3.7 Corrections d'exercices

Comme toujours, nous proposons ci-après, la correction de quelques exercices, en fait de ceux que nous avons trouvé les plus « percutants »

3.7.1 Exercices du cours

Exercice 1 :

Etudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

On utilise la somme partielle $S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

Comme $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\left(\frac{1+k}{k}\right)=\ln(1+k)-\ln k$ et donc :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(1+k)-\ln k\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+k)-\sum_{k=1}^{n}\ln k=\sum_{k=2}^{n+1}\ln k-\sum_{k=1}^{n}\ln k=n\ln(n+1)$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$ et la série $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est donc divergente.

Exercice 2 :

On considère la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Montrer que les sommes partielles $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ sont minorées par $v_n=\sqrt{n}$.

Pour tout $k=1,\cdots,n$, nous avons $\frac{1}{\sqrt{k}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$ et donc, en passant à la sommation, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

Comme $S_n\geqslant\sqrt{n}$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$ et donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge ;

Dans les deux exercices que nous venons de résoudre, nous voyons que ce n'est pas parce que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ que la série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge ; le critère $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ est un critère nécessaire pour la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$, mais pas suffisant.

Exercice 4 :

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 3}\frac{2n-1}{n(n^2-4)}$ est convergente et calculer sa somme

1. Nous allons toujours étudier les sommes partielles $S_n=\sum_{k=3}^{n}\frac{2k-1}{k(k^2-4)}$.

   Il nous faut commencer par décomposer en éléments simples l'expression $\frac{2k-1}{k(k^2-4)}$

   Tous calculs faits, nous avons :

$$\frac{2k-1}{k(k^2-4)}=\frac{\frac{1}{4}}{k}-\frac{\frac{5}{8}}{k+2}+\frac{\frac{3}{8}}{k-2}$$

2. De telle sorte que $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{\frac{1}{4}}{k} - \sum_{k=3}^{n} \frac{\frac{5}{8}}{k+2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\frac{3}{8}}{k-2} = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k+2} + \frac{3}{8}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2}$
   Il nous faut, maintenant, réarranger les indices ; ce qui nous donne :
$$S_n = \frac{1}{4}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n+2} \frac{1}{k} + \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k}$$
   En prenant les termes communs, qui sont les termes d'indices 5 à $n-2$ nous obtenons :
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\frac{1}{4}}{3} + \frac{\frac{1}{4}}{4} + \frac{1}{4}\sum_{k=5}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{\frac{1}{4}}{n-1} + \frac{\frac{1}{4}}{n} \\ &- \frac{5}{8}\sum_{k=5}^{n-2} \frac{1}{k} - \frac{\frac{5}{8}}{n-1} - \frac{\frac{5}{8}}{n} - \frac{\frac{5}{8}}{n+1} - \frac{\frac{5}{8}}{n+2} \\ &+ \frac{\frac{3}{8}}{1} + \frac{\frac{3}{8}}{2} + \frac{\frac{3}{8}}{3} + \frac{\frac{3}{8}}{4} + \frac{3}{8}\sum_{k=5}^{n-2} \frac{1}{k} \end{aligned}$$
   D'où on tire : $S_n = \dfrac{89}{96} - \dfrac{3}{8}\left(\dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{5}{8}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}\right)$
3. De l'expression ci-dessus, nous tirons : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{89}{96}$, c'est à dire que la série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$ converge, et que $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{89}{96}$

Exercice 5 :

Soient $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes sont aussi convergentes :

1. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \max(u_n, v_n)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n$. Comme les séries $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} v_n$ sont deux séries à termes strictement positifs convergentes, la série somme $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n + v_n$ est, elle aussi convergente.
   En vertu des théorèmes de majorations, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \max(u_n, v_n)$ est, elle aussi convergente.
2. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \sqrt{u_n v_n}$ En utilisant l'inégalité de Schwarz, nous avons, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $y \geqslant 0$ l'inégalité $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$. En l'appliquant à u_n et v_n, nous avons $\sqrt{u_n v_n} \leqslant \dfrac{u_n + v_n}{2}$
   Et la conclusion est la même que ci-dessus ; la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \sqrt{u_n v_n}$ est donc convergente.
3. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ De l'inégalité $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$ utilisée dans l'exercice précédent, nous tirons $\dfrac{1}{x+y} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{xy}}$ et donc, $\dfrac{xy}{x+y} \leqslant \dfrac{xy}{2\sqrt{xy}} = \dfrac{\sqrt{xy}}{2}$.
   En remplaçant x et y par u_n et v_n, nous obtenons : $\dfrac{u_n v_n}{u_n + v_n} \leqslant \dfrac{\sqrt{u_n v_n}}{2}$. Comme la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge, par les théorèmes de majorations, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ converge aussi.

4. $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{u_n}}{n}$

Nous savons que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est une série convergente ; donc, d'après la question ci-dessus, la série $\sum_{n\geqslant 1}\sqrt{\frac{1}{n^2}\times u_n}$ est elle aussi convergente, et donc, comme $\sqrt{\frac{1}{n^2}\times u_n}=\frac{1}{n}\sqrt{u_n}=\frac{\sqrt{u_n}}{n}$, nous en déduisons que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ est, elle aussi convergente.

5. *Soient $\alpha\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ une série à termes strictement positifs convergente. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ est convergente*

Soit donc $\alpha\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$; alors, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ est convergente, puisque $2\alpha>1$. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1}\sqrt{\frac{1}{n^{2\alpha}}\times u_n}$ est convergente.

Or, $\sqrt{\frac{1}{n^{2\alpha}}\times u_n}=\sqrt{\frac{u_n}{n^{2\alpha}}}=\frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$, et donc, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ est convergente.

Exercice 6 :

On considère la série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$, à termes positifs et convergente. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty}nu_n$ existe, alors $\lim_{n\to+\infty}nu_n=0$

On suppose le contraire, c'est à dire que $\lim_{n\to+\infty}nu_n=k$ où $k\neq 0$

- ⋆ Premièrement, comme $u_n>0$, alors $k>0$
- ⋆ Comme $\lim_{n\to+\infty}nu_n=k$, il existe un entier $N\in\mathbb{N}$ tel que si $n>N$, alors $\frac{-k}{2}\leqslant nu_n-k\leqslant\frac{k}{2}$, c'est à dire, qu'à partir d'un certain rang N, nous avons $\frac{k}{2}\leqslant nu_n$, c'est à dire qu'à partir du rang N, $u_n\geqslant\frac{k}{2n}$.
- ⋆ Le terme général u_n est alors minoré par le terme général d'une série divergente, et la série $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ serait alors divergente. Contradiction avec l'hypothèse.

La résolution est semblable si $\lim_{n\to+\infty}nu_n=+\infty$

Exercice 7 :

Nous ne corrigeons pas tous les items de cet exercice

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 0}\cos n$ Comme $\lim_{n\to+\infty}\cos n$ n'existe pas, la série $\sum_{n\geqslant 0}\cos n$ est divergente
2. $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{n^2}}{2^n}$ Nous avons $\left|\frac{(-1)^{n^2}}{2^n}\right|=\frac{1}{2^n}$. La série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{n^2}}{2^n}$ est donc absolument convergente, donc convergente.
3. $\sum_{n\geqslant 0}e^{-n^2}$ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, nous avons $n\leqslant n^2$ et donc $-n^2\leqslant -n$; de là nous tirons que

$0 < e^{-n^2} \leqslant e^{-n}$. La série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n}$ étant une série géométrique convergente, d'après les théorèmes de majoration, la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n^2}$ converge, elle aussi.

4. $\sum_{n\geqslant 0} \sin\frac{1}{2^n}$ Il y a deux façons de démontrer la convergence de cete série :
   - ⋆ La première utilise l'inégalité vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| \leqslant |x|$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{1}{2^n} < \frac{\pi}{2}$, nous avons $0 < \sin\frac{1}{2^n}$ et nous avons alors $0 < \sin\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$. La série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}$ étant une série géométrique convergente, par les théorèmes de majoration, nous déduisons que $\sum_{n\geqslant 0} \sin\frac{1}{2^n}$ est une série convergente
   - ⋆ Une autre méthode consiste à utiliser l'équivalence. En $+\infty$, nous avons : $\sin\frac{1}{2^n} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{2^n}$. De la convergence de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}$, on en déduit celle de $\sum_{n\geqslant 0}\sin\frac{1}{2^n}$

Exercice 8 :

Donner la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où le terme général u_n est défini par :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3^k} & \textit{si } n = 2k \\ \dfrac{1}{3^{k+1}} & \textit{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

Ce n'est pas exactement une question difficile :

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n = \sum_{k\geqslant 0} u_{2k} + u_{2k+1} = \sum_{k\geqslant 0} u_{2k} + \sum_{k\geqslant 0} u_{2k+1} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{3^k} + \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{3^{k+1}} = \frac{4}{3}\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{3^k}$$

Comme $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, nous avons $\sum_{n\geqslant 0} u_n = \frac{4}{3}\times\frac{3}{2} = 2$

Exercice 9 :

Utiliser les règles de D'Alembert ou de Cauchy pour décider si ces séries sont convergentes ou divergentes :

1. $\sum \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n$

   Il facile de voir qu'il faut, ici, utiliser le critère de Cauchy.

   En effet, $\sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n} = \frac{n+3}{2n+1}$; comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+3}{2n+1} = \frac{1}{2}$, nous déduisons que la série $\sum\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n$ est convergente.

2. $\sum \frac{n\,!}{n^n}$

   Nous allons, dans ce cas, utiliser le critère de D'Alembert.
   - ⋆ Tout d'abord, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\times n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$
   - ⋆ Ensuite, $\frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{(n+1)\times\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

- ⋆ Et là, nous tombons sur le piège classique !! Nous avons : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ Il est facile de prouver *(avec les équivalents ou les développements limités)* que

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Nous en déduisons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{e}$

Comme $\dfrac{1}{e}<1$, la série $\displaystyle\sum\frac{n\,!}{n^n}$ est une série convergente.

En prime : comme la série $\displaystyle\sum\frac{n\,!}{n^n}$ est une série convergente, nous pouvons déduire un résultat que nous avons déjà établi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n\,!}{n^n}=0$ et que, donc $n!\in o\left(n^n\right)$

3. $\displaystyle\sum\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{(-1)^n n}$

En fait cette série est l'addition de 2 séries. Posons $u_n=\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{(-1)^n n}$

- ⋆ Si n est pair, alors $u_n=\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^n$ et si n est impair, alors $u_n=\left(\dfrac{2n+1}{n+3}\right)^n$
- ⋆ De telle sorte que $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{(-1)^n n}=\sum_{k\geqslant0}\left(\frac{2k+3}{4k+1}\right)^{2k}+\sum_{k\geqslant0}\left(\frac{4k+3}{2k+4}\right)^{2k+1}$
- ⋆ Utilisons le critère de Cauchy pour étudier ces 2 séries :
  - → Tout d'abord $\sqrt[k]{\left(\dfrac{2k+3}{4k+1}\right)^{2k}}=\left(\dfrac{2k+3}{4k+1}\right)^2$.

    Or, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{2k+3}{4k+1}\right)^2=\frac{1}{4}$ et donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant0}\left(\frac{2k+3}{4k+1}\right)^{2k}$ converge
  - → Ensuite $\sqrt[k]{\left(\dfrac{4k+3}{2k+4}\right)^{2k+1}}=\left(\dfrac{4k+3}{2k+4}\right)^{2+\frac{1}{k}}=\left(\dfrac{4k+3}{2k+4}\right)^2\times\left(\dfrac{4k+3}{2k+4}\right)^{\frac{1}{k}}$

    Clairement, $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{4k+3}{2k+4}\right)^2=4$.

    De plus, $\left(\dfrac{4k+3}{2k+4}\right)^{\frac{1}{k}}=e^{\frac{1}{k}\ln\left(\frac{4k+3}{2k+4}\right)}$.

    Nous avons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{k}\ln\left(\frac{4k+3}{2k+4}\right)=0$, et donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{4k+3}{2k+4}\right)^{\frac{1}{k}}=1$
  - → Nous en déduisons donc que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{4k+3}{2k+4}\right)^{2k+1}}=4$ et que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant0}\left(\frac{4k+3}{2k+4}\right)^{2k+1}$ diverge

  En conclusion, $\displaystyle\sum\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{(-1)^n n}$ est la somme d'une série convergente et d'une série divergente et est donc divergente.

4. $\displaystyle\sum\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$

Nous allons utiliser le critère de Cauchy.

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}}=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n=\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{-n}=\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-n}=2^{-n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-n}$$

Nous avons $2^{-n}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{-n} = e^{-n\ln 2}\times e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}$

- $\star$ Dans un premier temps, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\ln 2}=0$
- $\star$ Ensuite, $-n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)=-\dfrac{1}{2}\times 2n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$.

  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)=1$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} -n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)=-\dfrac{1}{2}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$
- $\star$ En conclusion, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\ln 2}\times\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}=0$

La série $\sum\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$ converge donc

5. $\sum\dfrac{2^n}{n^2\sin^{2n}\alpha}$ *avec* $\alpha\neq k\pi$ *où* $k\in\mathbb{Z}$

   Et c'est toujours du Cauchy !!...Nous avons :

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2\sin^{2n}\alpha}}=\frac{2}{n^{\frac{2}{n}}\sin^2\alpha}$$

Il est facile de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{n}}=1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n^{\frac{2}{n}}\sin^2\alpha}=\dfrac{2}{\sin^2\alpha}$. Or, si $0<\sin^2\alpha\leqslant 1$, nous avons toujours $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\geqslant 1$ et donc $\dfrac{2}{\sin^2\alpha}\geqslant 2$.

La série $\sum\dfrac{2^n}{n^2\sin^{2n}\alpha}$ est donc divergente.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^p}{a^n}$

   C'est un exercice intéressant, qui tente de comparer les termes d'une progression géométrique avec les termes d'une série puissance.

   Un bon moyen consiste à utiliser le critère de d'Alembert :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(n+1)^p}{a^{n+1}}}{\frac{n^p}{a^n}}\\ &= \frac{(n+1)^p\,a^n}{n^p a^{n+1}}\\ &= \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$, de telle sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{a}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p=\dfrac{1}{a}$.

Ainsi, si $a<1$, $\dfrac{1}{a}>1$ et la série diverge, et que si, au contraire, $a>1$ alors $\dfrac{1}{a}<1$ et la série converge.

<u>Que se passe-t-il si $a=1$?</u>

La série devient : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^p$ qui est une série de Riemann. Cette série converge si et seulement $p<-1$, et diverge sinon

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$

La meilleure méthode semble être, ici, d'utiliser le critère de D'Alembert :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}2^n n!}\\ &= 2\frac{n^n}{(n+1)^n}\end{aligned}$$

Reste donc à calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}$.

Or, rien de plus simple ; il suffit de voir que $\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\dfrac{1}{\dfrac{(n+1)^n}{n^n}}$.

Comme $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}=\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, il suffit de se rappeler que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$, de telle sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2}{e}$, et $\dfrac{2}{e}<1$, ce qui montre que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$ converge.

8. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{\ln k}{k}$

   Une nouvelle fois, il faut utiliser le critère de D'Alembert, et ici, c'est très simple ! !

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\prod\limits_{k=2}^{n+1}\dfrac{\ln k}{k}}{\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{\ln k}{k}}\\ &= \frac{\ln(n+1)}{n}\end{aligned}$$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n}=0$; donc, la série converge

Exercice 10 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On construit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en écrivant : $v_n=\dfrac{u_n}{1+u_n}$

Démontrer que les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}v_n$ sont de même nature.

