10.5 Relation d'équivalence modulo un sous-groupe

DANS CETTE SECTION, NOUS REPRENONS ET APPROFONDISSONS DES NOTIONS VUES EN L_1 ; NOUS ALLONS COMMENCER PAR TRAVAILLER UN EXEMPLE : LES SOUS-GROUPES DE $\mathbb{Z}$

Etude des sous-groupes de $\mathbb{Z}$

On sait que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe additif. L'objet de ce qui suit est de s'intéresser aux sous groupes de $\mathbb{Z}$

10.5.1 Définition

Soit $m \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des multiples de m est défini par :

$$m\mathbb{Z} = \{u \in \mathbb{Z} \text{ tel qu'il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } u = mk\}$$

Remarque 15 :

1. Nous avons, de manière évidente $m\mathbb{Z} = -m\mathbb{Z}$. Nous allons donc, désormais, ne considérer que des ensembles du type $m\mathbb{Z}$ avec $m \in \mathbb{N}$
2. Pour $b \in \mathbb{Z}$, on définit l'ensemble $m\mathbb{Z} + b$ par :

$$m\mathbb{Z} + b = \{u \in \mathbb{Z} \text{ tel qu'il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } u = mk + b\}$$

Exercice 12 :

Confirmez ou infirmez les égalités suivantes :

1. $3\mathbb{Z} + 2 = 3\mathbb{Z}$
2. $2\mathbb{Z} + 4 = 2\mathbb{Z}$
3. $5\mathbb{Z} + 25 = 5\mathbb{Z}$
4. $7\mathbb{Z} + 7\mathbb{Z} = 7\mathbb{Z}$

10.5.2 Théorème

Les sous groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont tous de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{N}$
Les seuls sous groupes de $\mathbb{Z}$ sont donc les ensembles de multiples

Démonstration

1. Soit $a \in \mathbb{N}$ Montrons que $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$
   (a) Premièrement, $a\mathbb{Z} \neq \emptyset$, puisque $0 \in a\mathbb{Z}$
   (b) Soient $x \in a\mathbb{Z}$ et $y \in a\mathbb{Z}$, alors, nous avons $x = ak$ et $y = ak'$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ Donc :

   $$x - y = ak - ak' = a(k - k')$$

   Ce qui montre que $x - y$ est un multiple de a et que $x - y \in a\mathbb{Z}$

   Nous en concluons que $a\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$
2. Réciproquement, soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$
   Tout d'abord, $0 \in H$.
   Soit $a \in H$; alors, de la structure de groupe de H, on déduit que $-a \in H$. Soit donc a le plus petit élément positif de H. Alors, tout multiple de a est dans H.
   Soit $k \in H$. Effectuons la division euclidienne de k par a :

   $$k = qa + r \text{ avec } 0 \leqslant r < a$$

   Or, $r = k - qa$ est dans H, ce qui contredit le fait que si $r \neq 0$, a soit le plus petit élément positif de H ; donc $r = 0$ et $k = qa$
   H est donc l'ensemble des multiples de a

10.5.3 Proposition

La relation $\equiv$ définie dans $\mathbb{Z}$ par
$$x \equiv y\,[n] \iff x - y \in n\mathbb{Z}$$
est une relation d'équivalence.
C'est la relation de congruence modulo n
Cette relation est compatible avec l'addition dans $\mathbb{Z}$, c'est à dire :
$$(\forall z \in \mathbb{Z})\;(x \equiv y\,[n] \Longrightarrow x + z \equiv y + z\,[n])$$

Démonstration

La démonstration est évidente

Remarque 16 :

$x \equiv y\,[n] \iff x - y \in n\mathbb{Z}$, c'est à dire qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = qn \iff x = qn + y$. On reconnaît là, la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ On appelle $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient donc n éléments. Donc :
$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{n\mathbb{Z} + 0; n\mathbb{Z} + 1; \dots; n\mathbb{Z} + (n-1)\} = \left\{\dot{0}; \dot{1}; \dots; \dot{\overline{(n-1)}}\right\}$$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ muni de l'addition est un groupe ; c'est un groupe fini à n éléments.

