

2. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ donnés
   Alors,(15.13) admet une unique solution f telle que

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

   Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x$ où λ et μ sont définis par les conditions initiales.

Démonstration

1. Les deux fonctions $f_1(x) = \cos \omega x$ et $f_2(x) = \sin \omega x$ sont solutions de (15.13)linéairement indépendantes. De la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 de $S_{(15.13)}$, nous déduisons que toutes les solutions de 15.13 sont du type $\lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$
2. Les fonctions trigonométriques $f_1(x) = \cos \omega x$ et $f_2(x) = \sin \omega x$ sont des solutions particulières de (15.13), et

$$W_{f_1, f_2}(x) = \begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\omega \sin \omega x & \omega \cos \omega x \end{vmatrix} = \omega$$

   et donc $W_{f_1, f_2}(x) \neq 0$. Il existe donc une combinaison linéaire de f_1 et de f_2 telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_0'$

Remarque 16 :

En fait, la fonction solution de 15.13 telle que

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

vérifie, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = y_0 \cos \omega (x - x_0) + \frac{y_0'}{\omega} \sin \omega (x - x_0)$$

Exercice 26 :

Touver des fonctions f vérifiant $f'' + 4f = 0$ et telles que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$

15.8.6 Résolution dans le cas où $p \neq 0$

On considère l'équation 15.12 pour laquelle $p^2 - 4q < 0$; alors, l'équation caractéristique $r^2 + pr + q = 0$ admet deux solutions distinctes complexes et conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \overline{r_1}$

1. L'ensemble des solutions générales de (15.12) est alors

$$S_{(15.12)} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ telles que } f(x) = (\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x) e^{\alpha x} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\}$$

2. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$ donnés
   Alors,(15.12) admet au moins une solution f telle que

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

   Cette solution est définie par : $f(x) = (\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x) e^{\alpha x}$ où λ et μ définis par les conditions initiales.

Démonstration

1. Soit $f(x) = e^{\alpha x} g(x)$. Quelles sont les conditions sur g pour que f soit solution de (15.12) ? En faisant les divers calculs, on montre que f est solution si et seulement si :

$$g''(x) + (2\alpha + p) g'(x) + \left(\alpha^2 + p\alpha + q\right) g(x) = 0$$

2. Nous avons $\beta \neq 0$, car les racines sont complexes et non réelles ; d'autre part, $(\alpha + i\beta)$ étant racine de $r^2 + pr + q = 0$, nous avons $(\alpha + i\beta)^2 + (\alpha + i\beta) r + q = 0$, ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \beta^2 = \alpha^2 + p\alpha + q \\ \beta (2\alpha + p) = 0 \end{cases}$$

   Et donc, comme $\beta \neq 0$, nous avons $2\alpha + p = 0$
3. g vérifie donc $g''(x) + \beta^2 g(x) = 0$, et donc $g(x) = \lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x$, d'où on tire

$$f(x) = e^{\alpha x} (\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$$

   Si nous posons $f_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ et $f_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$, alors f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes et comme $S_{(15.12)}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 2 ; il est engendré par les fonctions numériques, linéairement indépendantes $f_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ et $f_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$. D'autre part, si nous considérons le Wronskien

$$W_{f_1, f_2}(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ -\beta e^{\alpha x} \sin \beta x + \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x & \beta e^{\alpha x} \cos \beta x + \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x}$$

   Nous avons donc $W_{f_1, f_2}(x) \neq 0$, et le théorème est démontré

Exercice 27 :

Trouver une fonction f vérifiant $y'' + y' + y = 0$ où $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$

15.9 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants avec second membre

15.9.1 Cas simple où le second membre est une exponentielle

Résolution de l'équation différentielle du type

$$ay'' + by' + cy = \beta e^{\alpha x}$$

avec $c \neq 0$

Résolution

Pour résoudre une telle équation, nous faisons le changement de variables $y(x) = e^{\alpha x} z(x)$; alors :

$$y'(x) = e^{\alpha x} z'(x) + \alpha e^{\alpha x} z(x) \qquad y''(x) = e^{\alpha x} z''(x) + 2\alpha e^{\alpha x} z'(x) + \alpha^2 e^{\alpha x} z(x)$$

