Chapitre 3

Les séries numériques

Disons-le tout net, ce chapitre est très proche du chapitre con cernant les suites vu en L_1. Beaucoup de méthodes en sont issues. Vous devez donc avoir bien assimilé la notion de limite : si vous avez bien compris la convergence des suites, vous ne devriez pas avoir de problème

3.1 Définition de séries

3.1.1 Définition d'une série

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, réelle ou complexe.$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
On considère les sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

On appelle série de terme général u_n le couple $\boxed{\sum u_n = \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)}$

On dit que la série $\sum u_n$ converge, si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, le nombre $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ est appelé Somme de la série $\sum u_n$ et on note : $\boxed{S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k}$

Remarque 1 :

1. Etudier une série, *ou en chercher la nature*, c'est chercher si elle converge, ou si elle diverge.
2. Si elle diverge, on peut chercher comment elle diverge *(en lui cherchant, par exemple, un équivalent)*
3. Si elle converge, on essaie de connaitre sa limite exacte, ou une approximation de sa limite et/ou la rapidité avec laquelle cette série converge vers la limite ; ce qui n 'est pas si simple ; l'outil informatique peut alors être utile *(les outils de l'analyse numérique)*

Exemple 1 :

Exemples simples de séries
Avant de poursuivre dans la théorie, il est loin d'être inutile que de manipuler les premiers objets les plus simples

1. La série harmonique est la somme infinie des inverses des entiers positifs $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$; c'est une série qui diverge. On sait même que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\approx} \ln n$. Ce qui montre que la série harmonique diverge

lentement vers $+\infty$. On peut donner quelques valeurs :

n	S_n
100	$S_{100} = 5,19$
214	$S_{214} = 5,94$
746	$S_{746} = 7,19$

La divergence de cette série est très lente. Pour le démontrer, nous utilisons l'outil classique de comparaison avec une intégrale.voir la figure 3.1*(Voir le cours de L_0)*

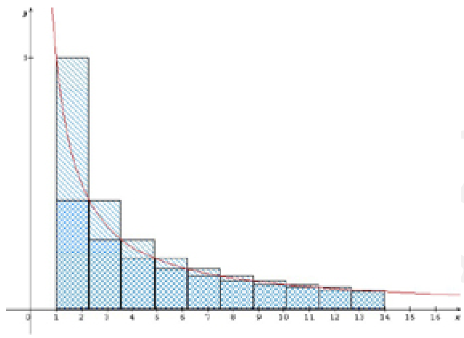

FIGURE 3.1 – Exemple d'encadrement par des rectangles

Un autre moyen pour démontrer que la série harmonique est divergente, est d'utiliser le critère de Cauchy. En effet, nous avons :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

La suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant 1}$ ne peut être de Cauchy ; et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est donc divergente.

2. Observons le développement décimal d'un réel strictement compris entre 0 et 1.
   $x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, où pour tout n, $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$
   Cette écriture correspond en fait à la série de terme général $\left(\frac{a_n}{10^n}\right)$.
   La somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$ est l'approximation décimale par défaut, à 10^{-n} près. Voici les 50 premières décimales de $\sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0.70710678118654752440084436210484903928483593768847\dots$$

   Les nombres décimaux $S_1 = 0.7$, $S_3 = 0.707$, $S_6 = 0.707106$ sont des sommes partielles de la série. Soit $x \in]0;1[$ en utilisant le développement décimal de x, nous avons $x = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{10^n}$

3. La série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ avec $x \in \mathbb{C}$.
   Voici un exemple très important, que nous retrouverons dans beaucoup de résultats de la théorie des séries. Il part, de plus, des premiers exemples simples de suites.
   On commence par étudier les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

S_n est en fait la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison x. Donc,

$$S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \text{ si } x \neq 1$$

Il faut, en fait, étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} x^{n+1}$; or, si $|x| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x^{n+1} = 0$, et si $|x| \geqslant 1$, alors, x^{n+1} diverge. On en conclue que si $|x| < 1$, alors, S_n converge vers $\dfrac{1}{1-x}$, et que si $|x| \geqslant 1$, S_n diverge. On en conclue que :

$$\boxed{\begin{cases} |x| < 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} x^n = \frac{1}{1-x} \\ |x| > 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} x^n \text{ diverge} \end{cases}}$$

Pour $x = \dfrac{1}{2}$, nous avons $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ On peut donner quelques valeurs pour les premiers calculs :

n	S_n
1	$S_1 = 1,5$
4	$S_4 = 1,94$
7	$S_7 = 1,99$
8	$S_8 = 2$

Dans notre cas, nous voyons que la convergence est très rapide.

Que se passe-t-il si $x = 1$ ou $x = -1$?

⋆ Si $x = 1$, alors $S_n = n + 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ et donc la série diverge

⋆ Si $x = -1$, alors :

$$S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ 1 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

La série diverge aussi dans ce cas.

4. La série exponentielle. Nous avons démontré que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} = e$

5. Un exemple moins canonique :

   $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est une série définie à partir de $n = 1$.

