10.12 Groupe opérant sur un ensemble

10.12.1 Groupe opérant sur un ensemble : première définition

Soit G un groupe et X un ensemble. On appelle $\mathcal{S}_X$ le groupe des permutations de X.
On dit que G opère dans X lorsque l'on s'est donné un morphisme de groupe de G dans $\mathcal{S}_X$

Remarque 49 :

Soit Φ le morphisme de G dans $\mathcal{S}_X$

1. Si e est l'élément neutre de G, alors $\Phi(e) = \mathrm{Id}_X$ et, pour tout $x \in X$, nous avons
$$\Phi(e)(x) = \mathrm{Id}_X(x) = x$$
2. Si $g_1 \in G$ et $g_2 \in G$ sont 2 éléments de G, alors $\Phi(g_1 g_2) = \Phi(g_1) \circ \Phi(g_2)$, et pour tout $x \in X$,
$$\Phi(g_1 g_2)(x) = \Phi(g_1) \circ \Phi(g_2)(x)$$

10.12.2 Groupe opérant sur un ensemble : seconde définition

On dit qu'un groupe G opère sur un ensemble X lorsqu'on a défini une application f :

$$\begin{array}{rcl} f : G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & f[(g,x)] = gx \end{array}$$

Cette application f est appelée <u>action</u> de $g \in G$ sur $x \in X$ telle que l'on ait, pour tout $x \in X$ et tout $g \in G$:
- $ex = x$
- $(g_1 g_2) x = g_1 (g_2 x)$

Remarque 50 :

Voici une seconde définition, équivalente à la première qui me semble cependant bien moins claire.

Exemple 22 :

1. Si T est un groupe de transformations formé de permutations de l'ensemble X, alors :
$$\begin{array}{rcl} f : T \times X & \longrightarrow & X \\ (t, x) & \longmapsto & f[(t,x)] = t(x) \end{array}$$
définit une action de T sur X
2. Plus généralement, toute représentation $h : G \longrightarrow T$ où T est un sous-groupe de $\mathcal{S}_X$ permet de définir une action de G dans X par :
$$\begin{array}{rcl} f : G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & f[(g,x)] = h(g)[x] \end{array}$$
3. Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ opère sur $\mathbb{N}_n$
4. <u>**Exemples issus de l'algèbre linéaire**</u>
Soient $\mathbb{K}$ un corps *(en général,* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*)*, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'anneau des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
   (a) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ opère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par <u>conjugaison</u> ou <u>similitude</u>, en posant pour tout $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_P : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & S_P(M) = PMP^{-1} \end{array} \right.$$

(b) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ opère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par <u>congruence</u>, en posant pour tout $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} S_P : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & S_P(M) = PMP^t \end{array}\right.$$

où P^t désigne la transposée de P

(c) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ opère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en posant pour tout $P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ et tout $Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} S_P : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & S_P(M) = PMQ^{-1} \end{array}\right.$$

5. **L'application conjugaison ou automorphisme intérieur** φ_g défini pour tout $x \in G$ par $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ définit une action de G sur lui même. On dit que G agit sur lui même par conjugaison.
6. Soit S un sous groupe quelconque de G et $g \in G$; alors, $\varphi_g(S) = gSg^{-1}$ est un sous groupe de G comme image d'un sous-groupe par un automorphisme. En appelant $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-groupes de G, l'application

$$\left\{\begin{array}{rcl} (G \times \mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ (g,S) & \longmapsto & gSg^{-1} \end{array}\right.$$

est une action de G sur $\mathcal{H}$; on dit que G opère dans l'ensemble de ses sous-groupes par conjugaison.

10.12.3 Proposition

Soit G un groupe opérant dans un ensemble X
Soit, dans X, la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff \exists g \in G \text{ tel que } y = gx$$

Alors, $\mathcal{R}$ est une classe d'équivalence
Les classes d'équivalence pour cete relation $\mathcal{R}$ sont appelées <u>orbites</u> de G dans X

<u>**Démonstration**</u>

On vérifie donc que $\mathcal{R}$ vérifie les axiômes de classe d'équivalence.