En remplaçant, nous obtenons :

$$a\left(e^{\alpha x} z''(x) + 2\alpha e^{\alpha x} z'(x) + \alpha^2 e^{\alpha x} z(x)\right) + b\left(e^{\alpha x} z'(x) + \alpha e^{\alpha x} z(x)\right) + c e^{\alpha x} z(x) = \beta e^{\alpha x}$$

qui devient donc, après simplification par $e^{\alpha x}$:

$$az'' + (2a\alpha + b) z' + \left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right) z = \beta$$

Remarque 17 :

Si $c = 0$, alors l'équation devient : $ay'' + by' = \beta e^{\alpha x}$ et y' devient solution d'une équation du premier ordre.

Exemple 14 :

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$$

1. On commence donc par faire le changement de variables $y(x) = e^{2x} z(x)$; alors :

$$y'(x) = 2e^{2x} z(x) + e^{2x} z'(x)$$
$$y''(x) = 4e^{2x} z(x) + e^{2x} z'(x)$$

Et en remplaçant dans l'équation initiale, nous obtenons :

$$e^{2x} z'' - e^{2x} z' = e^{2x} \Longleftrightarrow z'' - z' = 1$$

2. Une solution particulière de l'équation $z'' - z' = 1$ [5] est donnée par $z_0(x) = -x$. L'EDLHA est $z'' - z' = 0$ dont l'équation caractéristique est $r^2 - r = 0$ qui admet donc pour solutions particulières $r = 0$ et $r = 1$.
Les solutions de l' EDLHA sont donc : $z = \lambda e^x + \mu$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Les solutions de $z'' - z' = 1$ sont donc

$$z(x) = \lambda e^x + \mu - x$$

Avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$

3. Les solutions de l'équation $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$ sont donc :

$$y(x) = \lambda e^{3x} + \mu e^{2x} - x e^{2x}$$

Avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$

15.9.2 Cas simple où le second membre est un polynôme

$\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n

On considère l'équation différentielle du type

$$ay'' + by' + cy = P_n(x)$$

dans laquelle $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $c \neq 0$
Alors, il existe à cette équation une unique solution particulière, polynômiale de degré n

5. Une autre méthode de résolution pourrait être de faire le changement de variables $Z = z'$, et nous aurions alors à résoudre l'équation du premier ordre $Z' - Z = 1$, puis à chercher une primitive de Z

Démonstration

Soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} L:\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & L(P) = aP'' + bP' + cP \end{array}\right.$$

L est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
- La linéarité est évidente.
- Quant à la bijection, il suffit de considérer la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ donnée par $\mathcal{B}_0 = \{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ où $e_k(X) = X^k$. Alors, pour tout $k = 0, \ldots, n$, nous avons

  $$L(e_k)(X) = cX^k + bkX^{k-1} + ak(k-1)X^{k-2}$$

  C'est à dire :

  $$L(e_k) = ce_k + bke_{k-1} + ak(k-1)e_{k-2}$$

  La matrice de L dans la base $\mathcal{B}_0$ est alors donnée par :

  $$\mathcal{M}(L)_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} c & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & \cdots & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots & b(n-1) & an(n-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & c & bn \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

  C'est une matrice triangulaire supérieure, d'ordre $n+1$ dont le déterminant est $\det \mathcal{M}(L)_{\mathcal{B}_0} = c^{n+1}$; comme $c \neq 0$, alors $\det \mathcal{M}(L)_{\mathcal{B}_0} \neq 0$ et L est bien un isomorphisme

Il existe donc un seul polynôme P de degré n tel que $aP'' + bP' + cP = P_n$

Remarque 18 :

1. A nouveau, si $c = 0$, alors l'équation devient : $ay'' + by' = P_n(x)$ et y' devient solution d'une équation du premier ordre.
2. La recherche de la solution particulière de l'équation différentielle se fait en prenant un polynôme de degré n et en utilisant une méthode d'indentification.

