10.3 Morphismes de groupes

10.3.1 Définition de morphisme

Soient $(G,*)$ et $(H,\top)$ 2 groupes
On appelle morphisme de groupes ou homomorphisme de groupes, une application de $\varphi : G \longrightarrow H$ telle que

$$(\forall a \in G)\,(\forall b \in G)\,(\varphi\,(a * b) = \varphi\,(a) \top \varphi\,(b))$$

Lorsque la notation des groupes est multiplicative, φ est un morphisme de groupe, si et seulement si :

$$(\forall a \in G)\,(\forall b \in G)\,(\varphi\,(ab) = \varphi\,(a)\,\varphi\,(b))$$

Exemple 7 :

Premiers exemples de morphismes de groupes

1. On doit remarquer que, pour tout groupe $(G,*)$, l'application identique 1_G est bien un morphisme de groupe.
2. La fonction logarithme ln : $(\mathbb{R}^{*+},\times) \longrightarrow (\mathbb{R},+)$ est un morphisme de groupes, car, pour tout $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et tout $b \in \mathbb{R}^{*+}$: $\ln ab = \ln a + \ln b$
3. De même, exp , la fonction réciproque de ln, est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R}^{*+},\times)$
4. Autre exemple, l'exponentielle complexe :

$$\begin{cases} \exp : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad x & \longmapsto & \exp\,(x) = e^{ix} \end{cases}$$

Nous avons $\exp\,(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = \exp\,(x)\exp\,(y)$

Remarque 5 :

Dans la suite, nous utiliserons de manière indifférenciée les mots de morphisme ou d'homomorphisme

10.3.2 Groupe des automorphismes

Soit $(G,*)$ un groupe
On appelle automorphisme d'un groupe $(G,*)$, un morphisme de groupe de $(G,*)$ dans $(G,*)$, bijectif.
L'ensemble des automorphismes de $(G,*)$ dans $(G,*)$ appelé $\mathrm{Aut}\,(G)$ est un groupe pour la composition des applications.

Démonstration

Il est facile de montrer que 1_G est un automorphisme, que si f et g sont des automorphismes, $f \circ g$ en est un aussi. Par contre, montrons que si f est un automorphisme, il en est de même de f^{-1}.
Soient $x \in G$ et $y \in G$; il existe alors $x' \in G$ et $y' \in G$ tels que $x = f\,(x')$ et $y = f\,(y')$. Nous avons alors :

$$x = f\,(x') \Longleftrightarrow x' = f^{-1}\,(x) \;\text{ et }\; y = f\,(y') \Longleftrightarrow y' = f^{-1}\,(y)$$

Donc :

$$\begin{aligned} f^{-1}\,(x*y) &= f^{-1}\,(f\,(x') * f\,(y')) \\ &= f^{-1}\,(f\,(x' * y')) && \text{car } f \text{ est un morphisme} \\ &= x' * y' && \text{car } f \text{ est une bijection} \\ &= f^{-1}\,(x) * f^{-1}\,(y) \end{aligned}$$

f^{-1} et donc un morphisme.

10.3.3 Définition

Soient $(G,*)$ et $(H,\top)$ 2 groupes et $\varphi : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupe

1. φ est un monomorphisme si φ est injectif
2. φ est un épimorphisme si φ est surjectif
3. φ est un isomorphisme si φ est bijectif

10.3.4 Noyau et image d'un morphisme de groupe

Soient G et H deux groupes et $\varphi : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupe

1. L'image de φ, notée $\text{Im}\varphi$ est l'ensemble

$$\text{Im}\varphi = \{y \in H \text{ tels que il existe } x \in G \text{ tel que } y = \varphi(x)\}$$

2. Le noyau de φ, notée $\ker\varphi$ est l'ensemble

$$\ker\varphi = \{x \in G \text{ tels que } \varphi(x) = e\}$$

Remarque 6 :

Le noyau $\ker\varphi$ est donc l'ensemble des antécédents de l'élément neutre $e \in H$

10.3.5 Proposition

Soit $(G_1,*)$, $(G_2,\top)$ et $(G_3,\perp)$ 3 groupes
Soient $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ et $\psi : G_2 \longrightarrow G_3$, 2 morphismes de groupes.
Alors $\psi\circ\varphi : G_1 \longrightarrow G_3$ est un morphisme de groupe