1. **Elle est réflexive**
   En effet, si $x \in X$, nous avons $ex = x$ et donc $x\mathcal{R}x$
2. **Elle est symétrique**
   En effet, soient $x \in X$ et $y \in X$ tels que $x\mathcal{R}y$; alors, il existe $g \in G$ tel que $y = gx$ ou encore tel que $y = \varphi(g)(x)$ ou $\varphi(g) \in \mathcal{S}_X$; donc $x = (\varphi(g))^{-1}(y)$; comme $\varphi(g)^{-1} = \varphi\left(g^{-1}\right)$, il existe donc $g' = g^{-1}$ tel que $x = g'x$;, et donc $y\mathcal{R}x$
3. **Elle est transitive**
   Soient $x \in X$, $y \in X$ et $z \in X$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$
   Il existe donc $g \in X$ tel que $y = \varphi(g)(x)$ et $g_1 \in X$ tel que $z = \varphi(g_1)(y)$. Donc,

$$\begin{array}{rl} z = & \varphi(g_1)(y) \\ = & \varphi(g_1)(\varphi(g)(x)) \\ = & \varphi(g_1) \circ \varphi(g)(x) \\ = & \varphi(g_1 g)(x) \end{array}$$

   Il existe donc $g' = g_1 g$ tels que $z = g_1 g x$. et nous avons donc $x\mathcal{R}z$. La relation est donc transitive.

Remarque 51 :

1. Soit $x_0 \in X$; alors, l'orbite de x_0 est l'ensemble $\{\varphi(g)(x_0) \text{ où } g \in G\}$, parfois noté Gx_0
2. (a) Lorsqu'un groupe G agit sur lui-même par conjugaison, une orbite est appelée **Classe de conjugaison**.
   (b) Deux éléments de G sont dits **conjugués** lorsqu'ils sont dans la même orbite
   (c) C'est à dire que deux éléments g et g_1 sont conjugués s'il existe un élément $h \in G$ tels que $g_1 = hgh^{-1}$

Exercice 41 :

Montrer que 2 éléments conjugués ont même ordre.

10.12.4 Définition

Soit G un groupe et X un ensemble.
Soit $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ une action de G sur X.

1. On dit qu'un point $x \in X$ est fixe pour un élément $g \in G$ si $\varphi(g)(x) = x$
2. L'ensemble F_x des éléments $h \in G$ laissant fixe x, est appelé stabilisateur de x

$$F_x = \{h \in G \text{ tels que } \varphi(h)(x) = x\}$$

10.12.5 Proposition

Soit $x \in X$ et F_x le stabilisateur de x. Alors, F_x est un sous-groupe de G

Démonstration

1. Premièrement, $F_x \neq \emptyset$, puisque, comme $\varphi(e) = \mathrm{Id}_X$, nous avons $\varphi(e)(x) = x$
2. Soient $g \in F_x$ et $g' \in F_x$ et montrons que $gg' \in F_x$.
   Nous avons :
$$\begin{aligned} \varphi(gg')(x) = & \ \varphi(g) \circ \varphi(g')(x) \\ = & \ \varphi(g)[\varphi(g')(x)] \\ = & \ \varphi(g)(x) \text{ car } g' \in F_x \\ = & \ x \text{ car } g \in F_x \end{aligned}$$
   Donc, $\varphi(gg')(x) = x$ et $gg' \in F_x$
3. Soit $g \in F_x$, et montrons que $g^{-1} \in F_x$
   En effet, $x = \varphi(e)(x) = \varphi(g^{-1}g)(x) = \varphi(g^{-1})[\varphi(g)(x)] = \varphi(g^{-1})(x)$, d'où $x = \varphi(g^{-1})(x)$ et donc $g^{-1} \in F_x$

F_x est donc un sous-groupe de G

10.12.6 Proposition : lien entre stabilisateur et orbites

Soit G un groupe opérant sur un ensemble X dont l'action est notée Φ.
Soit $x \in X$ et F_x le stabilisateur de x. On appelle $\mathcal{O}_x$ l'orbite de x
Soit Ψ l'application ainsi définie :

$$\begin{cases} \Psi : G/F_x & \longrightarrow & \mathcal{O}_x \\ \qquad \dot{g} & \longmapsto & \Psi(\dot{g}) = \Phi(g)(x) \end{cases}$$

Ψ est une bijection entre l'ensemble des classes à gauche modulo le stabilisateur F_x et l'orbite $\mathcal{O}_x$.
En particulier si F_x est d'indice fini dans G, l'orbite $\mathcal{O}_x$ est finie et de cardinal $[G : F_x]$, l'indice de F_x dans G.