Exemple 15 :

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 5y' + 6y = 6x^2 + 4x + 3$

1. D'après le théorème précédent, il existe une unique solution polynômiale de degré 2. Soit $y_0(x) = ax^2+bx+c$ cette solution ; alors : $y_0'(x) = 2ax+b$ et $y_0''(x) = 2a$ et, en remplaçant, nous obtenons :

   $$2a + 5(2ax+b) + 6\left(ax^2 + bx + c\right) = 6x^2 + 4x + 3$$

   En développant, et en regroupant, nous obtenons :

   $$6ax^2 + (10a + 6b)x + (2a + 5b + 6c) = 6x^2 + 4x + 3$$

   En identifiant, nous obtenons le système :

   $$\left\{\begin{array}{rl} 6a = & 6 \\ 10a + 6b = & 4 \\ 2a + 5b + 6c = & 3 \end{array}\right.$$

   En résolvant, nous trouvons $a = 1 \quad b = -1 \quad c = 1$. La solution particulière est donc

   $$y_0(x) = x^2 - x + 1$$

2. On résoud, maintenant, l'équation différentielle linéaire homogène associée $y''+5y'+6y=0$ dont l'équation caractéristique est $r^2+5r+6=0$.
   La solution générale de cette équation différentielle est simple ; elle est donnée par :
   $$y_h(x)=\lambda e^{-2x}+\mu e^{-3x}$$
   où $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$
3. La solution générale de l'équation $y''+5y'+6y=6x^2+4x+3$ est donnée par :
   $$y(x)=\lambda e^{-2x}+\mu e^{-3x}+x^2-x+1$$
   où $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$

Exemple 16 :

Résolution de l'équation différentielle du type
$$ay''+by'+cy=e^{\alpha x}P_n(x)$$
dans laquelle $P_n\in\mathbb{R}_n[X]$ et $c\neq 0$

Pour résoudre une telle équation, nous faisons le changement de variables $y(x)=e^{\alpha x}z(x)$; alors :
$$y'(x)=e^{\alpha x}z'(x)+\alpha e^{\alpha x}z(x)\qquad y''(x)=e^{\alpha x}z''(x)+2\alpha e^{\alpha x}z'(x)+\alpha^2e^{\alpha x}z(x)$$
En remplaçant, nous obtenons :
$$a\left(e^{\alpha x}z''(x)+2\alpha e^{\alpha x}z'(x)+\alpha^2e^{\alpha x}z(x)\right)+b\left(e^{\alpha x}z'(x)+\alpha e^{\alpha x}z(x)\right)+ce^{\alpha x}z(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$$
qui devient donc, après simplification par $e^{\alpha x}$:
$$az''+(2a\alpha+b)z'+\left(a\alpha^2+b\alpha+c\right)z=P_n(x)$$
Et nous nous retrouvons dans la situation de 15.9.2

Exemple 17 :

Résoudre l'équation différentielle
$$y''+y'-2y=e^{2x}(4x+1)$$

1. On commence donc par faire le changement de variables $y(x)=e^{2x}z(x)$; alors :
   $$\begin{aligned}y'(x)&=2e^{2x}z(x)+e^{2x}z'(x)\\ y''(x)&=4e^{2x}z(x)+e^{2x}z'(x)\end{aligned}$$
   Et en remplaçant dans l'équation initiale, nous obtenons :
   $$z''+5z'+4z=4x+1$$
2. Une solution particulière de l'équation $z''+5z'+4z=4x+1$ est un polynôme du premier degré du type $z(x)=ax+b$; en remplaçant, et en identifiant, nous trouvons comme solution particulière $z_0(x)=x-1$
3. L'EDLHA est donc $z''+5z'+4z=0$ dont le polynôme caractéristique est $r^2+5r+4=0$ dont les solutions sont -1 et -4. Les solutions de l' EDLHA sont donc : $z(x)=\lambda e^{-x}+\mu e^{-4x}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$. Les solutions de $z''+5z'+4z=4x+1$ sont donc
   $$z(x)=\lambda e^{-x}+\mu e^{-4x}+(x-1)$$
   Avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$
4. Les solutions de l'équation $y''+y'-2y=e^{2x}(4x+1)$ sont donc :
   $$y(x)=\lambda e^{x}+\mu e^{-2x}+e^{2x}(x-1)$$
   Avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$