Remarque 7 :

La composée de 2 morphismes de groupes est un morphisme de groupe

Démonstration

Il s'agit de montrer que, pour tout $x \in G_1$ et tout $y \in G_2$,

$$\psi\circ\varphi(x*y) = \psi\circ\varphi(x)\perp\psi\circ\varphi(y)$$

φ est un morphisme de groupe, donc,

$$\psi\circ\varphi(x*y) = \psi[\varphi(x*y)] = \psi[\varphi(x)\top\varphi(y)]$$

ψ est un morphisme de groupe, donc,

$$\psi[\varphi(x)\top\varphi(y)] = \psi[\varphi(x)]\perp\psi[\varphi(y)] = \psi\circ\varphi(x)\perp\psi\circ\varphi(y)$$

Donc, $\psi\circ\varphi(x*y) = \psi\circ\varphi(x)\perp\psi\circ\varphi(y)$. Ce que nous voulions

10.3.6 Proposition

Soient $(G_1,*)$, $(G_2,\top)$ 2 groupes d'éléments neutres respectifs e_1 et e_2
Soit :$\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupes. Alors,

1. $\varphi(e_1) = e_2$
2. Pour tout $x \in G_1$, $\varphi\left(x^{-1}\right) = \varphi(x)^{-1}$

Démonstration

1. Nous avons $e_1 * e_1 = e_1$. Donc, comme φ est un morphisme,
$$\varphi(e_1) = \varphi(e_1 * e_1) = \varphi(e_1) \top \varphi(e_1)$$
Or, $e_2 \top \varphi(e_1) = \varphi(e_1) \top \varphi(e_1)$, et, d'après les règles de simplification, nous avons
$$e_2 = \varphi(e_1)$$
2. Soit $x \in G_1$; alors, $e_1 = x * x^{-1}$. Donc, d'après les propriétés de morphisme de φ
$$\varphi(e_1) = \varphi\left(x * x^{-1}\right) = \varphi(x) \top \varphi\left(x^{-1}\right)$$
C'est à dire, $e_2 = \varphi(x) \top \varphi\left(x^{-1}\right)$. Comme nous avons aussi $e_2 = \varphi(x) \top \varphi(x)^{-1}$, Nous avons aussi, par les règles de simplification
$$\varphi\left(x^{-1}\right) = \varphi(x)^{-1}$$

10.3.7 Théorème

Soient $(G_1, *)$ et $(G_2, \top)$ 2 groupes d'éléments neutres respectifs e_1 et e_2
Soit :$\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorphisme de groupes. Alors :
φ est un morphisme injectif si et seulement si $\ker \varphi = \{e_1\}$

Démonstration

1. **Supposons φ injectif**
Nous allons démontrer que $\ker \varphi = \{e_1\}$
Soit $x \in \ker \varphi$; alors $\varphi(x) = e_2 = \varphi(e_1)$
De l'injectivité de φ, nous déduisons que $x = e_1$
2. **Réciproquement, supposons $\ker \varphi = \{e_1\}$**
Soient $x \in G_1$ et $y \in G_2$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$.
Alors :
$$\varphi(x) = \varphi(y) \Longleftrightarrow \varphi(x)\left[\varphi(y)\right]^{-1} = e_2 \Longleftrightarrow \varphi(x)\,\varphi\left(y^{-1}\right) = e_2 \Longleftrightarrow \varphi\left(xy^{-1}\right) = e_2$$
De là, nous déduisons que $xy^{-1} \in \ker \varphi$ et donc que $xy^{-1} = e_1 \Longleftrightarrow x = y$
φ est donc injective.

Remarque 8 :

Nous avons, bien entendu φ surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\varphi = G_2$

10.3.8 Définition

Soit $(G, *)$ un groupe et $g \in G$. On peut alors définir les puissances de cet élément :
Si $k \in \mathbb{N}$, $g^k = \underbrace{g * g * \cdots * g}_{k \text{ fois}}$ et $g^{-k} = \left(g^k\right)^{-1}$

Remarque 9 :

