3.5 Séries alternées, critère d'Abel

3.5.1 Théorème : critère des séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que
- **La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, c'est à dire que $(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n \geqslant 0)$**
- **La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante**
- **La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 à l'infini, c'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$**

Alors, la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente

Démonstration

Cette démonstration est très simple.

Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$

1. Nous allons d'abord montrer que la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée.
   (a) La suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
   En effet :
   $$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= (-1)^{2n+3} u_{2n+3} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} \\ &= -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geqslant 0 \end{aligned}$$
   Car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc, nous avons $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} \geqslant 0$ et la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite croissante
   (b) La suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite majorée
   En effet :
   $$\begin{aligned} S_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k \\ &= u_0 + (-u_1 + u_2) + (u_4 - u_3) + \ldots + (u_{2k} - u_{2k-1}) + \ldots + (u_{2n} - u_{2n-1}) - u_{2n+1} \end{aligned}$$
   Comme $u_{2k} \leqslant u_{2k-1}$ *(décroissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$)*, nous avons $S_{2n+1} \leqslant u_0$, c'est à dire que la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite majorée
   (c) La suite $(S_{2n+1})_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}}$ étant donc croissante et majorée, elle est donc convergente. Soit S sa limite
2. La suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite S
   En effet, $S_{2n} = S_{2n-1} + u_{2n}$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n-1} = S$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = S$
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}$ existe et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = S$
3. Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de la suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui admettent la même limite S, donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$.
   Ce qui signifie que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente
4. On peut démontrer, comme ci-dessus, que S_{2n} est une suite décroissante et, qu'en fait, les 2 suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont des suites adjacentes telles que $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$, et on a donc :
   $$S_{2n} - u_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$$
   ou
   $$S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+1} + u_{2n+2}$$
   Ce qui montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|S - S_n| \leqslant u_{n+1}$
5. Ce qui montre aussi que si on remplace S par S_n , on commet une erreur de l'ordre de u_{n+1}

Exemple 9 :

1. Pour $\alpha > 0$, $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante, et telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$; donc, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente.
2. On a, en particulier, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ **convergente, mais pas absolument convergente.** [2]

Exercice 15 :

Etudier les séries suivantes. Sont-elles alternées ? Convergent-elles absolument ?

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n}\right)$
2. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos \pi n}{\ln n}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n} \sin \frac{1}{n}$
4. $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$
5. $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$
6. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

3.5.2 Une généralisation du théorème sur les séries alternées

Etape 1 : Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites quelconques.
On définit les expressions suivantes :

$$\begin{cases} A_{m,n} = & \sum_{k=m}^{n} a_k \\ A_n = & \sum_{k=0}^{n} a_k \\ A_{-1} = & 0 \end{cases}$$

Alors, nous avons :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right)_k + A_n b_n - A_{m-1} b_m$$

<u>Démonstration</u>

On peut d'abord faire remarquer que $a_k = A_k - A_{k-1}$, et, que $\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} \left(A_k - A_{k-1}\right) b_k$

De là,

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} \left(A_k - A_{k-1}\right) b_k \\ &= \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n} A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=m}^{n} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right) + A_n b_n - A_{m-1} b_m \end{aligned}$$

2. Semi-convergente, donc

Etape 2 : le critère d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites quelconques.
On suppose de plus que :

1. $(\exists M \geqslant 0)\,(\forall m \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(m \leqslant n \Rightarrow |a_m + \cdots + a_n| \leqslant M)$
 Ce qui veut donc dire que la somme $|a_m + \cdots + a_n|$ est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}$
2. **La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro**
3. **La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |b_{n+1} - b_n|$ est convergente**

Alors, la série $\sum a_n b_n$ converge

Démonstration

On considère la somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k$, et on va montrerque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ; elle sera donc convergente.
Soient donc $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$; alors :

$$\begin{aligned}
|S_n - S_m| &= \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\right| \\
&= \left|\sum_{k=m+1}^{n} A_k\,(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_m b_{m+1}\right| \\
&\leqslant M\left(\sum_{k=m+1}^{n} |b_k - b_{k+1}| + |b_n| + |b_{m+1}|\right)
\end{aligned}$$