1. Nous avons $u_n\geqslant 0$ et $u_n<u_n+1$. Nous avons donc $0\leqslant\dfrac{u_n}{1+u_n}<1$, c'est à dire $0\leqslant v_n<1$
2. Par un calcul simple, on démontre que $u_n=\dfrac{v_n}{1-v_n}$ et nous voyons, très facilement que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$
3. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas pour limite 0 en $+\infty$ si et seulement si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas pour limite 0 en $+\infty$ et alors, les 2 séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}v_n$ sont divergentes.
4. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$, alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes en $+\infty$: $u_n\underset{+\infty}{\approx}v_n$

   En effet, $\dfrac{v_n}{u_n}=\dfrac{1}{1+u_n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+u_n}=1$. Les deux séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}v_n$ sont alors de même nature.

Dans tous les cas, les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}v_n$ sont de même nature.

Exercice 11 :

On se donne P et Q, 2 polynômes non nuls à une indéterminée et à coefficients réels. k est le premier entier supérieur à la plus grande racine réelle de Q. Etudier la série $\sum_{n\geqslant k}\frac{P(n)}{Q(n)}$

Si k est l'entier directement supérieur à la plus grande racine réelle de Q, la fraction $\frac{P(n)}{Q(n)}$ ne pose pas de problème d'existence.
Posons $P(X)=a_pX^p+a_{p-1}X^{p-1}+\cdots+a_1X+a_0$ avec $a_p\neq 0$ et $Q(X)=b_qX^q+b_{q-1}X^{q-1}+\cdots+b_1X+b_0$ avec $b_q\neq 0$.
Classiquement, en $+\infty$, nous avons $\frac{P(n)}{Q(n)}\underset{+\infty}{\approx}\frac{a_pn^p}{b_qn^q}$. Et donc :

- ⋆ Si $p\geqslant q$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_pn^p}{b_qn^q}\neq 0$ et la série $\sum_{n\geqslant k}\frac{P(n)}{Q(n)}$ est divergente
- ⋆ Si $q=p+1$, alors $\frac{a_pn^p}{b_qn^q}=\frac{a_p}{b_q}\times\frac{1}{n}$ et la série $\frac{a_p}{b_q}\sum_{n\geqslant k}\frac{1}{n}$ est la série harmonique divergente et donc la série $\sum_{n\geqslant k}\frac{P(n)}{Q(n)}$ est divergente
- ⋆ Si $q\geqslant p+2$, alors $\frac{a_pn^p}{b_qn^q}=\frac{a_p}{b_q}\times\frac{1}{n^{q-p}}$ et comme $q-p\geqslant 2$, la série $\frac{a_p}{b_q}\sum_{n\geqslant k}\frac{1}{n^{q-p}}$ est une série de Riemann convergente et donc la série $\sum_{n\geqslant k}\frac{P(n)}{Q(n)}$ est convergente

Exercice 12 :

On considère la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

1. *Montrer au moyen d'un théorème de comparaison que cette série est convergente*

   Nous avons $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\underset{+\infty}{\approx}\frac{1}{n^3}$. Les séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ sont donc de même nature ; or, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est donc une série convergente.
2. *Retrouver le résultat en calculant la somme.*

   Nous allons tout d'abord étudier la somme partielle $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

   Décomposons $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ en éléments simples. Nous avons facilement, par calcul :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{\frac{1}{2}}{k+2}$$

De telle sorte que

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}}{k+2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{2}}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $S_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\frac{1}{2}}{(n+1)(n+2)}$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{2}}{(n+1)(n+2)} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{4}$.
Et donc, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{4}$

Exercice 13 :

Etudier la série de terme général $\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an}$ où a est un réel positif.

Pas aussi facile que cela ! ! L'une des idées majeures pour résoudre cet exercice, est l'utilisation des équivalents. Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an} &= \frac{n^4+2n+1-n^4-an}{\sqrt{n^4+2n+1}+\sqrt{n^4+an}} \\
&= \frac{(2-a)\,n+1}{n^2\left(\sqrt{1+2\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{a}{n^3}}\right)}
\end{aligned}$$

1. Ce qui montre que, si $a=2$, alors, en $+\infty$,$\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{2n^2}$, ce qui montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an}\right)$ est de même nature que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{2n^2}$ qui est une série de Riemann convergente.
   Donc, si $a=2$, alors la série $\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an}$ converge
2. Et, si $a\neq 2$, alors $\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{2-a}{2n}$; comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge, il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+an}\right)$

Exercice 14 :

On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ où $u_n = \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. Discuter suivant les valeurs de α de la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$

Remarque : avant de commencer, il est clair que les cas où $\alpha \leqslant 0$ sont inintéressants, puis que si $\alpha\leqslant 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha} = +\infty$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}$ diverge.

1. Nous allons commencer par étudier $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$ avec $\alpha > 0$
   (a) Tout d'abord, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^{*+}$, mais comme nous allons utiliser des comparaisons avec une série numérique, nous allons étudier f sur l'intervalle non borné $[+1; +\infty[$
   (b) Comme $\alpha > 0$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$
   (c) Calculons la dérivée de f :
   $$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^\alpha - \alpha x^{\alpha-1} \ln x}{x^{2\alpha}} = \frac{x^{\alpha-1}(1-\alpha\ln x)}{x^{2\alpha}}$$
   Le signe de f' ne dépend donc que de celui de $1 - \alpha \ln x$. f' s'annule en $x_0 = e^{\frac{1}{\alpha}}$ et donc, en utilisant le fait que $\ln x$ soit strictement croissante sur $[+1; +\infty[$:
   ⋆ Si $x \in \left[+1; e^{\frac{1}{\alpha}}\right]$ alors $f'(x) \geqslant 0$ et f y est croissante.
   ⋆ Si $x \geqslant e^{\frac{1}{\alpha}}$, alors $f'(x) \leqslant 0$ et f y est décroissante
   f est donc décroissante à partir de x_0
   (d) Nous en déduisons, d'après 3.4.4 que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$ ont même nature
2. Etude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$
   Soit $X > 1$. Pour connaître le sens de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$, nous allons étudier $\displaystyle\int_1^{X} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$
   (a) Si $\alpha = 1$, alors nous avons $\displaystyle\int_1^{X} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx = \int_1^{X} \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^X = \frac{(\ln X)^2}{2}$
   Nous avons $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{(\ln X)^2}{2} = +\infty$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$ est divergente
   (b) Si $\alpha \neq 1$, nous allons calculer $\displaystyle\int_1^{X} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$ par parties.
   $$\begin{cases} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = x^{-\alpha} & v = \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \dfrac{1}{1-\alpha} \times \dfrac{1}{x^{\alpha-1}} \end{cases}$$
   D'où :
   $$\begin{aligned} \int_1^X \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx = & \left[\frac{1}{1-\alpha} \times \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}}\right]_1^X - \frac{1}{1-\alpha}\int_1^X \frac{1}{x^\alpha}\,dx \\ = & \frac{1}{1-\alpha} \times \frac{\ln X}{X^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^X \\ = & \frac{1}{1-\alpha} \times \frac{\ln X}{X^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)^2}\left(\frac{1}{X^{\alpha-1}} - 1\right) \end{aligned}$$
   (c) Ainsi :
   → Si $\alpha > 1$, alors $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X^{\alpha-1}} = 0$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X^{\alpha-1}} = 0$ et donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \displaystyle\int_1^X \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$
   Ce qui veut dire que si $\alpha > 1$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$ existe, et nous avons, même : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$

→ Supposons $\alpha < 1$. Alors :

$$\int_1^X \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} \times \frac{1}{X^{\alpha-1}}\left(\ln X - \frac{1}{1-\alpha}\right) + \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

⋆ Nous avons $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\ln X - \frac{1}{1-\alpha}\right) = +\infty$

⋆ Comme $\alpha < 1$, nous avons $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha}\times\frac{1}{X^{\alpha-1}}\right) = +\infty$

⋆ Donc, $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\times\frac{1}{X^{\alpha-1}}\left(\ln X - \frac{1}{1-\alpha}\right)+\frac{1}{(1-\alpha)^2} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx = +\infty$

Ce qui veut dire que si $\alpha < 1$, alors l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$ diverge

→ Ainsi, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

3. Et donc, d'après 3.4.4, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Exercice 15 :

Etudier les séries suivantes. Sont-elles alternées ? Convergent-elles absolument ?

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \tan\left(\frac{1}{n}\right)$

(a) Est-ce une série alternée ?

Il faut remarquer que si $n \geqslant 1$, alors, $0 < \frac{1}{n} \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$, et donc $\tan\left(\frac{1}{n}\right) > 0$; nous avons donc bien affaire à une série alternée.

(b) Est-ce une série alternée convergente ?

La fonction $\tan x$ est croissante sur l'intervalle $\left]0\ \frac{\pi}{2}\right[$; ainsi, comme $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, nous avons $\tan\frac{1}{n+1} < \tan\frac{1}{n}$; ce qui montre que la suite $\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus, $\lim\limits_{n\to\infty}\tan\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. D'après le critère de convergence des séries alternées, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\tan\left(\frac{1}{n}\right)$ converge simplement.

(c) Cette série converge-t-elle absolument ?

Une série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite absolument convergente, si la série des valeurs absolues $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$ converge.

Ici, $\left|(-1)^n\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \tan\left(\frac{1}{n}\right)$, et, en $+\infty$, $\tan\left(\frac{1}{n}\right) \simeq \frac{1}{n}$; or, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ étant la série harmonique, diverge ; nous en concluons donc que $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left|(-1)^n\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ diverge.

La série n'est donc pas absolument convergente

2. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos \pi n}{\ln n}$

(a) Est-ce une série alternée ?
Un piège ? ? Où ? ? Il faut juste remarquer que $\cos \pi n = (-1)^n$....Petit piège ! !
Puis, il va sans dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$ et que la suite $\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)_{n\geqslant 2}$ est une suite décroissante.
La série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos \pi n}{\ln n}$ est une série alternée convergente

(b) La série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos \pi n}{\ln n}$ converge-t-elle absolument ?
Il est assez évident que $\left|\dfrac{\cos \pi n}{\ln n}\right| = \dfrac{1}{\ln n}$
D'autre part, pour tout $n \geqslant 2$, nous avons $n > \ln n$ et donc $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{\ln n}$. Le terme général $\dfrac{1}{\ln n}$ est minoré par le terme général d'une série divergente et donc la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$ est divergente.
Nous en déduisons que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos \pi n}{\ln n}$ n'est pas absolument convergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n} \sin \frac{1}{n}$

(a) Est-ce une série alternée ?
La première idée consiste à regarder le signe de $\sqrt[n]{n} \sin \dfrac{1}{n}$. Il faut qu'il soit constant et positif.
→ Nous avons $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$, et donc $\sqrt[n]{n} > 0$
→ Et, si $n \geqslant 1$, alors, $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1 < \dfrac{\pi}{2}$, et donc $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) > 0$
→ En synthèse, nous avons $\sqrt[n]{n} \sin \dfrac{1}{n} > 0$
Nous avons donc bien affaire à une série alternée.

(b) Est-ce une série alternée convergente ?
Il faut vérifier que le terme général vérifie le critère des séries alternées.
→ D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$, et d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin \dfrac{1}{n} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} \sin \dfrac{1}{n} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \sin \dfrac{1}{n} = 0$
→ Il faut maintenant montrer que la suite $\left(\sqrt[n]{n} \sin \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
Comme la fonction $\sin x$ est croissante sur l'intervalle $\left]0\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, comme $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, nous avons $\sin \dfrac{1}{n+1} < \sin \dfrac{1}{n}$; ce qui montre que la suite $\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (et positive !).
→ Il faut maintenant montrer que la suite $\left(e^{\frac{\ln n}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle aussi décroissante.
On considère la fonction associée $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$ définie pour $x > 0$ et calculons sa dérivée f'.
Nous avons : $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}$ qui est négative si $x \geqslant e$, ce qui montre que la suite $\left(e^{\frac{\ln n}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si $n \geqslant 3$.
Ainsi, la suite $\left(\sqrt[n]{n} \sin \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît dès que $n \geqslant 3$ comme produit de suites positives et décroissantes

On vient de montrer que, d'après le critère des séries alternées, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n} \sin \frac{1}{n}$ converge simplement.

(c) Cette série converge-t-elle absolument ?

Il faut donc regarder le terme $\sqrt[n]{n}\sin\dfrac{1}{n}$ qui est équivalent, en $+\infty$ à $\dfrac{1}{n}$, terme général d'une série de Riemann divergente ; la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ \sqrt[n]{n}\sin\frac{1}{n}$ ne converge donc pas absolument.

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$

(a) C'est triste à dire, mais **cette série ne converge pas absolument**.

En effet $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{\ln n}{n}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n}$.

Or, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n}$ est une série du type $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$ où $\alpha = 1$.

Nous avons prouvé que les séries du type $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$ divergeaient si $\alpha \leqslant 1$.

Donc la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n}$ diverge et la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ ne converge pas absolument

(b) Converge-t-elle simplement ?

$\to$ Tout d'abord, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$

$\to$ On considère la fonction associée $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ définie pour $x > 0$ et calculons sa dérivée f'.

Nous avons : $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ qui est négative si $x \geqslant e$, ce qui montre que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\geqslant 2}$ est décroissante si $n \geqslant 3$.

D'après le critère des séries alternées, la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ converge donc simplement.

5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

Voilà une question qui n'est pas très évidente ! !

Est-ce une série alternée ?

Une série alternée est une série dont le terme général n'est pas de signe constant, et qu'il prend alternativement une valeur positive, puis une valeur négative.

- ⋆ Pour tout $n \geqslant 2$, nous avons $\dfrac{-1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et donc $1+\dfrac{-1}{n} \leqslant 1+\dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant 1+\dfrac{1}{n}$

  Lorsque n est impair, alors $1+\dfrac{(-1)^n}{n} = 1-\dfrac{1}{n} < 1$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) < 0$, alors que si n est pair $1+\dfrac{(-1)^n}{n} = 1+\dfrac{1}{n} > 1$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) > 0$.

  La série est donc bien alternée.
- ⋆ D'autre part, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$
- ⋆ Appelons $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ et étudions la décroissance de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$

  $\to$ Tout d'abord, étudions $u_{2n+1}-u_{2n}$:

$$\begin{aligned} u_{2n+1}-u_{2n} &= \ln\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)-\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \\ &= 2\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

Comme $0 < \dfrac{2n}{2n+1} < 1$, alors $\ln\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right) < 0$ et donc $u_{2n+1} - u_{2n} < 0 \Longleftrightarrow u_{2n+1} < u_{2n}$

→ Etudions maintenant $u_{2n} - u_{2n-1}$

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_{2n-1} &= \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2n-1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) - \ln\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right) \\ &= \ln(2n+1) - \ln 2n - \ln(2n-2) + \ln(2n-1) \\ &= (\ln(2n+1) - \ln 2n) + (\ln(2n-1) - \ln(2n-2)) \end{aligned}$$

De la croissance de la fonction ln, nous tirons $(\ln(2n+1) - \ln 2n) > 0$ et $(\ln(2n-1) - \ln(2n-2)) > 0$ et donc, par addition de 2 quantités positives, nous avons

$$u_{2n} - u_{2n-1} > 0 \Longleftrightarrow u_{2n} > u_{2n-1}$$

→ Nous ne pouvons donc rien conclure quant à la croissance ou à la décroissance de $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et on ne peut pas appliquer à cette série le critère des séries alternées.

6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$

Voilà une question qui ne pose aucune difficulté

(a) La série est bien alternée, et, clairement la suite $\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

La série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ converge donc simplement

(b) Cette série converge-t-elle absolument ?

Il faut donc démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$ converge

- ⋆ Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ définie sur l'intervalle $[+2; +\infty[$.
- ⋆ Nous avons, clairement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln x} = 0$
- ⋆ La dérivée de f est donnée par $f'(x) = \dfrac{-(\ln x + 1)}{(x\ln x)^2}$. f' est négative sur $[+2; +\infty[$, et la fonction f y est décroissante et positive

D'après 3.4.4, la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ ont même nature

(c) Etudions donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

Soit $X > 2$.

