10.7 Décomposition canonique d'un morphisme

10.7.1 Introduction

Soit G un groupe et $H \triangleright G$ un sous-groupe distingué en G.
On considère la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,\left(x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^{-1}y \in H\right)$$

C'est une relation d'équivalence, dont les classes d'équivalence sont du type $\dot{x} = xH = Hx$.
Soit $G/\mathcal{R}$ l'ensemble quotient formé par les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$. Nous allons définir une loi de composition dans $G/\mathcal{R}$.

10.7.2 Proposition

Soit $\dot{x} \in G/\mathcal{R}$ et $\dot{y} \in G/\mathcal{R}$. On définit la multiplication dans $G/\mathcal{R}$ par :

$$\dot{x} \times \dot{y} = \overset{\bullet}{\overline{xy}}$$

Cette définition est indépendante du choix des représentants

Démonstration

Soient $x_1 \in \dot{x}$ et $y_1 \in \dot{y}$, c'est à dire que $\dot{x_1} = \dot{x}$ et $\dot{y_1} = \dot{y}$. Il faut montrer que $\dot{xy} = \dot{x_1y_1}$, c'est à dire que

$$(xy)^{-1}\,(x_1y_1) \in H$$

Il existe $s \in H$ tel que $x_1 = xs$. De même, il existe $t \in H$ tel que $y_1 = yt$. Alors :

$$(xy)^{-1}\,(x_1y_1) = y^{-1}x^{-1}x_1y_1 = y^{-1}x^{-1}xsyt = y^{-1}syt = \left(y^{-1}sy\right)t$$

H étant distingué en G, $y^{-1}sy \in H$ et comme H est un sous groupe, $\left(y^{-1}sy\right)t \in H$, et donc

$$(xy)^{-1}\,(x_1y_1) \in H$$

Ce que nous voulions

10.7.3 Théorème

Soit G un groupe et $H \triangleright G$ un sous-groupe distingué en G. Pour la relation $\mathcal{R}$ définie en 10.7.1 ci-dessus, on considère la multiplication définie sur $G/\mathcal{R}$ en 10.7.2.

1. Muni de cette multiplication, $G/\mathcal{R}$ est un groupe
2. La projection canonique φ :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : G & \longrightarrow & G/\mathcal{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \dot{x} \end{array}$$

est un morphisme de groupe de noyau H

$G/\mathcal{R}$ est alors noté G/H et est appelé <u>groupe-quotient</u> de G par H

Démonstration

1. <u>$G/\mathcal{R}$ est un groupe</u>
   (a) Par définition, la multiplication est interne
   (b) Elle est aussi associative. En effet, pour tout $\dot{x} \in G/\mathcal{R}$, tout $\dot{y} \in G/\mathcal{R}$ et tout $\dot{z} \in G/\mathcal{R}$:

$$(\dot{x}\dot{y})\,\dot{z} = (\dot{xy})\,\dot{z} = (\dot{xyz}) = \dot{x}\,(\dot{yz}) = \dot{x}\,(\dot{y}\dot{z})$$

   (c) L'élément neutre est $\dot{e}$

(d) Le symétrique de $\dot{x} \in G/\mathcal{R}$ est $\dot{\overline{x^{-1}}} \in G/\mathcal{R}$

2. La projection canonique φ est un morphisme de groupe
La démonstration est évidente :

$$\varphi(xy) = \dot{\overline{xy}} = \dot{x}\dot{y} = \varphi(x)\varphi(y)$$

Si $x \in \ker\varphi$, alors, $\varphi(x) = \dot{e}$ et donc $x \in \dot{e} = H$

Remarque 27 :

Si G est commutatif, alors G/H est aussi commutatif.
En effet, pour $\dot{x} \in G/H$ et $\dot{y} \in G/H$:

$$\dot{x}\dot{y} = \overset{\bullet}{\overline{xy}} \overset{\text{Commutativité}}{=} \overset{\bullet}{\overline{yx}} = \dot{y}\dot{x}$$

10.7.4 Proposition

Soient G et G' 2 groupes et $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupe. Alors, la relation $\mathcal{S}$ définie sur G par :

$$(\forall x \in G)(\forall y \in G)(x\mathcal{S}y \iff f(x) = f(y))$$

est une relation d'équivalence
Une définition équivalente pour $\mathcal{S}$ est :

$$(\forall x \in G)(\forall y \in G)\left(x\mathcal{S}y \iff xy^{-1} \in \ker f\right)$$

Démonstration

Que $\mathcal{S}$ soit une relation d'équivalence est évident.
Montrons que nous pouvons avoir une autre définition, équivalente.
En posant e' l'élément neutre de G' :

$$x\mathcal{S}y \iff f(x) = f(y) \iff f(x)[f(y)]^{-1} = e' \iff f\left(xy^{-1}\right) = e' \iff xy^{-1} \in \ker f$$