Exemple 10 :

1. Etudions la congruence modulo 6, en faisant la table d'addition.

$+$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$

2. Il y a, dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, deux sous-groupes : $\{\dot{0}, \dot{2}, \dot{4}\}$ et $\{\dot{0}, \dot{3}\}$

Généralisation

10.5.4 Notations

Soit G un groupe *(non forcément commutatif)* et $H \subset G$ un sous-ensemble de G. Dans cette section nous noterons, pour $x \in G$:
$$xH = \{z \in G \text{ tel que } z = xy \text{ où } y \in H\} \text{ et } Hx = \{z \in G \text{ tel que } z = yx \text{ où } y \in H\}$$

Remarque 17 :

Que se passe-t-il dans $(\mathbb{Z}, +)$? En fait, si $p\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ nous avons xH se traduit par
$$x + p\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{Z} \text{ tel que } z = x + py \text{ où } y \in \mathbb{Z}\}$$

10.5.5 Définition

Soit G un groupe et $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence sur G.

1. On dit que $\mathfrak{R}$ est régulière à gauche si
$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,(\forall z \in G)\,((x\mathfrak{R}y) \Longrightarrow (zx\mathfrak{R}zy))$$
2. On dit que $\mathfrak{R}$ est régulière à droite si
$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,(\forall z \in G)\,((x\mathfrak{R}y) \Longrightarrow (xz\mathfrak{R}yz))$$

$\mathfrak{R}$ est dite régulière si elle est à la fois régulière à droite et régulière à gauche

10.5.6 Proposition

Soit G un groupe d'élément neutre e et $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence régulière à gauche sur G
Alors $\dot{e}$ est un sous groupe de G

Démonstration

1. Tout d'abord, $\dot{e} \neq \emptyset$ puisque $e \in \dot{e}$
2. Soit $y \in \dot{e}$. Alors, nous avons $y\mathfrak{R}e$
De la régularité à gauche de $\mathfrak{R}$, nous avons $y\mathfrak{R}e \Longrightarrow y^{-1}y\mathfrak{R}y^{-1}e$, c'est à dire $y^{-1}\mathfrak{R}e$ et donc $y^{-1} \in \dot{e}$.
Ainsi, si $y \in \dot{e}$, alors $y^{-1} \in \dot{e}$
3. Soient $x \in \dot{e}$ et $y \in \dot{e}$; alors, nous avons $x\mathfrak{R}e$ et $y\mathfrak{R}e$
De la régularité à gauche de $\mathfrak{R}$, nous avons $y\mathfrak{R}e \Longrightarrow y^{-1}x\mathfrak{R}y^{-1}e$, c'est à dire $y^{-1}x\mathfrak{R}y^{-1}$. Comme $y^{-1} \in \dot{e}$, c'est à dire $y^{-1}\mathfrak{R}e$, par transitivité de la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$, nous avons $y^{-1}x\mathfrak{R}e$, c'est à dire $y^{-1}x \in \dot{e}$

Donc $\dot{e}$ est un sous groupe de G

Remarque 18 :

De la même manière, si $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence régulière à droite sur G, $\dot{e}$ est un sous groupe de G. *(Démonstration sans difficulté)*

10.5.7 Proposition

Soit G un groupe et $H \subset G$, un sous-groupe de G.
Soit $\mathfrak{R}$ la relation ainsi définie :
$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,(x\mathfrak{R}y) \Longleftrightarrow \left(x^{-1}y \in H\right)$$
Alors, $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence

Démonstration

1. **Réflexivité**
Soit $x \in G$; alors $xx^{-1} = e \in G$ et donc $x\mathfrak{R}x$
2. **Symétrie**
Soient $x \in G$ et $y \in G$ tels que $x\mathfrak{R}y$.
Alors, par la définition de $\mathfrak{R}$, $x^{-1}y \in H$. H étant un sous groupe de G, alors l'inverse de $x^{-1}y$ est aussi dans H, et donc nous avons :
$$x\mathfrak{R}y \Longleftrightarrow x^{-1}y \in H \Longleftrightarrow \left(x^{-1}y\right)^{-1} \in H \Longleftrightarrow y^{-1}x \in H \Longleftrightarrow y\mathfrak{R}x$$
Et donc, $\mathfrak{R}$ est symétrique

