Chapitre 3

Notions sur les fonctions à valeurs complexes

Volontairement, ce chapitre n'est qu'une introduction aux fonctions complexes. Nous faisons d'une part, une synthèse des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de l'autre un exposé des définitions de base ; nous n'étudierons pas, en particulier, l'intégration des fonctions de variable complexe.

3.1 Rappels sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Ce paragraphe est une synthèse de ce qui a été déjà vu dans différents chapitres précédents. Il y aura donc peu de démonstrations
On met en évidence que l'étude des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, en se concentrant sur les parties réelles et imaginaires et en prenant néanmoins quelques précautions élémentaires, se réduisent à l'étude des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

3.1.1 Définition

Une fonction complexe d'une variable réelle est une application d'un sous ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à un nombre $x \in \mathcal{D}$ fait correspondre $F(x) \in \mathbb{C}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & F(x) \end{array} \right.$$

L'ensemble $\mathcal{D}_F$ est appelé ensemble de définition de F

Remarque 1 :

1. Si $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ alors $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application, à tout $x \in \mathcal{D}$ fait correspondre un nombre complexe $F(x) = f(x) + ig(x)$.
   Nous avons, en fait, $f(x) = \operatorname{Re}(F(x))$ et $g(x) = \operatorname{Im}(F(x))$.
   f et g sont des fonctions réelles d'une variable réelle définies sur l'ensemble $\mathcal{D}$. Nous avons donc $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$
2. Réciproquement, la donnée de 2 applications $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définit une application $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$. C'est l'application

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & F(x) = f(x) + ig(x) \end{array} \right.$$

3. Si $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ est l'application définie par $F(x) = f(x) + ig(x)$, l'application conjuguée de F est l'application $\overline{F}$ définie par $\overline{F}(x) = f(x) - ig(x)$, c'est à dire que $\overline{F}(x) = \overline{F(x)}$

4. La topologie de $\mathbb{C}$ est la topologie induite par celle du module d'un nombre complexe, comme celle de $\mathbb{R}$ est induite par la valeur absolue d'un nombre réel

3.1.2 Définition de la limite

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable réelle.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et on suppose que F est définie dans un voisinage de x_0, sauf, peut-être en x_0.
On dit que la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ admet une limite $L \in \mathbb{C}$ en x_0 si :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon)\,(|x - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |F(x) - L| < \varepsilon)$$

On écrit alors $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = L$

3.1.3 Proposition

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable réelle.
Pour tout $x \in \mathcal{D}_F$, nous écrivons $F(x) = f(x) + ig(x)$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et on suppose que F est définie dans un voisinage de x_0, sauf, peut-être en x_0.
La fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ admet une limite $L = A + iB \in \mathbb{C}$ en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \mathrm{Re}\,(F(x)) = A = \mathrm{Re}\,(L) \text{ et } \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \mathrm{Im}\,(F(x)) = B = \mathrm{Im}\,(L)$$

Démonstration

La démonstration a déjà été faite en L_1 et réside surtout dans le fait que $|f(x) - A| \leqslant |F(x) - L|$ et $|g(x) - B| \leqslant |F(x) - L|$

3.1.4 Proposition

Soient $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2 fonctions complexes d'une variable réelle.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et nous supposons que F et G sont définies dans un voisinage de x_0, sauf, peut-être en x_0.
Nous supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = L_1$ et $\lim\limits_{x \to x_0} G(x) = L_2$. Alors :

1. La limite de la somme est la somme des limites, c'est à dire :

$$\lim_{x \to x_0} (F(x) + G(x)) = \lim_{x \to x_0} F(x) + \lim_{x \to x_0} G(x) = L_1 + L_2$$

2. La limite du produit est le produit des limites, c'est à dire :

$$\lim_{x \to x_0} (F(x) \times G(x)) = \lim_{x \to x_0} F(x) \times \lim_{x \to x_0} G(x) = L_1 \times L_2$$

3. Si $L_2 \neq 0$, la limite du quotient est le quotient des limites, c'est à dire :

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{F(x)}{G(x)} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} F(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} G(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

Démonstration

Nous n'utiliserons ici que les théorèmes des fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$
Nous appelons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) + ig(x)$ et $G(x) = h(x) + ik(x)$.
Nous écrivons $L_1 = A_1 + iB_1$ et $L_2 = A_2 + iB_2$