   On étudie donc les sommes partielles $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$;

   Or, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, et alors,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

   donc, $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$

   On en conclue que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, et que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Exercice 1 :

Etudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

3.1.2 Conditions nécessaires de convergence

Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. C'est à dire $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n = S \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Démonstration

Evidemment, nous avons : $u_n = S_n - S_{n-1}$.
Comme $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1})$.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = 0$.
Ce que nous voulions

Remarque 2 :

Ce résultat vaut surtout pour sa contrapposée, c'est à dire :

$$\boxed{\text{si } \lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \text{ alors, } \sum u_n \text{ diverge}}$$

Exemple 2 :

1. Si $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$ alors, $\sum u_n$ diverge.
   En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+3} = 2$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, la série diverge
2. **Ce n'est pas parce que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ que $\sum u_n$ converge**
   Exemples : nous avons étudié ces séries dont les termes généraux tendent vers zéro, mais qui divergent :
   → La série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$
   → La série du logarithme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 2 :

On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Montrer que les sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ sont minorées par $v_n = \sqrt{n}$.

Que conclure ?

3.1.3 Définition des restes d'une série numérique

Nous consédérons la série convergente $\sum u_n$ et nous posons $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$. S_n désigne toujours la somme partielle d'ordre n : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

Pour chaque entier naturel n, on considère le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ défini par :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Pour tout entier naturel n, nous avons $S = S_n + R_n$

3.1.4 Théorème

Soit $\sum u_n$ une série numérique convergente.Alors, la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en 3.1.3 converge vers 0

Démonstration

Par définition de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons $R_n = S - S_n$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(S - S_n) = 0$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$

3.1.5 Somme de Séries

On dispose pour les séries, des mêmes théorèmes que pour les suites, et la démonstration en est très simple

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ 2 séries numériques convergentes.
Alors, la série somme, $\sum(u_n + v_n)$ est aussi convergente.
De plus, si $\sum u_n = U$ et si $\sum v_n = V$ alors, $\sum(u_n + v_n) = U + V$

Démonstration

La démonstration n'est pas difficile. Il suffit d'utiliser les résultat sur les suites.

Soit $S_n^1 = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $S_n^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^1 = U$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^2 = V$.

Posons $S_n^3 = \sum\limits_{k=0}^{n}(u_k + v_k)$; alors $S_n^3 = S_n^2 + S_n^1$ et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n^3 = \lim_{n\to+\infty}\left(S_n^2 + S_n^1\right) = \lim_{n\to+\infty} S_n^2 + \lim_{n\to+\infty} S_n^1 = U + V$$

Donc $\sum(u_n + v_n)$ est aussi convergente et $\sum(u_n + v_n) = U + V$

3.1.6 Proposition

Soit $\sum u_n$ une série numérique convergente.
Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\sum \alpha u_n$ converge , et si $\sum u_n = U$, alors, $\sum \alpha u_n = \alpha U$

Démonstration

La démonstration est simple et laissée au lecteur.

Exercice 3 :

1. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

   (a) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{3}{8^n}$ (b) $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n \dfrac{7^n}{11^n}$ (c) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2^n - 1}{3^n}$ (d) $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{5^n + (-3)^n}{11^n}$

2. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme. *(Ce sont les mêmes séries que ci-dessus, mais, nous avons changé le point de départ - ou le premier terme-)*

   (a) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3}{8^n}$ (b) $\sum\limits_{n\geqslant 5} (-1)^n \dfrac{7^n}{11^n}$ (c) $\sum\limits_{n\geqslant 100} \dfrac{2^n - 1}{3^n}$ (d) $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{5^n + (-3)^n}{11^n}$

Exercice 4 :

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{2n-1}{n\left(n^2-4\right)}$ est convergente et calculer sa somme

Remarque 3 :

On n'a pas du tout les mêmes résultats avec le produit. L'étude du problème du produit de 2 séries numériques dépasse le cadre de ce cours. En fait, nous sommes obligés d'introduire ce qu'on peut appeler : le produit convolé de 2 séries :

3.1.7 Définition de la convolution de 2 séries

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont 2 séries , on appelle ≪ produit convolé ≫ ou produit de Cauchy de 2 séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, la série de terme général

$$\boxed{(u*v)_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} u_{n-p} v_p = \sum_{p+q=n} u_p v_q}$$

3.1.8 Séries complexes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de de nombres complexes. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons a_n et b_n la partie réelle et la partie imaginaire de u_n.
La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ convergent.
Si c'est le cas, nous avons $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n + i\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$

Démonstration

Rappelons qu'une suite de nombres complexes converge si et seulement si la suite des parties réelles et la suite des parties imaginaires convergent. c'est à dire que :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} A_n = A \text{ et } \lim_{n\to+\infty} B_n = B\right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} (A_n + iB_n) = A + iB\right)$$

Posons alors $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Nous avons :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + ib_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + i\sum_{k=0}^{n} b_k = A_n + iB_n$$

Et donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n + i\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$

Exemple 3 :

Considérons par exemple la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n$ où r est un nombre complexe de module ρ tel que $0<\rho<1$ et d'argument θ. Pour tout $n_i n\mathbb{N}$, nous avons, $r^n = \rho^n e^{in\theta}$. Les parties réelles et imaginaires de r^n sont :

$$a_n = \rho^n \cos n\theta \text{ et } b_n = \rho^n \sin n\theta$$

On déduit de la proposition précédente que, comme $\sum_{n\geqslant 0} r^n = \dfrac{1}{1-r}$:

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-r}\right) \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} b_n = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

Tous calculs faits :

$$\sum_{n\geqslant 0} \rho^2 \cos n\theta = \frac{1-\rho\cos\theta}{1-\rho\cos\theta+\rho^2} \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} \rho^2 \sin n\theta = \frac{1-\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta+\rho^2}$$