3.4 Equivalences et comparaison à une intégrale

3.4.1 Théorème sur les séries à termes généraux équivalents

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ 2 séries numériques telles que les termes u_n et v_n soient de signe constant, et, de plus $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$ alors, ces 2 séries sont de même nature

Démonstration

1. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$

   Nous avons : $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n \Longleftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$

   Il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow \left| \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leqslant \dfrac{1}{2}$

   C'est à dire, en tenant compte de la signification de la valeur absolue :

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{2}v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}v_n$$

   dès que $n \geqslant N_\varepsilon$.

   Donc, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $v_n \leqslant 2u_n$ et $2u_n \leqslant 3v_n$, ce qui montre que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Qu'est ce qui change, si $u_n < 0$ et $v_n < 0$?

   Nous appliquons le résultat précédent aux séries de terme général $-u_n$ et $-v_n$.

   Si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, c'est à dire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, nous avons aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-u_n}{-v_n} = 1$, c'est à dire, d'après le résultat ci-dessus, que les séries $\sum -u_n$ et $\sum -v_n$ sont de même nature, et donc que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

3.4.2 Théorème

On a des résultats remarquables sur les restes et les sommes partielles :

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ 2 séries numériques telles que les termes u_n et v_n soient de signe constant, et, de plus $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$.

Nous appelons $S_n^u = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$ et $S_n^v = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ la somme partielle d'ordre n de la série $\sum v_n$

De même, nous appelons $R_n^u = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ et $R_n^v = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ le reste d'ordre n de la série $\sum v_n$

1. **Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $R_n^u \underset{+\infty}{\approx} R_n^v$, c'est à dire que les restes d'ordre n sont équivalents**
2. **Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors $S_n^u \underset{+\infty}{\approx} S_n^v$, c'est à dire que les sommes d'ordre n sont équivalentes**

Démonstration

Pour simplifier, sans toutefois perdre de généralité, nous supposerons $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou, tout au moins, à partir d'un certain rang.

1. **Supposons que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent**
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n^u = \lim\limits_{n\to+\infty} R_n^v = 0$, nous allons étudier ici, la façon dont les restes tendent vers 0.
   De $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
   Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N$, alors
   $$\left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow v_n\,(1-\varepsilon) < u_n < v_n\,(1+\varepsilon)$$
   Donc, pour tout $k > n$, nous avons $v_k\,(1-\varepsilon) < u_k < v_k\,(1-\varepsilon)$, et en faisant les sommations de $n+1$ à $p \geqslant n+1$, nous obtenons :
   $$(1-\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{p} v_k < \sum_{k=n+1}^{p} u_k < (1-\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{p} v_k$$
   Et en passant aux limites :
   $$(1-\varepsilon)\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{p} v_k < \lim_{p\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{p} u_k < (1-\varepsilon)\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{p} v_k \Longleftrightarrow (1-\varepsilon)\,R_n^v < R_n^u < (1-\varepsilon)\,R_n^v$$
   La dernière inégalité donnant la définition de deux suites équivalentes en $+\infty$; donc $R_n^v \underset{+\infty}{\approx} R_n^u$