10.7.5 Proposition

Soient G et G' deux groupes et $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupe.
Alors, l'application h :

$$\begin{array}{rcl} h : G/\ker f & \longrightarrow & f(G) \\ \dot{x} & \longmapsto & h(\dot{x}) = f(x) \end{array}$$

est un isomorphisme

Démonstration

Il faut d'abord dire que $f(G)$ *(parfois aussi noté* $\operatorname{Im} f$*)* est un sous-groupe de G' de neutre e'

1. Tout d'abord, h est un morphisme. En effet, pour tout $\dot{x} \in G/\ker f$ et tout $\dot{y} \in G/\ker f$:

$$h(\dot{x}\dot{y}) = h(\dot{\overline{xy}}) = f(xy) = f(x)f(y) = h(\dot{x}) \times h(\dot{y})$$

2. Ensuite, h est injective :

$$h(\dot{x}) = e' \iff f(x) = e' \iff x \in \ker f \iff x \in \dot{e} \iff \dot{x} = \dot{e}$$

3. Et, pour finir, h est surjective :
En effet, soit $y \in f(G)$, il existe $x \in G$ tel que $y = f(x)$, et nous avons donc :

$$h(\dot{x}) = f(x) = y$$

Donc, pour tout $y \in f(G)$, il existe $\dot{x} \in G/\ker f$ tel que $h(\dot{x}) = y$

10.7.6 Décomposition canonique d'un morphisme $f : G \longrightarrow G'$

1. On considère la projection canonique φ :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : G & \longrightarrow & G/\ker f \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \dot{x} \end{array}$$

2. De même, considérons l'insertion i définie par :

$$\begin{array}{rcl} i : f(G) & \longrightarrow & G' \\ y & \longmapsto & i(y) = y \end{array}$$

   C'est l'application identique restreinte à $f(G)$

3. Pour terminer, considérons h :

$$\begin{array}{rcl} h : G/\ker f & \longrightarrow & f(G) \\ \dot{x} & \longmapsto & h(\dot{x}) = f(x) \end{array}$$

4. Alors, pour tout $x \in G$, nous avons $f(x) = i \circ h \circ \varphi(x)$ qu'il est possible de résumer dans le diagramme suivant. On dit qu'il est commutatif.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & G' \\ G/\ker f \arrow[r, "h"'] & f(G) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Exemple 13 :

On considère un corps $\mathbb{K}$ *($\mathbb{K}$ étant mis pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)*, et le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n $\mathbb{K}^n$.

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est le groupe linéaire de $\mathbb{K}$. C'est le groupe des matrices inversibles de dimension n à coefficients dans $\mathbb{K}$, c'est à dire que, pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, le déterminant de M noté $\det M$ est non nul
2. $(\mathbb{K}^*, \times)$ est un groupe multiplicatif de neutre 1
3. Soit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \\ M & \longmapsto & \det M \end{array} \right.$$

   Par les propriétés du déterminant, det est un morphisme de groupe
4. Le noyau de det est l'ensemble des matrices de déterminant 1. C'est le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$
5. En fait, l'application déterminant det est un morphisme surjectif, c'est à dire que nous avons $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathbb{K}^*$.
   En effet, soient $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
   Soit $u : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une application linéaire telle que $u(e_1) = \lambda e_1$ et pour $2 \leqslant i \leqslant n$, $u(e_i) = e_i$.
   Si M est la matrice de u dans la base canonique $\{e_1, \cdots, e_n\}$, nous avons :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

   Le déterminant de M est $\det M = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \lambda \neq 0$. Donc $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

6. D'après le théorème de décomposition 10.7.6, nous avons le schéma :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \arrow[r, "\det"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{K}^* \\ \left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})\right) \arrow[r] & \mathbb{K}^* \arrow[u, "\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^*}"'] \end{tikzcd}$$

   D'après ce même théorème, le quotient $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathbb{K}^*$

10.7.7 Quelques exercices

Exercice 28 :

On considère une groupe G tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\forall (x, y) \in G \times G)\left((xy)^n = x^n y^n\right)$

— On note $G^{(n)} = \{y \in G \text{ tels que } \exists g \in G \text{ tel que } y = g^n\}$

— Et on note $G_{(n)} = \{x \in G \text{ tels que } x^n = e\}$ où e est le neutre de G. En fait, $G_{(n)}$ est l'ensemble des éléments d'ordre n

Vérifier que $G_{(n)}$ et $G^{(n)}$ sont des sous groupes distingués de G. Puis, démontrez que $G/G_{(n)}$ est isomorphe à $G^{(n)}$