1. **La somme**
   Nous avons $F(x) + G(x) = (f(x) + h(x)) + i\,(g(x) + k(x))$

Comme $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + h(x)) = A_1 + A_2$ et $\lim\limits_{x \to x_0} (g(x) + k(x)) = B_1 + B_2$, il est clair que

$$\lim_{x \to x_0} (F(x) + G(x)) = (A_1 + A_2) + i(B_1 + B_2) = L_1 + L_2$$

2. **Le produit**

   Regardons, maintenant $F(x) \times G(x) = (f(x) + ig(x)) \times (h(x) + ik(x))$

   $$F(x) \times G(x) = (f(x)h(x) - g(x)k(x)) + i(f(x)k(x) + g(x)h(x))$$

   Nous avons :

   $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} (f(x)h(x) - g(x)k(x)) = & A_1A_2 - B_1B_2 \\ \lim\limits_{x \to x_0} (f(x)k(x) + g(x)h(x)) = & A_1B_2 + B_1A_2 \end{cases}$$

   Donc $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) \times G(x) = (A_1A_2 - B_1B_2) + i(A_1B_2 + B_1A_2) = (A_1 + iB_1)(A_2 + iB_2) = L_1 \times L_2$

3. **Le quotient**

   Si $L_2 \neq 0$, alors $|L_2| > 0$ et $\dfrac{F(x)}{G(x)} = \dfrac{f(x) + ig(x)}{h(x) + ik(x)}$. Nous avons alors :

   $$\begin{aligned} \frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{f(x) + ig(x)}{h(x) - ik(x)} \\ &= \frac{(f(x) + ig(x))(h(x) - ik(x))}{(h(x) + ik(x))(h(x) - ik(x))} \\ &= \frac{(f(x)h(x) + g(x)k(x)) + i(g(x)h(x) - f(x)k(x))}{(h(x))^2 + (k(x))^2} \\ &= \frac{(f(x)h(x) + g(x)k(x))}{(h(x))^2 + (k(x))^2} + i\frac{(g(x)h(x) - f(x)k(x))}{(h(x))^2 + (k(x))^2} \end{aligned}$$

   Nous avons

   $$\lim_{x \to x_0} \frac{(f(x)h(x) + g(x)k(x))}{(h(x))^2 + (k(x))^2} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{A_2^2 + B_2^2}$$

   Et

   $$\lim_{x \to x_0} \frac{(g(x)h(x) - f(x)k(x))}{(h(x))^2 + (k(x))^2} = \frac{B_1A_2 - A_1B_2}{A_2^2 + B_2^2}$$

   C'est à dire que

   $$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{G(x)} &= \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{A_2^2 + B_2^2} + i\frac{B_1A_2 - A_1B_2}{A_2^2 + B_2^2} \\ &= \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + i(B_1A_2 - A_1B_2)}{A_2^2 + B_2^2} = \frac{L_1 \times \overline{L_2}}{|L_2|^2} \\ &= \frac{L_1 \times \overline{L_2}}{L_2 \times \overline{L_2}} = \frac{L_1}{L_2} \end{aligned}$$

   Ce que nous voulions

Exemple 1 :

1. Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = L$, que dire de $\lim\limits_{x \to x_0} \overline{F}(x)$?

   Nous appelons $F(x) = f(x) + ig(x)$ et $L = A + iB$.

   D'après 3.1.3, comme $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = L$, nous avons $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$.

   Ce qui fait que $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - ig(x)) = A - iB$ et donc $\lim\limits_{x \to x_0} \overline{F}(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \overline{F(x)} = A - iB = \overline{L}$

   La limite du conjugué de F est le conjugué de la limite

2. Supposons toujours que $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = L$, que dire de $\lim\limits_{x \to x_0} |F(x)|$?

   De $F(x) = f(x) + ig(x)$, nous tirons $|F(x)| = \sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}$.

   Classiquement, $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2} = \sqrt{A^2 + B^2} = |L|$

   Donc, si $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = L$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} |F(x)| = |L|$

3.1.5 Définition de la continuité

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable réelle.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et on suppose que F est définie dans un voisinage de x_0 et que $F(x_0)$ existe.
On dit que la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$

3.1.6 Proposition

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable réelle.
Pour tout $x \in \mathcal{D}_F$, nous écrivons $F(x) = f(x) + ig(x)$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et on suppose que F est définie dans un voisinage de x_0 et que $F(x_0)$ existe.
La fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue en x_0 si et seulement si les fonctions f et g sont continues en x_0

3.1.7 Conséquences immédiates

Soient $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2 fonctions complexes d'une variable réelle continues en $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors :

1. La fonction $F + G$ est continue en x_0
2. La fonction $F \times G$ est continue en x_0
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction λF est continue en x_0
4. Si $G(x_0) \neq 0$, la fonction $\dfrac{F}{G}$ est continue en x_0