Alors $\displaystyle\int_2^X \frac{1}{x\ln x}\,dx = [\ln|\ln x|]_2^X = \ln(\ln X) - \ln(\ln 2)$

Nous avons $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln(\ln X) - \ln(\ln 2) = +\infty$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ diverge, et donc la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$ diverge elle aussi

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ est-elle simplement convergente sans l'être absolument.

Exercice 16 :

Nous savons que $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n\,!}=e$

1. *Montrer que la série* $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{n\,!}$ *est convergente et calculer sa somme.*

   (a) On remarque que la série commence à $n=1$

   (b) Pour démontrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}$ est convergente, on utilise le critère de D'Alembert.

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\times\frac{n\,!}{n^2}=\frac{n+1}{n^2}$$

   Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2}=0$, le critère de D'Alembert montre que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}$ est convergente.

   (c) La recherche de la somme de la série n'est pas immédiate ; il faut d'abord remarquer que $n^2=n^2-n+n=n\,(n-1)+n$, et que donc :

   $$\frac{n^2}{n!}=\frac{n\,(n-1)+n}{n!}=\frac{n\,(n-1)}{n!}+\frac{n}{n!}$$

   (d) Ensuite, nous écrivons différemment la somme de cette série :

   $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n\,(n-1)}{n!}+\frac{n}{n!}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\,(n-1)}{n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n\,(n-1)}{n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n!}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\\ &= 2e\end{aligned}$$

   (e) Donc, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}=2e$

2. *Même question pour la série* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^3}{n\,!}$

   (a) La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^3}{n\,!}$ se fait de manière identique en utilisant le critère de D'Alembert :

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}\times\frac{n\,!}{n^3}=\frac{(n+1)^2}{n^3}$$

   Et nous terminons la question en remarquant que $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{n^3}=0$.

   La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^3}{n\,!}$ converge donc.

(b) Nous avons, une nouvelle fois : $n^3 = n^3 - n^2 + n^2 = n^2(n-1) + n^2$.
Ecrivons différemment la série :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^3}{n\,!} &= \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2(n-1)+n^2}{n\,!} \\ &= \sum_{n\geqslant 2} \frac{n^2(n-1)}{n\,!} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{n\,!} \\ &= \sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{(n-2)\,!} + 2e\end{aligned}$$

(c) Maintenant, c'est $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{(n-2)\,!}$ que nous allons étudier.
Il est clair que $n = (n-2) + 2$ et que, donc :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{(n-2)\,!} &= \sum_{n\geqslant 2} \frac{(n-2)+2}{(n-2)\,!} = \sum_{n\geqslant 2} \frac{(n-2)}{(n-2)\,!} + \sum_{n\geqslant 2} \frac{2}{(n-2)\,!} \\ &= \sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{(n-3)\,!} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{n\,!} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n\,!} + 2e = 3e\end{aligned}$$

(d) Et donc, nous avons $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^3}{n\,!} = 5e$

3. *Soit $p \in \mathbb{N}$.*

(a) *Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^p}{n\,!}$ converge*

C'est toujours le même travail : le règle de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^p} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^p \times \frac{1}{n+1}$$

Nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^p \times \frac{1}{n+1} = 0$ et donc la série converge.

Nous appelons $S_p = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^p}{n\,!}$; nous pouvons déjà remarquer que $S_0 = e$, $S_2 = 2e$ et $S_3 = 5e$

(b) *Montrer que la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^p}{n\,!}$ est un multiple entier de e*

Nous allons faire cette démonstration par récurrence sur p.
→ **C'est vrai pour** $p = 0$ puisque $S_0 = e$
→ **Supposons que c'est vrai à l'ordre** p, c'est à dire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^p}{n\,!}$ est un multiple entier de e
→ **Démontrons le à l'ordre** $p+1$
Nous appelons $S^n_{p+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^{p+1}}{k!}$ la somme partielle de la série S_{p+1}. Nous avons alors :

$$S^n_{p+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{p+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p \times k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{(k-1)!} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(m+1)^p}{m!}$$

En utilisant la formule du binôme, nous avons : $(m+1)^p = \displaystyle\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} m^j$

D'où :

$$S_{p+1}^n = \sum_{m=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\frac{m^j}{m!}\right) = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{m^j}{m!} = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}S_j^{n-1}$$

En utilisant les théorèmes sur les limites, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} S_{p+1}^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}S_j^{n-1}\right) = \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\lim_{n\to+\infty} S_j^{n-1}$$

C'est à dire $S_{p+1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}S_j$.

Comme $0 \leqslant j \leqslant p$, S_j est un multiple entier de e et comme $\binom{p}{j} \in \mathbb{N}$, nous avons $\displaystyle\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}S_j$ multiple entier de e

Ce que nous voulions.

Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^p}{n\,!}$ est un multiple entier de e

Nous avons même démontré la relation $S_{p+1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}S_j$. Par exemple :

- $S_1 = S_0 = e$
- $S_2 = \displaystyle\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}S_j = \binom{1}{0}S_0 + \binom{1}{1}S_1 = e + e = 2e$
- $S_3 = \displaystyle\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}S_j = \binom{2}{0}S_0 + \binom{2}{1}S_1 + \binom{2}{2}S_2 = e + 2e + 2e = 5e$

Ce que nous avions déjà!!

Exercice 17 :

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_0 \in \mathbb{C} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})\,(u_{n+1} = u_n + v_n)$$

est convergente si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est convergente.

Nous avons $u_{n+1} = u_n + v_n \Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n = v_n$. En faisant une sommation, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k \Longleftrightarrow u_{n+1} = u_0 + \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Ainsi, il est clair que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}$ existe si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} v_k$ existe, c'est à dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est convergente.

Ce que nous voulions

3.7.2 Pour aller plus loin *(miscelleanous)*

Exercice 18 :

Etudier la convergence des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\sin\frac{1}{n}$

   La question ne pose pas de difficulté ; en $+\infty$, nous avons $\sin\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{n}$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$. Le terme général ne tendant pas vers 0, la série est divergente.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$

   En $+\infty$, nous avons $\dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$. Nous avons montré que les séries du type $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^\alpha}$ convergent si et seulement si $\alpha > 1$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente. Donc, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$ est, elle aussi, convergente

3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (n)^{\frac{1}{n^2}} - 1$

   C'est une question plus délicate !!

   Tout d'abord, remarquons que $(n)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{\ln n}{n^2}}$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$.

   Un développement limité de e^x au voisinage de 0 et à l'ordre 1, nous donne $e^x = 1 + x + x\varepsilon(x)$ où $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

   En utilisant la composition des développements limités, nous avons : $e^{\frac{\ln n}{n^2}} = 1 + \dfrac{\ln n}{n^2} + \dfrac{\ln n}{n^2}\varepsilon\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$, et donc, au voisinage de $+\infty$, nous avons :

   $$(n)^{\frac{1}{n^2}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2}} - 1 = 1 + \frac{\ln n}{n^2} + \frac{\ln n}{n^2}\varepsilon\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) - 1 = \frac{\ln n}{n^2} + \frac{\ln n}{n^2}\varepsilon\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

   Nous avons donc $(n)^{\frac{1}{n^2}} - 1 \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{\ln n}{n^2}$.

   Les séries du type $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^\alpha}$ convergent si et seulement si $\alpha > 1$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^2}$ est convergente. Donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (n)^{\frac{1}{n^2}} - 1$ est, elle aussi, convergente

4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$

   Un développement limité de $\cos x$ au voisinage de 0 est donné par : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ où $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

   Donc, au voisinage de $+\infty$, nous avons $\cos\dfrac{1}{n} = 1 - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{n^2}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et :

   $$1 - \cos\frac{1}{n} = 1 - 1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

   Donc, au voisinage de $+\infty$, nous avons $\left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{2n^2}$.

   Les séries du type $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2}$ sont des séries de Riemann convergentes.

   Donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ est, elle aussi, convergente

5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}$

Et si nous utilisions le critère de Cauchy ? ?

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}}=\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{n+1}=2$, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}}=4$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n}$ est donc divergente.

6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+1}\right)$

Il nous est tout à fait possible d'écrire $\ln\left(\dfrac{n^2+2n+1}{n^2+1}\right)=\ln\left(1+\dfrac{2n}{n^2+1}\right)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n^2+1}=0$.

En 0, nous avons $\ln(1+x)\underset{0}{\approx}x$, et donc, en $+\infty$, nous avons $\ln\left(1+\dfrac{2n}{n^2+1}\right)\underset{+\infty}{\approx}\dfrac{2n}{n^2+1}$.

Comme nous avons aussi, en $+\infty$, $\dfrac{2n}{n^2+1}\underset{+\infty}{\approx}\dfrac{2}{n}$, nous avons aussi $\ln\left(1+\dfrac{2n}{n^2+1}\right)\underset{+\infty}{\approx}\dfrac{2}{n}$.

Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{2}{n}$ est une série divergente, il en est de même de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+1}\right)$

7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1+2+3+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$

Il y a quelque chose qui tient du jeu dans cette question *(L'auteur est un facétieux !)*. En effet, dans les résultats classiques que nous devons tous savoir, nous avons :

$\rightarrow$ $\displaystyle 1+2+3+4+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$\rightarrow$ $\displaystyle 1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Et donc $\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=\dfrac{n(n+1)}{2}\times\dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)}=\dfrac{3}{2n+1}$.

Donc, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1+2+3+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{3}{2n+1}$ qui est, bien entendu, une série divergente.

8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos nx^2}{2^n}$

Il est facile de démontrer que cette série est absolument convergente, donc convergente. En effet :

$$\left|\frac{\cos nx^2}{2^n}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente et donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left|\frac{\cos nx^2}{2^n}\right|$ converge (par les théorèmes de majoration), c'est à dire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos nx^2}{2^n}$ est absolument convergente, donc convergente.

9. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}$ avec $a>-1$

Pour étudier sa divergence ou sa convergence, nous allons utiliser l'outil du critère de D'Alembert

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^{n+1}} \times \frac{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}{a^n}\right| = \left|\frac{a}{1+a}\right|$$

L'étude de la fonction $f(a) = \dfrac{a}{1+a}$ sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ montre que $-1 < \dfrac{a}{1+a} < +1$ si et seulement si $a > -\dfrac{1}{2}$. Ainsi :

- ⋆ La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}$ converge si et seulement si $a > -\dfrac{1}{2}$
- ⋆ La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n}$ diverge si et seulement si $-1 < a < -\dfrac{1}{2}$

Remarques

Le « **si et seulement si** » de ci-dessus est, un tant soit peu, rapide !! Alors, faisons des précisions

→ Si $a = -\dfrac{1}{2}$, alors $1+a = \dfrac{1}{2}$, de telle sorte que nous avons, pour le dénominateur :

$$(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n = \prod_{k=1}^{n}(1+a)^k = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum\limits_{k=1}^{n} k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Et donc $\displaystyle\frac{1}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n} = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a)^k} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

→ D'autre part, $a^n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$, et donc :

$$\frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n} = \frac{(-1)^n\, 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^n} = (-1)^n\, 2^{\frac{n(n+1)}{2}-n} = (-1)^n\, 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

La série devient donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{(1+a)(1+a)^2\cdots(1+a)^n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n\, 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ qui est, bien entendu divergente

→ D'autre part, l'étude de la fonction $f(a) = \dfrac{a}{1+a}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, montre que si $a < -1$, alors $\dfrac{a}{1+a} > +1$.

Le « **si et seulement si** » est donc justifié.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$

En voilà une qui est des plus reposantes !!

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

Nous avons :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

Et donc comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ est divergente car son terme général ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$

11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$

Utilisons le fait qu'au voisinage de 0, nous avons $\sin x \underset{0}{\approx} x$ et que donc, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2^n}=0$,

$$\sin\frac{\pi}{2^n}\underset{+\infty}{\approx}\frac{\pi}{2^n}$$

Ainsi, $n^2\sin\dfrac{\pi}{2^n}\underset{+\infty}{\approx} n^2\dfrac{\pi}{2^n}$

Nous savons que les séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^p}{a^n}$ convergent si $a>1$, et donc, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2\frac{\pi}{2^n}$ est du type $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^p}{a^n}$ avec $p=2$ et $a=2$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2\frac{\pi}{2^n}$ converge ; donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$ converge, elle aussi.

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

La meilleure méthode semble être, ici, d'utiliser le critère de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}2^n n!}=2\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

Reste donc à calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$

Rien de plus simple ; il suffit de voir que $\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\dfrac{1}{\dfrac{(n+1)^n}{n^n}}$

Comme $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}=\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, il suffit de se rappeler que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, de telle sorte que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2}{e}$

Or, $\dfrac{2}{e}<1$, ce qui montre que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ converge.

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-e^{\frac{1}{n}}\right)$

On peut, au départ, remarquer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}1-e^{\frac{1}{n}}=0$, mais que ceci est insuffisant pour décider si la série est convergente.

On recherche donc le développement limité de e^x au voisinage de 0.

Or, $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)$; comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, nous pouvons écrire :

$$1-e^{\frac{1}{n}}=1-\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}\right)+\frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ce qui montre que $1-e^{\frac{1}{n}}\underset{+\infty}{\approx}-\dfrac{1}{n}$; ce qui termine de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}1-e^{\frac{1}{n}}$ est divergente.

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$

Le terme $\left(\dfrac{1}{n}+\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)$ peut s'écrire différemment

En effet, $\ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.

Au voisinage de 0, nous avons : $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$, et donc, lorsque n est voisin de $+\infty$,

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc, en $+\infty$, $\left(\dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right) = -\dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{3n^3} + \dfrac{1}{n^3}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Ce qui montre que, en $+\infty$, $\left(\dfrac{1}{n} + \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{\approx} -\dfrac{1}{2n^2}$, et donc que la série converge.

Exercice 19 :

1. *Montrer que la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(1-\sqrt{x}\right)^n dx$ est convergente.*

   Ce n'est pas une question difficile, parce qu'il est très facile de calculer u_n.

   Effectuons le changement de variables $u = 1-\sqrt{x}$; alors, $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Longleftrightarrow dx = -2(1-u)\,du$.

   Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(1-\sqrt{x}\right)^n dx &= -2\int_1^0 (1-u)\,u^n du \\ &= 2\int_0^1 u^n - u^{n+1} du \\ &= 2\left\{\left[\frac{u^{n+1}}{n+1} - \frac{u^{n+2}}{n+2}\right]_0^1\right\} \\ &= 2\left\{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right\}\end{aligned}$$

   Nous avons donc $u_n = 2\left\{\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right\}$ et nous allons nous intéresser aux sommes partielles $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

$$\begin{aligned}S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \quad & S_n = \sum_{k=0}^{n} 2\left\{\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right\} \\ = \quad & 2\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right\} \\ = \quad & 2\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2}\right\} \\ = \quad & 2\left\{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{k}\right\} \\ = \quad & 2\left\{\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + 1 - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+2}\right\} \\ = \quad & 2 - \frac{2}{n+2}\end{aligned}$$

   D'où, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 2$, et la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = 2$

2. *Etudier la convergence, de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x}\,dx$ pour $n \geqslant 2$*

Si $x \geqslant 0$, nous avons $0 \leqslant \sin x \leqslant x$, c'est à dire $0 \leqslant \sqrt{\sin x} \leqslant \sqrt{x}$. Donc :

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x}\, dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{n}} = \frac{2 \times \pi^{\frac{3}{2}}}{3} \times \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente ; donc la série $\sum_{n\geqslant 2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin x}\, dx\right)$ est convergente

Exercice 20 :

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la série de terme général $u_n = \frac{\ln n!}{n^a}$ converge-t-elle ?

$\Rightarrow$ Premièrement, il faut remarquer que $\ln n! = \sum_{k=2}^{n} \ln k$, et il n'est pas hors de propos de nous intéresser à la fonction $\ln : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, laquelle est croissante.

Donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $k \geqslant 2$, nous avons $\int_{k-1}^{k} \ln t dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \ln k dt = \ln k$ et $\int_{k}^{k+1} \ln t dt \geqslant \int_{k}^{k+1} \ln k dt = \ln k$, de telle sorte que nous ayions :

$$\int_{k-1}^{k} \ln t dt \leqslant \ln k \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln k dt$$

$\Rightarrow$ En faisant, maintenant, la somme de $k = 2$ jusqu'à n, nous avons :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln t dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln k \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln k dt$$

Et donc :

$$\int_{1}^{n} \ln t dt \leqslant \ln n! \leqslant \int_{2}^{n+1} \ln k dt$$

Nous avons $\int_1^n \ln t dt = [t \ln t - t]_1^n = n \ln n - n + 1$ et $\int_2^{n+1} \ln k dt = [t \ln t - t]_2^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2$ et donc :

$$n \ln n - n + 1 \leqslant \ln n! \leqslant (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n \ln n} \leqslant \frac{\ln n!}{n \ln n} \leqslant \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} - \frac{n+1}{n \ln n} + \frac{2 - 2\ln 2}{n \ln n}$$

Clairement, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n \ln n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n} - \frac{n+1}{n \ln n} + \frac{2 - 2\ln 2}{n \ln n}\right) = 1$$

De telle sorte que nous pouvons conclure que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n!}{n \ln n} = 1$

$\Rightarrow$ Ce qui veut dire qu'au voisinage de $+\infty$, nous avons $\ln n! \underset{+\infty}{\approx} n \ln n$ et donc, qu'au voisinage de $+\infty$, nous avons $u_n \underset{+\infty}{\approx} \frac{n \ln n}{n^a} = \frac{\ln n}{n^{a-1}}$

La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n^{a-1}}$ ne converge que si $a - 1 > 1$, c'est à dire $a > 2$

Exercice 21 :

Voici un exercice qui pose peu de difficultés

1. *Etudier la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)|}{n!}a^n$ *où x est un réel donné quelconque, et $0 < a < 1$.*

   Une fois de plus, c'est le critère de D'Alembert qui nous sera utile :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{|x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)(x-(n+1)+1)|\,a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)|\,a^n} \\ &= \frac{|x-n| \times a}{n+1} \\ &= a\frac{n\left|1-\frac{x}{n}\right|}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= a\frac{\left|1-\frac{x}{n}\right|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\end{aligned}$$

   Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|1-\frac{x}{n}\right|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1$, c'est à dire que $\lim_{n\to+\infty} a\frac{\left|1-\frac{x}{n}\right|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = a$
   Comme $0 < a < 1$, la série converge.

2. *En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{|x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)|}{n!}a^n$*

   Comme la série converge, son terme général tend vers 0, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)|}{n!}a^n = 0$$

Exercice 22 :

Dans cet exercice, on suppose $\alpha > 1$

1. *Démontrer que nous avons* $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = 1$

   On s'intéresse aux sommes partielles $S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right)$.

   Nous avons :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\alpha-1}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\alpha-1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\alpha-1}} = 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

   Comme $\alpha > 1$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$, c'est à dire

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = 1$$

2. *Montrer que, pour tout réel $\beta > 0$ et tout $t \in [0;1]$, nous avons $(1-t)^{\beta} \leqslant \frac{1}{1+\beta t}$*

   Nous considérons la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(t) = (1-t)^{\beta} \times (1+\beta t)$.
   La dérivée de f, notée f', est donnée par :

$$\begin{aligned}f'(t) = &\ -\beta(1-t)^{\beta-1} \times (1+\beta t) + \beta(1-t)^{\beta} \\ = &\ -\beta(1-t)^{\beta-1}((1+\beta t)-(1-t)) \\ = &\ -\beta(1-t)^{\beta-1}(t(\beta+1))\end{aligned}$$

Pour $t \in [0;1]$, nous avons $(1-t)^{\beta-1} \geqslant 0$ et $t(\beta+1) \geqslant 0$, et donc, pour $t \in [0;1]$, $f'(t) \leqslant 0$, c'est à dire que f est décroissante sur l'intervalle $[0;1]$.
Et donc, pour tout $t \in [0;1]$, nous avons $f(t) \leqslant f(0) = 1$, c'est à dire que, pour tout $t \in [0;1]$,

$$(1-t)^{\beta} \times (1+\beta t) \leqslant 1 \Longleftrightarrow (1-t)^{\beta} \leqslant \frac{1}{1+\beta t}$$

3. *En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$, nous avons $\dfrac{\alpha-1}{n^{\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$*

   Voilà une question qui ne pose pas trop de difficultés. Il faut utiliser l'inégalité $(1-t)^{\beta} \leqslant \dfrac{1}{1+\beta t}$ en posant, pour $n \geqslant 2$, $t = \dfrac{1}{n}$ et $\beta = \alpha - 1$. Nous avons donc :

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} \leqslant \frac{1}{1+\frac{\alpha-1}{n}} \Longleftrightarrow 1 + \frac{\alpha-1}{n} \leqslant \frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha-1}} = \frac{n^{\alpha-1}}{(n-1)^{\alpha-1}}$$

   C'est à dire que $\dfrac{\alpha-1}{n} \leqslant \dfrac{n^{\alpha-1}}{(n-1)^{\alpha-1}} - 1$

   Or $\dfrac{n^{\alpha-1}}{(n-1)^{\alpha-1}} - 1 = n^{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$, ce qui veut dire que :

$$\frac{\alpha-1}{n} \leqslant n^{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \Longleftrightarrow \frac{\alpha-1}{n^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

   Ce que nous voulions

4. *Conclure*

   Nous avons obtenu l'inégalité $\dfrac{\alpha-1}{n^{\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ laquelle est équivalente à

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

   Nous savons que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$ est une série à termes positifs convergente.

   Donc, par les théorèmes de majoration 3.2.1 nous concluons que si $\alpha > 1$, alors les séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ convergent.

Exercice 23 :

Etudier la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!k!}$

Voilà une question qui ne devrait pas poser trop de difficultés.

⋆ Tout d'abord, un compagnonnage de longue date des mathématiques nous pousse à tourner notre regard vers les coefficients binômiaux. En effet, nous avons :

$$\mathrm{C}_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

C'est à dire $\dfrac{1}{(n-k)!k!} = \dfrac{1}{n!}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{1}{n!}\dbinom{n}{k}$, de telle sorte que :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k$$

⋆ C'est ici qu'intervient la fameuse formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}$, de telle sorte que nous pouvons écrire :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k 1^k 1^{n-k} = \frac{1}{n!}(1+1)^n = \frac{2^n}{n!}$$

⋆ La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est donc la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{n!}$ qui est convergente *(Utiliser D'Alembert)*

⋆ La somme de cette série est facile à connaître. Nous avons $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{n!} = e^2$

Exercice 24 :

1. *Soit la série de terme général $u_n = a_n - a_{n+1}$ avec $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.*

   Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{2n^2}$

   Evaluons u_n ; nous avons $u_n = -\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln n = -\frac{1}{n+1} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

   En utilisant les développements limités, nous avons $u_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$

   Tous calculs faits, nous obtenons :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{2n^3(n+1)} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

   Ce qui montre que, au voisinage de $+\infty$, nous avons $u_n \underset{+\infty}{\approx} \frac{n^2}{2n^3(n+1)} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{2n^2}$

2. *En déduire la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

   De la question ci dessus, nous déduisons que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

   Considérons, maintenant, la suite des sommes partielles :$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$; nous avons $\lim_{n\to+\infty} S_n = L$; or :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=2}^{n+1} a_k = a_1 - a_{n+1}$$

   Ce qui montre que $a_{n+1} = a_1 - S_n$, et que, donc, $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = a_1 - L$.

   La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc, et sa limite est appelée la constante d'Euler.

Exercice 25 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs.

1. *On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.*

   (a) *On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Donner $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n$*

   Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, nous avons $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_n = S$, d'où, bien sûr, $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n = 0$

(b) *En déduire que* $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_{2n} = 0$

Nous avons $S_{2n} - S_n = \sum\limits_{k=0}^{2n} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, pour tout $k = n+1, \cdots, 2n$, nous avons $u_k \geqslant u_{2n}$. Ainsi, $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k \geqslant \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_{2n} = nu_{2n}$

Nous avons donc $S_{2n} - S_n \geqslant nu_{2n} \geqslant 0$, d'où, par encadrement, nous tirons $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_{2n} = 0$ et donc, par multiplication par un scalaire, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_{2n} = 0$

(c) *Conclure que* $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$

Comme nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_{2n} = 0$, il faudrait aussi montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)\, u_{2n+1} = 0$. Or, $(2n+1)\, u_{2n+1} = 2nu_{2n+1} + u_{2n+1}$; de la décroissance, nous avons $u_{2n+1} \leqslant u_{2n}$ et donc $(2n+1)\, u_{2n+1} \leqslant 2nu_{2n} + u_{2n}$. Comme nous savons, puisque la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 0$, que nous avons démontré que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_{2n} = 0$, nous avons bien, par les théorèmes de majoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)\, u_{2n+1} = 0$

Nous en concluons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$

2. *Soit* $\alpha > 0$ *et on suppose que* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha u_n$ *converge. Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha+1} u_n = 0$

Nous allons procéder comme pour la question précédente.

→ Nous posons, une nouvelle fois, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k^\alpha u_k$; et nous avons toujours $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n = 0$

Or, $S_{2n} - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} k^\alpha u_k$, et pout tout $k = n+1, \cdots, 2n$, nous avons $k^\alpha \geqslant n^\alpha$ et $u_k \geqslant u_{2n}$ et donc :

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} k^\alpha u_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} n^\alpha u_{2n} = n^{\alpha+1} u_{2n}$$

Ainsi, de l'inégalité $0 \leqslant n^{\alpha+1} u_{2n} \leqslant S_{2n} - S_n$, nous déduisons, par encadrements que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha+1} u_{2n} = 0$

→ Nous avons $(2n)^{\alpha+1}\, u_{2n} = 2^{\alpha+1} n^{\alpha+1} u_{2n}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha+1} u_{2n} = 0$, nous déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{\alpha+1} n^{\alpha+1} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (2n)^{\alpha+1}\, u_{2n} = 0$

→ D'autre part, nous avons $0 \leqslant (2n+1)^{\alpha+1}\, u_{2n+1} \leqslant (2n+1)^{\alpha+1}\, u_{2n}$.
Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} (2n+1)^{\alpha+1}\, u_{2n} &= (2n+1)^{\alpha+1} \times \frac{(2n)^{\alpha+1}}{(2n)^{\alpha+1}} u_{2n} \\ &= \frac{(2n+1)^{\alpha+1}}{(2n)^{\alpha+1}} \times (2n)^{\alpha+1}\, u_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\alpha+1} \times \left((2n)^{\alpha+1}\, u_{2n}\right) \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\alpha+1} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n)^{\alpha+1}\, u_{2n} = 0$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)^{\alpha+1}\, u_{2n} = 0$

De l'inégalité $0 \leqslant (2n+1)^{\alpha+1}\, u_{2n+1} \leqslant (2n+1)^{\alpha+1}\, u_{2n}$, nous déduisons que :

$$\lim_{n\to+\infty} (2n+1)^{\alpha+1}\, u_{2n+1} = 0$$

C'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha+1} u_n = 0$

3.7.3 Etude de convergence des séries numériques et calcul des sommes

Exercice 26 :

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{n^3-9n}$

1. *Cette série est-elle convergente ?*

   Nous avons, au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\frac{1}{n^3-9n}\underset{+\infty}{\approx}\frac{1}{n^3}$

   Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{n^3-9n}$ est convergente.

2. *Décomposer* $\displaystyle\frac{1}{n^3-9n}$ *en éléments simples, c'est à dire trouvez* A, B, *et* C, *tels que :* $\displaystyle\frac{1}{n^3-9n}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n-3}+\frac{C}{n+3}$

   C'est une question classique et....fatigante !!
   Nous avons

   $$\frac{A}{n}+\frac{B}{n-3}+\frac{C}{n+3}=\frac{A\left(n^2-9\right)+Bn\left(n+3\right)+Cn\left(n-3\right)}{n\left(n^2-9\right)}=\frac{\left(A+B+C\right)n^2+\left(3B-3C\right)n-9A}{n\left(n^2-9\right)}$$

   D'où nous tirons, par identification :

   $$\left\{\begin{array}{rl} A+B+C= & 0\\ B-C= & 0\\ -9A= & 1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rl} A= & -\dfrac{1}{9}\\ B=C= & \dfrac{1}{18}\end{array}\right.$$

3. *En déduire la somme de la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{n^3-9n}$

   Nous appelons comme toujours $\displaystyle S_n=\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k^3-9k}$ et nous avons :

   $$\begin{aligned} S_n=\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k^3-9k} &= \sum_{k=4}^{n}\frac{A}{k}+\sum_{k=4}^{n}\frac{B}{k-3}+\sum_{k=4}^{n}\frac{C}{k+3}\\ &= \sum_{k=4}^{n}\frac{A}{k}+\sum_{k=1}^{n-3}\frac{B}{k}+\sum_{k=7}^{n+3}\frac{C}{k}\\ &= \left(\sum_{k=7}^{n-3}\frac{A}{k}+\frac{A}{4}+\frac{A}{5}+\frac{A}{6}+\frac{A}{n-2}+\frac{A}{n-1}+\frac{A}{n}\right)\\ &\quad+\left(\sum_{k=7}^{n-3}\frac{B}{k}+\frac{B}{1}+\frac{B}{2}+\frac{B}{3}+\frac{B}{4}+\frac{B}{5}+\frac{B}{6}\right)\\ &\quad+\left(\sum_{k=7}^{n-3}\frac{C}{k}+\frac{C}{n-2}+\frac{C}{n-1}+\frac{C}{n}+\frac{C}{n+1}+\frac{C}{n+2}+\frac{C}{n+3}\right)\end{aligned}$$

   Et donc, en simplifiant et regroupant, nous avons :

   $$S_n=A\times\frac{37}{60}+B\times\frac{49}{30}+\left(A+C\right)\left(\frac{3n^2-6n+2}{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}\right)+C\left(\frac{3n^2+12n+11}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)}\right)$$

   Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(A+C\right)\left(\frac{3n^2-6n+2}{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}\right)=\lim_{n\to+\infty}C\left(\frac{3n^2+12n+11}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)}\right)=0$, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=A\times\frac{37}{60}+B\times\frac{49}{30}=\frac{1}{45}$

   Ainsi, nous avons $\displaystyle\sum_{n\geqslant 4}\frac{1}{n^3-9n}=\frac{1}{45}$

Exercice 27 :

1. *Etudier la convergence de la série :* $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

   Comme, au voisinage de 0, $\ln(1+x) \underset{0}{\approx} x$, qu'en $+\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, nous avons $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\approx} -\frac{1}{n^2}$

   Or, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

2. *Calculez la somme de la série* $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

   Comme à chaque fois, nous allons utiliser les sommes partielles $S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

   Auparavant, il faut recalculer $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\ln\left(k^2-1\right) - 2\ln k\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln k\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k \\
&= \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln k
\end{aligned}$$

   On regroupe maintenant tous les termes communs aux 3 sommes et nous avons :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) + \ln n + \ln(n+1) + \ln 2 + \sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) - 2\ln 2 - 2\ln n - 2\sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) \\
&= -\ln n + \ln(n+1) - \ln 2 \\
&= -\ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

   Comme $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\ln 2$, et on conclue que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$$

Exercice 28 :

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique tendant vers 0 et si a, b et c sont trois réels vérifiant $a+b+c=0$, on pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}$
Montrer que la suite de terme général v_n converge et calculer sa somme.

