10.6 Sous-groupe distingué

10.6.1 Théorème et définition de sous-groupe distingué

Soit G un groupe et H un sous groupe de G

1. Les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) Pour tout $x \in G$, $x^{-1}Hx \subset H$
   (b) Pour tout $x \in G$, $x^{-1}Hx = H$
   (c) Pour tout $x \in G$, $xH = Hx$
2. Si les conditions ci-dessus sont vérifiées pour H, alors H est dit sous groupe distingué de G ou sous groupe normal de G et on note alors $H \triangleright G$

Démonstration

1. Supposons que pour tout $x \in G$, $x^{-1}Hx \subset H$
   Démontrons que $H \subset x^{-1}Hx$; nous aurons ainsi montré que $x^{-1}Hx = H$
   Soit $y \in H$. Alors,
   $$y = \left(x^{-1}x\right) y \left(x^{-1}x\right) = x^{-1}\left(xyx^{-1}\right) x \text{ par associativité}$$
   Comme $x^{-1}Hx \subset H$, il existe $h \in H$ tel que $h = xyx^{-1} = \left(x^{-1}\right)^{-1} yx^{-1}$.
   Donc, $y = x^{-1}hx$, et donc $y \in x^{-1}Hx$. On vient donc de montrer que $H \subset x^{-1}Hx$ et ainsi que :
   $$\left[(\forall x \in G)\left(x^{-1}Hx \subset H\right)\right] \Longrightarrow \left[(\forall x \in G)\left(x^{-1}Hx = H\right)\right]$$
2. Supposons que pour tout $x \in G$, $x^{-1}Hx = H$
   Démontrons que $xH = Hx$
   — On montre que $xH \subset Hx$
   Soit $z \in xH$. Alors, il existe $h \in H$ tel que $z = xh$. Nous avons :
   $$z = xh = xh\left(x^{-1}x\right) \overset{\text{Associativité}}{=} \left(xhx^{-1}\right) x$$
   Comme $x^{-1}Hx = H$, il existe $h' \in H$ tel que $h' = xhx^{-1}$ et $z = h'x$ et $z \in Hx$.
   Nous avons donc $xH \subset Hx$
   — La démonstration que $Hx \subset xH$ est semblable ; nous ne la faisons pas
   Nous concluons donc que $xH = Hx$. Donc :
   $$\left[(\forall x \in G)\left(x^{-1}Hx = H\right)\right] \Longrightarrow \left[(\forall x \in G)(Hx = Hx)\right]$$
3. Supposons que pour tout $x \in G$, $xH = Hx$
   Démontrons que pour tout $x \in G$, $x^{-1}Hx \subset H$
   Soit $y \in x^{-1}Hx$; nous allons montrer que $y \in H$
   Il existe donc $h \in H$ tel que $y = x^{-1}hx$ et donc $y = x^{-1}hx \Longleftrightarrow xy = hx$. Comme $xH = Hx$, il existe $h' \in H$ tel que $hx = xh'$. Ainsi :
   $$xy = hx = xh' \Longrightarrow xy = xh'$$
   Et donc, par régularité, $y = h'$, et donc $y \in H$. Nous avons donc $x^{-1}Hx \subset H$ Ainsi,
   $$\left[(\forall x \in G)(Hx = Hx)\right] \Longrightarrow \left[(\forall x \in G)\left(x^{-1}Hx \subset H\right)\right]$$

Nous venons de montrer l'équivalence des 3 propositions.

Remarque 25 :

Revenons aux définitions de 10.5.7

1. Soit H un sous-groupe de G, et on considère la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ dans G définie par :

$$x\mathfrak{R}y \iff xy^{-1} \in H$$

pour laquelle les classes d'équivalences sont du type Hx avec $x \in G$ *(classes à droite)*
De même, pour la relations d'équivalence $\mathfrak{S}$ dans G définie par :

$$x\mathfrak{S}y \iff y^{-1}x \in H$$

pour laquelle les classes d'équivalences sont du type xH avec $x \in G$ *(classes à gauche)*

2. Si H est distingué en G ($H \rhd G$), les classes à droites sont aussi les classes à gauches. On parle alors simplement, de classes suivant H
3. Si G est un groupe commutatif, alors, tout sous-groupe $H \subset G$ est distingué en G

Remarque 26 :

Bien entendu, tous les sous-groupes d'un groupe ne sont pas distingués.

Par exemple, dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre 2 à coefficients réels muni de la multiplication des matrices, on considère l'ensemble A des matrices de déterminant 1 à coefficients dans $\mathbb{Z}$; $(A, \times)$ est un sous groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Mais, A n'est pas un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Il suffit de prendre des contre-exemples :

— En prenant $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, nous avons $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; nous avons $X \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

— En prenant $U = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, nous avons $U \in A$

— Le produit $XUX^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas un élément de A, et A n'est donc pas distingué en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

10.6.2 Proposition

Soit G un groupe.
Tout sous-groupe d'indice 2 dans G est distingué en G

Démonstration

Soit $H \subset G$, un sous-groupe de G d'indice 2, c'est à dire $[G : H] = 2$ Alors, les classes à droites sont données par $\{H; G \setminus H\}$; cet ensemble est aussi l'ensemble des classes à gauche. H est donc distingué en G

Exemple 12 :

Dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, nous avons démontré, en exercice que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ telles que } \det M > 0\}$ était un sous groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ d'indice 2 ; c'est donc un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