2. **Supposons que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent**
   Les suites $(S_n^u)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n^v)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles sont des suites positives, croissantes telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^u = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n^v = +\infty$.
   Il faut donc montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n^u}{S_n^v} = 1$ *(Ce qui n'est pas une mince affaire ! !)*
   Soit $\varepsilon > 0$ tel que, plus précisément, $0 < \varepsilon < 1$
   Comme $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N_0$, alors $v_n\,(1-\varepsilon) < u_n < v_n\,(1+\varepsilon)$, et donc en additionnant, pour $n > N_0$, nous avons :
   $$(1-\varepsilon)\sum_{k=N_0+1}^{n} v_k < \sum_{k=N_0+1}^{n} u_k < (1+\varepsilon)\sum_{k=N_0+1}^{n} v_k$$
   Or, $\displaystyle\sum_{k=N_0+1}^{n} u_k = S_n^u - S_{N_0}^u$, tout comme $\displaystyle\sum_{k=N_0+1}^{n} v_k = S_n^v - S_{N_0}^v$ de telle sorte que l'inégalité devient :
   $$(1-\varepsilon)\left(S_n^v - S_{N_0}^v\right) < \left(S_n^u - S_{N_0}^u\right) < (1+\varepsilon)\left(S_n^v - S_{N_0}^v\right)$$
   D'où :
   $$(1-\varepsilon)\left(S_n^v - S_{N_0}^v\right) + S_{N_0}^u < S_n^u < (1+\varepsilon)\left(S_n^v - S_{N_0}^v\right) + S_{N_0}^u$$
   Il faut, maintenant, s'aventurer à quelques tripatouillages :
   → Nous avons $(1-\varepsilon)\left(S_n^v - S_{N_0}^v\right) + S_{N_0}^u = (1-\varepsilon)\,S_n^v - (1-\varepsilon)\,S_{N_0}^v + S_{N_0}^u$
   De la double inégalité $0 < \varepsilon < 1$, nous tirons $0 < 1-\varepsilon < 1$ et donc $0 < (1-\varepsilon)\,S_{N_0}^v < S_{N_0}^v$, ce qui est équivalent à $-S_{N_0}^v < -(1-\varepsilon)\,S_{N_0}^v$. Et donc, nous concluons que :
   $$(1-\varepsilon)\left(S_n^v - S_{N_0}^v\right) + S_{N_0}^u > (1-\varepsilon)\,S_n^v - S_{N_0}^v + S_{N_0}^u$$
   → De la même manière, et plus simplement, nous avons
   $$(1+\varepsilon)\left(S_n^v - S_{N_0}^v\right) + S_{N_0}^u < (1+\varepsilon)\,S_n^v - S_{N_0}^v + S_{N_0}^u$$
   → De telle sorte que nous avons l'inégalité :
   $$(1-\varepsilon)\,S_n^v - S_{N_0}^v + S_{N_0}^u < S_n^u < (1+\varepsilon)\,S_n^v - S_{N_0}^v + S_{N_0}^u$$

En divisant par S_n^v, nous obtenons :

$$(1-\varepsilon)+\frac{S_{N_0}^u-S_{N_0}^v}{S_n^v}<\frac{S_n^u}{S_n^v}<(1+\varepsilon)\,S_n^v+\frac{S_{N_0}^u-S_{N_0}^v}{S_n^v}$$

Comme $S_{N_0}^u-S_{N_0}^v$ est un nombre fixé et que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^v=+\infty$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_{N_0}^u-S_{N_0}^v}{S_n^v}=0$.

Il existe donc $N_1\in\mathbb{N}$, avec $N_1\geqslant N_0$, tel que si $n>N_1$, alors $-\varepsilon<\dfrac{S_{N_0}^u-S_{N_0}^v}{S_n^v}<\varepsilon$ et donc, si $n>N_1$, nous avons :

$$1-2\varepsilon<\frac{S_n^u}{S_n^v}<1+2\varepsilon$$

Ce qui prouve bien que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n^u}{S_n^v}=1$

Ce que nous voulions

Exercice 10 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On construit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en écrivant : $v_n=\dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Démontrer que les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Remarque 10 :

Le problème est donc de **connaître des séries de « référence » ,** dont on connait bien le comportement. On connait les séries géométriques, et le théorème suivant va parler des séries de Riemann

3.4.3 Théorème : les séries de Riemann

La série $\sum\limits_{n>0}\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$

Démonstration

L'idée de la démonstration est classique : elle est d'utiliser une intégrale et de comparer la série à une intégrale.
Soit $f:\,]0;+\infty]\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\dfrac{1}{t^\alpha}$ où $\alpha>0$