3. **Transitivité**
   Soient $x \in G$, $y \in G$ et $z \in G$ tels que $x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}z$. Alors :
   — $x\mathfrak{R}y$ est équivalent à $x^{-1}y \in H$
   — $y\mathfrak{R}z$ est équivalent à $y^{-1}z \in H$
   H étant un sous-groupe, le produit de 2 éléments de H est encore un élément de H, et donc $\left(x^{-1}y\right)\left(y^{-1}z\right) \in H$; c'est à dire $x^{-1}z \in H$, et donc, nous avons $x\mathfrak{R}z$.
   La relation $\mathfrak{R}$ est donc transitive

En conclusion, la relation $\mathfrak{R}$ est bien une relation d'équivalence.

Remarque 19 :

La définition de la relation définie en 10.5.7 est équivalente à $(x\mathfrak{R}y) \Longleftrightarrow \left(y^{-1}x \in H\right)$, puisque $y^{-1}x$ est l'inverse de $x^{-1}y$ et que H est un sous-groupe de G.

Exemple 11 :

Le premier exemple de telle relation est la relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$ liée à la congruence modulo n :

$$x \equiv y \quad [n] \Longleftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$$

10.5.8 Proposition

Soit G un groupe et $H \subset G$, un sous-groupe de G. Soit $\mathfrak{R}$ la relation définie en 10.5.7.
Alors $\mathfrak{R}$ est régulière à gauche

Démonstration

Soient $x \in G$ et $y \in G$ tels que $x\mathfrak{R}y$; alors $x^{-1}y \in H$
Soit $z \in G$; alors $x^{-1}y = x^{-1}z^{-1}zy$ et donc $x^{-1}z^{-1}zy \in H$. Comme $x^{-1}z^{-1} = (zx)^{-1}$, nous avons alors $(zx)^{-1}zy \in H$, c'est à dire $zx\mathfrak{R}zy$
$\mathfrak{R}$ est donc régulière à gauche

Remarque 20 :

Soit G un groupe et $H \subset G$ sous-groupe de G ; on définit la relation $\mathfrak{S}$ par :

$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,(x\mathfrak{S}y) \Longleftrightarrow \left(xy^{-1} \in H\right)$$

Alors, $\mathfrak{S}$ est aussi **une relation d'équivalence**, mais régulière à droite.

10.5.9 Proposition

Soit G un groupe et $H \subset G$, un sous-groupe de G. Soit $\mathfrak{R}$ la relation définie en 10.5.7.
Alors H est la classe d'équivalence de l'élément neutre e

Démonstration

— Soit $\dot{e}$ la classe de e et $x \in \dot{e}$. Alors, $e\mathfrak{R}x$, c'est à dire $e^{-1}x \in H$; comme $e^{-1}x = x$, nous avons $x \in H$; nous en déduisons $\dot{e} \subset H$
— Soit $x \in H$; alors, comme H est un sous groupe, $x^{-1} \in H$; comme $x^{-1} = x^{-1}e$, nous avons $x^{-1}e \in H$ et donc $x\mathfrak{R}e$ et donc $x \in \dot{e}$; nous en déduisons $H \subset \dot{e}$

En conclusion, $H = \dot{e}$

Remarque 21 :

On démontrerait de même, que dans la relation d'équivalence $\mathfrak{S}$, H est aussi la classe d'équivalence de l'élément neutre e

10.5.10 Proposition

Soit G un groupe et $H \subset G$, un sous-groupe de G. Soit $\mathfrak{R}$ la relation définie en 10.5.7.
Alors la classe d'équivalence de $y \in G$ est yH

Démonstration

Soit $\dot{y}$ la classe de y.

