10.11 Automorphisme d'un groupe

10.11.1 Rappel

Soit G un groupe. On appelle automorphisme du groupe G un isomorphisme de G sur lui-même

Remarque 43 :

1. L'ensemble des automorphismes de G est noté : $\mathrm{Aut}\,(G)$
2. La composée de 2 automorphismes de G est un automorphisme de G
3. L'application réciproque d'un automorphisme de G est aussi un automorphisme de G
4. L'application identique de G notée Id_G est aussi un automorphisme de groupe
5. Donc $\mathrm{Aut}\,(G)$ muni de la composition des applications est un groupe ; c'est un sous-groupe du groupe de toutes les permutations de G

10.11.2 Théorème de Cayley

Tout groupe G est isomorphe à un groupe de permutations

Démonstration

Soit $a \in G$ et considérons $f_a : G \longrightarrow G$ telle que pour tout $x \in G$, $f_a\,(x) = ax$

1. Pour tout $a \in G$, f_a est une bijection
   La démonstration s'appuie sur 10.2.2 et sur 10.2.6.
   (a) f_a **est injective.**
   En effet, soient $x \in G$ et $y \in G$ tels que $f_a\,(x) = f_a\,(y)$; ceci veut donc dire que $ax = ay$, et donc par les règles de simplifications dans un groupe, nous avons $x = y$.
   f_a est donc injective.
   (b) f_a **est surjective.**
   En effet, soit $y \in G$; existe-t-il $x \in G$ tels que $f_a\,(x) = y$? Ceci veut donc dire que $ax = y$, et donc par les règles de simplifications et d'équations dans un groupe, nous avons $x = a^{-1}y$.
   f_a est donc surjective.
   Donc, pour tout $a \in G$, f_a est une bijection et $(f_a)^{-1} = f_{a^{-1}}$
2. Soit T l'ensemble des fonctions f_a.
   Autrement dit,
   $$T = \{g \in \mathcal{S}_G \text{ telles que il existe } a \in G \text{ tel que } g = f_a\}$$
   $\mathcal{S}_G$ étant le groupe des permutations *(ou bijections)* de G, on montre que T est un sous groupe de $\mathcal{S}_G$
   (a) $T \neq \emptyset$, puisque $\mathrm{Id}_G \in T$; en effet, si $e \in G$ est l'élément neutre de G, alors, pour tout $x \in G$, $f_e\,(x) = ex = x$, et nous avons bien $f_e = \mathrm{Id}_G$, et donc $\mathrm{Id}_G \in T$
   (b) D'autre part, $f_a \circ f_b\,(x) = f_a\,(bx) = abx = f_{ab}\,(x)$, et donc $f_a \circ f_b = f_{ab}$ et la loi de composition des applications est une loi interne.
   (c) Donc $f_a \circ (f_b)^{-1} = f_a \circ f_{b^{-1}} = f_{ab^{-1}}$ et donc $f_a \circ (f_b)^{-1} \in T$
   T est donc un sous groupe de $\mathcal{S}_G$
3. On montre que G et T sont isomorphes
   Soit $\varphi : G \longrightarrow T$ telle que $\varphi\,(a) = f_a$
   (a) φ **est un morphisme**
   En effet, soient $a \in G$ et $b \in G$, alors $\varphi\,(ab) = f_{ab} = f_a \circ f_b = \varphi\,(a) \circ \varphi\,(b)$

(b) φ **est injective**
En effet, soient $a \in G$ et $b \in G$ tels que $\varphi(a) = \varphi(b)$; alors, nous avons, $f_a = f_b$, et donc, pour tout $x \in G$, $f_a(x) = f_b(x)$, ou, ce qui est équivalent, $ax = bx$. Par régularité des éléments dans un groupe (cf 10.2.2), nous avons $a = b$, et donc φ est injective

(c) φ **est surjective**
Voilà une question beaucoup plus simple !
Soit $g \in T$; il existe alors $a \in G$ tel que $g = f_a$, et alors, comme $f_a = \varphi(a)$, on peut écrire qu'il existe $a \in G$ tel que $\varphi(a) = g$
Et donc, φ est surjective

φ est donc un isomorphisme et G est isomorphe à T

Remarque 44 :

Si G est un groupe fini, alors, f_a, qui est une permutation de G est définie par :

$$f_a \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ax_1 & ax_2 & ax_3 & \cdots & ax_n \end{pmatrix}$$

f_a est une translation à gauche

10.11.3 Définition

On appelle représentation d'un groupe G, tout morphisme du groupe G dans un groupe de permutations

Remarque 45 :

1. Un groupe peut avoir plusieurs représentations.
2. **Par exemple,** le groupe diédral Δ_n est, par définition, un groupe de transformations de tous les points des n sommets d'un polygône P_n. La fonction qui associe à toute isométrie de P_n la permutation induite sur les n sommets qui est un élément de $\mathcal{S}_n$ est un isomorphisme de Δ_n sur un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$
   C'est donc une représentaton de Δ_n
   Une autre représentation pourrait être donnée en représentant Δ_n comme isomorphe à un sous groupe T de $\mathcal{S}_{2n}$. C'est le théorème de Cayley qui nous montre cette possibilité en faisant une translation à gauche.

