

## 10.9 Relations de définition

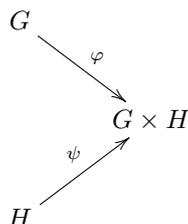
Soient  $(G, \star)$  et  $(H, \top)$  2 groupes ; alors le produit direct  $G \times H$  est aussi un groupe, non forcément commutatif.

Par contre, nous avons, pour tout  $g \in G$  et tout  $h \in H$  :

$$(g, e) \times (e, h) = (g, h) = (e, h) \times (g, e)$$

Soient  $\varphi : G \rightarrow G \times H$  tel que  $\varphi(g) = (g, e)$  et  $\psi : H \rightarrow G \times H$  tel que  $\psi(h) = (e, h)$ , alors, pour tout  $g \in G$ , et tout  $h \in H$ , nous avons :  $\varphi(g) \times \psi(h) = \psi(h) \times \varphi(g)$ .

Nous avons le diagramme suivant :



### 10.9.1 Proposition

Soient  $G$ ,  $H$  et  $K$ , trois groupes.

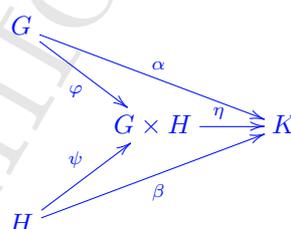
Soient  $\alpha : G \rightarrow K$  et  $\beta : H \rightarrow K$  2 morphismes de groupe tels que :

$$(\forall g \in G) (\forall h \in H) (\alpha(g) \times \beta(h) = \beta(h) \times \alpha(g))$$

Alors, il existe un unique morphisme  $\eta : G \times H \rightarrow K$  tel que :

$$\begin{aligned}
 \eta \circ \varphi &= \alpha \\
 \eta \circ \psi &= \beta
 \end{aligned}$$

Nous avons alors le schéma suivant :



#### Remarque 33 :

1. Les morphismes  $\varphi$  et  $\psi$ , sont ceux définis dans l'introduction :  $\varphi(g) = (g, e)$  et  $\psi(h) = (e, h)$
2. Si un tel morphisme  $\eta$  existe, nous devons avoir :

$$\begin{aligned}
 \eta[(g, h)] &= \eta[(g, e) \times (e, h)] \\
 &= \eta[(g, e)] \times \eta[(e, h)] \\
 &= \eta[\varphi(g)] \times \eta[\psi(h)] \\
 &= \alpha(g) \times \beta(h)
 \end{aligned}$$

3. Ainsi,  $\alpha$  et  $\beta$  étant donnés,  $\eta$  sera forcément unique

#### Démonstration

Soient donc  $\alpha : G \rightarrow K$  et  $\beta : H \rightarrow K$  2 morphismes de groupe tels que :

$$(\forall g \in G) (\forall h \in H) (\alpha(g) \times \beta(h) = \beta(h) \times \alpha(g))$$

On construit donc une application  $\eta$  de  $G \times H$  dans  $K$  définie par :

$$\begin{cases} \eta : G \times H & \longrightarrow & K \\ (g, h) & \longmapsto & \eta[(g, h)] = \alpha(g) \times \beta(h) \end{cases}$$

On montre que  $\eta$  est un morphisme de groupe

$$\begin{aligned} \eta[(g, h) \star (g_1, h_1)] &= \eta[(gg_1, hh_1)] \\ &= \alpha(gg_1) \times \beta(hh_1) \text{ Par définition de } \eta \\ &= \alpha(g) \times \alpha(g_1) \times \beta(h) \times \beta(h_1) \text{ car } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des morphismes} \\ &= \alpha(g) \times \beta(h) \times \alpha(g_1) \times \beta(h_1) \text{ car } \alpha \text{ et } \beta \text{ commutent dans } K \\ &= \eta[(g, h)] \times \eta[(g_1, h_1)] \text{ par définition de } \eta \end{aligned}$$

$\eta$  est donc un morphisme de groupe

### Remarque 34 :

- Le groupe  $G \times H$  a aussi des sous-groupes remarquables :
  - $G' = \{(g, e) \mid g \in G\}$  est un sous groupe de  $G \times H$ , isomorphe à  $G$  par l'isomorphisme  $\varphi$  défini au-dessus.
  - De même,  $H' = \{(e, h) \mid h \in H\}$  est un sous groupe de  $G \times H$ , isomorphe à  $H$  par l'isomorphisme  $\psi$  défini au-dessus.
  - De plus,  $G' \cap H' = \{(e, e)\}$
- $G' \vee H'$  désigne le plus petit sous-groupe de  $G \times H$  contenant à la fois  $G'$  et  $H'$ .

On montre que  $G' \vee H' = G \times H$

En effet, par définition, nous avons  $G' \vee H' \subset G \times H$

Réciproquement, montrons que  $G \times H \subset G' \vee H'$ .

Tout d'abord, il faut faire remarquer que comme  $G' \vee H'$  contient à la fois  $G'$  et  $H'$ , il contient les éléments de  $G'$  et  $H'$  ainsi que les produits d'éléments de  $G'$  et de  $H'$ ; donc si  $A \in G'$  et  $B \in H'$ , alors,  $A \times B \in G' \vee H'$ .