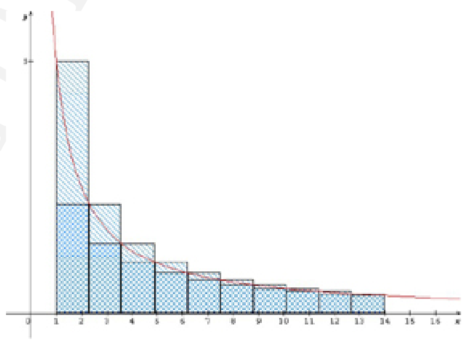

FIGURE 3.4 – Exemple d'encadrement par des rectangles

f est décroissante sur $]0;+\infty[$, et donc, pour $n\in\mathbb{N}^*$, nous avons

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha}\leqslant\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^\alpha}\leqslant\frac{1}{n^\alpha}$$

D'où, en sommant, nous avons :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(p+1)^{\alpha}} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \int_{p}^{p+1} \frac{dt}{t^{\alpha}} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{\alpha}}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p^{\alpha}} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \int_{p}^{p+1} \frac{dt}{t^{\alpha}} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{\alpha}}$$

Posons $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{\alpha}}$; on a donc :

$$S_n - 1 + \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \leqslant \int_{1}^{n+1} \frac{dt}{t^{\alpha}} \leqslant S_n$$

C'est à dire :

$$S_n - 1 + \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \leqslant \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{n+1} \leqslant S_n$$

ou encore, après calculs,

$$\boxed{S_n - 1 + \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \leqslant \frac{(n+1)^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1} \leqslant S_n}$$

Donc,

- ⋆ Si $-\alpha + 1 > 0 \Longleftrightarrow 0 < \alpha < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^{-\alpha+1} = +\infty$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$
  La série diverge.
- ⋆ Si, $-\alpha + 1 < 0 \Longleftrightarrow \alpha > 1$, nous avons $S_n \leqslant 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} + \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}(1-\alpha)} + \frac{1}{\alpha-1}$
  Comme $-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} + \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}(1-\alpha)} \leqslant 0$, nous avons $S_n \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$
  La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite croissante et majorée est donc convergente.
- ⋆ Si $\alpha = 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha}} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est la série harmonique, divergente.

Remarque 11 :

1. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est donc bien convergente ! La recherche de sa limite est un tout autre problème *(voir les exercices)*
2. Nous venons de trouver une classe de séries importantes les séries de Riemann qui sont toutes du type $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ avec $\alpha > 0$
3. La série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{n^3 + 7n^2 - \sqrt{2}\dfrac{\ln(n)}{n}}{4n^5 + 25n^4}$ est convergente, car $u_n \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{4n^2}$

Exercice 11 :

On se donne P et Q, 2 polynômes non nuls à une indéterminée et à coefficients réels. k est le premier entier supérieur à la plus grande racine réelle de Q. Etudier la série $\sum_{n\geqslant k} \frac{P(n)}{Q(n)}$

Exercice 12 :

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

1. Montrer au moyen d'un théorème de comparaison que cette série est convergente
2. Retrouver le résultat en calculant la somme.

Exercice 13 :

Etudier la série de terme général $\sqrt{n^4+2n+1}-\sqrt{n^4+an}$ où a est un réel positif.

3.4.4 Théorème : séries et intégrales

L'objet de ce théorème est bien de généraliser le théorème précédent

Soient f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur l'intervalle $[a;+\infty[$ avec $a\geqslant 0$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Alors, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ ont même nature

__Démonstration__

Nous nous reportons au schéma 3.4
Soit $p\in\mathbb{N}$ et $x\in[p;p+1]$
Alors, de la décroissance de f, nous tirons $f(p)\geqslant f(x)\geqslant f(p+1)$, et donc, en utilisant la positivité de l'intégrale *(respect de la relation d'ordre)*

$$\int_p^{p+1} f(p)\ dx \geqslant \int_p^{p+1} f(x)\ dx \geqslant \int_p^{p+1} f(p+1)\ dx$$

C'est à dire, tout simplement,

$$f(p)\geqslant \int_p^{p+1} f(x)\ dx \geqslant f(p+1)$$

En posant N, l'entier supérieur ou égal à a et $S_p=\displaystyle\sum_{k=\mathbb{N}}^{p} f(k)$, nous avons, en sommant, nous avons :

$$\sum_{k=N}^{p} f(k)\geqslant \sum_{k=N}^{p}\int_k^{k+1} f(x)\ dx \geqslant \sum_{k=N}^{p} f(k+1)$$

