10.4 Sous-groupe

10.4.1 Définition

Soit $(G,*)$ un groupe
On appelle sous groupe de $(G,*)$, tout sous ensemble $H \subset G$, non vide, tel que $(H,*)$ soit un groupe

Remarque 11 :

1. Si $(G,*)$ est un groupe, alors $(G,*)$ est un sous-groupe de lui même
2. Soit $e \in G$ le neutre de $(G,*)$; alors $(\{e\},*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$
3. Les sous groupe de $(G,*)$ autres que G et $\{e\}$ sont appelés sous-groupes non triviaux.
4. Si la loi est bien connue, il arrive de ne faire que "sous-entendre" la loi

Exemple 8 :

Exemple de sous-groupe

Re-intéressons nous au carré et à quelques symétries du carré. La figure 10.2 représente les symétries qui vont nous intéresser
Ces symétries sont : $S_{(AC)}$, la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AC), $S_{(BD)}$, la symétrie orthogonale par rapport à la droite (BD) et S_O la symétrie centrale de centre O.
Le sous ensemble $\left(\left\{\text{Id}, S_{(AC)}, S_{(BD)}, S_O\right\}, \circ\right)$ est un sous-groupe du groupe

$$\left(\left\{\text{Id}, R, S_O, R^3, S_{(AC)}, S_{(BD)}, S_{(D_1)}, S_{(D_2)}\right\}, \circ\right)$$

des isométries laissant le carré invariant.

Exercice 6 :

1. Montrez que les entiers pairs forment un sous groupe de $(\mathbb{Z},+)$
2. Que pensez vous de l'ensemble des entiers impairs ?

10.4.2 Proposition : caractérisation des sous-groupes

Soit G un groupe et $H \subset G$ une partie de G. Alors :
H est un sous-groupe de G si et seulement si
- $H \neq \emptyset$
- ET pour tout $x \in H$, pour tout $y \in H$, $xy^{-1} \in H$

Démonstration

1. Supposons H sous groupe de G
   Alors, H est non vide, puisque $e \in H$
   De plus,H étant un groupe, si $y \in H$ alors $y^{-1} \in H$
   Et comme la multiplication est interne, si $x \in H$ et $y \in H$ alors $xy^{-1} \in H$
2. Réciproquement
   Supposons que $H \neq \emptyset$ et que, pour tout $x \in H$, pour tout $y \in H$, $xy^{-1} \in H$
   - Si $H \neq \emptyset$, soit $t \in H$, en écrivant $x = y = t$, $tt^{-1} \in H$ et nous avons bien $e \in H$
   - Si $t \in H$, en faisant $x = e$ et $y = t$, nous avons $et^{-1} = t^{-1} \in H$
   - De plus, la loi est interne, puisque si $t \in H$ et $t' \in H$, $t'^{-1} \in H$, et d'après la propriété supposée de H ,$t\left(t'^{-1}\right)^{-1} = tt' \in H$

Remarque 12 :

Si $\mathcal{S}$ est l'ensemble des sous-groupes de G, l'inclusion ensembliste est une relation d'ordre partiel dans $\mathcal{S}$. C'est un cas particulier des relations d'ordre ensemblistes

10.4.3 Proposition

Soit G un groupe et S et T deux sous-groupes de G. Alors

1. $S \cap T$ est un sous-groupe de G
2. Tout sous-groupe de G contenu à la fois dans S et dans T est un sous groupe de $S \cap T$

Nous avons donc le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dr] & \\ S \cap T \arrow[ur] \arrow[dr] & & G \\ & T \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Démonstration

Soient S et T deux sous-groupes de G.

1. Démontrons que $S \cap T$ est un sous-groupe de G
   — Si e est élément neutre de G, alors $e \in S$ et $e \in T$ et donc $e \in S \cap T$, et donc $S \cap T \neq \emptyset$
   — Soient $x \in S \cap T$ et $y \in S \cap T$, alors $x \in S$ et $y \in S$, et donc $xy \in S$. De même, $x \in T$ et $y \in T$, et donc $xy \in T$
   Donc, $xy \in S \cap T$
   — De même, si $x \in S \cap T$, alors $x^{-1} \in T$ et $x^{-1} \in S$ et donc $x^{-1} \in S \cap T$
   Donc $S \cap T$ est un sous-groupe de G
2. Il est évident que si R sous-groupe de G est inclus dans T et S, alors R est inclus dans $S \cap T$

Remarque 13 :