1. Soit $x \in \dot{y}$; alors $x\mathfrak{R}y$ et donc $y^{-1}x \in H$, c'est à dire qu'il existe $z \in H$ tel que $y^{-1}x = z$ et donc $yy^{-1}x = yz$, c'est à dire $x = yz$ et donc $x \in yH$
   Nous avons donc $\dot{y} \subset yH$
2. Soit $u \in H$; alors $u\mathfrak{R}e$ et donc, par régularité à gauche de $\mathfrak{R}$, nous avons $yu\mathfrak{R}y$; et donc $yu \in \dot{y}$; c'est à dire $yH \subset \dot{y}$

Nous avons donc $\dot{y} = yH$

Remarque 22 :

1. Pour $\mathfrak{S}$ la relation d'équivalence, il est facile de démontrer que la classe d'équivalence de $y \in G$ est Hy
2. Il est évident que le plus souvent, les ensembles yH ou Hy ne sont pas des sous-groupes
3. $\Rightarrow$ Il y a une correspondance biunivoque entre les sous-groupes $H \subset G$ et les relations d'équivalence régulière à gauche.
   $\Rightarrow$ De même, il y a une correspondance biunivoque entre les sous-groupes $H \subset G$ et les relations d'équivalence régulière à droite.
   $\Rightarrow$ En définitive, à tout sous-groupe H, est attaché une relation d'équivalence régulière à gauche, et une relation d'équivalence régulière à droite. Elles sont, en général, différentes si G n'est pas abélien

10.5.11 Proposition

Soient G un groupe et $H \subset G$, un sous-groupe de G
Alors, il existe une bijection de l'ensemble des classes à droite modulo H sur l'ensemble des classes à gauche modulo H, et donc, si G est un groupe d'ordre fini :

$$\text{Card } G/\mathfrak{S} = \text{Card } G/\mathfrak{R}$$

Démonstration

Soit $\varphi : G/\mathfrak{R} \longrightarrow G/\mathfrak{S}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi : G/\mathfrak{R} & \longrightarrow & G/\mathfrak{S} \\ xH & \longmapsto & \varphi(xH) = Hx^{-1} \end{array} \right.$$

1. φ est injective
   Supposons que $\varphi(xH) = \varphi(yH)$, c'est à dire $Hx^{-1} = Hy^{-1}$; il faut montrer que $xH = yH$
   Si $Hx^{-1} = Hy^{-1}$, alors $x^{-1}\mathfrak{S}y^{-1}$ et donc, $x^{-1}\left(y^{-1}\right)^{-1} \in H$, c'est à dire $x^{-1}y \in H$.
   Nous avons donc $x\mathfrak{R}y$ et donc $xH = yH$
2. φ est surjective
   Soit $Hy \in G/\mathfrak{S}$; alors, $y^{-1}H$ est tel que $\varphi\left(y^{-1}H\right) = Hy$
   φ est donc surjective

φ étant injective et surjective, est donc bijective.
Si G est fini, $G/\mathfrak{S}$ et $G/\mathfrak{R}$ sont des ensembles finis qui sont en bijection et qui ont donc le même nombre d'éléments, c'est à dire Card $G/\mathfrak{S}$ = Card $G/\mathfrak{R}$

10.5.12 Définition

Soit G un groupe fini et $H \subset G$ un sous groupe de G.
Le nombre de classes d'équivalence modulo H (c'est à dire Card $G/\mathfrak{R} = $ Card $G/\mathfrak{S}$) s'appelle indice de H en G
On le note : $i(H) = [G : H]$

10.5.13 Théorème de Lagrange

1. L'ordre d'un groupe est le nombre d'éléments de ce groupe (cf 10.8.1)
2. Soit G un groupe d'ordre fini et $H \subset G$ un sous-groupe de G
   Alors, l'ordre du sous-groupe divise l'ordre du groupe

Démonstration

Soit $\mathfrak{R}$ la relation d'équivalence modulo H et $G/\mathfrak{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence.