Démonstration

1. **Commençons par une remarque**

   Il faut faire attention au fait que l'application Ψ n'est pas un morphisme de groupes : en effet, nous avons $\mathcal{O}_x \subset X$, et, à priori, X n'est pas muni d'une structure algébrique. Par ailleurs le sous-groupe F_x n'est pas supposé distingué dans G.

2. **L'application Ψ est bien définie**

   Il faut, pour cela, montrer que, pour tout $g \in G$ et tout $g_1 \in G$, $\dot{g} = \dot{g_1} \Longrightarrow \Psi(\dot{g}) = \Psi(\dot{g_1})$
   Soient donc $g \in G$ et $g_1 \in G$ tels que $\dot{g} = \dot{g_1}$. Il existe donc $u \in F_x$ tel que $g = g_1 u$ et donc :

   $$\Phi(g)(x) = \Phi(g_1 u)(x) = \Phi(g_1)[\Phi(u)(x)] = \Phi(g_1)(x)$$

   Et donc, $\Psi(\dot{g}) = \Psi(\dot{g_1})$

3. **L'application Ψ est bijective**

   → Elle est injective
   Soient donc $\dot{g} \in G/F_x$ et $\dot{g_1} \in G/F_x$ tels que $\Psi(\dot{g}) = \Psi(\dot{g_1})$.
   Nous avons alors $\Phi(g)(x) = \Phi(g_1)(x) \Longleftrightarrow \Phi\left(gg_1^{-1}\right)(x) = x$, ce qui se traduit par $gg_1^{-1} \in F_x$, et donc, dans G/F_x, nous avons $\overset{\bullet}{\overline{gg_1^{-1}}} = \dot{e}$. Or :

   $$\overset{\bullet}{\overline{gg_1^{-1}}} = \dot{e} \Longleftrightarrow \dot{g}\,\overset{\bullet}{\overline{g_1^{-1}}} = \dot{g}\,(\dot{g_1})^{-1} = \dot{e} \Longleftrightarrow \dot{g} = \dot{g_1}$$

   L'application Ψ est donc bien injective.
   → Elle est surjective
   Soit $y \in \mathcal{O}_x$; il existe alors $g \in G$ tel que $y = \Phi(g)(x)$, c'est à dire tel que $y = \Phi(g)(x) = \Psi(\dot{g})$ l'application Ψ est donc surjective
   Comme Ψ est à la fois injective et surjective, elle est donc bijective

Exercice 42 :

Soit G un groupe d'ordre 21 agissant sur un ensemble E à $n \geqslant 1$ éléments.

1. Quel est le cardinal possible de chaque orbite ?
2. Notons N_i le nombre d'orbites à i éléments, pour $i \geqslant 1$. En utilisant la partition de E en orbites, trouver une relation entre les N_i.

10.12.7 Définition

Soit G un groupe et X un ensemble.
On dit que G opère transitivement sur X quand, pour tout couple de points $(x, y) \in X \times X$, il existe au moins un élément $g \in G$ tel que $y = gx$

Remarque 52 :

Ceci veut donc dire que pour tout $x \in X$, l'orbite de x est X entier. C'est à dire qu'il n'y a qu'une seule orbite laquelle est X

Exercice 43 :

Considérons le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1, c'est à dire :

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ tel que } \det M = 1\}$$

On considère le **demi-plan de Poincaré** :

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

$\mathbb{C}^{\mathcal{H}}$ désigne les applications de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}$

1. On considère l'application $\Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) :\longrightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{H}}$ définie par :

$$\begin{cases} \Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathcal{H}} \\ M & \longmapsto & \Phi(M) \end{cases}$$

où, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\Phi(M)$ est l'application définie par :

$$\begin{cases} \Phi(M) : \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \Phi(M)(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \end{cases}$$

Démontrer que Φ définit une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}$.

2. Quel est le stabilisateur F_i du nombre complexe i de $\mathcal{H}$?
3. Montrer que l'action est transitive

Exercice 44 :

Soit G un groupe opérant dans un ensemble quelconque X. Soient $x \in X$ et $y \in X$, 2 éléments de X dans la même orbite.
Montrer que leurs stabilisateurs F_x et F_y sont conjugués dans G, c'est à dire qu'il existe $g \in G$ tel que $F_y = gF_xg^{-1}$