Nous appelons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Alors :

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} (av_k + bv_{k+1} + cv_{k+2}) \\
&= a\sum_{k=0}^{n} v_k + b\sum_{k=0}^{n} v_{k+1} + c\sum_{k=0}^{n} v_{k+2} \\
&= a\sum_{k=0}^{n} v_k + b\sum_{k=1}^{n+1} v_k + c\sum_{k=2}^{n+2} v_k \\
&= a\left(\sum_{k=2}^{n} v_k + v_0 + v_1\right) + b\left(\sum_{k=2}^{n} v_k + v_1 + v_{n+1}\right) + c\left(\sum_{k=2}^{n} v_k + v_{n+1} + v_{n+2}\right) \\
&= a(v_0 + v_1) + b(v_1 + v_{n+1}) + c(v_{n+1} + v_{n+2}) \\
&= av_0 + (a+b)v_1 + (b+c)v_{n+1} + cv_{n+2} \\
&= av_0 - cv_1 - av_{n+1} + cv_{n+2}
\end{aligned}$$

Comme, par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+2} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = av_0 - cv_1$
Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est-elle convergente, et admet pour somme $av_0 - cv_1$

Exercice 29 :

On considère la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^n e^{-n^2t^2}dt$. Etudier la convergence de cette série.

- ⋆ Une première remarque, c'est que, pour $n = 0$, nous avons $u_0 = \displaystyle\int_0^0 dt = 0$, de telle sorte que nous considérerons, désormais, que $n \geqslant 1$
- ⋆ Nous faisons le changement de variable $x = nt$. Alors $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = n$. Et donc, nous avons :

$$u_n = \int_0^n e^{-n^2t^2}dt = \int_0^{n^2} e^{-x^2}\frac{dx}{n} = \frac{1}{n}\int_0^{n^2} e^{-x^2}dx$$

Pour tout $n \geqslant 1$, nous avons $\displaystyle\int_0^{n^2} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{n^2} e^{-x^2}dx$

Comme la fonction e^{-x^2} est positive sur $[1; n^2]$, nous avons $\displaystyle\int_1^{n^2} e^{-x^2}dx \geqslant 0$, de telle sorte que $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{n^2} e^{-x^2}dx \geqslant \dfrac{1}{n}\int_0^1 e^{-x^2}dx = K \times \dfrac{1}{n}$.
Le terme général u_n est donc minoré par le terme général d'une série divergente et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge

Exercice 30 :

Le « critère de condensation » de Cauchy

1. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ converge*

   Nous allons appeler $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k u_{2^k}$.
   Il faut remarquer que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sommes de suites à termes positifs, donc croissantes.

⋆ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $2^k \leqslant 2^k + j \leqslant 2^{k+1}$ avec $j \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant j \leqslant 2^k$,
Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, nous avons, pour $0 \leqslant j \leqslant 2^k - 1$, $a_{2^{k+1}} \leqslant a_{2^k+j} \leqslant a_{2^k}$, c'est à dire, en l'écrivant dans un tableau :

$$\begin{array}{rcl}
a_{2^{k+1}} \leqslant & a_{2^k} & \leqslant a_{2^k} \\
a_{2^{k+1}} \leqslant & a_{2^k+1} & \leqslant a_{2^k} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{2^{k+1}} \leqslant & a_{2^k+j} & \leqslant a_{2^k} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{2^{k+1}} \leqslant & a_{2^k+2^k-2} & \leqslant a_{2^k} \\
a_{2^{k+1}} \leqslant & a_{2^k+2^k-1} & \leqslant a_{2^k}
\end{array}$$

En additionnant, nous obtenons :

$$2^k a_{2^{k+1}} \leqslant \sum_{j=0}^{2^k-1} a_{2^k+j} \leqslant 2^k a_{2^k}$$

Puis, en sommant de $k = 0$ à $k = n$, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^{k+1}} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{2^k-1} a_{2^k+j}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$$

⋆ Regardons de manière plus précise $\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^{k+1}}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^{k+1}} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} a_{2^{k+1}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} 2^k a_{2^k} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n+1} 2^k a_{2^k} - a_1\right) \\
&= \frac{1}{2}T_{n+1} - \frac{a_1}{2}
\end{aligned}$$

⋆ Regardons, de manière tout aussi précise $\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{2^k-1} a_{2^k+j}\right)$. En fait, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{2^k-1} a_{2^k+j}\right) = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k = S_{2^n-1}$$

⋆ Nous avons donc : $\frac{1}{2}T_{n+1} - \frac{a_1}{2} \leqslant S_{2^n-1} \leqslant T_n$

$\Longrightarrow$ Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge, alors $\lim_{n\to+\infty} S_{2^n-1} = +\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ diverge

$\Longleftarrow$ De même, supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ diverge, alors $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}T_{n+1} - \frac{a_1}{2} = +\infty$ et, pour terminer, $\lim_{n\to+\infty} S_{2^n-1} = +\infty$; ainsi, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge.

$\Longrightarrow$ Supposons maintenant, que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge et soit S sa somme. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $S_n \leqslant S$.
De l'inégalité $\frac{1}{2}T_{n+1} - \frac{a_1}{2} \leqslant S_{2^n-1}$, nous tirons $T_{n+1} \leqslant a_1 + 2S_{2^n-1}$ et donc $T_{n+1} \leqslant a_1 + 2S$.
La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est, elle aussi, croissante et, dans notre cas, majorée, donc convergente et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ converge

$\Longrightarrow$ On démontrerait, de la même manière que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ converge, il en serait de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$

En conclusion, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ converge

2. *Applications :*

   (a) *Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ convergent si et seulement si $\alpha > 1$*

   Nous allons, bien entendu, utiliser le critère de condensation de Cauchy.
   En posant $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, nous avons $a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \frac{1}{2^{n\alpha}}$ et $2^n a_{2^n} = \frac{2^n}{2^{n\alpha}} = 2^{n(1-\alpha)} = \left(2^{(1-\alpha)}\right)^n$, et nous avons $\sum_{n\geqslant 1} 2^n a_{2^n} = \sum_{n\geqslant 1} \left(2^{(1-\alpha)}\right)^n$
   Nous avons $0 < 2^{(1-\alpha)}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(2^{(1-\alpha)}\right)^n$ converge si et seulement si $2^{(1-\alpha)} < 1$, c'est à dire si $1 - \alpha < 0$, c'est à dire $\alpha > 1$
   Ce que nous voulions.

   (b) *Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ convergent si et seulement si $p > 1$*

   De même, en utilisant le critère de condensation de Cauchy, si nous posons $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^p}$, nous avons $a_{2^n} = \frac{1}{2^n (\ln 2^n)^p} = \frac{1}{2^n \times n^p (\ln 2)^p}$ et $2^n a_{2^n} = \frac{1}{n^p (\ln 2)^p}$
   La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p (\ln 2)^p}$ converge si et seulement si $p > 1$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ converge si et seulement si $p > 1$

Exercice 31 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.

1. *On suppose qu'à partir d'un certain rang nous avons $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que $u_n \in O(v_n)$*

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, le rang à partir duquel nous avons $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Alors, pour $n > n_0$, nous avons :

$$\begin{array}{ccc}
\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} & \leqslant & \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}} \\
\frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}} & \leqslant & \frac{v_{n_0+2}}{v_{n_0+1}} \\
\vdots & & \vdots \\
\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} & \leqslant & \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} \\
\frac{u_n}{u_{n-1}} & \leqslant & \frac{v_n}{v_{n-1}}
\end{array}$$

En multipliant termes à termes et en simplifiant, nous obtenons :

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} \leqslant \frac{v_n}{v_{n_0}} \Longleftrightarrow 0 < \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \Longleftrightarrow u_n \leqslant k v_n$$

Ce qui montre que $u_n \in O(v_n)$

Ainsi, si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, il en est de même de la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$, et d'autre part, si la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge, il en est de même de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$

2. *On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge*

Nous avons, là un développement limité de la fraction $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \beta < \alpha$ et nous considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Alors :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} = \frac{1}{\frac{(n+1)^\beta}{n^\beta}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}$$

Un développement limité de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}$ en $+\infty$ est donné par :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)$$

Au voisinage de $+\infty$, nous avons :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(1 - \frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\beta-\alpha}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon'\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comme $\beta < \alpha$, nous avons $\frac{\beta-\alpha}{n} < 0$, et à partir d'un certain rang, nous avons $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 0$, c'est à dire $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$

Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\beta}$ converge, d'après la question 1, il en est de même de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$

3. *On suppose , cette fois ci, que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha < 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge*

La résolution est tout à fait semblable

Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < \beta < 1$ et nous considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Alors :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} = \frac{1}{\frac{(n+1)^\beta}{n^\beta}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}$$

Un développement limité de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}$ en $+\infty$ est donné par :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)$$

Au voisinage de $+\infty$, nous avons :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{v_{n+1}}{v_n}=\left(1-\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\left(1-\frac{\beta}{n}+\frac{1}{n}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{\beta-\alpha}{n}+\frac{1}{n}\varepsilon'\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comme $\alpha<\beta$, nous avons $\dfrac{\beta-\alpha}{n}>0$, et à partir d'un certain rang, nous avons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\geqslant 0$, c'est à dire $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}v_n=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\beta}$ diverge, d'après la question 1, il en est de même de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$

Exercice 32 :

Etudier la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$ *où* $\displaystyle u_n=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n}$

- Soit $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n}$ définie sur l'intervalle $[0;+1]$. Nous avons $f(0)=1$ et $f(1)=\dfrac{1}{n+1}$.
- Pour $x\in[0;+1[$, nous avons $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, et donc, pour $x\in[0;+1[$, nous avons $f(x)=\dfrac{1-x}{1-x^{n+1}}$. L'étude des limites aux bornes montre que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1-x}{1-x^{n+1}}=\frac{1}{n+1}$, ce qui montre que $f(x)=\dfrac{1-x}{1-x^{n+1}}$ est continue sur $[0;+1]$ *(Toute méthode de calcul est bienvenue, en particulier l'utilisation du rapport de dérivation)*

  De telle sorte que $\displaystyle u_n=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+x^n}=\int_0^1\frac{1-x}{1-x^{n+1}}dx$
- Nous avons, pour $x\in[0;+1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1-x}{1-x^{n+1}}=1-x$.

  Démontrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\int_0^1 1-xdx=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$, de telle sorte que, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n\neq 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$ diverge grossièrement

  $\Rightarrow$ Tout d'abord,

$$\begin{aligned}\left|u_n-\int_0^1 1-xdx\right| &= \left|\int_0^1\frac{1-x}{1-x^{n+1}}-(1-x)\,dx\right|\\ &= \left|\int_0^1\frac{1-x}{1-x^{n+1}}\left(1-\left(1-x^{n+1}\right)\right)dx\right|\\ &= \left|\int_0^1\frac{x^{n+1}(1-x)}{1-x^{n+1}}dx\right|\\ &\leqslant \int_0^1 x^{n+1}\left|\frac{(1-x)}{1-x^{n+1}}\right|dx\end{aligned}$$

  $\Rightarrow$ D'autre part, comme $0\leqslant x\leqslant 1$, nous avons $0\leqslant x^{n+1}\leqslant 1$, puis $0\leqslant 1-x\leqslant 1$ et $0\leqslant 1-x^{n+1}\leqslant 1$, de telle sorte que $\dfrac{(1-x)}{1-x^{n+1}}\geqslant 0$, et donc

$$\int_0^1 x^{n+1}\left|\frac{(1-x)}{1-x^{n+1}}\right|dx=\int_0^1 x^{n+1}\frac{(1-x)}{1-x^{n+1}}dx$$

  $\Rightarrow$ Ensuite, nous avons $\dfrac{(1-x)}{1-x^{n+1}}\leqslant 1$. En effet :

$$\frac{(1-x)}{1-x^{n+1}}-1=\frac{(1-x)-\left(1-x^{n+1}\right)}{1-x^{n+1}}=\frac{x^{n+1}-x}{1-x^{n+1}}$$

Comme $0 \leqslant x \leqslant 1$, nous avons $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x \leqslant 1$ et donc $\dfrac{x^{n+1}-x}{1-x^{n+1}} \leqslant 0$, c'est à dire $\dfrac{(1-x)}{1-x^{n+1}} \leqslant 1$

Une autre possibilité aurait été d'utiliser la fonction $\varphi(x) = \dfrac{(1-x)}{1-x^{n+1}}$ *et d'en étudier les variations ; relativement simple*

$\Rightarrow$ Donc $\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\left|\frac{(1-x)}{1-x^{n+1}}\right|dx = \int_0^1 x^{n+1}\frac{(1-x)}{1-x^{n+1}}dx \leqslant \int_0^1 x^{n+1}dx = \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|u_n - \int_0^1 1-xdx\right| = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 1-xdx = \frac{1}{2}$

Ce que nous voulions

Quod erat demonstratum

Exercice 33 :

1. *Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\int_0^1 x^n f(x)\,dx$ converge et que sa somme est $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx$*

   $\rightarrow$ Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^k f(x)\,dx$. Alors, nous avons aussi $S_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\right)dx$.

   Nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k = \frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$ et donc $S_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)\left(1-(-1)^{n+1}x^{n+1}\right)}{1+x}dx$

   $\rightarrow$ Nous avons donc $S_n - \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx = (-1)^n\int_0^1 \frac{f(x)\,x^{n+1}}{1+x}dx$ et donc :

   $$\left|S_n - \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx\right| \leqslant \int_0^1 \frac{|f(x)|\,x^{n+1}}{1+x}dx$$

   $\rightarrow$ Comme f est bornée sur $[0;1]$ il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [0;1]$ nous ayions $|f(x)| \leqslant M$.

   D'autre part, pour $x \in [0;1]$, nous avons $0 < \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$, de telle sorte que nous ayions :

   $$0 \leqslant \int_0^1 \frac{|f(x)|\,x^{n+1}}{1+x}dx \leqslant M\int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{M}{n+2}$$

   D'où nous déduisons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{|f(x)|\,x^{n+1}}{1+x}dx = 0$ et que donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|S_n - \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx\right| = 0$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx$

   Quod erat demonstratum

   Application

   Pour $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sin(\pi x)\,dx$, donner la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$

2. *Notons $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sin(\pi x)\,dx$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$*

   Comme toujours, appelons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$

Nous avons alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\, dx = \int_0^1 \sin(\pi x) \left(\sum_{k=0}^{n} x^k \right) dx = \int_0^1 \sin(\pi x) \times \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}\, dx$$

De telle sorte que :

$$\left| S_n - \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\, dx \right| \leqslant \int_0^1 \left| \frac{\sin(\pi x)\, x^{n+1}}{1-x} \right| dx = \int_0^1 \left| \frac{\sin(\pi x)}{1-x} \right| x^{n+1}\, dx$$

Appelons $\psi(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}$ et démontrons que ψ est continue sur $[0;1]$.
Le seul souci se pose en $x = 1$.
Le rapport $\dfrac{\sin(\pi x)}{1-x} = -\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1}$ est un rapport de dérivation de la fonction $\sin(\pi x)$ et :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \pi \cos \pi = -\pi$$

De telle sorte que $\lim\limits_{x \to 1} \psi(x) = \lim\limits_{x \to 1} -\dfrac{\sin(\pi x)}{x-1} = \pi$.
On peut donc prolonger ψ par continuité en $x = 1$ en posant $\psi(1) = \pi$.
ψ, fonction continue sur le compact $[0;1]$ y est bornée, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [0;1]$, $|\psi(x)| \leqslant M$. Ainsi :

$$\left| S_n - \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\, dx \right| \leqslant \int_0^1 \left| \frac{\sin(\pi x)}{1-x} \right| x^{n+1}\, dx \leqslant \int_0^1 M x^{n+1}\, dx = M \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{M^{n+2}}{n+2}$$

Nous avons bien $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| S_n - \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\, dx \right| = 0$, c'est à dire $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\, dx$

Pour démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\, dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx$, il suffit de faire des changements de variables

- ⋆ On fait un premier changement $u = \pi x \iff x = \dfrac{u}{\pi}$ et donc $\dfrac{du}{dx} = \pi \iff \dfrac{du}{\pi} = dx$. Nous avons alors :

$$\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\, dx = \int_0^\pi \frac{\sin u}{\left(1 - \dfrac{u}{\pi}\right)} \frac{du}{\pi} = \int_0^\pi \frac{\sin u}{(\pi - u)}\, du$$

- ⋆ Nous faisons le second changement de variables $v = \pi - u \iff u = \pi - v$ et $\dfrac{du}{dv} = -1 \iff du = -dv$. Nous avons alors :

$$\int_0^\pi \frac{\sin u}{(\pi - u)}\, du = \int_\pi^0 \frac{\sin(\pi - v)}{v} - dv = \int_0^\pi \frac{\sin(\pi - v)}{v}\, dv$$

Comme $\sin(\pi - v) = \sin v$, nous avons $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(\pi - v)}{v}\, dv = \int_0^\pi \frac{\sin v}{v}\, dv$

C'est à dire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\, dx = \int_0^\pi \frac{\sin v}{v}\, dv$, et nous pouvons conclure que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx$

3. *Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx$*

Appelons $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$; classiquement, nous avons $P_n(x) = \dfrac{1 - (-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$ et donc :

$$x^{\alpha-1} P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1} = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+\alpha}}{1+x}$$

En passant à l'intégrale, nous avons :

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} P_n(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{k+\alpha-1}\, dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+\alpha}}{1+x}\, dx$$

Nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^{k+\alpha-1}\, dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{x^{k+\alpha}}{\alpha+k}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\alpha+k}$

En applelant $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\alpha+k}$, nous allons démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx$.

$$\left| S_n - \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx \right| = \left| \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+\alpha}}{1+x}\, dx \right| \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+\alpha}}{1+x}\, dx$$

Comme $x \in [0;1]$, nous avons $1 \leqslant 1+x \leqslant 2$ et donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$. Dès lors

$$\int_0^1 \frac{x^{n+\alpha}}{1+x}\, dx \leqslant \int_0^1 x^{n+\alpha}\, dx = \left[\frac{x^{n+\alpha+1}}{n+\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+\alpha+1}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\alpha+1} = 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left| S_n - \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx \right| = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx$, c'est à dire $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx$

QED, ce que nous voulions.