1. $G/\mathfrak{R}$ est un ensemble fini ; soit $i = [G : H]$ son cardinal *(c'est l'indice de H en G)*
2. $G/\mathfrak{R}$ forme une partition de G
3. Chaque élément de $G/\mathfrak{R}$ est de type xH, avec $x \in G$ et est un ensemble de même cardinal que H
4. Donc, si $G/\mathfrak{R} = \{x_1H, \cdots, x_iH\}$, nous avons :
$$G = \bigcup_{k=1}^{i} x_kH \text{ et si } k \neq k', x_kH \cap x'_kH = \emptyset$$
   Donc, $\text{card}\, G = i \times \text{Card } H$

L'ordre de H divise donc l'ordre de G

Remarque 23 :

1. Nous avons donc : Card $G = [G : H] \times$ Card H
2. On dit souvent, pour les groupes finis :

L'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe

Exercice 13 :

Soient H et K deux sous-groupes finis d'un groupe G d'élément neutre e. Si H et K sont d'ordres premiers entre eux, montrer que $H \cap K = \{e\}$.

10.5.14 Applications du théorème de Lagrange

Soit G un groupe fini.

1. Soient $S \subset G$ et $T \subset G$, 2 sous groupes de G tels que $S \subset T$. Alors :
$$[G : S] = [G : T] \times [T : S]$$
2. Soient $H \subset G$ et $K \subset G$, 2 sous-groupes de G. Alors :
$$\text{Card } KH = \frac{\text{Card } H \times \text{Card } K}{\text{Card } H \cap K}$$
   Où $KH = \{g \in G \text{ tel qu'il existe } h \in H \text{ et } k \in K \text{ tels que } g = hk\}$

Démonstration

Ces applications peuvent être considérées comme des exercices résolus

1. Montrons le premier point
   En utilisant le théorème de Lagrange, nous avons :
   - ⋆ Card T = Card $S \times [T : S]$
   - ⋆ Card G = Card $T \times [G : T]$
   - ⋆ Card G = Card $S \times [G : S]$

   Ce qui nous donne :
   $$\text{Card } S \times [G : S] = \text{Card } T \times [G : T] = \text{Card } S \times [T : S] \times [G : T]$$
   On peut alors simplifier par Card S, qui est non nul, et nous obtenons : $[G : S] = [T : S] \times [G : T]$
   Ce que nous voulions
2. Montrons que Card $KH = \dfrac{\text{Card } H \times \text{Card } K}{\text{Card } H \cap K}$
   (a) G étant fini, il en est de même de H, de K et de $H \cap K$. Comme $(H \cap K) \subset K$, considérons les classes d'équivalence à gauche modulo $H \cap K$:
   $$k_1 (H \cap K), k_2 (H \cap K), \cdots, k_n (H \cap K)$$
   où $n = [K \cap K : H]$, et nous avons Card K = Card $(H \cap K) \times [K \cap K : H]$
   (b) Nous allons montrer que les ensembles $k_1 H, k_2 H, \cdots, k_n H$ forme une partition de KH
   Si nous montrons cela, alors Card $KH = n \times$ Card $H = [K \cap K : H] \times$ Card H. Comme $[K \cap K : H] = \dfrac{\text{Card } K}{\text{Card } (H \cap K)}$, nous avons :
   $$\text{Card } KH = [K \cap K : H] \times \text{Card } H = \frac{\text{Card } K}{\text{Card } (H \cap K)} \times \text{Card } H = \frac{\text{Card } K \text{Card } H}{\text{Card } (H \cap K)}$$
   Ce que nous voulons.
   i. Montrons que $\bigcup\limits_{j=1}^{n} k_j H = KH$
   — Soit $u \in \bigcup\limits_{j=1}^{n} k_j H$
   Alors, il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $u \in k_j H$; il existe donc $x \in H$ tel que $u = k_j x$. Donc $u \in KH$, et donc $\bigcup\limits_{j=1}^{n} k_j H \subset KH$
   — Réciproquement, soit $g \in KH$; alors, il existe $k \in K$ et $h \in H$ tels que $g = kh$. Comme les $k_1 (H \cap K), k_2 (H \cap K), \cdots, k_n (H \cap K)$ forment une partition de K, il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $k = k_j \lambda$ où $\lambda \in H \cap K$, et donc $g = k_j \times \lambda \times h$. Comme $\lambda h \in H$, nous avons $g \in k_j H$ et donc $g \in \bigcup\limits_{j=1}^{n} k_j H$, et ainsi, nous avons $KH \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} k_j H$
   Nous en déduisons que $\bigcup\limits_{j=1}^{n} k_j H = KH$
   ii. Démontrons, maintenant que si $i \neq j$, alors $k_i H \cap k_j H = \emptyset$
   Soit $z \in k_i H \cap k_j H$. Il existe alors $h_1 \in H$ et $h_2 \in H$ tels que $z = k_i h_1 = k_j h_2$. Or :
   $$k_i h_1 = k_j h_2 \iff (k_j)^{-1} k_i = h_2 (h_1)^{-1}$$
   Nous avons alors $(k_j)^{-1} k_i \in K \cap H$, ce qui qous-entend, que, dans la relation d'équivalence définie dans le groupe K, modulo $H \cap K$, nous avons $k_i \mathfrak{R} k_j$, c'est à dire $k_i (H \cap K) = k_j (H \cap K)$, ce qui est contradictoire.
   Donc $k_i H \cap k_j H = \emptyset$