Démonstration

Ceci résulte bien entendu des résultats sur les limites vus en 3.1.4

3.1.8 Dérivation

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable réelle de domaine de définition $\mathcal{D}_F$.
On dit que F est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_F$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ existe.
Nous notons $F'(x_0)$ cette dérivée

3.1.9 Proposition

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable réelle de domaine de définition $\mathcal{D}_F$. Nous notons $F(x) = f(x) + ig(x)$
Alors F est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_F$ si et seulement si f et g sont dérivables en x_0 et nous avons :

$$F'(x_0) = f'(x_0) + ig'(x_0)$$

Démonstration

Ecrivons différemment le rapport $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$.

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + ig(x) - (f(x_0) + ig(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + i\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ existe si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ existent, c'est à dire si et seulement si $f'(x_0)$ et $g'(x_0)$ existent.
Nous avons alors, dans ces cas $F'(x_0) = f'(x_0) + ig'(x_0)$

Remarque 2 :

Les résultats relatifs aux opérations sur les fonctions dérivables *(addition, multiplication, quotient)* sont les mêmes que pour une fonction numérique d'une variable réelle

1. $(F+G)' = F' + G'$
2. $(F \times G)' = F'G + G'F$
3. $\left(\dfrac{F}{G}\right)' = \dfrac{F'G - G'F}{G^2}$

Exemple 2 :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $F(x) = e^{\lambda x}$. Calculons $F'(x)$.
On appelle $\lambda = \alpha + i\beta$. Alors $F(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} F'(x) = &\ \alpha e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) + e^{\alpha x}(-\beta \sin \beta x + i\beta \cos \beta x) \\ = &\ e^{\alpha x}(\alpha(\cos \beta x + i \sin \beta x) + (-\beta \sin \beta x + i\beta \cos \beta x)) \\ = &\ e^{\alpha x}[(\alpha + i\beta)\cos \beta x + i(\alpha + i\beta)\sin \beta x] \\ = &\ (\alpha + i\beta)e^{\alpha x}[\cos \beta x + i \sin \beta x] \\ = &\ \lambda e^{\alpha x} \times e^{i\beta x} = \lambda e^{\alpha x + i\beta x} \\ = &\ \lambda e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Et donc, $\left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda e^{\lambda x}$

3.1.10 Intégration

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable réelle de domaine de définition $\mathcal{D}_F$. Nous notons $F(x) = f(x) + ig(x)$
Alors F est intégrable sur le segment $[a;b] \subset \mathcal{D}_F$ si et seulement si f et g sont intégrables sur le segment $[a;b] \subset \mathcal{D}_F$. S'il en est ainsi, nous poserons, par définition :

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 3 :

1. De la définition, nous déduisons immédiatement que :
   (a) $\displaystyle\int_a^b (F(x) + G(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b G(x)\,\mathrm{d}x$
   (b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, nous avons $\displaystyle\int_a^b \lambda F(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$
   (c) Nous vérifions aussi aisément que $\overline{\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x} = \displaystyle\int_a^b \overline{F(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \overline{F}(x)\,\mathrm{d}x$

   Pour démontrer ces résultats, il n'y a rien de difficile : il suffit d'écrire $\lambda = \alpha + i\beta$ et $F(x) = f(x) + ig(x)$ et d'utiliser les théorèmes d'intégrations des fonctions numériques réelles d'une variable réelle.
2. Nous devons aussi remarquer que, pour les parties réelles et imaginaires :

   $\rightarrow \mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(F(x))\,\mathrm{d}x$ $\qquad\rightarrow \mathrm{Im}\left(\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(F(x))\,\mathrm{d}x$

Exemple 3 :

- Il faut bien noter que, d'après la définition 3.1.10, pour calculer l'intégrale d'une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ il faut écrire cette fonction sous la forme $F(x) = f(x) + ig(x)$
- **Calculons, par exemple** $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{ix+1}$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{ix+1} &= \int_a^b \frac{(1-ix)}{(ix+1)(1-ix)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{(1-ix)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - i\int_a^b \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= [\arctan x]_a^b - \frac{i}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_a^b \\
&= (\arctan b - \arctan a) - \frac{i}{2}\ln\left(\frac{1+b^2}{1+a^2}\right)
\end{aligned}$$

3.1.11 Proposition

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable réelle de domaine de définition $\mathcal{D}_F$ intégrable sur $\mathcal{D}_F$. Alors :

$$\left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |F(x)|\,\mathrm{d}x$$

