3.6 Exercices complémentaires sur les séries numériques

3.6.1 Applications directes du cours

Exercice 16 :

Nous savons que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n\,!}=e$

1. Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2}{n\,!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^3}{n\,!}$ sont convergentes et calculer leur somme.
2. Soit $p\in\mathbb{N}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^p}{n\,!}$ converge et que sa somme est un multiple entier de e

Exercice 17 :

1. Etudier la suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :
$$u_0\in\mathbb{C}\text{ et }\ (\forall n\in\mathbb{N})\,(u_{n+1}=u_n+a^n)\ \text{ où } a\in\mathbb{C}$$
2. De manière générale, démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :
$$u_0\in\mathbb{C}\text{ et }\ (\forall n\in\mathbb{N})\,(u_{n+1}=u_n+v_n)$$
est convergente si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}v_n$ est convergente.

Exercice 18 :

Etudier la convergence des séries suivantes.*(Les méthodes à utiliser pourront être diverses : règles de Cauchy ou de d'Alembert, recherche d'équivalents simples, ou recherche d'équivalents à l'aide des développements limités)*

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}n\sin\frac{1}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(n)^{\frac{1}{n^2}}-1$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+1}\right)$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1+2+3+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos nx^2}{2^n}$
9. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{a^n}{(1+a)\,(1+a)^2\cdots(1+a)^n}$ avec $a>-1$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$
11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)$
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$

Exercice 19 :

1. Montrer que la série de terme général $u_n=\displaystyle\int_0^1\left(1-\sqrt{x}\right)^n dx$ est convergente.
2. Etudier la convergence, de la série de terme général $u_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sqrt{\sin x}\,dx$ pour $n\geqslant 2$

Exercice 20 :

Pour quelles valeurs de $a\in\mathbb{R}$, la série de terme général $u_n=\dfrac{\ln n!}{n^a}$ converge-t-elle ?

Exercice 21 :

1. Etudier la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)|}{n!}a^n$ où x est un réel donné quelconque, et $0 < a < 1$.
2. En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{|x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)|}{n!}a^n$

Exercice 22 :

Dans cet exercice, on suppose $\alpha > 1$

1. Démontrer que nous avons $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = 1$
2. Montrer que, pour tout réel $\beta > 0$ et tout $t \in [0;1]$, nous avons $(1-t)^\beta \leqslant \frac{1}{1+\beta t}$
3. En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$, nous avons $\frac{\alpha-1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}$
4. Conclure

Exercice 23 :

Etudier la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}$

Exercice 24 :

1. Soit la série de terme général $u_n = a_n - a_{n+1}$ avec $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ montrer que $u_n \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{2n^2}$
2. En déduire la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 25 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs.

1. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
   (a) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Donner $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n$
   (b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} 2nu_{2n} = 0$
   (c) Conclure que $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$
2. Soit $\alpha > 0$ et on suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha u_n$ converge. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha+1}u_n = 0$

3.6.2 Etude de convergence des séries numériques et calcul des sommes

Exercice 26 :

On considère la série $\sum_{n\geqslant 4} \frac{1}{n^3 - 9n}$

1. Cette série est-elle convergente ?

2. Décomposer $\dfrac{1}{n^3-9n}$ en éléments simples, c'est à dire trouvez A, B, et C, tels que :

$$\frac{1}{n^3-9n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-3} + \frac{C}{n+3}$$

3. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4} \frac{1}{n^3-9n}$

Exercice 27 :

1. Etudier la convergence de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$
2. Vérifier que $\ln\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right) = \ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln k$
3. Calculez la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

Exercice 28 :

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique tendant vers 0 et si a, b et c sont trois réels vérifiant $a+b+c=0$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}$$

Montrer que la suite de terme général v_n converge et calculer sa somme.

Exercice 29 :

On considère la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^n e^{-n^2t^2}dt$. Etudier la convergence de cette série.

Exercice 30 :

Dans cet exercice, nous allons travailler **le « critère de condensation » de Cauchy**

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs.
   Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ converge
2. **Applications :**
   (a) Les séries de Riemann
   Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ convergent si et seulement si $\alpha > 1$
   (b) Les séries de Bertrand
   Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ convergent si et seulement si $p > 1$

Exercice 31 :

Règle de Raabe-Duhamel
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'à partir d'un certain rang nous avons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que $u_n \in O(v_n)$
2. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge

3. On suppose , cette fois ci, que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ avec $\alpha < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge

Exercice 32 :

Etudier la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + x^n}$

Exercice 33 :

Les 3 questions de cet exercice, même si elles sont indépendantes, sont toutes sur un même thème

1. Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$ converge et que sa somme est $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx$
2. Notons $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x)\ dx$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge et que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$
3. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+\alpha} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$

Exercice 34 :

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) \neq 0$. Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,dt$

Exercice 35 :

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs. On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$$v_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k u_k$$
Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ ont même nature, et qu'en cas de convergence,
$$\sum_{n\geqslant 1} u_n = \sum_{n\geqslant 1} v_n$$
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs telle que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{(n!\,(u_1 \times u_2 \times \cdots u_n))^{\frac{1}{n}}}{n+1}$. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge et que $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n \leqslant \sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$

Exercice 36 :

Soit z_n le terme général d'une série complexe absolument convergente. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z_n}{n}$ est convergente.