10.11.4 Théorème

Soit G un groupe et $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G.
Pour tout $x \in G$, nous notons α_x l'application suivante :

$$\begin{cases} \alpha_x : G & \longrightarrow & G \\ \quad y & \longmapsto & \alpha_x(y) = xyx^{-1} \end{cases}$$

Alors :

1. Pour tout $x \in G$, $\alpha_x \in \mathrm{Aut}(G)$
2. L'application $x \longmapsto \alpha_x$ est un morphisme de G dans $\mathrm{Aut}(G)$

Démonstration

La démonstration de ces résultats ne pose aucune difficulté.

1. Montrons que pour tout $x \in G$, $\alpha_x \in \mathrm{Aut}(G)$
   Soit $x \in G$.

- On montre que α_x est un morphisme de groupe.
  Soient $g \in G$ et $g' \in G$. Alors :
  $$\alpha_x(gg') = xgg'x^{-1} = xgx^{-1}xg'x^{-1} = \alpha_x(g)\,\alpha_x(g')$$
- On montre que α_x est injective.
  Soit $g \in \ker \alpha_x$; alors :
  $$\alpha_x(g) = e \iff xgx^{-1} = e \iff xg = x \iff g = e$$
  Donc $\ker \alpha_x = \{e\}$ et α_x est injective.
- Soit $g' \in G$. Montrons qu'il existe $g \in G$ tel que $\alpha_x(g) = g'$, c'est à dire tel que $xgx^{-1} = g'$; il est clair que $g = x^{-1}g'x$ convient.

α_x est donc un automorphisme du groupe G, c'est à dire $\alpha_x \in \mathrm{Aut}(G)$.

2. Montrons que l'application $x \longmapsto \alpha_x$ est un morphisme de G dans $\mathrm{Aut}(G)$
   On appelle φ l'application définie par :
   $$\left\{\begin{array}{rcl}\varphi : G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(G)\\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \alpha_x\end{array}\right.$$
   Il faut donc démontrer que $\varphi(xy) = \alpha_{xy} = \alpha_x \circ \alpha_y = \varphi(x) \circ \varphi(y) = \alpha_x \circ \alpha_y$.
   Pour tout $g \in G$,
   $$\alpha_{xy}(g) = xyg(xy)^{-1} = xygy^{-1}x^{-1} = x\left(ygy^{-1}\right)x^{-1} = \alpha_x\left(ygy^{-1}\right) = \alpha_x(\alpha_y(g)) = \alpha_x \circ \alpha_y(g)$$
   Nous avons donc $\alpha_{xy} = \alpha_x \circ \alpha_y$, c'est à dire $\varphi(xy) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$

Remarque 46 :

1. Les automorphismes de G du type α_x sont appelés les automorphismes intérieurs de G, et on note cet ensemble $\mathrm{Int}(G)$
2. L'ensemble des automorphismes intérieurs $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$
3. Si G est un groupe commutatif et $x \in G$, alors, pour tout $g \in G$,
   $$\alpha_x(g) = xgx^{-1} = xx^{-1}g = g$$
   Le seul automorphisme intérieur d'un groupe commutatif est l'identité.
4. **Attention !!** Un groupe commutatif peut avoir d'autre automorphismes que l'identité. On en déduit que l'ensemble des automorphismes intérieurs est bien distinct de $\mathrm{Aut}(G)$, l'ensemble de tous les automorphismes de G
   Par exemple, dans un groupe G commutatif, l'application $h : G \longrightarrow G$ tel que $h(x) = x^{-1}$ est un automorphisme de G qui n'est pas un automorphisme intérieur.

10.11.5 Proposition

Soit G un groupe

1. On appelle centre de G, l'ensemble $\mathrm{Z}(G)$ des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G, c'est à dire :
   $$\mathrm{Z}(G) = \{z \in G \text{ tels que } \forall g \in G\ ,\ zg = gz\}$$
2. On appelle φ l'application définie par :
   $$\left\{\begin{array}{rcl}\varphi : G & \longrightarrow & \mathrm{Int}(G)\\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \alpha_x\end{array}\right.$$
   Alors $\ker \varphi = \mathrm{Z}(G)$

Démonstration

Soit $x \in \ker \varphi$, alors $\varphi(x) = \alpha_x = \mathrm{Id}_G$; ceci veut donc dire que, pour tout $g \in G$:

$$\alpha_x(g) = g \iff xgx^{-1} = g \iff xg = gx \iff x \in \mathrm{Z}(G)$$

On a bien $\ker \varphi = \mathrm{Z}(G)$

Remarque 47 :

1. En particulier, $\mathrm{Z}(G)$ est un sous-groupe de G ; c'est un sous-groupe commutatif et distingué en G
2. D'après 10.7.6 le groupe quotient $G/\mathrm{Z}(G)$ est isomorphe à $\mathrm{Int}(G)$ groupe des automorphismes intérieurs de G.

10.11.6 Théorème

Soient G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe de G.
H est distingué en G si et seulement si H est invariant par tout automorphisme intérieur de G

Démonstration

C'est assez évident. En résumé :

$$H \text{ distingué en } G \iff \text{pour tout } x \in G \ xHx^{-1} = H \iff \text{pour tout } x \in G \ \alpha_x(H) = H$$

Remarque 48 :

C'est pour cette raison, que les sous-groupes distingués sont aussi appelés sous-groupes invariants

Exercice 40 :

Soit G un groupe. Démontrer que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$