Démonstration

Ici, il faut bien remarquer que ce ne sont plus les valeurs absolues, mais des modules de nombres complexes. Cette démonstration a déjà été faite dans le cours de L_1

1. Supposons que $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors $\left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right| = 0$, et comme $\int_a^b |F(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, nous avons donc
$$\left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |F(x)|\,\mathrm{d}x$$
2. Supposons, maintenant que $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$

$\Longrightarrow$ Soit $\theta \in [0; 2\pi[$, alors $e^{-i\theta}\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b e^{-i\theta}F(x)\,\mathrm{d}x$. En particulier, nous avons aussi :
$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}F(x)\right)\,\mathrm{d}x$$

$\Longrightarrow$ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}z\right) \leqslant |z|$

En effet, on peut écrire z sous forme trigonométrique : $z = |z|\,e^{i\arg z}$ et donc
$$e^{-i\theta}z = e^{-i\theta}|z|\,e^{i\arg z} = e^{-i(\theta-\arg z)}|z|$$
Comme $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}z\right) = |z|\cos(\theta-\arg z)$, nous avons donc, puisque $\cos(\theta-\arg z) \leqslant 1$, $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}z\right) \leqslant |z|$

$\Longrightarrow$ Nous pouvons donc appliquer cette inégalité à $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}F(x)\right)$ d'où nous pouvons conclure que $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}F(x)\right) \leqslant |F(x)|$

Comme nous avons affaire à des fonctions numériques d'une variable réelle, nous avons
$$\int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}F(x)\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |F(x)|\,\mathrm{d}x$$

$\Longrightarrow$ Comme $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, nous pouvons écrire $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ comme un nombre complexe avec un module et un argument.

Si nous posons $\theta = \arg\left(\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right)$, nous avons $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right| e^{i\theta}$ et donc $e^{-i\theta}\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right|$

$\Longrightarrow$ De là, nous déduisons que $e^{-i\theta}\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ est un nombre réel et que donc,

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right)=\left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$\Longrightarrow$ Nous avons démontré que $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right)=\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}F(x)\right)\mathrm{d}x$ et ensuite que $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}F(x)\right)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b |F(x)|\,\mathrm{d}x$, nous pouvons donc en déduire que

$$\left|\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |F(x)|\,\mathrm{d}x$$

Remarque 4 :

1. Au passage, nous avons démontré que, pour tout $z\in\mathbb{C}$ et tout $\theta\in[0;2\pi[$, nous avons $\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}z\right)\leqslant|z|$.
2. Rappelons les inégalités vraies, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|\mathrm{Re}(z)|\leqslant|z|$ et $|\mathrm{Im}(z)|\leqslant|z|$

3.1.12 Suites de fonctions complexes

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs complexes et définies sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$
Une suite de ces fonctions est une application de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $\mathcal{F}$:

$$\begin{cases}(F_n)_{n\in\mathbb{N}}:\mathbb{N} & \longrightarrow \quad \mathcal{F}\\ \qquad\qquad\quad n & \longmapsto \quad F_n\end{cases}$$

Où, pour tout $x\in\mathcal{D}$, $F_n(x)=f_n(x)+ig_n(x)$

Remarque 5 :

Ainsi, la donnée d'une suite de fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équivaut à la donnée de 2 suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions numériques réelles d'une variable réelle

3.1.13 Convergence simple des suites de fonctions complexes

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs complexes et définies sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$

1. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ vers la fonction $F=f+ig$ définie sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$(\forall x\in\mathcal{D})\,(\forall\varepsilon>0)\,(\exists N\in\mathbb{N})\,(\forall n\in\mathbb{N})\,((n\geqslant N)\Longrightarrow(|F_n(x)-F(x)|<\varepsilon))$$

2. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ vers la fonction $F=f+ig$ si et seulement si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ vers la fonction f **et** la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$ vers la fonction g

3.1.14 Convergence uniforme des suites de fonctions complexes

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs complexes et définies sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$

1. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ vers la fonction $F = f + ig$ définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x \in \mathcal{D})\,((n \geqslant N) \Longrightarrow (|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon))$$

2. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ vers la fonction $F = f + ig$ si et seulement si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ vers la fonction f **et** la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ vers la fonction g

Remarque 6 :

1. Nous pouvons aussi utiliser une autre définition pour la convergence uniforme :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\left((n \geqslant N) \Longrightarrow \left(\sup_{x\in\mathcal{D}} |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon\right)\right)$$

2. Si la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ vers la fonction F définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, alors F est continue