3.2 Critères de convergences

Dans les lignes qui suivent, on va mettre en place plusieurs critères de convergence qu'il faudra utiliser dans la pratique ; ces critères sont, en fait les mêmes que ceux utilisés pour les suites. Les énoncés ne seront qu'une adaptation aux séries.

3.2.1 Théorème

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ 2 séries numériques de terme général positif
On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N})\,((n \geqslant n_0) \Longrightarrow (u_n \leqslant v_n))$. Alors :

1. **Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ aussi**
2. **Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ aussi**

Démonstration

Ce n'est qu'une application des théorèmes sur les suites.

Soient $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=n_0}^{n} v_k$

Les nombres u_n et v_n étant positifs, les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux croissantes et $S_n \leqslant T_n$

1. Ssupposons $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge

   Comme $\lim_{n\to+\infty} T_n = T$, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $T_n \leqslant T$ et, en particulier $S_n \leqslant T$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et majorée est convergente et donc la série $\sum u_n$ converge.

2. Supposons que $\sum u_n$ diverge

   Si la série $\sum u_n$ diverge, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, et donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leqslant T_n$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et la série $\sum v_n$ diverge

Remarque 4 :

De la nécessité de connaître des **séries de références** dont on connait la convergence ou la divergence.

Exemple 4 :

1. Comme premier exemple de série de référence : les séries géométriques : $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ où $x \in \mathbb{R}$
2. Considérons un développement décimal. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers tous compris entre 0 et 9.

   Alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ est une série convergente.

   En effet, son terme général $\frac{a_n}{10^n}$ est majoré par $\frac{9}{10^n}$

   La série géométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$ est une série géométrique convergente car $0 < \frac{1}{10} < 1$

   La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 9\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$ converge aussi par linéarité, et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ converge.
3. Pour $0 < \alpha < 1$, et $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons : $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$; comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$; on retrouve la divergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (*on a choisi* $\alpha = \frac{1}{2}$)

4. Nous avons démontré que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Nous allons montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

   Nous avons $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$, $\frac{n(n+1)}{n^2} \leqslant \frac{3}{2}$. Par calcul, nous trouvons $n_0 = 3$.

   Ainsi, si $n \geqslant 3$, nous avons $\frac{n(n+1)}{n^2} \leqslant \frac{3}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{3}{2} \times \frac{1}{n(n+1)}$.

   Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, il en est de même de $\frac{3}{2}\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge

5. Pour $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge

   En effet, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha (\ln n)^\beta}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^{1-\alpha}} = 0$

   Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$, alors, $\frac{(\ln n)^\beta}{n^{1-\alpha}} \leqslant 1$.

   Or, $\frac{(\ln n)^\beta}{n^{1-\alpha}} \leqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$

   Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$

Exercice 5 :

1. Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes sont aussi convergentes :

   (a) $\sum_{n\geqslant 0} \max(u_n, v_n)$ (b) $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{u_n v_n}$ (c) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ (d) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$

2. Soient $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes strictement positifs convergente. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ est convergente

Exercice 6 :

On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, à termes positifs et convergente. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} nu_n$ existe, alors $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$

3.2.2 Définition

On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge.

3.2.3 Théorème

Une série absolument convergente est convergente

Démonstration

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et nous démontrons qu'elle est de Cauchy.
Soit donc $\varepsilon > 0$ Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $p > q$; alors, d'après l'inégalité triangulaire

$$|S_p - S_q| = \left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} |u_k| \tag{3.1}$$

Comme la série $\sum |u_n|$ converge, la suite des sommes partielles $S'_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$ est de Cauchy,
Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que si $p > q \geqslant N$, alors $\left|S'_p - S'_q\right| \leqslant \varepsilon$.
Or, $S'_p - S'_q = \sum_{k=q+1}^{p} |u_k| = \left|S'_p - S'_q\right|$

D'après l'inégalité 3.1, si $p > q \geqslant N$, alors $|S_p - S_q| = \left|\sum_{k=q+1}^{p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} |u_k| \leqslant \varepsilon$

La suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est donc de Cauchy et la série $\sum u_n$ converge.