Exercice 34 :

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) \neq 0$. Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\, dt$

La difficulté dans cet exercice, c'est que l'intégrale dépend de n.

D'autre part, comme $t \in [0;1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t^n = 0$, de la continuité de f, il est loisible de penser que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(t^n) = f(0)$.

Nous allons démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\, dt \underset{+\infty}{\approx} \frac{f(0)}{n}$.

⇒ Premièrement, nous avons $\dfrac{f(0)}{n} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(0)\, dt$ et donc :

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\, dt - \frac{f(0)}{n} \right| = \left| \int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n) - f(0)\, dt \right| \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} |f(t^n) - f(0)|\, dt \leqslant \frac{1}{n} \sup_{t\in\left[0;\frac{1}{n}\right]} |f(t) - f(0)|$$

⇒ Nous appelons $M_n = \displaystyle\sup_{t\in\left[0;\frac{1}{n}\right]} |f(t) - f(0)|$. Nous allons démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M_n = 0$

Soit donc $\varepsilon > 0$.

Comme f est continue sur $[0;1]$, il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < t < \eta$, alors $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $0 < \dfrac{1}{n} < \eta$. Donc, si $n \geqslant N$, alors $\displaystyle\sup_{t\in\left[0;\frac{1}{n}\right]} |f(t) - f(0)| < \varepsilon$,

c'est à dire $0 < M_n < \varepsilon$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M_n = 0$

⇒ Nous allons démontrer, qu'en $+\infty$, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\, dt \underset{+\infty}{\approx} \frac{f(0)}{n}$

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,dt - \frac{f(0)}{n}\right| \leqslant \frac{M_n}{n} \Longleftrightarrow \frac{|f(0)|}{n}\left|\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,dt}{\frac{f(0)}{n}} - 1\right| \leqslant \frac{M_n}{n} \Longleftrightarrow \left|\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,dt}{\frac{f(0)}{n}} - 1\right| \leqslant \frac{M_n}{|f(0)|}$$

La dernière équivalence étant possible car $f(0) \neq 0$

De $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$, nous tirons $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,dt}{\frac{f(0)}{n}} - 1\right| = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,dt}{\frac{f(0)}{n}} = 1$,

et que donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,dt \underset{+\infty}{\approx} \frac{f(0)}{n}$

$\Rightarrow$ Dès lors, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,dt \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{n^\alpha} \times \frac{f(0)}{n} = \frac{f(0)}{n^{\alpha+1}}$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge donc si et seulement si $\alpha + 1 > 1$, c'est à dire $\alpha > 0$

Exercice 35 :

1. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs. On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :*

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k u_k$$

Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ ont même nature, et qu'en cas de convergence, $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n = \sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$

$\Rightarrow$ Il faut remarquer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ est aussi une série à termes positifs

$\Rightarrow$ Classiquement, nous avons $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{(n+1)}$, de telle sorte que :

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k u_k = \sum_{k=1}^{n} k u_k\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k}{n} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k}{(n+1)}$$

$\Rightarrow$ Appelons $\alpha_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k}{n}$; nous avons, en particulier $\alpha_1 = u_1$. Alors :

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k}{(n+1)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k}{(n+1)} + \frac{(n+1)\,u_{n+1}}{n+1} - u_{n+1} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} k u_k}{(n+1)} - u_{n+1} = \alpha_{n+1} - u_{n+1}$$

De telle sorte que $v_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} + u_{n+1}$

$\Rightarrow$ Appelons $S_n^v = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$ la somme partielle de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$. Alors :

$$S_n^v = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - \alpha_{k+1} + u_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - \alpha_{k+1}) + \sum_{k=1}^{n} u_{k+1}$$

Classiquement, nous avons $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-\alpha_{k+1})=\alpha_1-\alpha_{n+1}=u_1-\alpha_{n+1}$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
S_n^v = &\ -\alpha_{n+1}+\sum_{k=1}^{n+1}u_k \\
= &\ -\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ku_k+(n+1)\,u_{n+1}}{n+1}+\sum_{k=1}^{n+1}u_k \\
= &\ -\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ku_k}{n+1}-\frac{(n+1)\,u_{n+1}}{n+1}+\sum_{k=1}^{n+1}u_k \\
= &\ -\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ku_k}{n+1}-u_{n+1}+\sum_{k=1}^{n+1}u_k \\
= &\ -\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ku_k}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}u_k
\end{aligned}$$

C'est à dire que nous avons $\displaystyle S_n^v=\sum_{k=1}^{n}v_k=-\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ku_k}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}u_k$

Comme $\displaystyle v_n=\frac{1}{n\,(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ku_k$, nous avons $\displaystyle\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ku_k}{n+1}=n\times\frac{1}{n\,(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ku_k=nv_n$ et nous pouvons donc écrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}v_k=\sum_{k=1}^{n}u_k-\frac{nv_n}{n+1}$

⇒ Nous en concluons donc que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}v_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}u_k$ et donc :

- ⋆ Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}v_k$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k$ diverge
- ⋆ Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k$ converge, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}v_k$ converge

Ainsi, si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}v_n$, il en est de même de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}u_n$ et si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}u_n$ converge, il en est de même de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}v_n$

⇒ Il faut maintenant étudier les réciproque.

⋆ Supposons $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}v_n$ converge.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}v_n=0$ et de l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}v_k=\sum_{k=1}^{n}u_k-\frac{nv_n}{n+1}$ prouvée ci-dessus, nous déduisons que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}v_k=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k$$

C'est à dire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}u_n$ est convergente, et que mieux : $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}u_n=\sum_{n\geqslant1}v_n$

- $\star$ Supposons, maintenant que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

  Supposons que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge. L'égalité $\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{nv_n}{n+1}$ mène à une contradiction. En effet, si le membre de gauche converge vers un nombre positif, le membre de droite diverge vers $+\infty$. Il y a donc contradiction.
  Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ diverge.

2. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.*

   Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{(n!\,(u_1 \times u_2 \times \cdots u_n))^{\frac{1}{n}}}{n+1}$. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge et que $\sum_{n\geqslant 1} v_n \leqslant \sum_{n\geqslant 1} u_n$

   Pour résoudre cette question, nous utilisons une inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique[3] :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réels strictement positifs $a_1, \cdots, a_n$ nous avons

$$(a_1 \times \cdots \times a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

   Il est facile de voir que $n!\,(u_1 \times u_2 \times \cdots u_n) = u_1 \times 2u_2 \times \cdots \times ku_k \times \cdots \times nu_n$ et en appliquant l'inégalité des moyennes :

$$(n!\,(u_1 \times u_2 \times \cdots u_n))^{\frac{1}{n}} = (u_1 \times 2u_2 \times \cdots \times ku_k \times \cdots \times nu_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + ku_k + \cdots + nu_n}{n}$$

   Nous avons donc :

$$v_n = \frac{(n!\,(u_1 \times u_2 \times \cdots u_n))^{\frac{1}{n}}}{n+1} \leqslant \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + ku_k + \cdots + nu_n}{n\,(n+1)}$$

   La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ étant convergente, d'après la question précédente,

$$\frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + ku_k + \cdots + nu_n}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ku_k$$

   est le terme général d'une série convergente, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge.

   D'autre part, toujours d'après la question précédente, $\sum_{n\geqslant 1} u_n = \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ku_k \right)$, nous avons bien l'inégalité demandée :

$$\sum_{n\geqslant 1} v_n \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ku_k \right) = \sum_{n\geqslant 1} u_n$$

Exercice 36 :

Soit z_n le terme général d'une série complexe absolument convergente. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z_n}{n}$ est convergente.

3. A démontrer !!

Nous allons démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z_n}{n}$ est absolument convergente

Nous appelons $S_n = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ et $S_n^1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{k}$.

On peut remarquer que nous avons, en particulier $S_1 = S_1^1 = |z_1|$.

Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ est absolument convergente, nous avons $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ et nous devons montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n^1$ existe.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
S_n^1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{k} &= |z_1| + \sum_{k=2}^{n} \frac{|z_k|}{k} \\
&= |z_1| + \sum_{k=2}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k} \\
&= |z_1| + \sum_{k=2}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{S_{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k} + \frac{S_n}{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_n}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k\,(k+1)} + \frac{S_n}{n}
\end{aligned}$$

Comme la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est aussi bornée. Soit donc $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous ayons $S_n \leqslant M$. Alors :

$$S_n^1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{k\,(k+1)} + \frac{M}{n}$$

Nous avons $\sum_{k=1}^{n} \frac{M}{k\,(k+1)} = M\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < M$ et $\frac{M}{n} \leqslant M$

Donc la suite $\left(S_n^1\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante, de termes réels positifs, majorée, donc convergente.

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z_n}{n}$ est donc absolument convergente

3.7.4 Séries alternées- théorème d'ABEL

Exercice 37 :

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right)$

Dans un premier temps, nous pouvons voir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(n\pi + x) = (-1)^n \sin x$ et donc $\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

D'autre part, la suite $\left(\frac{\pi}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissant vers 0, et si $n \geqslant 2$, alors $0 < \frac{\pi}{n} \leqslant \frac{\pi}{2}$, c'est à dire $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) > 0$ et comme la fonction sinus est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, nous avons $\sin\frac{\pi}{n+1} \leqslant \sin\frac{\pi}{n}$

En plus, $\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{\pi}{n} = 0$.

La série $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right)$ est donc une série alternée convergente.

Cette série est-elle absolument convergente ? ? ?....Non, puisque $\left|\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)\right| = \left|(-1)^n \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right| = \left|\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right| = \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

En $+\infty$, nous avons $\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{\pi}{n}$. Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\pi}{n}$ est divergente, et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{n}\right)$ ne converge pas absolument

Exercice 38 :

Montrer que la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ est une série alternée ; exprimer u_n en fonction de u_0 ; en déduire $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$

1. En puisant dans vos souvenirs de calcul intégral, on effectue un **changement de variables**. Lequel ? Celui ci est très simple : $u = x - n\pi$, et alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1$, et nous avons :
$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx = \int_0^{\pi} e^{-(u+n\pi)}\sin(u+n\pi)\ du$$
Or, $\sin(u+n\pi) = (-1)^n \sin u$ et $e^{-(u+n\pi)} = e^{-n\pi}e^{-u}$, de telle sorte que
$$u_n = (-1)^n e^{-n\pi}\int_0^{\pi} e^{-u}\sin u\,du$$
Comme $e^{-n\pi} > 0$ et que, pour $0 \leqslant u \leqslant \pi$, $\sin u \geqslant 0$, nous avons bien u_n qui est le terme général d'une série alternée.
2. **Exprimons u_n en fonction de u_0**
L'item ci-dessus montre que $u_n = (-1)^n e^{-n\pi}u_0$, où $u_0 = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$
3. **Déduisons, maintenant, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$**
Clairement, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est une série géométrique ; sa somme est donc : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n = \frac{u_0}{1+e^{-\pi}}$; il faut donc calculer u_0, et comment le calculons nous ? En effectuant une classique intégration par parties.
$$\left\{\begin{array}{ll} u = e^{-x} & u' = -e^{-x} \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}\right.$$
D'où
$$u_0 = \left[-\cos x e^{-x}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx = 1 + e^{-\pi} - \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$$
Nous faisons une seconde intégration par parties :
$$\left\{\begin{array}{ll} u = e^{-x} & u' = -e^{-x} \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}\right.$$
D'où,
$$\int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx = \left[e^{-x}\sin x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx = u_0$$
De telle sorte que : $u_0 = 1 + e^{-\pi} - u_0$, et on trouve que $u_0 = \dfrac{1+e^{-\pi}}{2}$; ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n = \frac{1}{2}$

Exercice 39 :

1. *Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$ tend vers 0 en décroissant*

   $\Rightarrow$ La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
   En effet :
   $$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{n+1} - (\cos x)^n \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n (\cos x - 1) \; dx$$
   Si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et donc $(\cos x)^n (\cos x - 1) \leqslant 0$, c'est à dire $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien décroissante

   $\Rightarrow$ Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$
   C'est une question classique, mais pas d'une grande évidence.
   Soit $\varepsilon > 0$ avec $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$.
   Alors $I_n = \int_0^{\varepsilon} \cos^n x\, dx + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$
   - ⋆ Comme $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$, nous avons $\int_0^{\varepsilon} \cos^n x\, dx \leqslant \varepsilon$
   - ⋆ D'autre part, la fonction cos étant décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, nous avons :
     $$0 \leqslant \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx \leqslant \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varepsilon\, dx = \cos^n \varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$$
     Comme $0 < \cos\varepsilon < 1$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\varepsilon} \cos^n \varepsilon = 0$. Il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$ alors $0 < \cos^n \varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) < \varepsilon$
     Donc, pour $n \geqslant N_\varepsilon$ alors nous avons $0 \leqslant \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx \leqslant \varepsilon$
     En synthèse, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $0 \leqslant I_n \leqslant 2\varepsilon$

   Nous en concluons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

2. *Montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$ est convergente et calculer sa somme.*

   $\Rightarrow$ En fait, $u_n = (-1)^n I_n$. Nous venons de montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était positive, décroissante, et tendait vers 0. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est donc une série alternée. D'après le critère des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est donc convergente.

   $\Rightarrow$ Pour $n \geqslant 0$, soit $A_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \cos^k x$
   $A_n(x)$ apparaît donc comme la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-\cos x$. Nous avons donc :
   $$A_n(x) = \frac{1 - (-1)^{n+1} \cos^{n+1} x}{1 + \cos x}$$

   $\Rightarrow$ Appelons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
   Nous avons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} A_n(x)\; dx = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k x\, dx = S_n$
   Donc, $S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} A_n(x)\; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - (-1)^{n+1} \cos^{n+1} x}{1 + \cos x}\, dx$.

Nous avons donc :

$$\left|S_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n \cos^{n+1} x}{1+\cos x}\,dx\right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1} x}{1+\cos x}\,dx$$

De $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, nous déduisons $1 \leqslant 1+\cos x \leqslant 2$ et donc $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+\cos x} \leqslant 1$, c'est à dire $\frac{\cos^{n+1} x}{2} \leqslant \frac{\cos^{n+1} x}{1+\cos x} \leqslant \cos^{n+1} x$.