Exercice 28 :

Soit l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 5y = e^x (6x - 4) + 2x^2 - 10x + 12$$

1. Montrer que si f est solution de l'équation $y'' - 4y' + 5y = e^x (6x - 4)$ et si g est solution de l'équation $y'' - 4y' + 5y = x^2 - 10x + 12$, alors $f + g$ est solution de $y'' - 4y' + 5y = e^x (6x - 4) + 2x^2 - 10x + 12$
2. En déduire toutes les solutions de $y'' - 4y' + 5y = e^x (6x - 4) + 2x^2 - 10x + 12$

15.10 Liste d'exercices

15.10.1 Les équations différentielles linéaires à coefficients constants

Exercice 29 :

1. $y'' - 5y' - 6y = 0$
2. $y'' - 4y' + 13y = 0$
3. $y'' - 6y' + 9y = 0$
4. $y'' - 4y' + 2y = 4$

Exercice 30 :

Cas où le second membre est un polynôme, c'est à dire, cas de l'équation $ay'' + by' + cy = P(x)$ où P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$
On cherche une solution particulière polynômiale, de degré $\deg P$ en identifiant, qu'on ajoute ensuite, à la solution générale de l'EDLHA. Nous somme dans la situation de 15.9.2

1. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 3$
2. $y'' - y = x^2 + 1$
3. $y'' - 4y' + 2y = x^2 - 2x$
4. $y'' + y' = x^2 - 1$
5. $y'' = 8x^3$
6. $y'' - y - 1 = 2x^2$

Exercice 31 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $y'' - 5y' + 6y = 3e^{4x}$
2. $y'' + 2y' + 5y = 2e^{3x}$
3. $y'' - 4y' + 4y = 1 + 5e^{2x}$
4. $y'' - 6y' + 9y = 5e^{3x} + 1$
5. $y'' - 2y' + y = \cosh x$

15.10.2 Résolution d'équations à coefficients non constants

Exercice 32 :

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(1 + x)\, y'' - 2y' + (1 - x)\, y = xe^{-x}$$

1. (a) Vérifier que $y_0(x) = e^x$ est solution particulière de l'équation différentielle linéaire associée.
   (b) Soit y une solution quelconque de l'équation différentielle linéaire associée. On pose $y(x) = y_0(x)\, z(x)$. Quelle équation différentielle doit vérifier z ?
   (c) Trouver toutes les fonctions z solutions de l'équation différentielle.
2. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle proposée

Exercice 33 :

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x\,(1+x)\,y'' - y' - 2y = 3x^2$$

1. (a) Trouver une solution particulière de l'équation différentielle linéaire associée du type x^α
   (b) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle linéaire associée
2. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle proposée

Exercice 34 :

1. Rechercher toutes le solutions développables en séries entières au voisinage de 0 de :

$$x\,(x+1)\,y'' + 3xy' + y = 0$$

2. En rechercher toutes les solutions

15.10.3 Problème

L'objet du problème est de trouver toutes les fonctions f 2 fois dérivables, telles que

$$f''(x) + f(-x) = x + e^{-x} \tag{15.14}$$

On remarquera que ce n'est pas une équation différentielle classique.

1. Résoudre $y'' + y = e^x + e^{-x}$
2. Résoudre $y'' - y = x - \lambda \cos x + \sinh x$
3. Soit f vérifiant 15.14, et $\varphi(x) = f(x) + f(-x)$. Montrer que φ est paire et qu'elle vérifie (1) ; en déduire φ
4. Montrer que si f vérifie (15.14)alors elle vérifie l'équation différentielle (2)
5. En déduire f

15.11 Correction de quelques exercices

Exercice 1 :

1. (a) *A quelle condition le coefficient directeur de la tangente en chaque point est-il proportionnel à l'abscisse de ce point ? Quelles sont les fonctions f qui satisfont cette condition ?*

   Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable, le coefficient directeur de la tangente au graphe d'une fonction numérique est donné par $f'(x)$.
   La proportionnalité du coefficient directeur de la tangente à l'abscisse du point se traduit par $f'(x) = kx$ où $k \in \mathbb{R}$

   C'est une simple recherche de primitive, et nous trouvons, bien entendu, $f'(x) = k\dfrac{x^2}{2} + \lambda$ où $k \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

   (b) *Dans une population $\mathcal{P}$, de n individus, $x(t)$ est le nombre des individus atteints par une maladie contagieuse $\mathcal{M}$ à un moment donné par t*
   La vitesse de propagation de l'épidémie est proportionnelle au nombre des individus atteints et aussi à la différence $n - x(t)$ des individus sains. En considérant x comme fonction d'une variable réelle, traduire les conditions ci-dessus par une condition portant sur la fonction x et sa dérivée

   Si nous désignons par $x'(t)$ la vitesse de propagation de la maladie, l'énoncé nous autorise à écrite :
   $$x'(t) = k_1 x(t) + k_2 (n - x(t)) \text{ avec } k_1 \in \mathbb{R} \text{ et } k_2 \in \mathbb{R}$$
   Cette équation peut encore s'écrire :
   $$x'(t) = \lambda x(t) + \mu n \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

2. *Donner les fonctions différentes définies sur $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$*

   Il est clair que toutes les fonctions exponentielles vérifient cette équation différentielle. Les fonctions f qui vérifient $f'(x) = f(x)$ sont les fonctions $f(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$

3. *Trouver une équation différentielle du premier ordre dont est solution, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction exponentielle $x \longmapsto e^{\alpha x}$*

   Si $f(x) = e^{\alpha x}$, alors $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$ et l'équation différentielle vérifiée par f est donnée par $y' = \alpha y$

Exercice 2 :

Donner le problème de Cauchy, vérifié par la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \longmapsto m(x - x_0) + y_0$

Très simple !!! $y'(x) = m$ et $y(x_0) = y_0$

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $3y' + 7y = 0$ *et* $y(2) = -7$

   C'est un problème de Cauchy, appliqué aux équations différentielles linéaires.
   Sans difficulté, on démontre que toutes les solutions de l'équation $3y' + 7y = 0$ sont du type $y(x) = Ce^{\frac{-7x}{3}}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

   De l'hypothèse $y(2) = -7$, nous tirons $-7 = Ce^{\frac{-14}{3}}$; d'où $C = -7e^{\frac{14}{3}}$. D'où, nous obtenons comme solutions :
   $$y(x) = 7e^{\frac{14}{3}} \times e^{\frac{-7x}{3}} \iff y(x) = 7e^{\frac{-7}{3}(x-2)}$$

2. $y" + 4y' = 0$ *et* $y(0) = 8$

   C'est une équation du second ordre !! *(Il y a des dérivées secondes qui apparaissent)*. Alors, comment s'en sortir ?

Nous faisons le changement de variables $z = y'$, de telle sorte que nous avons :

$$y" + 4y' = 0 \Longleftrightarrow z' + 4z = 0$$

D'où nous tirons comme solution $z = Ce^{-4x}$ avec $C \in \mathbb{R}$, et comme $y' = Ce^{-4x}$, nous obtenons $y = \dfrac{-C}{4}e^{-4x} + \mu$ avec $C \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.
Nous pouvons avoir une solution plus générale en écrivant :

$$y = \lambda e^{-4x} + \mu \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

La condition initiale $y(0) = 8$ se traduit par $\lambda + \mu = 8$ et donc $\mu = 8 - \lambda$; d'où la solution proposée est donc :

$$y(x) = \lambda e^{-4x} + 8 - \lambda \Longleftrightarrow y(x) = \lambda\left(e^{-4x} - 1\right) + 8 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

3. $y" - 9y' = 0$ *et* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 2$

Cette équation est du même tonneau que celle que nous avons ci-dessus, et la métode de résolution est la même.
Nous arrivons à la solution générale $y = \lambda e^{9x} + \mu$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$
Les conditions initiales nous donnent :