C'est à dire,

$$S_p\geqslant \int_N^{p+1} f(x)\ dx \geqslant S_p+f(p+1)-f(N)$$

L'inégalité précédente permet de montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ ont même nature. En effet :

→ __Etude de la divergence__

⋆ Si $\displaystyle\int_N^{+\infty} f(x)\ dx=\lim_{p\to+\infty}\int_N^{p} f(x)\ dx=+\infty$, c'est à dire que l'intégrale diverge, alors comme $\displaystyle\int_N^{p+1} f(x)\ dx\leqslant S_p$, alors $\lim\limits_{p\to+\infty} S_p=+\infty$ et donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ diverge

⋆ Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ diverge ; alors $\lim_{p\to+\infty} S_p = +\infty$, et, partant

$$\lim_{p\to+\infty} S_p + f(p+1) - f(N) = +\infty$$

Comme $S_p + f(p+1) - f(N) \leqslant \int_N^{p+1} f(x)\ dx$, nous avons $\lim_{p\to+\infty} \int_N^{p+1} f(x)\ dx = +\infty$, c'est à dire que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ diverge

→ Etude de la convergence

⋆ Supposons la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ convergente, comme la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ a pour somme S alors $\lim_{p\to+\infty} S_p = S$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p \leqslant S$. De l'inégalité $\int_N^{p+1} f(x)\ dx \leqslant S_p$, nous tirons que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\int_N^{p+1} f(x)\ dx \leqslant S$
Pour tout $T > 1$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leqslant T < p+1$ et de la positivité et de la décroissance de f nous obtenons :

$$\int_N^{p+1} f(x)\ dx \leqslant \int_N^{T} f(x)\ dx < \int_N^{p} f(x)\ dx \leqslant S$$

Donc $\lim_{T\to+\infty} \int_N^{T} f(x)\ dx$ est finie, ce qui veut dire que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ converge

⋆ Supposons que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ converge, nous avons $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt = L$. de l'inégalité $S_p+f(p+1)-f(N) \leqslant \int_N^{p+1} f(x)\ dx$, nous tirons $S_p+f(p+1)-f(N) \leqslant \int_N^{+\infty} f(x)\ dx \leqslant L$ et donc :

$$S_p \leqslant f(N) - f(p+1) + L \leqslant f(N) + L$$

Nous mettons ainsi en évidence que la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée (par $f(N)+L$), donc convergente. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ est donc convergente.

Exemple 8 :

Le plus bel exemple pour ce théorème est formé par les séries de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ et les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ dt$

Exercice 14 :

On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ où $u_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. Discuter suivant les valeurs de α de la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$

3.4.5 Corollaire : encadrement du reste

Pour $a > 0$, soit $f : [a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ positive et décroissante, telle que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Notons pour $n \geqslant a$ $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ (c'est le reste d'ordre n)

Alors, pour tout $n \geqslant a$, nous avons

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$

1. En utilisant le fait que f soit positive et décroissante, nous avons, pour tout $k \geqslant n$, $f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx$, et en passant à la sommation, pour $p > n$:

$$\sum_{k=n}^{p} f(k+1) \leqslant \sum_{k=n}^{p} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \Longleftrightarrow \sum_{k=n+1}^{p+1} f(k) \leqslant \int_n^{p+1} f(x)\,dx$$

   Et, en passant à la limite, nous avons :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(x)\,dx \Longleftrightarrow R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$$

2. De la même manière, nous avons, pour tout $k \geqslant n$, $\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k)$, et en passant à la sommation, pour $p > n$:

$$\sum_{k=n+1}^{p} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} f(k) \Longleftrightarrow \int_{n+1}^{p+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} f(k)$$

   Et, en passant à la limite, nous avons :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \Longleftrightarrow \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n$$

En faisant la synthèse des deux inégalités, nous obtenons : $\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$.

Ce que nous voulions