10.9 Relations de définition

Soient $(G, \star)$ et $(H, \top)$ 2 groupes ; alors le produit direct $G \times H$ est aussi un groupe, non forcément commutatif.
Par contre, nous avons, pour tout $g \in G$ et tout $h \in H$:

$$(g, e) \times (e, h) = (g, h) = (e, h) \times (g, e)$$

Soient $\varphi : G \longrightarrow G \times H$ tel que $\varphi(g) = (g, e)$ et $\psi : H \longrightarrow G \times H$ tel que $\psi(h) = (e, h)$, alors, pour tout $g \in G$, et tout $h \in H$, nous avons : $\varphi(g) \times \psi(h) = \psi(h) \times \varphi(g)$.
Nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "\varphi"] & \\
& G \times H \\
H \arrow[ur, "\psi"] &
\end{tikzcd}$$

10.9.1 Proposition

Soient G, H et K, trois groupes.
Soient $\alpha : G \longrightarrow K$ et $\beta : H \longrightarrow K$ 2 morphismes de groupe tels que :

$$(\forall g \in G)\,(\forall h \in H)\,(\alpha(g) \times \beta(h) = \beta(h) \times \alpha(g))$$

Alors, il existe un unique morphisme $\eta : G \times H \longrightarrow K$ tel que :

$$\begin{array}{l} \eta \circ \varphi = \alpha \\ \eta \circ \psi = \beta \end{array}$$

Nous avons alors le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[drr, "\alpha"] & & \\
& G \times H \arrow[r, "\eta"] & K \\
H \arrow[ur, "\psi"] \arrow[urr, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Remarque 33 :

1. Les morphismes φ et ψ, sont ceux définis dans l'introduction : $\varphi(g) = (g, e)$ et $\psi(h) = (e, h)$
2. Si un tel morphisme η existe, nous devons avoir :

$$\begin{array}{rcl} \eta[(g, h)] & = & \eta[(g, e) \times (e, h)] \\ & = & \eta[(g, e)] \times \eta[(e, h)] \\ & = & \eta[\varphi(g)] \times \eta[\psi(h)] \\ & = & \alpha(g) \times \beta(h) \end{array}$$

3. Ainsi, α et β étant donnés, η sera forcément unique

Démonstration

Soient donc $\alpha : G \longrightarrow K$ et $\beta : H \longrightarrow K$ 2 morphismes de groupe tels que :

$$(\forall g \in G)\,(\forall h \in H)\,(\alpha(g) \times \beta(h) = \beta(h) \times \alpha(g))$$

On construit donc une application η de $G \times H$ dans K définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \eta : G \times H & \longrightarrow & K \\ (g,h) & \longmapsto & \eta\left[(g,h)\right] = \alpha(g) \times \beta(h) \end{array}\right.$$

On montre que η est un morphisme de groupe

$$\begin{array}{rcl} \eta\left[(g,h) \star (g_1,h_1)\right] = & & \eta\left[(gg_1, hh_1)\right] \\ & = & \alpha(gg_1) \times \beta(hh_1) \text{ Par définition de } \eta \\ & = & \alpha(g) \times \alpha(g_1) \times \beta(h) \times \beta(h_1) \text{ car } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des morphismes} \\ & = & \alpha(g) \times \beta(h) \times \alpha(g_1) \times \beta(h_1) \text{ car } \alpha \text{ et } \beta \text{ commutent dans } K \\ & = & \eta\left[(g,h)\right] \times \eta\left[(g_1,h_1)\right] \text{ par définition de } \eta \end{array}$$

η est donc un morphisme de groupe

Remarque 34 :

1. Le groupe $G \times H$ a aussi des sous-groupes remarquables :
   (a) $G' = \{(g,e) \text{ où } g \in G\}$ est un sous groupe de $G \times H$, isomorphe à G par l'isomorphisme φ défini au-dessus.
   (b) De même, $H' = \{(e,h) \text{ où } h \in H\}$ est un sous groupe de $G \times H$, isomorphe à H par l'isomorphisme ψ défini au-dessus.
   (c) De plus, $G' \cap H' = \{(e,e)\}$
2. $G' \vee H'$ désigne le plus petit sous-groupe de $G \times H$ contenant à la fois G' et H'.
   On montre que $G' \vee H' = G \times H$
   En effet, par définition, nous avons $G' \vee H' \subset G \times H$
   Réciproquement, montrons que $G \times H \subset G' \vee H'$.
   Tout d'abord, il faut faire remarquer que comme $G' \vee H'$ contient à la fois G' et H', il contient les éléments de G' et H' ainsi que les produits d'éléments de G' et de H' ; donc si $A \in G'$ et $B \in H'$, alors,$A \times B \in G' \vee H'$.
   Soit donc $(g,h) \in G \times H$, alors $(g,h) = (g,e) \times (e,h)$, et donc, comme $(g,e) \in G'$ et $(e,h) \in H'$, alors, le couple $(g,h) \in G' \vee H'$, et donc $G \times H \subset G' \vee H'$
   Ce qui termine de montrer que $G \times H = G' \vee H'$
3. Le résultat suivant peut être considéré comme un corollaire de 10.9.1