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda + \mu = & 1 \\ 9\lambda = & 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \lambda = \frac{2}{9} \text{ et } \mu = \frac{7}{9}$$

La solution de ce problème de Cauchy est donc :

$$y(x) = \frac{2e^{9x} + 7}{9}$$

4. $xy' - 2y = 0$ *et* $y(0) = 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $x \times y'(x) - 2y(x) = 0$, et en particulier, pour $x = 0$

$$0 \times y'(0) - 2y(0) = 0 \Longrightarrow y(0) = 0$$

Le problème de Cauchy proposé n'a donc pas de solution

5. $y' + |x|\, y = 0$ *et* $y(0) = 1$

Voici une question plus compliquée et qui mérite réflexion ! !

▷ **Nous allons étudier la solution générale de cette équation sur l'intervalle** $]0; +\infty[$
L'équation devient alors $y' + xy = 0$. Nous avons :

$$\begin{aligned} y' + xy = 0 \Longleftrightarrow & \quad \frac{y'}{y} = -x \\ \Longleftrightarrow & \quad \int \frac{y'}{y}\,\mathrm{d}x = -\int x\,\mathrm{d}x \\ \Longleftrightarrow & \quad \ln|y(x)| = -\frac{x^2}{2} + K \end{aligned}$$

D'où nous obtenons, sur $\mathbb{R}^{*+}$ $y(x) = C_1 e^{\frac{-x^2}{2}}$ avec $C_1 \in \mathbb{R}$

▷ **Nous allons étudier la solution générale de cette équation sur l'intervalle** $]-\infty; 0[$
L'équation devient alors $y' - xy = 0$. Nous avons :

$$\begin{aligned} y' - xy = 0 \Longleftrightarrow & \quad \frac{y'}{y} = x \\ \Longleftrightarrow & \quad \int \frac{y'}{y}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x \\ \Longleftrightarrow & \quad \ln|y(x)| = \frac{x^2}{2} + K \end{aligned}$$

D'où nous obtenons, sur $\mathbb{R}^{*-}$ $y(x) = C_2 e^{\frac{x^2}{2}}$ avec $C_2 \in \mathbb{R}$

▷ La question suivante est en fait celle qui pose la question de l'existence d'une solution continue et dérivable en $x_0 = 0$ en particulier et sur $\mathbb{R}$ en général.

Dans un premier temps, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} C_1 e^{\frac{-x^2}{2}} = C_1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} C_2 e^{\frac{x^2}{2}} = C_2$, et le prolongement par continuité nous impose de poser $C_1 = C_2$. Ainsi, la fonction

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{-x^2}{2}} \text{ si } x \geqslant 0 \\ Ce^{\frac{x^2}{2}} \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$ et est telle que $y(0) = C$

Est-elle dérivable en O ? Pour le démontrer, nous allons utiliser le théorème de prolongement de la dérivée 11.3.15

- ⋆ Sur $\mathbb{R}^{*-}$, la fonction dérivée est donnée par $y'(x) = Cxe^{\frac{x^2}{2}}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} Cxe^{\frac{x^2}{2}} = 0$
- ⋆ De même, sur $\mathbb{R}^{*+}$, la fonction dérivée est donnée par $y'(x) = -Cxe^{\frac{-x^2}{2}}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} -Cxe^{\frac{-x^2}{2}} = 0$

La fonction $y(x)$ est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et cette solution est la seule sur $\mathbb{R}$

Pour que nous répondions au problème de Cauchy, nous devons avoir $y(0) = 1$, nous devons avoir $C = 1$.