D'où, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1} x}{2}\,dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1} x}{1+\cos x}\,dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x\,dx$, c'est à dire que nous avons :

$$\frac{I_n}{2} \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1} x}{1+\cos x}\,dx \leqslant I_n$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+1} x}{1+\cos x}\,dx = 0$, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left|S_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx\right| = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx$$

Ce qui montre que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ admet pour somme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx$

$\Rightarrow$ Il faut, maintenant, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx$

Faisons le changement de variables $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$; alors $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)$.

Avec ce changement de variables, nous avons $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, de telle sorte que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{1}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{dt}{1+t^2} = 22\int_0^1 \frac{1}{2}\,dt = 1$$

Ainsi, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx = 1$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = 1$

Faisons une incise sur ce changement de variables

Pour faire ce changement de variables, il faut bien connaître les formules trigonométriques ! !

Nous partons de $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, et nous avons donc $\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$.

Nous poursuivons en observant que $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Longleftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$ et donc $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

Revenons à $\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$. Nous avons alors :

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Longleftrightarrow \cos x = \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

C'est à dire que si nous posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, nous avons $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Exercice 40 :

1. *Quelle est la nature de la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$?*

   C'est visiblement une série alternée ! Nous devons donc considéerer la suite $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\frac{1}{2n+1} > 0$

   (b) Nous avons : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

   (c) La suite $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

   D'après le critère des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente.

2. *Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$*

   C'est une question tout ce qu'il y a de plus classique.

   (a) On considère tout d'abord la suite géométrique $\left(\left(-t^2\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et on calcule la somme des $n+1$ premiers termes : $\sum_{k=0}^{n} \left(-t^2\right)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1-\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}$

   (b) En écrivant

$$\frac{1-\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2} = \frac{1-(-1)^{n+1}\left(t^2\right)^{n+1}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$$

   nous avons donc $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$

3. *En déduire que $\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\, dt - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$*

   (a) Remarquons que nous avons $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$

   (b) Et alors, nous avons, en passant à l'intégrale :

$$\left|\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2}\, dt\right| = \left|\int_0^1 \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}\right| dt = \int_0^1 \left|\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\right| dt$$

   (c) De la linéarité de l'intégrale, nous avons

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2}\, dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\, dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

   comme $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{2}$, et que si $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \geqslant 0$, nous avons l'inégalité :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\, dt - \frac{\pi}{4}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$$

4. *On appelle S_n la suite des sommes partielles, c'est à dire : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.*

   Montrer que $\left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$

   En fait, pour $t \in [0\ 1]$, nous avons : $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant t^{2n+2}$, et donc

   $$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}\, dt = \left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+3}$$

   Par transitivité de la relation d'ordre, nous avons :$\left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$

5. *En déduire que $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$*

   Nous avons $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$; on montre ainsi que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$, et donc, $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 41 :

1. *La série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ est-elle convergente ?*

   C'est visiblement une série alternée. D'autre part, la suite $\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \right)_{n \geqslant 2}$ est une suite décroissante qui tend vers 0.

   Nous en déduisons que la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ est convergente.

2. *L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ est-elle convergente ?*

   Soit $T > 2$; nous allons étudier l'intégrale $\int_2^T \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

   L'intégrale $\int_2^T \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ est du type $\int_2^T \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = \int_2^T u'(x)(u(x))^{\frac{-1}{2}}\, dx$, où $u(x) = \ln x$ et nous avons :

   $$\int_2^T u'(x)(u(x))^{\frac{-1}{2}}\, dx = \left[\frac{(u(x))^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_2^T = 2\sqrt{u(T)} - 2\sqrt{u(2)}$$

   C'est à dire $\int_2^T \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln T} - 2\sqrt{\ln 2}$.

   Comme $\lim_{T \to +\infty} 2\sqrt{\ln T} = +\infty$, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ diverge

3. *La série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ est-elle absolument convergente ?*

   La série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 2} \left| \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}} \right| = \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ converge.

   On considère la fonction f définie par :

   $$\begin{cases} f : [2; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \end{cases}$$

Cette fonction est positive pour tout $x \geqslant 2$. D'autre part $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}} = 0$.

D'autre part, par un calcul de dérivée classique, nous obtenons $f'(x) = \dfrac{-\left(\frac{1}{2} + \ln x\right)}{x^2 \ln x \sqrt{\ln x}}$; nous avons bien $f'(x) \leqslant 0$ et la fonction f est décroissante sur $[2; +\infty[$

D'après le théorème 3.4.4, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\, dx$ et la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} f(n)$ ont même nature, c'est à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ et la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ ont même nature.

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ diverge, il en est de même de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$ ne converge pas absolument. Elle est donc semi-convergente

Exercice 42 :

1. *Questions préliminaires :*

   (a) *Calculer l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 t^{3n}\, \mathrm{dt}$

   Honnêtement, voilà qui ne pose aucune difficulté :

$$\int_0^1 t^{3n}\, \mathrm{dt} = \left[\frac{t^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{3n+1}$$

   (b) *Décomposer la fraction* $\dfrac{1}{1+t^3}$ *en éléments simples*

   Question plutôt calculatoire. Remarquons que $1+t^3 = (t+1)\left(t^2-t+1\right)$ et donc, il nous faut trouver $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} = \frac{(A+B)\,t^2 + (-A+B+C)\,t + (A+C)}{t^3+1}$$

   Et donc, en identifiant, nous obtenons un système :

$$\begin{cases} A+B = & 0 \\ -A+B+C = & 0 \\ A+C = & 1 \end{cases} \iff A = \frac{1}{3} \qquad B = \frac{-1}{3} \qquad C = \frac{2}{3}$$

   Et nous avons alors :

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{\frac{-1}{3}t + \frac{2}{3}}{t^2-t+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{-t+2}{t^2-t+1}\right)$$

   (c) *Calculer l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\, \mathrm{dt}$

   Voilà une question qui, si elle n'est pas compliquée, est calculatoire et longue. Prenons donc notre temps !!

   $\Rightarrow$ De l'égalité $\dfrac{1}{1+t^3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{t+1} + \dfrac{-t+2}{t^2-t+1}\right)$, nous déduisons :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\, \mathrm{dt} = \int_0^1 \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{-t+2}{t^2-t+1}\right) \mathrm{dt} = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 \frac{1}{t+1}\, \mathrm{dt} + \int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\, \mathrm{dt}\right)$$

   Nous allons donc d'abord calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1}\, \mathrm{dt}$, puis $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\, \mathrm{dt}$

$\Rightarrow$ Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{dt}$

Bon, ben là, c'est du gateaux : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{dt} = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln 2$

$\Rightarrow$ Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{dt}$

Alors là, c'est bien autre chose!!! Commençons par un petit tripatouillage :

$$\frac{-t+2}{t^2-t+1} = \frac{-1}{2}\times\frac{2t-4}{t^2-t+1} = \frac{-1}{2}\left(\frac{2t-1}{t^2-t+1} - \frac{3}{t^2-t+1}\right)$$

$\star$ Alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{dt} = \left[\ln\left(t^2-t+1\right)\right]_0^1 = 0$, de telle sorte que :

$$\int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{dt} = \frac{-1}{2}\int_0^1 \frac{-3}{t^2-t+1}\,\mathrm{dt} = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{dt}$$

$\star$ Nous calculons donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{dt}$

$\triangleright$ Nous avons :

$$\begin{aligned} t^2-t+1 = &\ \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \\ = &\ \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ = &\ \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right) \end{aligned}$$

Et donc $\displaystyle\frac{1}{t^2-t+1} = \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$, de telle sorte que

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{dt} = \int_0^1 \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{dt} = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{dt}$$

$\triangleright$ Calculons maintenant $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{dt}$

Faisons le changement de variables $u = \dfrac{2}{\sqrt{3}}t - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; alors

$$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Longleftrightarrow \mathrm{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{du}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{dt} &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{u^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{du} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{du} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\arctan u\right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{-\pi}{6}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$\triangleright$ Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{dt} = \frac{4}{3}\times\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{dt} = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{dt} = \frac{3}{2}\times\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ Et donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{3}\left(\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{dt} + \int_0^1 \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,\mathrm{dt}\right) = \frac{1}{3}\left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

2. *La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ est-elle convergente ?*

La suite $\left(\dfrac{1}{3n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs, décroissante et telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3n+1} = 0$.

D'après le crière des séries alternées, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ est donc convergente

3. *Montrer que nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{3k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{dt} + \int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{dt}$*

C'est une question des plus classiques !!

$$\sum_{k=0}^{N}\left(-t^3\right)^k = \frac{1-(-1)^{N+1}t^{3N+3}}{1+t^3} = \frac{1}{1+t^3} + \frac{(-1)^N t^{3N+3}}{1+t^3}$$

D'où en passant par l'intégrale :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{N}\left(-t^3\right)^k\,\mathrm{dt} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{dt} + \int_0^1 \frac{(-1)^N t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{dt}$$

Or : $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{N}\left(-t^3\right)^k\,\mathrm{dt} = \sum_{k=0}^{N}\int_0^1 \left(-t^3\right)^k\,\mathrm{dt} = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\int_0^1 t^{3k}\,\mathrm{dt} = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{1}{3k+1}$, c'est à dire :

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{3k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{dt} + \int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{dt}$$

Ce que nous voulions

4. *En déduire la somme de la série* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

   Toujours une question classique :

$$\left|\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{3k+1} - \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{dt}\right| = \left|\int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{dt}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{dt}$$

   Comme $t \in [0;+1]$, nous avons $\dfrac{t^{3N+3}}{1+t^3} \leqslant t^{3N+3}$ et alors :

$$\int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{dt} \leqslant \int_0^1 t^{3N+3}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{3N+4}$$

   Comme nous avons $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{3N+4} = 0$, nous avons aussi $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \left|\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{3k+1} - \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{dt}\right| = 0$ et donc :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{3k+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{dt} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

   En conclusion, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

3.7.5 Séries à termes réels ou complexes

Exercice 43 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites à termes complexes telles que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |v_n|^2$ convergent.

Démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 2$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (u_n - v_n)^p$ converge.

Nous allons démontrer, qu'en fait, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (u_n - v_n)^p$ est absolument convergente.

Nous avons : $|(u_n - v_n)^p| = |u_n - v_n|^p \leqslant (|u_n| + |v_n|)^p$
Comme les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |v_n|^2$ convergent, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n| = \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$. Il existe donc un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$, alors $0 < |u_n| + |v_n| < \dfrac{1}{2}$ [4]
Alors, pour $n \geqslant N$, nous avons $(|u_n| + |v_n|)^p \leqslant (|u_n| + |v_n|)^2$
Nous utilisons alors l'inégalité classique vraie pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tout $b \in \mathbb{C}$: $(|a| + |b|)^2 \leqslant 2\left(|a|^2 + |b|^2\right)$ [5]
et nous avons donc $(|u_n| + |v_n|)^2 \leqslant 2\left(|u_n|^2 + |v_n|^2\right)$
C'est à dire que si $n \geqslant N$, alors $|(u_n - v_n)^p| \leqslant 2\left(|u_n|^2 + |v_n|^2\right)$.
Les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |v_n|^2$ étant convergentes, nous en déduisons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (u_n - v_n)^p$ est absolument convergente, donc convergente.

Exercice 44 :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes complexes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie réelle de u_n soit positive, c'est à dire $\mathrm{Re}\,(u_n) \geqslant 0$.
On suppose que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ convergent. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ converge.

---

4. $\frac{1}{2}$ par exemple ; cela aurait pu être n'importe quel nombre strictement inférieur à 1
5. Démonstration classique à revoir dans les nombres complexes

Une première remarque : c'est qu'il faut bien nous dire que nous sommes dans $\mathbb{C}$, puisque, dans $\mathbb{R}$, ce serait trivial ; en effet, dans $\mathbb{R}$, nous avons $u_n^2 = |u_n|^2$

$\Rightarrow$ Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, nous avons aussi les séries $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}(u_n)$ qui sont convergentes.
D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $0 < \mathrm{Re}(u_n) < 1$, c'est à dire que si $n \geqslant N$, alors $0 < (\mathrm{Re}(u_n))^2 < \mathrm{Re}(u_n) < 1$.
Comme $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}(u_n)$ converge, il en est de même de $\sum_{n\geqslant 0} (\mathrm{Re}(u_n))^2$

$\Rightarrow$ Nous avons $u_n^2 = \mathrm{Re}(u_n)^2 - \mathrm{Im}(u_n)^2 + 2i\,\mathrm{Im}(u_n)\,\mathrm{Re}(u_n)$ et comme la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge, nous pouvons en déduire que les séries à termes réels $\sum_{n\geqslant 0} (\mathrm{Re}(u_n))^2 - (\mathrm{Im}(u_n))^2$ et $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}(u_n)\,\mathrm{Re}(u_n)$ convergent.
Comme $\sum_{n\geqslant 0} (\mathrm{Re}(u_n))^2$ et $\sum_{n\geqslant 0} (\mathrm{Re}(u_n))^2 - (\mathrm{Im}(u_n))^2$ convergent, la série $\sum_{n\geqslant 0} (\mathrm{Im}(u_n))^2$ converge elle aussi.

$\Rightarrow$ Or, $|u_n|^2 = (\mathrm{Re}(u_n))^2 + (\mathrm{Im}(u_n))^2$; nous pouvons donc conclure que la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ converge.

Exercice 45 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 0$
Démontrer que, si les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ convergent alors, la série $\sum_{n\geqslant 0} f(u_n)$ converge.

$\Rightarrow$ Comme la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, nous avons, comme toujours, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, et donc, pour $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N$, nous avons $-A \leqslant u_n \leqslant A$

$\Rightarrow$ Nous écrivons la formule de Taylor en 0 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta) \Longleftrightarrow f(x) = xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta)$$

f étant de classe $\mathcal{C}^2$, f'' est donc bornée sur l'intervalle $[-A; +A]$, c'est à dire qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [-A; +A]$, nous avons $|f''(x)| \leqslant M$

$\Rightarrow$ Donc, pour $n \geqslant N$, en appliquant la formule de Taylor à u_n et en utilisant la majoration, nous avons :

$$|f(u_n) - u_n f'(0)| \leqslant M \frac{u_n^2}{2}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ étant convergente, la série $\sum_{n\geqslant 0} (f(u_n) - u_n f'(0))$ est absolument convergente, donc convergente.
Comme, par hypothèse, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, il en est de même de $\sum_{n\geqslant 0} f(u_n)$

3.7.6 Etudes

Exercice 46 :

Partie 1 : Somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$

1. *Le lemme de Riemann-Lebesgue*
   Soient $a \in \mathbb{R}$, et $b \in \mathbb{R}$ tels que que $a < b$. On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a; b]$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t) \sin nt\,dt = 0$

C'est une question classique que nous pouvons résoudre avec les outils vus dans le cours de calcul intégral de L_0. Nous résolvons cette question en utilisant une **intégration par parties**
Posons :

$$\left\{\begin{array}{ll} u = f(t) & u' = f'(t) \\ v' = \sin nt & v = -\dfrac{\cos nt}{n} \end{array}\right\}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\sin nt dt &= \left[-\frac{\cos nt}{n} \times f(t)\right]_a^b + \int_a^b f'(t) \times \frac{\cos nt}{n} dt \\ &= \frac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n} + \int_a^b f'(t) \times \frac{\cos nt}{n} dt\end{aligned}$$

→ Nous avons $0 \leqslant \left|\dfrac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n}\right| \leqslant \dfrac{|f(a)| + |f(b)|}{n}$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|f(a)| + |f(b)|}{n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n}\right| = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n} = 0$