   Donc, la famille d'ensembles $k_1 H, k_2 H, \cdots, k_n H$ forme une partition de KH

   Et donc, Card $KH = \dfrac{\text{Card } H \times \text{Card } K}{\text{Card } H \cap K}$

Remarque 24 :

1. Attention!! Si $H \subset G$ et $K \subset G$, KH ou HK ne sont pas forcément des sous-groupes de G
2. Nous pourrions démontrer, de la même manière que $\text{Card } HK = \dfrac{\text{Card } H \times \text{Card } K}{\text{Card } H \cap K}$

Exercice 14 :

$\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de dimension n et à coefficients réels. $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est le sous groupe des matrices de déterminants strictement positifs. Montrer que $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est d'indice 2 dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$

Exercice 15 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on appelle $F_n = \left\{q = \dfrac{a}{n} \text{ où } a \in \mathbb{Z}\right\}$

1. Démontrer que F_n est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ contenant $\mathbb{Z}$
2. Quel est l'indice $[F_n : \mathbb{Z}]$ de $\mathbb{Z}$ dans F_n

Exercice 16 :

1. $(2\pi\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$. On considère la relation d'équivalence modulo $2\pi\mathbb{Z}$, vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$x\mathcal{R}y \iff x - y \in 2\pi\mathbb{Z} \iff x = y + k \times 2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

   L'ensemble des classes d'équivalence $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est l'intervalle $[0; 2\pi[$
   La relation d'équivalence $x\mathcal{R}y$ s'écrit de préférence $x \equiv y \mod 2\pi$
   On appelle $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, c'est à dire :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$$

   $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe multiplicatif de $(\mathbb{C}^*, \times)$
   Il faut montrer que $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{U}, \times)$ sont isomorphes
2. $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$. On considère la relation d'équivalence modulo $\mathbb{Z}$, vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Z} \iff x = y + k \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

   L'ensemble des classes d'équivalence $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est l'intervalle $[0; 1[$
   Il faut montrer que $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ sont isomorphes
3. Montrer que $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{U}, \times)$ sont isomorphes

Exercice 17 :

Pour reprendre les notations habituelles, nous avons, dans cet exercice, pour tout groupe multiplicatif $(G, \times)$ et tout $a \in G$:

$$aG = \{y \in G \text{ tel qu'il existe } g \in G \text{ tel que } y = ag\}$$

Avons nous $(2(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}), +)$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$?

Exercice 18 :

On considère $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ le sous-groupe de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices de déterminant $+1$
On considère les sous-groupes H et K de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ engendrés respectivement par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les éléments des espaces quotients $\text{SL}_2(\mathbb{R})/H$ et $\text{SL}_2(\mathbb{R})/K$