3.3 Règle de D'Alembert et de Cauchy

3.3.1 Théorème : règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série numérique à termes non nuls à partir d'un certain rang telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$$

Alors :

1. **Si $l < 1$, alors, la série $\sum u_n$ converge**
2. **Si $l > 1$, alors, la série $\sum u_n$ diverge**
3. **On ne peut rien dire lorsque $l = 1$**

Démonstration

Le principe de la démonstration est de comparer la série étudiée à une série géométrique

1. Si $l < 1$, soit $k \in]l, 1[$, c'est à dire $l < k < 1$
   Comme $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_1 \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < k$
   On a donc, pour $n \geqslant N_1$,
   $$\begin{array}{rcl}\left|\frac{u_{N_1+2}}{u_{N_1+1}}\right| & < & k \\ \left|\frac{u_{N_1+3}}{u_{N_1+2}}\right| & < & k \\ \vdots & & \vdots \\ \left|\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\right| & < & k \\ \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| & < & k\end{array}$$
   Soit, en multipliant termes à termes,
   $$\left|\frac{u_{N_1+2}}{u_{N_1+1}}\right| \times \left|\frac{u_{N_1+3}}{u_{N_1+2}}\right| \times \cdots \times \left|\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\right| \times \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| < k^{n-N_1+1}$$
   puis, en simplifiant termes à termes :
   $$\left(\left|\frac{u_n}{u_{N_1+1}}\right| < k^{n-N_1+1}\right) \iff |u_n| < \left(\left|\frac{u_{N_1+1}}{k^{N_1-1}}\right|\right) \times k^n$$
   comme la série de terme général $\left(\left|\frac{u_{N_1+1}}{k^{N_1-1}}\right|\right) \times k^n$ est une série géométrique convergente *(puisque $k < 1$)*, on en déduit, d'après 3.2.1 que la série de terme général u_n est absolument convergente, donc convergente.
2. Si $l > 1$, de la même manière, on prend k tel que $1 < k < l$, et on peut minorer le terme $|u_n|$ par une expression de la forme Ak^n *(c'est à dire $|u_n| > Ak^n$)* à partir d'un certain rang. Comme la série de terme général Ak^n est divergente *(puisque $k > 1$)*, la série $\sum u_n$ diverge, toujours d'après 3.2.1

Remarque 7 :

Cette règle, ***à retenir***, n'est à utiliser que si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ s'exprime simplement.

Exemple 6 :

1. **Si on considère une série déjà bien connue : la série géométrique $\sum x^n$; pour quelles valeurs de x converge-t-elle ?**

   Il suffit de faire le rapport $\left|\dfrac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x|$; et, bien entendu, on retrouve que si $|x| < 1$, la série $\sum x^n$ converge.

2. **Soit la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$; pour quelles valeurs de x converge-t-elle ?**

   On fait donc le rapport
   $$\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{x^n}{n!}}\right| = \frac{|x|}{n+1}$$
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|x|}{n+1} = 0$, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$; donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est **toujours convergente.** [1]

3. **La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n\,!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}$ converge.**

   Il suffit donc d'utiliser le critère de D'Alembert :
   $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} \times \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{n!} = \frac{n+1}{2n+1}$$
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$

   Donc, d'après le critère de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n\,!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}$ converge

4. **La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(2n)\,!}{(n\,!)^2}$ diverge.**

   Nous utilisons toujours le critère de D'Alembert :
   $$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(2n+2)!}{((n+1)\,!)^2} \times \frac{(n\,!)^2}{(2n)\,!} = \frac{(2n+1)\,(2n+2)}{(n+1)^2}$$
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n+1)\,(2n+2)}{(n+1)^2} = 4$

   Donc, d'après le critère de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(2n)\,!}{(n\,!)^2}$ diverge.

5. **Nous considérons la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ où le terme général u_n est défini par :**
   $$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3^k} & \textbf{si } n = 2k \\ \dfrac{1}{3^{k+1}} & \textbf{si } n = 2k+1 \end{cases}$$
   En utilisant la règle de D'Alembert, nous avons :

1. On rappelle que $\sum \dfrac{x^n}{n!} = e^x$

⋆ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{3}$ si n est pair ⋆ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}$ si n est impair

Dans tous les cas, le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement inférieur à 1 et la série converge

Exercice 8 :

Donner la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ où le terme général u_n est défini par :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3^k} & \text{si } n = 2k \\ \dfrac{1}{3^{k+1}} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

3.3.2 Théorème : règle de Cauchy

Soit $\sum u_n$, une série numérique telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$$

Alors :

1. **Si $l < 1$, alors, la série $\sum u_n$ converge**
2. **Si $l > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge**
3. **On ne sait rien lorsque $l = 1$**

<u>Démonstration</u>

La démonstration est tout à fait semblable à celle du théorème de d'Alembert.

1. Si $l < 1$, soit $k \in]l;1[$, c'est à dire k tel que $l < k < 1$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_1 \Longrightarrow \sqrt[n]{|u_n|} < k$
   On a donc, pour $n \geqslant N_1$, $|u_n| < k^n$
   Comme la série de terme général k^n est une série géométrique convergente, on en déduit que la série de terme général u_n est absolument convergente, donc convergente.
2. De même, si $l > 1$, il existe k tel que $1 < k < l$, et, à partir d'un certain rang N_1, nous avons $1 < k^n < u_n$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} k^n$ étant divergente, il en est de même de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$

Exemple 7 :

Exemples d'utilisation :

1. **Quelle est la nature de de la série $\sum \left(\dfrac{2n+3}{n+1}\right)^n x^n$**