→ Ensuite, $\left|\displaystyle\int_a^b f'(t) \times \frac{\cos nt}{n} dt\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f'(t)| \times \left|\frac{\cos nt}{n}\right| dt \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)| dt$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a;b]$, donc f' est continue sur l'intervalle $[a;b]$ et y est donc bornée. Soit $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$, nous ayions $|f'(x)| \leqslant M$. alors :

$$\left|\int_a^b f'(t) \times \frac{\cos nt}{n} dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)| dt \leqslant \frac{M(b-a)}{n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M(b-a)}{n} = 0$, nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f'(t) \times \frac{\cos nt}{n} dt = 0$

En conclusion, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f'(t) \times \frac{\cos nt}{n} dt = 0$, nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\sin nt dt = 0$

Quod erat demonstratum

2. *Soit t un réel de l'intervalle $]0;\pi]$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kt$*

(a) *Calculer $c_n(t)$ pour $t \in]0;\pi]$*

Nous allons utiliser l'exponentielle complexe : $\cos kt = \dfrac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}$, de telle sorte que :

$$c_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} e^{-ikt}\right)$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}$ est la somme des termes d'une suite géométrique, et donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} = \frac{e^{it}\left(1 - e^{int}\right)}{1 - e^{it}}$

De même, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-ikt} = \frac{e^{-it}\left(1 - e^{-int}\right)}{1 - e^{-it}}$

D'où la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}+e^{-ikt} &= \frac{e^{it}\left(1-e^{int}\right)}{1-e^{it}}+\frac{e^{-it}\left(1-e^{-int}\right)}{1-e^{-it}}\\
&= \frac{\left(e^{it}-1\right)\left(1-e^{int}\right)+\left(e^{-it}-1\right)\left(1-e^{-int}\right)}{2-2\cos t}\\
&= \frac{e^{it}-e^{i(n+1)t}-1+e^{int}+e^{-it}-e^{-i(n+1)t}-1+e^{-int}}{2-2\cos t}\\
&= \frac{2\cos t+2\cos nt-2\cos(n+1)t-2}{2-2\cos t}\\
&= \frac{\cos t-1+\cos nt-\cos(n+1)t}{1-\cos t}\\
&= -1+\frac{\cos nt-\cos(n+1)t}{1-\cos t}
\end{aligned}$$

Les formules trigonométriques classiques donnent :

$$\cos nt-\cos(n+1)t=-2\sin\left(\frac{(n-(n+1)t)}{2}\right)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)=2\sin\frac{t}{2}\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)$$

$$\cos t=1-2\sin^2\frac{t}{2}\iff 1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}$$

Donc, $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\cos kt=-\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}}$

(b) *On pose $c_n(0)=n$. Démontrer qu'alors, c_n est continue sur $[0;\pi]$*

Il est clair que c_n est continue sur $]0;\pi]$. Regardons maintenant $\lim\limits_{t\to0}c_n(t)$

Nous allons plutôt étudier $\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}} &= \left(\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)\times\left(\frac{1}{\frac{t}{2}}\right)\times\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}\right)\times\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\times\frac{1}{2}\\
&= \left(\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)\times\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}\right)\times\left(n+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)=1$ et $\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}\right)=1$, nous avons $\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}=n+\frac{1}{2}$

Ce qui montre que $\lim\limits_{t\to0}c_n(t)=n$. La fonction c_n est bien continue sur $[0;\pi]$

3. *On pose $W_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$*

(a) *Montrer que $W_n=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)c_n(t)\,dt$*

Nous avons $\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)c_n(t)\,dt=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{k=1}^{n}\cos kt\,dt=\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos kt\,dt$

Nous allons calculer $\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos kt\,dt$ par parties.

On pose donc :

$$\left\{\begin{array}{ll} u=\frac{t^2}{2\pi}-t & u'=\frac{t}{\pi}-1\\ v'=\cos kt & v=\frac{1}{k}\sin kt\end{array}\right.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-1\right)\cos kt\,dt &= \left[\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\times\frac{1}{k}\sin kt\right]_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin kt\,dt\\ &= -\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin kt\,dt\end{aligned}$$

Nous faisons une seconde intégration par parties pour calculer $\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin kt\,dt$. Nous posons donc :

$$\begin{cases} u=\frac{t}{\pi}-1 & u'=\frac{1}{\pi}\\ v'=\sin kt & v=\frac{-1}{k}\cos kt\end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin kt\,dt &= \left[\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\times\frac{-1}{k}\cos kt\right]_0^{\pi}+\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos kt\,dt\\ &= -\frac{1}{k}+\frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k}\sin kt\right]_0^{\pi}\\ &= -\frac{1}{k}\end{aligned}$$

D'où $\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos kt\,dt=\frac{1}{k^2}$, et donc $W_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)c_n(t)\,dt$

(b) *Montrer que* $W_n=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\,dt$

De la question précédente qui nous montre que $W_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)c_n(t)\,dt$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}W_n &= \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)c_n(t)\,dt\\ &= \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt\\ &= \int_0^{\pi}-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt+\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right)dt\end{aligned}$$

Il faut donc calculer $\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt$. C'est simple :

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt=\left[\frac{t^3}{6\pi}-\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{6\pi}-\frac{\pi^2}{2}=-\frac{\pi^2}{3}$$

D'où $-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt=\frac{\pi^2}{6}$

Et donc, $\boxed{W_n=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\,dt}$

(c) *Soit la fonction f définie par :*

$$\begin{cases} f:[0\,;\,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x)=\begin{cases} 2 \text{ si } x=0\\ \left(x-\frac{x^2}{2\pi}\right)\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\end{cases}\end{cases}$$

Démontrer que f est continue sur $[0\,;\,\pi]$

Clairement, f est continue sur $]0\,;\,\pi]$ comme produit et composé de fonctions continues sur $]0\,;\,\pi]$. Il faut, maintenant démontrer la continuité en 0, à droite.

Nous allons rechercher $\lim\limits_{x\to0}\left(x-\dfrac{x^2}{2\pi}\right)\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}$. Or :

$$\left(x-\frac{x^2}{2\pi}\right)\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}=\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}=2\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Comme :

- $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{x}{2\pi}\right)=1$
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=1$

Nous déduisons que $\lim\limits_{x\to0}2\left(1-\dfrac{x}{2\pi}\right)\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=2$

f est donc bien continue sur $[0\,;\,\pi]$

(d) *Utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue pour démontrer que*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\,dt=0$$

En fait, nous avons à démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\,dt=0$

En faisant le changement de variables $u=\dfrac{t}{2}$, nous avons : $\displaystyle\int_0^{\pi}f(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(2u)\sin\left((2n+1)\,u\right)\,du$

f est continue sur $[0\,;\,\pi]$, par composée des fonctions continues, $f(2u)$ est continue sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, et donc, d'aporès le lemme de Riemann, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(2u)\sin\left((2n+1)\,u\right)\,du=0$, et donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\,dt=0$$

4. *En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{1}{n^2}$*

De l'égalité $W_n=\dfrac{\pi^2}{6}-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\,dt$, et de l'étude de la limite précédente, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}W_n=\dfrac{\pi^2}{6}$, c'est à dire que $\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$

Partie 2 : Approximation de la limite

1. *Démontrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$ et $k\geqslant2$, nous avons $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\leqslant\dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$*

Voilà une inégalité facile à démontrer. Pour $k\in\mathbb{N}$ et $k\geqslant2$, nous avons :

$$k\,(k-1)\leqslant k^2\leqslant k\,(k+1)\Longleftrightarrow\frac{1}{k\,(k+1)}\leqslant\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{1}{k\,(k-1)}$$

Or, si nous faisons une décomposition en éléments simples, nous avons :

$$\frac{1}{k\,(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\text{ et }\frac{1}{k\,(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

Nous avons donc $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\leqslant\dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$

2. *On considère la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$*

   (a) *Justifier de l'existence de cette somme, et donner $\lim_{n\to+\infty} R_n$*

   On sait que R_n est le reste d'une série numérique convergente, et donc R_n existe et $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$

   (b) *Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $R_n \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{n}$*

   Nous avons $R_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2}$. Des inégalités établies en 1, nous tirons :

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

   Et donc, en effectuant les calculs :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} \leqslant \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{N}$$

   Donc, par passage à la limite, en faisant tendre N vers $+\infty$, nous obtenons :

$$\frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1} \Longleftrightarrow 1 \leqslant nR_n \leqslant \frac{n}{n-1}$$

   En utilisant le théorème des limites par encadrements, nous avons $\lim_{n\to+\infty} nR_n = 1$, c'est à dire $R_n \underset{+\infty}{\simeq} \frac{1}{n}$

3. *Ecrire un algorithme que permette d'approcher la limite aussi précisément que souhaité.*

   Si $\frac{\pi^2}{6}$ est la somme de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$, nous avons $\frac{\pi^2}{6} - W_n = R_{n+1}$ et comme $\frac{1}{n+1} \leqslant R_{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$, l'erreur commise en remplaçant $\frac{\pi^2}{6}$ par R_{n+1} est majorée par $\frac{1}{n}$.
   Ci-dessous, un algorithme donné en langage `Python`

```python
import numpy
import math
def SommeInverseCarres_1(n):
    s,k = 1,1
    Pi=math.pi
    while k<= n:
        k=k+1
        s=s+ 1.0/(k*k)
    return 1./n, s, (Pi*Pi)/6 - s #Donne l'inverse de n, le résultat calculé
                                  #et la différence entre
                                   #la limite et le résultat calculé
```

`SommeInverseCarres_1(100)` nous retourne $\frac{1}{100} = 0.01$, $s = 1,635081929$ et $\frac{\pi^2}{6} - s = 0,00985$

Exercice 47 :

Dans cet exercice, m, n, p et q désignent des entiers naturels.

1. *Prouver que les séries* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *et* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ *sont convergentes.*
   Sont-elles absolument convergentes ?

   Il faut remarquer que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n}}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = -\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}$

   $\Rightarrow$ Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\frac{1}{2n-1}\right)_{n\geqslant 1}$ sont des suites à termes positifs, décroissantes et telles que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n-1} = 0$

   $\Rightarrow$ Donc, d'après le critère de séries alternées, les séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n}}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = -\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}$ sont bien convergentes

   $\Rightarrow$ Sont-elles absolument convergentes ?

   - $\star$ La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est absolument convergente si la série $\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$.

     La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ est la série harmonique, qui diverge. Donc, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ n'est pas absolument convergente.
   - $\star$ De la même manière, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ est absolument convergente si la série $\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right| = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2n-1}$

     En $+\infty$, nous avons $\frac{1}{2n-1} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{2n}$. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2n}$ est une série divergente, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2n-1}$ est une série divergente.

     La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ n'est donc pas absolument convergente.

   Ainsi, aucune des 2 séries proposées n'est absolument convergente.

2. **Calcul de la somme des séries**
   Dans la suite du problème, nous utilisons les sommes partielles, et nous notons, pour $n \geqslant 1$ *:*

   $$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

   On considère, pour tout $p \geqslant 0$*, les intégrales* $I_p = \int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}dx$

   (a) *Calculez* I_0 *et* I_1

   $\Rightarrow$ Calcul de I_0

   Nous avons : $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{2}$

   $\Rightarrow$ Calcul de I_1

   Nous avons : $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$

   (b) *Calculez* $I_p + I_{p+2}$ *en fonction de* p*. En déduire* I_2 *et* I_3

C'est une question qui pose peu de difficulté :

$$I_p + I_{p+2} = \int_0^1 \frac{x^p + x^{p+2}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^p\left(1+x^2\right)}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

D'où :

$\Rightarrow I_0 + I_2 = \dfrac{1}{0+1} = 1 \Longleftrightarrow I_2 = 1 - I_0 \Longleftrightarrow I_2 = 1 - \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow I_1 + I_3 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow I_3 = \dfrac{1}{2} - I_1 = \dfrac{1}{2} - \ln\sqrt{2}$

(c) *Pour $q \geqslant 1$ on appelle $(U_q)_{q\in\mathbb{N}^\star}$ la suite dont le terme général est donné par : $U_q = u_q + 2(-1)^q I_{2q+1}$.*
En calculant $U_{q+1} - U_q$, montrez que la suite $(U_q)_{q\in\mathbb{N}^\star}$ est constante.

Calculons donc $U_{q+1} - U_q$:

$$\begin{aligned}
U_{q+1} - U_q = &\ \left(u_{q+1} + 2(-1)^{q+1} I_{2q+3}\right) - \left(u_q + 2(-1)^q I_{2q+1}\right)\\
= &\ (u_{q+1} - u_q) + 2(-1)^{q+1}\left(I_{2q+3} + I_{2q+1}\right)\\
= &\ \frac{(-1)^{q+2}}{q+1} + 2(-1)^{q+1} \times \frac{1}{2q+2}\\
= &\ \frac{(-1)^q}{q+1} - (-1)^q \times \frac{2}{2q+2}\\
= &\ 0
\end{aligned}$$

Comme $U_{q+1} - U_q = 0$, la suite $(U_q)_{q\in\mathbb{N}^\star}$ est donc constante.

(d) *En déduire que $u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} = \ln 2$*

La suite $(U_q)_{q\geqslant 1}$ étant constante, nous avons, en particulier, pour tout $q \geqslant 1$, $U_q = U_1$. Il faut donc calculer U_1

$$U_1 = u_1 - 2I_3 = 1 - 2\left(\frac{1}{2} - \ln\sqrt{2}\right) = 2\ln\sqrt{2} = \ln 2$$

Donc, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, nous avons $U_q = \ln 2 \Longleftrightarrow u_q = \ln 2 - 2(-1)^q I_{2q+1}$

(e) *On définit $V_q = v_q + (-1)^q I_{2q}$; en utilisant les méthodes décrites dans les 2 questions précédentes, montrer que $v_q + (-1)^q I_{2q} = \dfrac{\pi}{4}$*

$\Rightarrow$ On démontre que la suite $(V_q)_{q\in\mathbb{N}^\star}$ est constante

$$\begin{aligned}
V_{q+1} - V_q = &\ \left(v_{q+1} + (-1)^{q+1} I_{2q+2}\right) - \left(v_q + (-1)^q I_{2q}\right)\\
= &\ (v_{q+1} - v_q) - (-1)^q\left(I_{2q+2} + I_{2q}\right)\\
= &\ \frac{(-1)^{q+2}}{2q+1} - (-1)^q \frac{1}{2q+1}\\
= &\ \frac{(-1)^q}{2q+1} - (-1)^q \frac{1}{2q+1}\\
= &\ 0
\end{aligned}$$

Comme $V_{q+1} - V_q = 0$, la suite $(V_q)_{q\in\mathbb{N}^\star}$ est donc constante.

$\Rightarrow$ Calcul de V_1

La suite $(V_q)_{q\geqslant 1}$ étant constante, nous avons, en particulier, pour tout $q \geqslant 1$, $V_q = V_1$. Il faut donc calculer V_1

$$V_1 = v_1 - I_2 = 1 - \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Donc, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, nous avons $V_q = \dfrac{\pi}{2} \Longleftrightarrow v_q = \dfrac{\pi}{2} - (-1)^q I_{2q}$

(f) *Démontrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} I_p = 0$*

Rien de plus classique !!

Nous avons $I_p = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}dx$, et comme $x \in [0;1]$, nous avons $0 \leqslant \dfrac{x^p}{1+x^2} \leqslant x^p$ et donc :

$$0 \leqslant I_p \leqslant \int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$$

Comme $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p+1} = 0$, nous avons aussi $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} I_p = 0$

(g) *En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$*

$\Rightarrow$ Nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\ln 2 - 2(-1)^n I_{2n+1}\right)$. Comme $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} I_p = 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} 2(-1)^n I_{2n+1} = 0$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\ln 2 - 2(-1)^n I_{2n+1}\right) = \ln 2$
u_n étant la somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, nous avons $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

$\Rightarrow$ De la même manière, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - (-1)^n I_{2n}\right)$. Comme $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} I_p = 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} 2(-1)^n I_{2n} = 0$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - (-1)^n I_{2n}\right) = \frac{\pi}{2}$
v_n étant la somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$, nous avons $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{2}$

En conclusion :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \iff \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

et

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{2} \iff \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \frac{-\pi}{2}$$