Soit donc  $(g, h) \in G \times H$ , alors  $(g, h) = (g, e) \times (e, h)$ , et donc, comme  $(g, e) \in G'$  et  $(e, h) \in H'$ , alors, le couple  $(g, h) \in G' \vee H'$ , et donc  $G \times H \subset G' \vee H'$

Ce qui termine de montrer que  $G \times H = G' \vee H'$

- Le résultat suivant peut être considéré comme un corollaire de 10.9.1

### 10.9.2 Corollaire

Soit  $D$  un groupe

On considère  $G$  et  $H$  2 sous-groupes de  $D$  tels que :

$$\begin{cases} G \cap H = \{e\} \\ G \vee H = D \text{ ce qui veut dire que } D \text{ est le sous groupe engendré par } G \text{ et } H \\ (\forall g \in G) (\forall h \in H) (gh = hg) \end{cases}$$

Alors,  $G \times H$  est isomorphe à  $D$

C'est à dire qu'il existe un isomorphisme  $\eta$  de  $G \times H$  dans  $D$ , tel que  $\eta[(g, 1)] = g$  et  $\eta[(1, h)] = h$

On dit que  $D$  est le produit direct de  $G$  et de  $H$

### Démonstration

On peut considérer les deux injections canoniques  $\alpha : G \longrightarrow D$  et  $\beta : H \longrightarrow D$  telles que :

$$\begin{cases} \alpha : G & \longrightarrow & D \\ g & \longmapsto & \alpha(g) = g \end{cases} \quad \begin{cases} \beta : H & \longrightarrow & D \\ h & \longmapsto & \beta(h) = h \end{cases}$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont deux morphismes de groupes évidents.

De l'hypothèse  $(\forall g \in G) (\forall h \in H) (gh = hg)$ , nous avons aussi

$$(\forall g \in G) (\forall h \in H) (\alpha(g) \beta(h) = \beta(h) \alpha(g))$$

Nous sommes donc dans les hypothèses de la proposition 10.9.1. Il existe donc un morphisme  $\eta$  de  $G \times H$  dans  $D$  tel que

$$\begin{aligned} \eta \circ \varphi &= \alpha \\ \eta \circ \psi &= \beta \end{aligned}$$

1. Nous allons montrer que  $\eta[(g, h)] = gh$

— Nous montrons tout d'abord que  $\eta[(g, 1)] = g$

$$g = \alpha(g) = \eta \circ \varphi(g) = \eta[(g, 1)]$$

Nous avons donc bien  $\eta[(g, 1)] = g$

— On démontrerait de même que  $\eta[(1, h)] = h$  puisque  $\eta \circ \psi = \beta$

— Nous avons  $(g, h) = (g, 1) \star (1, h)$ ; or,  $\eta[(g, h)] = \eta[(g, 1)] \star \eta[(1, h)] = gh$

2. Montrons que  $\eta$  est une bijection

— On montre que  $\eta$  est injectif.

Soient  $(g, h) \in G \times H$  et  $(g', h') \in G \times H$  tels que  $\eta[(g, h)] = \eta[(g', h')]$

Alors, nous avons  $gh = g'h'$ . Donc :

$$\begin{aligned} gh = g'h' &\iff gh h^{-1} = g'h'h^{-1} \text{ Composition à droite par } h^{-1} \\ gh = g'h' &\iff g = g'h'h^{-1} \\ gh = g'h' &\iff g'^{-1}g = g'^{-1}g'h'h^{-1} \text{ Composition à gauche par } g'^{-1} \\ gh = g'h' &\iff g'^{-1}g = h'h^{-1} \end{aligned}$$

Or,  $g'^{-1}g \in G$  et  $h'h^{-1} \in H$ , donc, par l'égalité  $g'^{-1}g = h'h^{-1}$ , nous avons  $g'^{-1}g \in G \cap H$  et  $h'h^{-1} \in G \cap H$ ; comme  $G \cap H = \{e\}$ , alors  $g'^{-1}g = e \iff g = g'$  et  $h'h^{-1} = e \iff h = h'$  et donc,  $(g, h) = (g', h')$

$\eta$  est donc injectif.

— On montre que  $\eta$  est surjectif.

Soit  $d \in D$ ; il faut donc trouver un couple  $(g, h) \in G \times H$  tel que  $\eta[(g, h)] = d$ .

De l'hypothèse  $G \vee H = D$ , il existe donc des éléments  $g \in G$  et  $h \in H$  tels que  $d = gh = hg$ .

Or,  $\eta[(g, h)] = gh = d$

$\eta$  est donc une surjection

$\eta$  est donc une bijection, et un isomorphisme de  $G \times H$  dans  $D$ .  $D$  et  $G \times H$  sont donc isomorphes.

### Remarque 35 :

Dire que  $D$  est le produit direct de  $G$  par  $H$ , est dire que  $D$  est isomorphe à  $G \times H$

### Exercice 31 :

Démontrer que le produit direct de deux groupes abéliens est abélien.