10.6.3 Proposition

Soient G et G' 2 groupes et $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupe. Alors, $\ker f$, le noyau de f est distingué en G

Démonstration

Nous savons que $\ker f$ est un sous groupe de G
Nous allons donc démontrer que pour tout $x \in G$, $x(\ker f)x^{-1} \subset \ker f$, c'est à dire que pour tout $x \in G$, tout $y \in \ker f$, $xyx^{-1} \in \ker f$.
Soient donc $x \in G$ et $y \in \ker f$; on note e' l'élément neutre de G'

$$f\left(xyx^{-1}\right) = f(x)f(y)f\left(x^{-1}\right) = f(x)e'f\left(x^{-1}\right) = f(x)f\left(x^{-1}\right) = f(x)f(x)^{-1} = e'$$

Donc, pour tout $x \in G$, tout $y \in \ker f$, $xyx^{-1} \in \ker f$.
$\ker f$ est donc distingué en G

10.6.4 Définition de groupe simple

Soit G un groupe. G est dit simple s'il n'existe d'autres sous-groupes distingués que G lui même et $\{e\}$

10.6.5 Exercices

Exercice 19 :

1. Montrez que le cercle unité, $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathbb{C}$ muni de la multiplication.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } z^n = 1\}$, le groupe des racines n-ièmes de l'unité. Montrez que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe distingué de $\mathbb{U}$

Exercice 20 :

Nous nous plaçons dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes. Nous considérons l'ensemble H des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \mathrm{Id}_2$. Démontrer que H est un sous-groupe distingué

Exercice 21 :

Montrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ des matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de déterminant strictement positif est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ puis qu'il est distingué dans ce groupe. Vérifier que H est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$

Exercice 22 :

Soit G un groupe ; $H_1 \triangleright G$ et $H_2 \triangleright G$ 2 sous-groupes distingués en G. Est-ce que $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe distingué en G ?

Exercice 23 :

Soient G et G' deux groupes et $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes.

1. Soit $H' \triangleright G'$ un sous-groupe distingué en G'. Démontrer que $f^{-1}(H')$ est distingué en G
2. Démontrer que si f est surjective, alors, pour tout sous groupe $H \triangleright G$ distingué en G, alors, $f(H)$ est distingué en G'

Exercice 24 :

Soit G un groupe et $\mathfrak{R}$ une relation d'équivalence sur G.
On suppose que cette relation $\mathfrak{R}$ est compatible avec la loi de groupe, c'est à dire :

$$(\forall x \in G)(\forall y \in G)(\forall x_1 \in G)(\forall y_1 \in G)\left((x\mathfrak{R}y \text{ et } x_1\mathfrak{R}y_1) \Longrightarrow (xx_1\mathfrak{R}yy_1)\right)$$

1. On appelle H la classe de l'élément neutre. Montrer que H est un sous-groupe distingué de G
2. Montrer que $(\forall x \in G)(\forall y \in G)\left((x\mathfrak{R}y) \Longleftrightarrow \left(yx^{-1} \in H\right)\right)$

3. Plus généralement, pour H sous-groupe distingué de G, montrer que la relation d'équivalence sur G $x\mathfrak{R}y \Longleftrightarrow xy^{-1} \in H$ est compatible avec la loi de groupe de G

DANS CET EXERCICE, ON VIENT DE MONTRER QUE LE SEUL TYPE DE RELATION D'ÉQUIVALENCE COMPATIBLE AVEC LA LOI DE GROUPE EST UNE RELATION DU TYPE $x \simeq y \Longleftrightarrow xy^{-1} \in H$ OÙ H EST UN SOUS-GROUPE DISTINGUÉ DE G

Exercice 25 :

Soit G un groupe, H sous-groupe distingué de G et K sous-groupe de H

1. On appelle $HK = \{g \in G$ tel que $g = hk$ où $h \in H$ et $k \in K\}$
   (a) Montrer que $HK = KH$
   (b) Montrer que HK est un sous groupe de G
   (c) Montrer que si, de plus, K est distingué en G, alors HK est un sous groupe distingué de G
   (d) Montrer que H est un sous-groupe distingué de KH
2. Montrer que $K \cap H$ est distingué en K

Exercice 26 :

Soit G un groupe et soient $x \in G$ et $y \in G$. On appelle **commutateur** de x et de y, l'élément de G :

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

On appelle **sous-groupe dérivé** de G le sous-groupe de G, noté $\mathcal{D}(G)$, engendré par les commutateurs.

1. Montrer que $\mathcal{D}(G)$ est un sous-groupe distingué de G
2. Démontrer que $G/\mathcal{D}(G)$ est un groupe abélien
3. Soit $H \rhd G$ un sous-groupe distingué de G. Montrer que G/H est abélien si et seulement si $\mathcal{D}(G) \subset H$

Exercice 27 :

Soit G un groupe et $A \subset G$, une partie de G. On note :
— $N(A) = \{x \in G$ tels que $xA = Ax\}$. $N(A)$ est le **normalisateur** de A
— $C(A) = \{x \in G$ tels que pour tout $a \in A$ $ax = xa\}$. $C(A)$ est le **centralisateur** de A

1. Montrer que $N(A)$ est un sous-groupe de G
2. Montrer que $C(A)$ est un sous-groupe distingué de $N(A)$
3. Démontrez que si $H \rhd G$ est un sous-groupe distingué de G, alors $C(H)$ est aussi un sous-groupe distingué de G