   On calcule $\sqrt[n]{\left(\dfrac{2n+3}{n+1}\right)^n |x|^n} = \left(\dfrac{2n+3}{n+1}\right)|x|$ qui tend vers $2|x|$ lorsque n tend vers $+\infty$

   Donc, $2|x| < 1$ si et seulement si $|x| < \dfrac{1}{2}$. Donc la série $\sum \left(\dfrac{2n+3}{n+1}\right)^n x^n$ converge si et seulement si $|x| < \dfrac{1}{2}$
2. **Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ et de $q \in \mathbb{C}$, la série de terme général $u_n = n^\alpha q^n$ converge-t-elle ?**

Faisons le calcul $\sqrt[n]{n^\alpha |q|^n}$.
Nous avons :

$$\sqrt[n]{n^\alpha |q|^n} = |q|\, n^{\frac{\alpha}{n}} = |q|\, e^{\frac{\alpha \ln n}{n}}$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{\alpha \ln n}{n}} = 1$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha |q|^n} = |q|$

Donc, la série $\sum n^\alpha q^n$ ne converge, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, que si $|q| < 1$

Remarque 8 :

Quel lien y-a-t-il entre les différents critères de D'Alembert et de Cauchy ? Etudions par exemple la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ où

$$u_n = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{3}\right)^k & \text{si } n = 2k \\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

1. Utilisons la règle de D'Alembert. Nous avons alors :

   ⋆ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{3}$ si n est pair ⋆ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ si n est impair

   Nous voyons qu'ici la règle de D'Alembert ne s'applique pas
2. Allons du côté de la règle de Cauchy

   ⋆ Si n est pair, c'est à dire $n = 2k$, nous avons $\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[2k]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^k} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

   ⋆ Si n est impair, c'est à dire $n = 2k+1$, nous avons

   $$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[2k+1]{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2k+1}} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k}{2k+1}}$$

   Nous avons $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2k+1}} = 1$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{k}{2k+1}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

   ⋆ Donc, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

   Et donc, d'après la règle de Cauchy, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge

D'où l'étude de la proposition suivante

3.3.3 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$

→ Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$

Il existe alors $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_0$, $\left|\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| - l\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow l - \varepsilon < \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < l + \varepsilon$

Alors, pour tout $n \geqslant n_0$, nous avons :

$$\begin{array}{ccc} l-\varepsilon < & \left|\dfrac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}\right| & < l+\varepsilon \\ l-\varepsilon < & \left|\dfrac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}}\right| & < l+\varepsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l-\varepsilon < & \left|\dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\right| & < l+\varepsilon \\ l-\varepsilon < & \left|\dfrac{u_{n}}{u_{n-1}}\right| & < l+\varepsilon \end{array}$$

Multiplions termes à termes et simplifions ; nous avons alors :

$$(l-\varepsilon)^{n_0-n} < \left|\frac{u_n}{u_{n_0}}\right| < (l+\varepsilon)^{n_0-n} \Longleftrightarrow |u_{n_0}|\,(l-\varepsilon)^{n_0-n} < |u_n| < |u_{n_0}|\,(l-\varepsilon)^{n_0-n}$$

De la croissance de la fonction $\sqrt[n]{x}$, nous tirons :

$$\sqrt[n]{|u_{n_0}|}\,\sqrt[n]{(l-\varepsilon)^{n_0-n}} < \sqrt[n]{|u_n|} < \sqrt[n]{|u_{n_0}|}\,\sqrt[n]{(l+\varepsilon)^{n_0-n}}$$

→ Par des calculs simples, nous montrons que :

- ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_{n_0}|}\,\sqrt[n]{(l-\varepsilon)^{n_0-n}} = l-\varepsilon$ ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_{n_0}|}\,\sqrt[n]{(l+\varepsilon)^{n_0-n}} = l+\varepsilon$

- ⋆ Il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$, avec $n_1 \geqslant n_0$ tel que si $n \geqslant n_1$, alors

$$(l-\varepsilon)-\varepsilon < \sqrt[n]{|u_{n_0}|}\,\sqrt[n]{(l-\varepsilon)^{n_0-n}} < (l-\varepsilon)+\varepsilon$$

- ⋆ De même, il existe donc $n_2 \in \mathbb{N}$, avec $n_2 \geqslant n_0$ tel que si $n \geqslant n_2$, alors

$$(l+\varepsilon)-\varepsilon < \sqrt[n]{|u_{n_0}|}\,\sqrt[n]{(l-\varepsilon)^{n_0-n}} < (l+\varepsilon)+\varepsilon$$

- ⋆ En posant $N = \max\{n_1 ; n_2\}$, pour $n \geqslant N$, nous avons :

$$l-2\varepsilon < \sqrt[n]{|u_n|} < l+2\varepsilon$$

→ Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N$, nous ayons $\left|\sqrt[n]{|u_n|} - l\right| < 2\varepsilon$, ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$

Nous venons de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l$

Remarque 9 :

1. Ceci veut donc dire que, si le critère de d'Alembert pose quelques problèmes, on peut se retourner vers la règle de Cauchy.
2. Le résultat démontré ci-dessus est plus large que le seul cadre des séries

Exercice 9 :

D'Alembert ? Cauchy ?
Utiliser les règles de D'Alembert ou de Cauchy pour décider si ces séries sont convergentes ou divergentes :

1. $\displaystyle\sum\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n}$
2. $\displaystyle\sum\frac{n\,!}{n^{n}}$
3. $\displaystyle\sum\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{(-1)^{n}n}$
4. $\displaystyle\sum\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^{2}}$
5. $\displaystyle\sum\frac{2^{n}}{n^{2}\sin^{2n}\alpha}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{p}}{a^{n}}$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n}n!}{n^{n}}$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{k}\right)$