Ainsi, la solution au problème de Cauchy est donnée par :

$$y(x) = \begin{cases} e^{\frac{-x^2}{2}} \text{ si } x \geqslant 0 \\ e^{\frac{x^2}{2}} \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

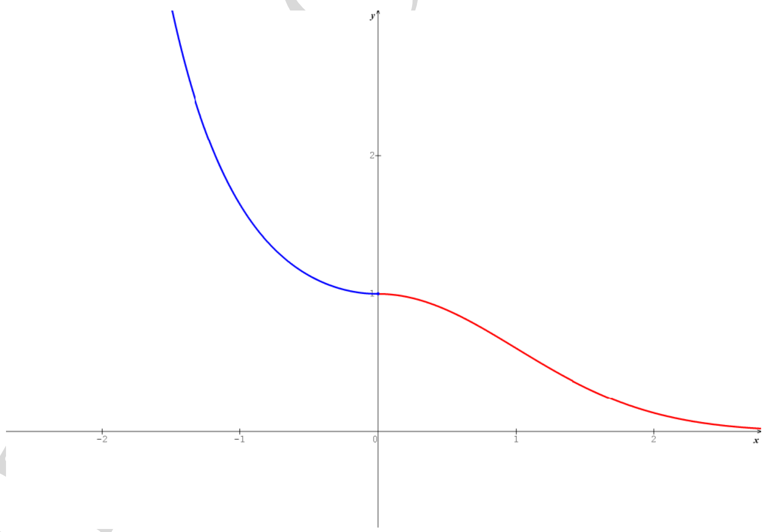

FIGURE 15.4 – Le graphe de la solution

Exercice 6 :

Intégrer les équations différentielles à variables séparables suivantes :

1. $y' = 4e^{x+y}$

   Nous avons : $y' = 4e^{x+y} \Longleftrightarrow y'e^{-y} = 4e^x$

Et donc, en passant à la recherche de primitives :

$$\int y'(x)\, e^{-y(x)}\, \mathrm{d}x = 4\int e^x\, \mathrm{d}x \iff -e^{-y(x)} = 4e^x + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

De là, nous déduisons $e^{-y(x)} = k - 4e^x$ et donc $y(x) = -\ln(k - 4e^x)$ avec $k \in \mathbb{R}$

En poussant un peu notre étude, nous pouvons remarquer que si $k \leqslant 0$, alors $\ln(k - 4e^x)$ n'est pas définie. Nous devons donc avoir $k > 0$

2. $y' \tan x = y$

Honnêtement, il n'y a pas grand chose à en dire

- ▷ La fonction nulle $\mathcal{O}$ est bien solution de cette équation
- ▷ Supposons y différente de la fonction nulle ; alors :

$$y' \tan x = y \iff \frac{y'}{y} = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

En passant à l'intégrale, :

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, \mathrm{d}x \iff \ln|y(x)| = \ln|\sin x| + K$$

D'où nous trouvons $y(x) = C\sin x$ avec $C \in \mathbb{R}$

- ▷ La fonction nulle est incluse dans la solution générale $y(x) = C\sin x$ lorsque la constante $C = 0$

3. $y' = \sqrt{1 - y^2}$

- ▷ Il est clair que la fonction constante et égale à 1, c'est à dire telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = 1$ est bien solution de l'équation.
- ▷ Supposons, maintenant que y soit différente de la fonction constante égale à 1.

Nous avons, bien sûr $y' = \sqrt{1 - y^2} \iff \dfrac{y'}{\sqrt{1 - y^2}} = 1$, et donc, en passant à l'intégration :

$$\int \frac{y'(x)}{\sqrt{1 - y^2(x)}}\, \mathrm{d}x = \int 1\, \mathrm{d}x \iff \arcsin y(x) = x + K \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

D'où, nous avons $y(x) = \sin(x + K)$ avec $K \in \mathbb{R}$

- ▷ Les solutions de cette équation sont donc $y(x) = \sin(x + K)$ avec $K \in \mathbb{R}$ ou $y(x) = 1$

4. $xy' + y^2 = 0$

- ▷ Il est clair que la fonction nulle est solution de cette équation
- ▷ Supposons que y ne soit pas la fonction nulle.