3.6.3 Séries alternées- théorème d'ABEL

Exercice 37 :

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right)$

Exercice 38 :

Montrer que la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$ est une série alternée ; exprimer u_n en fonction de u_0 ; en déduire $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *(Indication : faire le changement de variables $t = x - n\pi$)*

Exercice 39 :

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ tend vers 0 en décroissant
2. Montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 40 :

1. Quelle est la nature de la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$?
2. Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$$
3. En déduire que
$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k} \, dt - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \, dt$$
4. On appelle S_n la suite des sommes partielles, c'est à dire : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

   Montrer que $\left|S_n - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$
5. En déduire que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 41 :

1. La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ est-elle convergente ?
2. L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ est-elle convergente ?
3. La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ est-elle absolument convergente ?

Exercice 42 :

1. **Questions préliminaires :**
   (a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{3n}\,\mathrm{dt}$
   (b) Décomposer la fraction $\dfrac{1}{1+t^3}$ en éléments simples
   (c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{dt}$
2. La série $\displaystyle\sum_{n_i n\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ est-elle convergente ?
3. Montrer que nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{3k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{dt} + \int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{dt}$
4. En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n_i n\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

3.6.4 Séries à termes réels ou complexes

Exercice 43 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites à termes complexes telles que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |v_n|^2$ convergent.
Démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 2$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (u_n - v_n)^p$ converge.

Exercice 44 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes complexes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie réelle de u_n soit positive, c'est à dire $\mathrm{Re}\,(u_n) \geqslant 0$.
On suppose que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ convergent. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ converge.

Exercice 45 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 0$
Démontrer que, si les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ convergent alors, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(u_n)$ converge.

3.6.5 Etudes

Exercice 46 :

Nous avons vu, en cours, que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *était une série de Riemann convergente. L'objet de ce problème est de se poser des questions, à travers cette série, sur divers aspects de l'étude des séries numériques. Nous allons chercher la somme de* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *avec des outils très rudimentaires*

Partie 1 : Somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$

1. **Le lemme de Riemann-Lebesgue**
   Soient $a \in \mathbb{R}$, et $b \in \mathbb{R}$ tels que que $a < b$. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a;b]$. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin nt dt = 0$

2. Soit t un réel de l'intervalle $]0;\pi]$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos kt$
   (a) Calculer $c_n(t)$ pour $t \in]0;\pi]$
   (b) On pose $c_n(0) = n$. Démontrer qu'alors, c_n est continue sur $[0;\pi]$
3. On pose $W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$
   (a) Montrer que $W_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) c_n(t)\, dt$
   (b) Montrer que $W_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt$
   (c) Soit la fonction f définie par :
   $$\begin{cases} f : [0\,;\,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x = 0 \\ \left(x - \frac{x^2}{2\pi}\right) \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \end{cases} \end{cases}$$
   Démontrer que f est continue sur $[0\,;\,\pi]$
   (d) Utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue pour démontrer que
   $$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt = 0$$
4. En déduire la somme de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$

__Partie 2__ : Approximation de la limite

1. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 2$, nous avons $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
2. On considère la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$
   (a) Justifier de l'existence de cette somme, et donner $\lim_{n \to +\infty} R_n$
   (b) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $R_n \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{n}$
3. Ecrire un algorithme que permette d'approcher la limite aussi précisément que souhaité.

Exercice 47 :

L'objet de problème est de trouver, par des méthodes élémentaires, la somme de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *et* $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

Ce problème ne pose aucune difficulté ; la question a déjà été résolue dans les exercices avec une autre méthode

Dans cet exercice, m, n, p et q désignent des entiers naturels.

1. Prouver que les séries $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ sont convergentes.
   Sont-elles absolument convergentes ?

2. **Calcul de la somme des séries**
Dans la suite du problème, nous utilisons les sommes partielles, et nous notons, pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

On considère, pour tout $p \geqslant 0$, les intégrales $I_p = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2} dx$

(a) Calculez I_0 et I_1

(b) Calculez $I_p + I_{p+2}$ en fonction de p. En déduire I_2 et I_3

(c) Pour $q \geqslant 1$ on appelle $(U_q)_{q \in \mathbb{N}^\star}$ la suite dont le terme général est donné par : $U_q = u_q + 2\,(-1)^q\, I_{2q+1}$.
En calculant $U_{q+1} - U_q$, montrez que le suite $(U_q)_{q \in \mathbb{N}^\star}$ est constante.

(d) En déduire que $u_q + 2\,(-1)^q\, I_{2q+1} = \ln 2$

(e) On définit $V_q = v_q + (-1)^q\, I_{2q}$; en utilisant les méthodes décrites dans les 2 questions précédentes, montrer que $v_q + (-1)^q\, I_{2q} = \dfrac{\pi}{4}$

(f) Démontrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} I_p = 0$

(g) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$