Remarque 5 :

1. On dit aussi d'une série convergente qu'elle est simplement convergente.
2. Il y a des séries simplement convergentes, qui ne le sont pas absolument *(la réciproque est donc fausse)* : il existe donc des séries qui convergent simplement, et qui ne convergent pas absolument.
   Exemple : $\frac{(-1)^n}{n}$, série qui sera étudiée plus tard est une série convergente alors qu'elle ne l'est pas absolument.
   On appelle série semi-convergente, les séries qui sont convergentes, sans être absolument convergentes.

3.2.4 Corollaire

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ 2 séries numériques, la $\sum v_n$ étant à termes positifs.
On suppose que, à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geqslant n_0$, nous avons $|u_n| \leqslant v_n$
Alors, si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge aussi

Démonstration

La démonstration n'est pas difficile : c'est la combinaison des résultats 3.2.1 et 3.2.3 précédents.
La série $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs tels que $|u_n| \leqslant v_n$ Comme la série $\sum v_n$ converge, d'après 3.2.1, la série $\sum |u_n|$ converge.
Ce qui veut dire que la série $\sum u_n$ est absolument convergente, et donc d'après 3.2.3 elle est convergente.
Ce que nous voulions

Exemple 5 :

1. **Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^2}$?**

C'est assez simple : nous avons $\left|\dfrac{e^{in\theta}}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{e^{in\theta}}{n^2}$ est absolument convergente, donc convergente.

2. **Quelle est la nature de la série** $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{e^{in\theta}}{2^n}$

Tout aussi simple. En utilisant la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{e^{in\theta}}{2^n} = \sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{e^{i\theta}}{2}\right)^n$, nous avons $\left|\dfrac{e^{in\theta}}{2^n}\right| = \dfrac{1}{2^n}$. Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{e^{in\theta}}{2^n}$ est une série absolument convergente, donc convergente.

En fait $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{e^{in\theta}}{2^n} = \sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{e^{i\theta}}{2}\right)^n$ est une série géométrique, et nous avons $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{e^{i\theta}}{2}\right)^n = \dfrac{1}{1-e^{i\theta}}$

On démontre, par calculs que $\dfrac{1}{1-e^{i\theta}} = \dfrac{1}{2}\left(1 + i\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$

3. **Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente, alors, $\sum u_n^2$ est aussi une série convergente**

En effet, si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n| = 0$; il existe donc un entier N_1, tel que si $n > N_1$, alors $|u_n| < 1$; donc, d'après les propriétés des carrés, si $n \geqslant N_1$, alors $(u_n)^2 \leqslant |u_n|$; comme $\sum |u_n|$ converge, il en est de même pour $\sum u_n^2$

Exercice 7 :

1. Déterminer la nature des séries suivantes :

(a) $\sum\limits_{n\geqslant 0}\cos n$ (c) $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^{n^2}}{2^n}$ (e) $\sum\limits_{n\geqslant 0}e^{-n}$ (g) $\sum\limits_{n\geqslant 0}\sin\dfrac{1}{2^n}$

(b) $\sum\limits_{n\geqslant 1}e^{\frac{1}{n}}$ (d) $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{\sin n}{2^n}$ (f) $\sum\limits_{n\geqslant 0}e^{-n^2}$ (h) $\sum\limits_{n\geqslant 0}n!$

2. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, que dire de $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_n)^\alpha$ où $\alpha > 1$?

3.2.5 Théorème

Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}v_n$ 2 séries complexes absolument convergentes.