10.9.2 Corollaire

Soit D un groupe
On considère G et D 2 sous-groupes de D tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} G \cap H = \{e\} \\ G \vee H = D \text{ ce qui veut dire que } D \text{ est le sous groupe engendré par } G \text{ et } H \\ (\forall g \in G)\,(\forall h \in H)\,(gh = hg) \end{array}\right.$$

Alors, $G \times H$ est isomorphe à D
C'est à dire qu'il existe un isomorphisme η de $G \times H$ dans D, tel que $\eta\left[(g,1)\right] = g$ et $\eta\left[(1,h)\right] = h$
On dit que D est le produit direct de G et de H

Démonstration

On peut considérer les deux injections canoniques $\alpha : G \longrightarrow D$ et $\beta : H \longrightarrow D$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha : G & \longrightarrow & D \\ g & \longmapsto & \alpha(g) = g \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \beta : H & \longrightarrow & D \\ h & \longmapsto & \beta(h) = h \end{array}\right.$$

$_alpha$ et β sont deux morphismes de groupes évidents.

De l'hypothèse $(\forall g \in G)\,(\forall h \in H)\,(gh = hg)$, nous avons aussi

$$(\forall g \in G)\,(\forall h \in H)\,(\alpha(g)\,\beta(h) = \beta(h)\,\alpha(g))$$

Nous sommes donc dans les hypothèses de la proposition 10.9.1. Il existe donc un morphisme η de $G \times H$ dans D tel que

$$\begin{aligned} \eta \circ \varphi &= \alpha \\ \eta \circ \psi &= \beta \end{aligned}$$

1. Nous allons montrer que $\eta\,[(g, h)] = gh$
   - Nous montrons tout d'abord que $\eta\,[(g, 1)] = g$
     $g = \alpha(g) = \eta \circ \varphi(g) = \eta\,[(g, 1)]$
     Nous avons donc bien $\eta\,[(g, 1)] = g$
   - On démontrerait de même que $\eta\,[(1, h)] = h$ puisque $\eta \circ \psi = \beta$
   - Nous avons $(g, h) = (g, 1) \star (1, h)$; or, $\eta\,[(g, h)] = \eta\,[(g, 1)] \star \eta\,[(1, h)] = gh$
2. Montrons que η est une bijection
   - On montre que η est injectif.
     Soient $(g, h) \in G \times H$ et $(g', h') \in G \times H$ tels que $\eta\,[(g, h)] = \eta\,[(g', h')]$
     Alors, nous avons $gh = g'h'$. Donc :

     $$\begin{array}{lcl} gh = g'h' & \Longleftrightarrow & ghh^{-1} = g'h'h^{-1} \text{ Composition à droite par } h^{-1} \\ gh = g'h' & \Longleftrightarrow & g = g'h'h^{-1} \\ gh = g'h' & \Longleftrightarrow & g'^{-1}g = g'^{-1}g'h'h^{-1} \text{ Composition à gauche par } g'^{-1} \\ gh = g'h' & \Longleftrightarrow & g'^{-1}g = h'h^{-1} \end{array}$$

     Or, $g'^{-1}g \in G$ et $h'^{-1}h \in H$, donc, par l'égalité $g'^{-1}g = h'h^{-1}$, nous avons $g'^{-1}g \in G \cap H$ et $h'h^{-1} \in G \cap H$; comme $G \cap H = \{e\}$, alors $g'^{-1}g = e \Longleftrightarrow g = g'$ et $hh'^{-1} = e \Longleftrightarrow h = h'$ et donc, $(g, h) = (g', h')$
     η est donc injectif.
   - On montre que η est surjectif.
     Soit $d \in D$; il faut donc trouver un couple $(g, h) \in G \times H$ tel que $\eta\,[(g, h)] = d$.
     De l'hypothèse $G \vee H = D$, il existe donc des éléments $g \in G$ et $h \in H$ tels que $d = gh = hg$.
     Or, $\eta\,[(g, h)] = gh = d$
     η est donc une surjection

η est donc une bijection, et un isomorphisme de $G \times H$ dans D. D et $G \times H$ sont donc isomorphes.

Remarque 35 :

Dire que D est le produit direct de G par H, est dire que D est isomorphe à $G \times H$

Exercice 31 :

Démontrer que le produit direct de deux groupes abéliens est abélien.