10.13 Quelques exercices complémentaires

Commençons par quelque chose de simple !!

Exercice 45 :

On considère le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ muni de la multiplication matricielle.

1. L'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ est-il un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$
2. Même question pour l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $ab \neq 1$

Exercice 46 :

Nous considérons les permutations suivantes :

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer les permutations a, b et c en produits de cycles et donner leur ordre
2. En plongeant a, b et c dans $\mathcal{S}_9$, calculez a^{201}, b^{198} et c^{1000}

Exercice 47 :

Cet exercice travaille beaucoup plus sur les structures. Les résultats présentés ici pourraient très bien figurer dans un cours

Soient n un entier plus grand ou égal à 2 et $\mathcal{S}_n$, le groupe symétrique de degré n.

1. Démontrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions
$$(1\,2)\,,(2\,3)\,,\ldots,(n-1\,n)$$
(On montrera d'abord que toute transposition $\tau = (i\,j)$, avec $i \neq j$, est décomposable en produit de transpositions de la forme $(k\,k+1)$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$)
2. En déduire que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions
$$(1\,2)\,,(1\,3)\,,\ldots,(1\,n)$$
3. On pose $t = (1\,2)$ et $c = (1\,2\,3\cdots n)$; calculer c^k et $c^k t c^{-k}$ lorsque $1 \leqslant k \leqslant n-2$ et en déduire que t et c engendrent $\mathcal{S}_n$

Exercice 48 :

Une étude du sous-groupe alterné A_n

Pour $n > 3$ on désigne par $\mathcal{B}_n$ le sous-groupe de A_n engendré par les cycles

$$(1\ 2\ 3)\,,(1\ 2\ 4)\,,\ldots,(1\ 2\ n)$$

1. Montrer que $\mathcal{B}_n$ est un sous-groupe du groupe alterné A_n
2. Démontrer que si i et j sont deux entiers distincts $(i \neq j)$ tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, les permutations $(1\ 2)\,(i\ j)$ et $(i\ j)\,(1\ 2)$ appartiennent à $\mathcal{B}_n$
3. Montrer que $\mathcal{B}_n = A_n$

Exercice 49 :

Soient G_1 et G_2 deux groupes et $G_1 \times G_2$, le groupe produit de G_1 et G_2.
Nous appelons ϖ_1 et ϖ_2 les projections de $G_1 \times G_2$ sur G_1 et G_2 respectivement, c'est à dire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varpi_1 : G_1 \times G_2 & \longrightarrow & G_1 \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & \varpi_1 \left[(g_1, g_2)\right] = g_1 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{rcl} \varpi_2 : G_1 \times G_2 & \longrightarrow & G_2 \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & \varpi_2 \left[(g_1, g_2)\right] = g_2 \end{array} \right.$$

On se donne deux homomorphismes de groupes $u_1 : G \longrightarrow G_1$ et $u_2 : G \longrightarrow G_2$ définis tous deux sur un groupe G, à valeurs dans G_1 et G_2 respectivement.
Montrer qu'il existe un homomorphisme h défini sur G à valeurs dans $G_1 \times G_2$, et un seul, tel que l'on ait $\varpi_1 \circ h = u_1$ et $\varpi_2 \circ h = u_2$.

Exercice 50 :

On considère deux groupes $(G_1, \star)$ et $(G_2, \top)$, deux homomorphismes de groupes f et g définis sur G_1 à valeurs dans G_2 et on appelle H l'ensemble des éléments $x \in G_1$ tels que $f(x) = g(x)$.

1. Montrer que H est un sous-groupe de $(G_1, \star)$.
2. On désigne par h l'injection canonique de H dans G_1
   (a) Montrer que $f \circ h = g \circ h$.
   (b) Montrer que si $(G_3, \diamond)$ est un groupe et h' un homomorphisme défini sur $(G_3, \diamond)$ à valeurs dans $(G_1, \star)$, tel que $f \circ h' = g \circ h'$, alors il existe un homomorphisme $\theta : G_3 \longrightarrow H$ défini sur G_3 à valeurs dans H, et un seul, tel que $h' = h \circ \theta$.