Comme la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |b_n| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$
De même, comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |b_{n+1} - b_n|$ est convergente, elle est de Cauchy, et donc, il existe $N_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ tel que $m \geqslant n \geqslant N_\varepsilon^1 \Rightarrow \sum\limits_{k=m+1}^{n} |b_k - b_{k+1}| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$
Ainsi, pour $m \geqslant n \geqslant \sup\left(N_\varepsilon, N_\varepsilon^1\right)$, alors $|b_n| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$ et $\sum\limits_{k=m+1}^{n} |b_k - b_{k+1}| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$
Donc, pour $m \geqslant n \geqslant \sup\left(N_\varepsilon, N_\varepsilon^1\right)$

$$\begin{aligned}
|S_n - S_m| &\leqslant M\left(\sum_{k=m+1}^{n} |b_k - b_{k+1}| + |b_n| + |b_{m+1}|\right) \\
&\leqslant M\left(\frac{3\times\varepsilon}{3M}\right) = \varepsilon
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ; la série est donc convergente.

Remarque 12 :

En quoi le théorème d'Abel implique-t-il le "critère des séries alternées" ?
On considère donc une série $\sum (-1)^n b_n$, où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro en décroissant.
On pose alors, $a_n = (-1)^n$, et on a donc la somme $|a_m + \cdots + a_n|$ est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$
De plus, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |b_{k+1} - b_k| = \sum\limits_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_0$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ $\sum\limits_{n\geqslant 0} |b_{n+1} - b_n| = b_0$,
et donc, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |b_{n+1} - b_n|$ est convergente. On conclue donc à la convergence de la série $\sum (-1)^n b_n$

Exemple 10 :

Application à l'étude des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{inx}}{n^\alpha}$ **avec** $\alpha > 0$

1. Dans un premier temps, si $x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\dfrac{e^{inx}}{n^\alpha} = \dfrac{\left(e^{ix}\right)^n}{n^\alpha} = \dfrac{1}{n^\alpha}$ qui converge si $\alpha > 1$ et diverge si $0 < \alpha \leqslant 1$
2. Supposons $x \neq 2k\pi$; nous allons alors utiliser le théorème d'Abel en posant $a_n = e^{inx}$ et $b_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. Alors, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{inx}}{n^\alpha}$ devient $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$. Examinons, maintenant, les différents critères du théorème d'Abel
   → Tout d'abord, la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite qui tend vers 0 en décroissant.
   Ensuite,
   $$\sum_{k=1}^{n} |b_{k+1} - b_k| = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$
   Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} |b_{k+1} - b_k| = 1$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |b_{n+1} - b_n|$ est bien convergente.
   → Ensuite, soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n \geqslant m$; alors :
   $$\begin{aligned} \left|\sum_{k=m}^{n} e^{ikx}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-m} e^{i(k+m)x}\right| \\ &= \left|e^{imx} \sum_{k=0}^{n-m} e^{ikx}\right| \\ &= \left|e^{imx}\right| \left|\sum_{k=0}^{n-m} e^{ikx}\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n-m} e^{ikx}\right| \\ &= \left|\frac{1 - e^{i(n-m+1)x}}{1 - e^{ix}}\right| \end{aligned}$$
   Or, $\left|\dfrac{1 - e^{i(n-m+1)x}}{1 - e^{ix}}\right| = \dfrac{\left|1 - e^{i(n-m+1)x}\right|}{\left|1 - e^{ix}\right|} \leqslant \dfrac{2}{\left|1 - e^{ix}\right|}$
   Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ tels que $n \geqslant m$, nous avons la somme $\left|\displaystyle\sum_{k=m}^{n} e^{ikx}\right|$ qui est bornée.
   → Donc, si $x \neq 2k\pi$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{inx}}{n^\alpha}$ est convergente pour tout $\alpha > 0$

Ainsi, on vient de montrer aussi que les séries réelles $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ convergent pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq 2k\pi$; les cas où $x = k\pi$ sont faciles à étudier pour ces deux séries.