→ Supposons $x > 0$; alors :

$$xy' + y^2 = 0 \iff xy' = -y^2 \iff \frac{-y'}{y^2} = \frac{1}{x}$$

En passant à l'intégrale, nous obtenons :

$$\int \frac{-y'(x)}{y^2(x)}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \iff \frac{1}{y(x)} = \ln x + k_1 \text{ avec } k_1 \in \mathbb{R}$$

Ainsi, la solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$ est $y(x) = \dfrac{1}{\ln x + k_1}$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$

→ Supposons $x < 0$; alors, nous avons toujours :

$$xy' + y^2 = 0 \iff xy' = -y^2 \iff \frac{-y'}{y^2} = \frac{1}{x}$$

En passant à l'intégrale, nous obtenons :

$$\int \frac{-y'(x)}{y^2(x)}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \iff \frac{1}{y(x)} = \ln|x| + k_2 \text{ avec } k_2 \in \mathbb{R}$$

Ainsi, la solution sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ est $y(x) = \dfrac{1}{\ln|x| + k_2}$ avec $k_2 \in \mathbb{R}$

▷ Existe-t-il une fonction sur $\mathbb{R}$ en entier ?
En fait, la question est : existe-t-il une autre fonction que la fonction nulle qui soit solution sur $\mathbb{R}$.
→ Tout d'abord, de l'équation $xy' + y^2 = 0$, nous tirons $y^2(0) = 0$, c'est à dire $y(0) = 0$
→ Ensuite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\ln x + k_1} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{\ln x + k_2} = 0$ et donc la fonction :

$$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln x + k_1} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{\ln |x| + k_2} \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$
→ Est-elle dérivable en 0 ?
Si nous calculons la dérivée de Y sur $]0;+\infty[$, nous obtenons $Y'(x) = \dfrac{-1}{x(\ln x + k_1)^2}$ et
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} Y'(x) = -\infty$
Y n'est donc pas dérivable en 0
En dehors de la fonction nulle, il n'existe pas de solution sur $\mathbb{R}$ en entier

Les solutions à cette équation sont donc du type $y(x) = \dfrac{1}{\ln x + k_1}$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et $y(x) = \dfrac{1}{\ln |x| + k_2}$ avec $k_2 \in \mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-\infty;0[$ et $y(x) = 0$

Exercice 7 :

Intégrer l'équation différentielle $(x^2 - x)\,y' = y^2 + y$; montrer qu'il existe plus d'une solution valant 0 pour $x = 1$

▷ Tout dabord, nous avons $(x^2 - x)\,y' = y^2 + y \iff x(x-1)\,y' = y^2 + y$, et, de là, nous pouvons dire que :

$$y(0) = 0 \text{ ou } y(0) = -1 \text{ tout comme } y(1) = 0 \text{ ou } y(1) = -1$$

▷ Supposons $x > 1$
Alors :

$$x(x-1)\,y' = y^2 + y \iff \frac{y'}{y^2 + y} = \frac{1}{x(x-1)}$$

Et, en passant à l'intgration, nous obtenons :

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x) + y(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x$$

⇒ En décomposant en éléments simples, nous avons :
⋆ $\dfrac{y'(x)}{y^2(x) + y(x)} = \dfrac{y'(x)}{y(x)} - \dfrac{y'(x)}{y(x)+1}$, et donc :

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x) + y(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x - \int \frac{y'(x)}{y(x)+1}\,\mathrm{d}x = \ln|y(x)| - \ln|y(x)+1| = \ln\left|\frac{y(x)}{y(x)+1}\right|$$

⋆ De même, $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$ et donc :

$$\int \frac{1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x-1) - \ln x + K = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + K = \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

⇒ Nous obtenons donc $\ln\left|\dfrac{y(x)}{y(x)+1}\right| = \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) + K \iff \left|\dfrac{y(x)}{y(x)+1}\right| = C\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$ avec $C > 0$

Nous obtenons donc $\dfrac{y(x)}{y(x)+1} = \dfrac{Cx}{x-1}$ avec $C \in \mathbb{R}$ d'où nous tirons $y(x) = \dfrac{Cx}{(C-1)x-1}$ où $C \in \mathbb{R}$

Ainsi, sur l'intervalle $]+1;+\infty[$, l'ensemble des solutions sont du type $y(x) = \dfrac{Cx}{(C-1)x-1}$ où $C \in \mathbb{R}$

Index