Exercice 51 :

Soient $(G, \star)$ un groupe abélien, G_1 et G_2 deux sous-groupes de G tels que $G_1 \subset G_2$.
Soient $\varpi_1 : G \longrightarrow G/G_1$ et $\varpi_2 : G \longrightarrow G/G_2$ les homomorphismes canoniques de G sur G/G_1 et de G sur G/G_2

1. Montrer qu'il existe un homomorphisme ρ défini sur G/G_1 à valeurs dans G/G_2 et un seul, tel que $\rho \circ \varpi_1 = \varpi_2$
2. Montrer que ρ est surjectif et que son noyau est G_2/G_1

Exercice 52 :

Soient G_0, G_1, G_2 des groupes, $f_1 : G_0 \longrightarrow G_1$, un homomorphisme surjectif de G_0 sur G_1, et $f_2 : G_0 \longrightarrow G_2$, un homomorphisme de G_0 sur G_2, tels que $\ker f_1 \subset \ker f_2$

1. Montrer qu'il existe un homomorphisme $g : G_1 \longrightarrow G_2$ défini sur G_1, à valeurs dans G_2, et un seul, tel que $f_2 = g \circ f_1$
2. Montrer que $\ker g = f_1 (\ker f_2)$

Exercice 53 :

Si $(G, +)$ est un groupe abélien, nous désignerons par $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ l'ensemble des homomorphismes de $\mathbb{Z}$ dans G.

1. Montrer que tout homomorphisme f de $\mathbb{Z}$ dans G est complètement déterminé par la donnée de $f(1)$.
2. On munit $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ de la loi de composition suivante :

   Si $f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ et $g \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G)$, alors $f \oplus g$ est l'application de $\mathbb{Z}$ dans G définie en posant pour chaque entier rationnel $n \in \mathbb{Z}$,

$$(f \oplus g)(n) = f(n) + g(n)$$

   Montrer que $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ devient ainsi un groupe abélien.

3. Soient G_1, G_2 et G_3, trois groupes abéliens, $f_1 : G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorphisme de G_1 dans G_2 et $f_2 : G_2 \longrightarrow G_3$ un homomorphisme de G_2 dans G_3.
   On note f_1^* l'application de $\text{Hom}(\mathbb{Z}, G_1)$ dans $\text{Hom}(\mathbb{Z}, G_2)$ ainsi définie :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} f_1^* : \text{Hom}(\mathbb{Z}, G_1) & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathbb{Z}, G_2) \\ g & \longmapsto & f_1^*(g) = f_1 \circ g \end{array} \right.$$
   On définit de manière analogue f_2^* par
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} f_2^* : \text{Hom}(\mathbb{Z}, G_2) & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathbb{Z}, G_3) \\ g & \longmapsto & f_2^*(g) = f_2 \circ g \end{array} \right.$$
   (a) Montrer que f_1^* et f_2^* sont des homomorphismes.
   (b) Montrer que si $G_1 = G_2$,et si f_1 est l'identité de G_1 alors f_1^* est l'identité de $\text{Hom}(\mathbb{Z}, G_1)$.
   (c) Montrer que $(f_2 \circ f_1)^* = f_2^* \circ f_1^*$
   (d) Montrer que si f_1 est injectif alors f_1^* est injectif.
   (e) Montrer que si f_1 est surjectif alors f_1^* est surjectif.

Exercice 54 :

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans lui-même.

Exercice 55 :

Soient G un groupe abélien et $H \subset G$ un sous-groupe de G tel que le quotient G/H soit un groupe monogène infini.
Montrer qu'il existe un isomorphisme de $H \times (G/H)$ sur G.

Exercice 56 :

Voilà un exercice qui n'a rien de facile et qui nécessite une réelle attention
Soient G un groupe d'élément neutre e.
On appelle **sous-groupe dérivé** de G, que l'on note $\mathcal{D}(G)$ le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ où x et y sont des éléments de G.
Nous avons déjà démontré que $\mathcal{D}(G)$ est un sous-groupe distingué de G et que $G/\mathcal{D}(G)$ est un groupe abélien.