1. Les exposants ainsi définis vérifient l'équation $g^{m+n} = g^m * g^n$ *(démonstration évidente)*
2. C'est dans ces moments que nous utilisons la notation multiplicative $g^{m+n} = g^m g^n$.
3. Si ces exposants sont négatifs, pour $k \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, les définitions donnent :
   — $g^{-k}g^{-h} = \left(g^k\right)^{-1}\left(g^h\right)^{-1} = \left(g^h g^k\right)^{-1} = \left(g^{h+k}\right)^{-1} = g^{-(h+k)} = g^{-h-k}$
   — $g^{-k}g^n = g^{n-h}$ et $\left(g^k\right)^n = g^{mn}$ et $g^0 = e$

10.3.9 Proposition

Soient $(G_1, *)$, $(G_2, \top)$ 2 groupes et $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme de groupe. Alors,
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $g \in G_1$, nous avons :

$$\varphi\left(g^n\right) = \left(\varphi\left(g\right)\right)^n$$

Démonstration

La démonstration est évidente.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, elle se fait par récurrence sur n
- Si n est un entier négatif, on utilise le fait que $g^n = \underbrace{g^{-1} \cdots g^{-1}}_{-n \text{ fois}}$ et que $\varphi\left(g^{-1}\right) = \left(\varphi\left(g\right)\right)^{-1}$

10.3.10 Théorème

Soit G un groupe noté multiplicativement, de neutre e et $g \in G$.Alors,
1. L'application :
$$\begin{cases} \psi_g : \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ \quad n & \longmapsto & \psi_g\left(n\right) = g^n \end{cases}$$
est un morphisme de groupe
2. De plus, ψ_g est le seul morphisme de groupe de $\mathbb{Z}$ dans G tel que $\psi_g\left(1\right) = g$

Démonstration

1. Que ψ_g soit un morphisme de groupe est évident.
2. Soit $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ un morphisme de groupe. Alors :
   - $\varphi\left(0\right) = e$
   - $\varphi\left(n+1\right) = \varphi\left(n\right)\varphi\left(1\right)$
   - $\varphi\left(-k\right) = \left(\varphi\left(k\right)\right)^{-1}$
   - On montre facilement, par récurrence, que si $n \in \mathbb{Z}$ et si $n > 0$, alors $\varphi\left(n\right) = \varphi\left(1\right)^n$
   - Si $n \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$, alors $\varphi\left(n\right) = \varphi\left(-\left(-n\right)\right) = \left[\varphi\left(-n\right)\right]^{-1}$
     Or, si $n < 0$, alors $-n > 0$, et $\varphi\left(-n\right) = \varphi\left(1\right)^{-n}$, et donc $\varphi\left(n\right) = \left[\varphi\left(1\right)^{-n}\right]^{-1} = \varphi\left(1\right)^n$
   - En posant $g = \varphi\left(1\right)$, le morphisme $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ s'écrit donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi\left(n\right) = g^n$

Remarque 10 :

Dans un groupe noté additivement, l'exposant est remplacé par un multiplicateur, de sorte que l'on ait :

- $0a = 0$
- $\left(n+1\right)a = na + a$
- $\left(-k\right)\left(a\right) = -\left(ka\right)$

Exercice 3 :

On considère le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ et l'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$. Soit $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$ définie par :

$$\begin{cases} \quad f : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right) \\ z = a + ib & \longmapsto & f\left(z\right) = f\left(a+ib\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{cases}$$

Il faut montrer que f est un homomorphisme de groupes multiplicatifs

Exercice 4 :

Soient $(G_1, *)$, $(G_2, \top)$ 2 groupes ; on suppose $(G_2, \top)$ commutatif. Soit $\operatorname{Hom}\left(G_1, G_2\right)$ l'ensemble des homomorphismes de groupes de G_1 dans G_2.
On définit, dans $\operatorname{Hom}\left(G_1, G_2\right)$, la loi $\diamond$ par $\left(f \diamond g\right)\left(x\right) = f\left(x\right) \top g\left(x\right)$
La loi $\diamond$ définit-elle une loi de groupe sur $\operatorname{Hom}\left(G_1, G_2\right)$? Comment la structure de $(G_2, \top)$ intervient-elle ?

Exercice 5 :

1. S_3 est le groupe des permutations d'un ensemble à 3 éléments. Avons nous $(S_3, \circ)$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$?
2. Dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$, on considère l'ensemble $H = \{1, 3, 9, 11\}$. Vérifier que H est un groupe multiplicatif. Rechercher tous les homomorphismes de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ dans $(H, \times)$. Parmi ces homomorphismes, quels sont les isomorphismes ?