1. On appelle $\mathcal{U}$ un ensemble quelconque de sous groupes de G. Alors $T = \left(\bigcap_{S \in \mathcal{U}} S\right)$ est un sous-groupe de G, et T se définit par :
$$T = \{x \in G \text{ tels que pour tout } S \in \mathcal{U} \text{ alors } x \in S\}$$
2. Cette construction nous permet de définir ce que sont les générateurs d'un groupe G

10.4.4 Définition de sous-groupe engendré

Soit X un sous-ensemble quelconque du groupe G et soit $\mathcal{U}_X$ l'ensemble des sous-groupes S de G tels que $X \subset S$, c'est à dire des sous-groupes de G qui contiennent X.
Alors, $T = \bigcap_{S \in \mathcal{U}_X} S$ qui est l'intersection de tous les sous-groupes qui contiennent X est un sous-groupe de G ; c'est le plus petit sous-groupe de G contenant X.
On l'appelle sous-groupe engendré par X et on le note : $T = \Gamma(X)$

10.4.5 Proposition

Le sous-groupe de G engendré par le sous-ensemble X est l'ensemble $\Gamma(X)$ formé de l'élément neutre e et des produits $y_1 \cdots y_n$ d'un nombre quelconque $n > 0$ d'éléments $y_i \in X$, chacun d'eux étant un élément de X ou l'inverse d'un élément de X

Démonstration

1. Soit $S = \{y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_n^{\alpha_n} \text{ avec } y_i \in X \text{ et } \alpha_i \in \{+1; -1\}\}$. Nous allons montrer que S est un sous-groupe de G contenant X, et donc $\Gamma(X) \subset S$

(a) Par construction, nous avons, bien entendu $X \subset S$

(b) D'autre part, pour tout $y \in X$, nous avons $e = yy^{-1}$, et donc $e \in S$

(c) Soient $u \in S$ et $v \in S$. Alors :
— $u = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n}$ avec $y_i \in X$ et $\alpha_i \in \{+1; -1\}$
— De même, $v = z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \dots z_n^{\beta_n}$ avec $z_i \in X$ et $\beta_i \in \{+1; -1\}$
Donc, $v^{-1} = z_n^{-\beta_n} \dots z_2^{-\beta_2} z_1^{-\beta_1}$ et $uv^{-1} = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n} z_n^{-\beta_n} \dots z_2^{-\beta_2} z_1^{-\beta_1}$, ce qui montre bien que $uv^{-1} \in S$

Donc S est bien un groupe

2. Réciproquement, $\Gamma(X)$ était un groupe, $e \in \Gamma(X)$ et tout élément $x \in X$, son inverse x^{-1} et tous les produits d'éléments de X et de leurs inverses. Donc $S \subset \Gamma(X)$
3. Donc $S = \Gamma(X)$ et le théorème est démontré.

10.4.6 Proposition

Soit G un groupe. S et T sont 2 sous-groupes quelconques de G. Alors,
Il existe un plus petit sous-groupe de G contenant les deux sous groupes. Autrement dit, il existe un sous groupe L de G, tel que :

$$(S \subset L \text{ et } T \subset L) \text{ tel que, pour tout sous groupe } R \subset G \text{ tel que } (S \subset R \text{ et } T \subset R) \Longrightarrow L \subset R$$

Démonstration

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des sous groupes R de G, contenant à la fois S et T. Alors $L = \bigcap_{R \in \mathcal{L}} R$ répond à la question.

10.4.7 Proposition

Soient G et H deux groupes et $\varphi : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupe. Alors
1. L'image de φ, notée $\operatorname{Im} \varphi$ est un sous-groupe de H
2. Le noyau de φ, notée $\ker \varphi$ est un sous-groupe de G