1. Montrer que si f est un homomorphisme de G dans un groupe commutatif H, il existe un homomorphisme $\overline{f}$ de $G/\mathcal{D}(G)$ dans H, et un seul, tel que $f = \overline{f} \circ p$ où p désigne la surjection canonique de G sur $G/\mathcal{D}(G)$
2. En déduire que si K est un sous-groupe distingué de G tel que G/K soit commutatif, alors $K \supset \mathcal{D}(G)$
3. On définit par récurrence le sous-groupe $\mathcal{D}^n(G)$ en posant $\mathcal{D}^0(G) = G$ et pour tout entier naturel n, $\mathcal{D}^{n+1}(G) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^n(G))$.
   Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) Il existe un entier naturel k tel que $\mathcal{D}^k(G) = \{e\}$
   (b) Il existe p sous-groupes $G_1, \dots G_p$ de G tels que
   $$G_0 = G \supset G_1 \supset \cdots \supset G_p \supset G_{p+1} = \{e\}$$
   et pour tout entier q tel que $0 \leqslant q \leqslant p$,G_{q+1} est un sous-groupe distingué de G_q et G_q/G_{q+1} est un groupe commutatif.
   Un groupe G vérifiant ces conditions est appelé un **groupe résoluble.**

Exercice 57 :

Soit G un groupe d'élément neutre e, ayant au moins deux éléments et dont les seuls sous-groupes sont $\{e\}$ et G. Montrer que G est cyclique d'ordre premier.

Exercice 58 :

L'objectif de cet exercice est de démontrer que les seuls groupes d'ordre 6 à isomorphisme près sont $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ et $\mathcal{S}_3$.
Soit donc G un groupe d'ordre 6.

1. Montrer que G possède au moins un élément d'ordre 3. On note x un tel élément.
2. Montrer que G possède au moins un élément d'ordre 2. On note y un tel élément.
3. Montrer que $G = \langle x, y \rangle$
4. Montrer que si G est abélien, alors G est cyclique d'ordre 6.
5. Si G n'est pas abélien, montrer que $yx = x^2y$. Ecrire la table de multiplication de G. Conclure que $G \cong \mathcal{S}_3$
6. Justifier que les groupes $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ et $\mathcal{S}_3$ ne sont pas isomorphes

Exercice 59 :

Exercice où nous montrons que le fait d'être un sous-groupe distingué n'est pas une propriété transitive
Soit Δ_4 un groupe diédral à 8 éléments, de générateurs r et s avec r d'ordre 4, s d'ordre 2 et $rsrs = e$.
On pose $K = \langle s \rangle$ et $H = \left\langle s, r^2 \right\rangle$
Montrer que K est distingué dans H, H est distingué dans Δ_4 mais K n'est pas distingué dans Δ_4.

Exercice 60 :

Soient G un groupe d'ordre $n = pq$, avec $n \geqslant 2$, où p et q sont des nombres premiers, et e son élément neutre.

1. Montrer que G a au moins un sous-groupe distinct de $\{e\}$ et de G.
2. Si H et H' sont deux sous-groupes propres de G tels que $H \neq H'$, montrer que $H \cap H' = \{e\}$.
3. Soit H un sous-groupe de G. On appelle **normalisateur** de H l'ensemble $N(H)$ des éléments $x \in G$ tels que $xHx^{-1} = H$. Montrer que $N(H)$ est un sous-groupe de G.
4. Déterminer $N(H)$ si H est un sous-groupe distingué de G, et montrer que si H n'est pas un sous-groupe distingué de G alors $N(H) = H$.
5. On dit que deux sous-groupes H' et $H"$ de G sont conjugués, et on note $H'\mathcal{C}H"$, si et seulement si il existe un élément $x \in G$ tel que $H" = xH'x^{-1}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-groupes de G.
6. Soit H un sous-groupe de G d'ordre p. Déterminer le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de H modulo $\mathcal{C}$
7. Démontrer que G a au moins un sous-groupe distingué différent de $\{e\}$ et de G.