3.2 Fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

3.2.1 Définition

Une fonction complexe d'une variable complexe est une application F d'un sous ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à un nombre $z \in \mathcal{D}$ fait correspondre $F(z) \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} F : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad z & \longmapsto & z' = F(z) \end{cases}$$

L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé ensemble de définition de F

Exemple 4 :

1. Commençons par un premier exemple qu'est une application affine $F(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$; F est définie dans tout le plan complexe ; c'est en fait la représentation complexe d'une similitude directe du plan
2. Soit l'application R définie par :

$$\begin{cases} R : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad z & \longmapsto & R(z) = \dfrac{1}{|z|} \end{cases}$$

   Le domaine de définition de R, noté $\mathcal{D}_R$ est donc $\mathbb{C}^*$. L'image de cette fonction est l'intervalle $]0; +\infty[\subset \mathbb{R}$
   C'est très loin d'être une bijection car l'image d'un cercle $\rho e^{i\theta}$ est le seul nombre réel strictement positif $\dfrac{1}{\rho}$
3. Soit l'application Φ définie par :

$$\begin{cases} \Phi : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & \Phi(z) = \ln xy \end{cases}$$

   Le domaine de définition de Φ, noté $\mathcal{D}_\Phi$ est donc : $\mathcal{D}_\Phi = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \text{ tels que } xy > 0\}$

Remarque 7 :

Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ et $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction d'une variable complexe à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{cases} F : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & F(z) = F(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y) \end{cases}$$

En fait, $P = \mathrm{Re}(F)$ et $Q = \mathrm{Im}(F)$.
Les fonctions P et Q apparaissent donc comme des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

3.2.2 Limite d'une fonction complexe

Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ et $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe contenant un disque de centre $z_0 = x_0 + iy_0$, mais non nécessairement définie en z_0.
Soit $L = \alpha + i\beta$ un nombre complexe.
On dit que F admet comme limite L en z_0 si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\,(\forall z \in \mathcal{D})\,(z \neq z_0)\,(|z - z_0| < \eta \Longrightarrow |F(z) - L| < \varepsilon)$$

Et on écrit $\lim\limits_{z \to z_0} F(z) = L$

Remarque 8 :

Nous avons aussi, comme pour les fonctions numériques d'une variable réelle :

1. **Somme :** $\lim\limits_{z \to z_0} (F + G)(z) = \lim\limits_{z \to z_0} F(z) + \lim\limits_{z \to z_0} G(z)$
2. **Produit :** $\lim\limits_{z \to z_0} (F \times G)(z) = \lim\limits_{z \to z_0} F(z) \times \lim\limits_{z \to z_0} G(z)$
3. **Quotient :** Si $\lim\limits_{z \to z_0} G(z) \neq 0$, alors $\lim\limits_{z \to z_0} \left(\dfrac{F}{G}\right)(z) = \dfrac{\lim\limits_{z \to z_0} F(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} G(z)}$

Les démonstrations sont tout à fait identiques *(Voir donc le cours de L_1)*

3.2.3 Proposition

Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ et $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe contenant un disque de centre $z_0 = x_0 + iy_0$, mais non nécessairement définie en z_0.
Soit $L = \alpha + i\beta$ un nombre complexe et nous posons $F(z) = F(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ où P et Q sont 2 fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Alors :
$\lim\limits_{z \to z_0} F(z) = L$ si et seulement si $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} P(x, y) = \alpha$ **et** $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} Q(x, y) = \beta$

Démonstration

$\Longrightarrow$ Tout d'abord, faisons remarquer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$ et que, donc, $|z| \geqslant \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2} \Longleftrightarrow |z| \geqslant |\operatorname{Re} z|$. De la même manière, $|z| \geqslant |\operatorname{Im} z|$

$\Longrightarrow$ Nous avons :

$$F(z) - L = (P(x, y) + iQ(x, y)) - (\alpha + i\beta) = (P(x, y) - \alpha) + i(Q(x, y) - \beta)$$

Et donc, de cette remarque, nous tirons :

$$|F(z) - L| \leqslant |P(x, y) - \alpha| + |Q(x, y) - \beta| \text{ et } |P(x, y) - \alpha| \leqslant |F(z) - L| \text{ et } |Q(x, y) - \beta| \leqslant |F(z) - L|$$

$\Longrightarrow$ Ainsi :

$\rightarrow$ Si $\lim\limits_{z \to z_0} F(z) = L \Longleftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} F(z) - L = 0$ alors $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} P(x, y) = \alpha$ et $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} Q(x, y) = \beta$

$\rightarrow$ Réciproquement, si $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} P(x, y) = \alpha$ et $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} Q(x, y) = \beta$, ce qui est équivalent à $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} P(x, y) - \alpha = 0$ et $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} Q(x, y) - \beta = 0$, nous en déduisons $\lim\limits_{z \to z_0} F(z) - L = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{z \to z_0} F(z) = L$

3.2.4 Limites infinies

1. Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ et $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe contenant un disque de centre $z_0 = x_0 + iy_0$, mais non nécessairement définie en z_0.
   On dit que F admet comme limite ∞ en z_0 si et seulement si
   $$(\forall A > 0)\,(\exists \eta > 0)\,(\forall z \in \mathcal{D})\,(z \neq z_0)\,(|z - z_0| < \eta \Longrightarrow |F(z)| > A)$$
   Et on écrit $\lim\limits_{z \to z_0} F(z) = \infty$
2. Soit $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe
   On dit que F admet comme limite ∞ en ∞ si et seulement si
   $$(\forall A > 0)\,(\exists B > 0)\,(\forall z \in \mathbb{C})\,(|z| > B \Longrightarrow |F(z)| > A)$$
   Et on écrit $\lim\limits_{z \to \infty} F(z) = \infty$

Remarque 9 :

On remarque bien qu'il n'y a pas de signe en ∞, puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre total dans $\mathbb{C}$

3.2.5 Continuité

Soients $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ et $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe contenant un disque de centre $z_0 = x_0 + iy_0$, définie au voisinage de z_0.
On dit que F est continue en z_0 si et seulement si $\lim\limits_{z \to z_0} F(z) = F(z_0)$

Remarque 10 :

1. Une définition formalisée est donc :

   F est continue en z_0 si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta > 0)\,(\forall z \in \mathcal{D})\,(|z - z_0| < \eta \Longrightarrow |F(z) - F(z_0)| < \varepsilon)$$

2. Si $z_0 = x_0 + iy_0$ et $F(z) = F(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$, alors F est continue en z_0 si et seulement si, les 2 applications P et Q de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont continues en (x_0, y_0)
3. Comme pour les limites,
   (a) **Somme et produit :** Si F et G sont continues en z_0, alors $F + G$ et $F \times G$ sont continues en z_0
   (b) **Quotient :** Si $G(z_0) \neq 0$, alors $\dfrac{F}{G}$ est continue en z_0

   Retrouver les démonstrations dans le cours de L_1.

Exemple 5 :

1. De l'inégalité $||z| - |z_0|| \leqslant |z - z_0|$, on démontre facilement que l'application

$$\left\{ \begin{array}{rcl} M : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & M(z) = |z| \end{array} \right.$$

   est continue
2. Si F est continue en z_0, alors $|F|$ est aussi continue en z_0.

   Il suffit d'utiliser l'inégalité $||F(z)| - |F(z_0)|| \leqslant |F(z) - F(z_0)|$