Démonstration

1. Im φ est un sous-groupe de H
— En appelant $e_G \in G$, l'élément neutre de G et $e_H \in H$, l'élément neutre de H,$\operatorname{Im} \varphi \neq \emptyset$ puisque, comme $\varphi(e_G) = e_H$, $e_H \in \operatorname{Im}\varphi$
— Soient $y_1 \in \operatorname{Im} \varphi$ et $y_2 \in \operatorname{Im}\varphi$, montrons que $y_1 \times y_2^{-1} \in \operatorname{Im}\varphi$.
Il existe donc $x_1 \in G$ et $x_2 \in G$ tels que $\varphi(x_1) = y_1$ et $\varphi(x_2) = y_2$. Donc :
$$\begin{aligned} y_1 \times y_2^{-1} &= \varphi(x_1) \times \varphi(x_2)^{-1} \\ &= \varphi(x_1) \times \varphi\left(x_2^{-1}\right) \text{ parce que c'est un morphisme} \\ &= \varphi\left(x_1 \times x_2^{-1}\right) \text{ parce que c'est un morphisme} \end{aligned}$$
Donc, $y_1 \times y_2^{-1} = \varphi\left(x_1 \times x_2^{-1}\right)$. Comme G est un groupe, $x_1 \times x_2^{-1} \in G$, et donc $y_1 \times y_2^{-1} \in \operatorname{Im} \varphi$
Im φ est donc un sous-groupe de H
2. $\ker \varphi$ est un sous-groupe de G
Nous reprenons les items de la démonstration ci-desus
— En appelant $e_G \in G$, l'élément neutre de G et $e_H \in H$, l'élément neutre de H,$\ker \varphi \neq \emptyset$ puisque, comme $\varphi(e_G) = e_H$, $e_g \in \ker \varphi$
— Soient $x_1 \in \ker \varphi$ et $x_2 \in \ker \varphi$, montrons que $x_1 \times x_2^{-1} \in \operatorname{Im}\varphi$.
Nous avons donc $\varphi(x_1) = e_H$ et $\varphi(x_2) = e_H$. Donc :
$$\begin{aligned} \varphi\left(x_1 \times x_2^{-1}\right) &= \varphi(x_1) \times \varphi\left(x_2^{-1}\right) \text{ parce que c'est un morphisme} \\ &= \varphi(x_1) \times \varphi(x_2)^{-1} \text{ toujours parce que c'est un morphisme} \\ &= e_H \times e_H = e_H \end{aligned}$$

Donc, $y\varphi\left(x_1 \times x_2^{-1}\right) = e_H$. et $x_1 \times x_2^{-1} \ker\varphi$.
$\ker\varphi$ est donc un sous-groupe de H

Remarque 14 :

En particulier, si $\varphi : G \longrightarrow H$ est un morphisme de groupe, l'image d'un sous groupe $G' \subset G$ par φ est un sous groupe de H.
(La démonstration de cette remarque est un excellent exercice)

Exemple 9 :

Groupe spécial linéaire
On considère $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ est mis pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ensemble des matrices carrées d'ordre n dont le déterminant est non nul. L'application déterminant, notée det : $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^*$ est un morphisme de groupe : pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
Le noyau du morphisme déterminant det est constitué des matrices de déterminant 1. Les matrices de déterminant 1 forment donc un sous groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, appelé **Groupe spécial linéaire** et noté $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$
Le groupe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ est donc le groupe des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de déterminant 1

10.4.8 Exercices

Exercice 7 :

Soit $(G,*)$ un groupe. Le centre de $(G,*)$ est l'ensemble $Z(G)$ des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G, autrement dit :

$$Z(G) = \{x \in G \text{ tels que pour tout } y \in G\ x * y = y * x\}$$

Il faut montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G,*)$

Exercice 8 :

$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On considère les matrices $g(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
Soit $G = \{g(a,b) \text{ avec } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ et } |a| \neq |b|\}$. Démontrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

Exercice 9 :

1. Comment considérer $\mathcal{S}_3$ comme sous groupe de $\mathcal{S}_4$?
2. Plus généralement, soit X un sous-ensemble d'un ensemble Y fini. Pouvons nous considérer $\mathcal{S}_X$ comme sous groupe de $\mathcal{S}_Y$?

Exercice 10 :

1. Soit $H = \{2^n \text{ où } n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $(H,\times)$ est un sous groupe de $(\mathbb{Q}^*,\times)$
2. Même question pour $H' = \left\{\dfrac{1+2m}{1+2n} \text{ où } n \in \mathbb{Z} \text{ et } m \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 11 :

1. Montrer que $\Gamma_b = \left\{\dfrac{a}{b^n} \text{ où } a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{Z}\right\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{Q},+)$
2. On appelle **ensemble des nombres décimaux** le sous ensemble $\mathbb{D}$ de $\mathbb{Q}$ défini par :

$$\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^n} \text{ où } a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\right\}$$

   (a) $\mathbb{D}$ est-il un sous groupe du groupe additif $(\mathbb{Q},+)$
   (b) $\mathbb{D}$ est-il un sous groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{Q}^*,\times)$