Nous posons $S_U = \sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ et $S_V = \sum\limits_{n\geqslant 0}v_n$

Alors, la série convolée (cf 3.1.7) $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u\star v)_n$ est convergente et $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u\star v)_n = S_U \times S_V$

Démonstration

1. On démontre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u\star v)_n$ est absolument convergente

Rappelons que $(u*v)_n = \sum\limits_{p=0}^{n}u_p v_{n-p}$ et que, donc $|(u*v)_n| \leqslant \sum\limits_{p=0}^{n}|u_p|\,|v_{n-p}|$

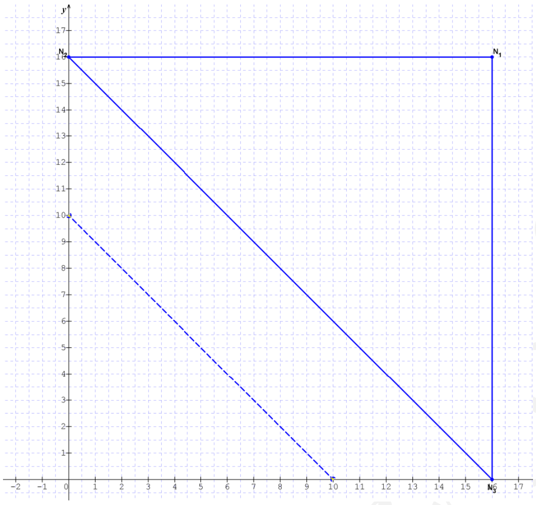

Figure 3.2 – Visualisation de l'ensemble de sommation. p est en abscisses et q en ordonnées ; la droite en pointillés est une droite du type $q = -p + n$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et considérons le carré de côté N ; les éléments u_p et v_{n-p} sont situés sur une droite du type $p + q = n \Longleftrightarrow q = -p + n$ où p varie de 0 à n. Visualisons ceci dans la figure 3.2

La sommation $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} |u_p|\,|v_{n-p}| = \sum_{p+q=n} |u_p|\,|v_q|$ se fait sur la droite $q = -p + n$.

Nous avons : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \left|(u * v)_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{n} |u_p|\,|v_{n-p}|$, cette sommation se faisant sur le triangle inférieur gauche du carré de côté N.

Elle est inférieure à la sommation sur le carré en entier, à savoir $\displaystyle\sum_{p=0}^{N}\left(\sum_{q=0}^{N} |u_p|\,|v_{n-p}|\right)$.

Nous avons donc :

$$\sum_{n=0}^{N} \left|(u * v)_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N}\sum_{p=0}^{n} |u_p|\,|v_{n-p}| \leqslant \sum_{p=0}^{N}\left(\sum_{q=0}^{N} |u_p|\,|v_q|\right)$$

Or, $\displaystyle\sum_{p=0}^{N}\left(\sum_{q=0}^{N} |u_p|\,|v_q|\right) = \left(\sum_{p=0}^{N} |u_p|\right)\left(\sum_{q=0}^{N} |v_q|\right)$

Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} v_n$ étant absolument convergentes nous avons $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{p=0}^{N} |u_p|$ qui admet une limite L_u et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{p=0}^{N} |v_p|$ qui admet une limite L_v telles que $\displaystyle\sum_{p=0}^{N} |u_p| \leqslant L_u$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{N} |v_p| \leqslant L_v$.

Nous avons donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \left|(u * v)_n\right| \leqslant L_u L_v$. La suite $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{N} \left|(u * v)_n\right|\right)_{N\in\mathbb{N}}$ étant positive, croissante et majorée, elle est donc convergente.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (u \star v)_n$ est donc absolument convergente.

Comme elle est absolument convergente, elle est aussi simplement convergente. Appelons alors $S_{U\star V} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (u \star v)_n$

2. Il nous faut donc, maintenant, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (u * v)_n = S_U S_V$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$

Appelons $S_{U,N} = \sum_{n=0}^{N} u_n$ et $S_{V,N} = \sum_{n=0}^{N} v_n$

▷ En posant $S_N = \sum_{n=0}^{N} (u * v)_n - S_{U,N} \times S_{V,N}$, nous avons $\lim_{N \to +\infty} S_N = S_{U\star V} - S_U \times S_V$. Il faut donc montrer que $\lim_{N \to +\infty} S_N = 0$

▷ D'après l'étude précédente, et à l'aide de la figure 3.2, nous avons $S_N = \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{q=0}^{n} u_{N-q} v_q \right)$, et donc $|S_N| \leqslant \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{q=0}^{n} |u_{N-q}|\,|v_q| \right)$. Refaisons le schéma 3.2 en y ajoutant un carré plus grand :

