10.2 Règles de calcul

On étudie, dans cette section, les conséquences des axiômes de groupe

10.2.1 Proposition

Dans tout groupe $(G, *)$, l'élément neutre est unique

Démonstration

Pour le démontrer, nous supposons qu'il y en a 2, e_1 et e_2
Alors, $e_1 * e_2 = e_1$, car e_2 est un élément neutre. De même, $e_1 * e_2 = e_2$, car e_1 est un élément neutre. Nous avons donc

$$e_1 * e_2 = e_1 = e_2$$

10.2.2 Proposition : règles de simplification

Dans un groupe, tout élément est régulier c'est à dire :
Si $(G, *)$ est un groupe, alors, pour tout $a \in G$, tout $b \in G$ et tout $c \in G$,

$$a * b = a * c \Longrightarrow b = c \text{ et } b * a = c * a \Longrightarrow b = c$$

Démonstration

On ne montre qu'une seule de ces règles ; la démonstration de l'autre se fait de façon analogue.
Supposons donc que nous ayions $a * b = a * c$
Soit a^s le symétrique de a, et on multiplie à gauche par ce symétrique :

$$a * b = a * c \Longrightarrow a^s * (a * b) = a^s * (a * c)$$

D'après l'associativité de la loi $*$, nous avons :

$$a^s * (a * b) = a^s * (a * c) \Longleftrightarrow (a^s * a) * b = (a^s * a) * c$$

Or, $a^s * a = e$, c'est à dire $e * b = e * c$ et donc, $b = c$

10.2.3 Proposition

Dans tout groupe $(G, *)$, le symétrique d'un élément quelconque est unique

Démonstration

Soit $(G, *)$ un groupe et $a \in G$
Soient $a_1 \in G$ et $a_2 \in G$, deux symétriques de a.
Alors, nous avons $e = a_1 * a$ et $e = a_2 * a$, c'est à dire $a_1 * a = a_2 * a$.
Des règles de simplification, nous obtenons $a_1 = a_2$

Remarque 4 :

1. Dans un groupe, le symétrique est aussi appelé inverse et lorsque le groupe est noté multiplicativement, l'inverse de a est plutôt noté a^{-1}
2. Un groupe n'étant pas forcément commutatif, on peut penser que l'inverse à droite n'est pas l'inverse à gauche.

10.2.4 Proposition

Dans tout groupe $(G, *)$, l'inverse à droite est aussi l'inverse à gauche

Démonstration

Soit $a \in G$ et a_g l'inverse à gauche de a, et a_d l'inverse à droite de a.
Alors, $a_g * a = e$ et $a * a_d = e$. Considérons l'égalité $a_g * a = e$ et multiplions la à droite par a_d

$$(a_g * a) * a_d = e * a_d = a_d$$

En utilisant l'associativité, nous avons $(a_g * a) * a_d = a_g * (a * a_d) = a_g * e = a_g$
Ainsi, avons nous $a_g = a_d$

10.2.5 Proposition

Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e. Alors

1. $e^{-1} = e$
2. Pour tout $a \in G$, $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$, c'est à dire que l'inverse de a^{-1} est a
3. Pour tout $a \in G$, et tout $b \in G$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Démonstration

1. $e^{-1} = e$
   Comme e est élément neutre, nous avons $e * e = e$, ce qui établit que $e^{-1} = e$
2. Pour tout $a \in G$, $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$
   De même, $a * a^{-1} = e$, et donc ceci établit que $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$
3. Pour tout $a \in G$, et tout $b \in G$, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
   D'après les règles de l'associativité, nous avons :

$$(ab)\left(b^{-1}a^{-1}\right) = a\left(bb^{-1}\right)a^{-1} = a\,(e)\,a^{-1} = aa^{-1} = e$$

10.2.6 Proposition : équations dans un groupe

Soit $(G, *)$ un groupe et soient $a \in G$ et $b \in G$. Alors :
Les équations $x * a = b$ et $a * y = b$, ont, dans G, des solutions uniques qui sont

$$x = b * a^{-1} \text{ et } y = a^{-1} * b$$

Démonstration

Nous ne faisons la démonstration que pour l'équation $x * a = b$; pour l'autre, la démonstration est semblable.
Soient x_1 et x_2 2 solutions de l'équation $x * a = b$; alors $x_1 * a = x_2 * a = b$
De la régularité dans un groupe, on en déduit que $x_1 = x_2$
De plus, on vérifie facilement que, en composant à gauche que $x = b * a^{-1}$ est bien solution de $x * a = b$