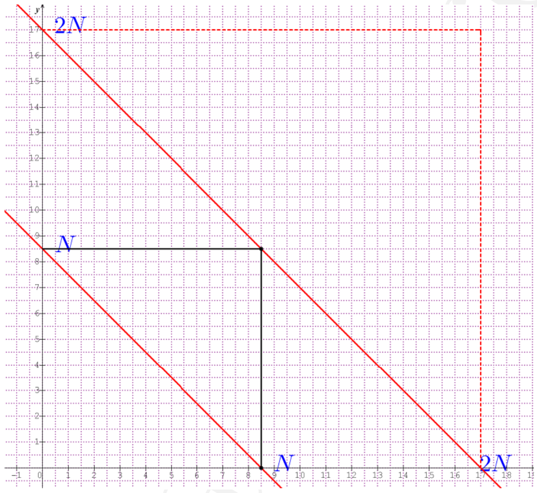

FIGURE 3.3 – Figure faite pour se rendre compte des différentes inclusions

Nous avons alors :

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{q=0}^{n} |u_{N-q}|\,|v_q| \right) \leqslant \sum_{n=N}^{2N} \left(\sum_{q=0}^{n} |u_{n-q}|\,|v_q| \right)$$

▷ Considérons les séries $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ et $\sum_{n\geqslant 0} |v_n|$; elles sont toutes deux absolument convergentes.

Donc la série convolée de terme général $\sum_{q=0}^{n} |u_{n-q}|\,|v_q|$ est, elle aussi, convergente.

En posant $T_N = \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{q=0}^{n} |u_{n-q}|\,|v_q| \right)$, nous avons $\sum_{n=N}^{2N} \left(\sum_{q=0}^{n} |u_{n-q}|\,|v_q| \right) = T_{2N} - T_{N-1}$

Nous avons alors $|S_N| \leqslant T_{2N} - T_{N-1}$

▷ Comme la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy, et donc $\lim_{N \to +\infty} T_{2N} - T_{N-1} = 0$ et donc $\lim_{N \to +\infty} S_N = 0$.

Ce que nous voulions.

Donc, $\sum_{n\geqslant 0} (u * v)_n = S_U S_V$

Quod erat demonstratum

Remarque 6 :

Cette démonstration montre l'importance de savoir ce que nous sommons, et comment nous le sommons *(pour cela, allez voir les annexes).*

3.2.6 Proposition

Soient r et r' deux réels tels que $0 < r < r' < 1$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{r}{r'}\right)^n |a_n|$ soit bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n a_n$ converge

Démonstration

Que la suite $\left(\dfrac{r}{r'}\right)^n |a_n|$ soit bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$ signifie qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \left(\dfrac{r}{r'}\right)^n |a_n| \leqslant M$

En multipliant par r'^n, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r^n |a_n| \leqslant r'^n M$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} r'^n M$ est une série géométrique convergente et nous déduisons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n |a_n|$ converge elle aussi. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n a_n$ converge absolument, donc simplement.

3.2.7 Application

Pour $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^\alpha r^n$ converge

Démonstration

Soit $r' \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < r' < 1$. Alors, l'expression $\left|\left(\dfrac{r}{r'}\right)^n n^\alpha\right|$ est bornée.

Pour cela, posons $x = \dfrac{r}{r'}$ et étudions $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n n^\alpha$.

Si $y_n = x^n n^\alpha$, alors $\ln y_n = n \ln x + \alpha \ln n = n\left(\ln x + \alpha \dfrac{\ln n}{n}\right)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln x + \alpha\dfrac{\ln n}{n} = \ln x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln y_n = -\infty$ parce que comme $0 < x < 1$, $\ln x < 0$; nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$

De ce dernier résultat, nous tirons que l'expression $\left|\left(\dfrac{r}{r'}\right)^n n^\alpha\right|$ est bornée et que donc, d'après 3.2.6 la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^\alpha r^n$ converge