3.3 Fonctions holomorphes

3.3.1 Définition

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, un ouvert de $\mathbb{C}$ et $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application.
   On dit que la fonction F est holomorphe en $z_0 \in \Omega$ si la fonction Φ définie sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ par :
   $$\Phi(z) = \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$
   admet une limite lorsque z tend vers z_0, c'est à dire $\lim\limits_{z \to z_0} \Phi(z)$ existe.
   Cette limite est notée $F'(z_0)$; c'est le nombre dérivé de F en z_0.
   On dit que F admet une dérivée par rapport à la variable complexe
2. Si l'application $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe en tout point $z_0 \in \Omega$, F est dite holomorphe sur Ω
3. Si la fonction
   $$\begin{cases} F' : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad z & \longmapsto & F'(z) \end{cases}$$
   est continue, F est dite continuement différentiable dans le champ complexe.

3.3.2 Théorème : les conditions de Cauchy

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, un ouvert de $\mathbb{C}$ et $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application définie par
$$\begin{cases} F : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \longmapsto & F(z) = F(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y) \end{cases}$$

1. La fonction F est holomorphe au point $z_0 = x_0 + iy_0$ **si et seulement si**
   (a) Les fonctions $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables en (x_0, y_0)
   (b) Et leurs dérivées partielles vérifient les conditions suivantes :
   $$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \qquad (3.1)$$
2. La fonction F est continuement différentiable au point $z_0 = x_0 + iy_0$ **si et seulement si**
   (a) Les fonctions $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continuement différentiables en (x_0, y_0)
   (b) Et leurs dérivées partielles vérifient les conditions 3.1

Dans les deux cas, la dérivée de la fonction F en z_0 est alors donnée par :
$$\begin{cases} F'(z_0) = & \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) \\ = & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) - i\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = \dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) + i\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)}{i} \end{cases}$$

Démonstration

Pour $z = x + iy \in \Omega$ et $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$, nous posons $h = x - x_0$, $k = y - y_0$, $u = z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = h + ik$

1. **Supposons F holomorphe en $z_0 \in \Omega$**
   (a) Posons $\varpi(u) = \dfrac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - F'(z_0) = \dfrac{F(z) - F(z_0)}{u} - F'(z_0)$; nous avons $\lim\limits_{u \to 0} \varpi(u) = 0$
   Nous pouvons alors écrire, comme $u = z - z_0 \Longleftrightarrow z = z_0 + u$,
   $$F(z_0 + u) = F(z_0) + uF'(z_0) + u\varpi(u)$$

(b) Le nombre $F'(z_0)$ existant, nous posons : $F'(z_0) = F'(x_0 + iy_0) = A(x_0, y_0) + iB(x_0, y_0)$

(c) Nous posons aussi $\varpi(u) = \varpi(h + ik) = \alpha(h, k) + i\beta(h, k)$ où $\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\beta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont, puisque $\lim\limits_{u\to 0} \varpi(u) = 0$, des fonctions telles que $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \alpha(h, k) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \beta(h, k) = 0$

(d) Ré-écrivons l'égalité $F(z_0 + u) = F(z_0) + uF'(z_0) + u\varpi(u)$:

$$F[(x_0 + h) + i(y_0 + k)] = F(x_0 + iy_0) + (h + ik) F'(x_0 + iy_0) + (h + ik)(\alpha(h, k) + i\beta(h, k))$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} P(x_0 + h, y_0 + k) + iQ(x_0 + h, y_0 + k) = & \quad P(x_0, y_0) + iQ(x_0, y_0) + (h + ik)[A(x_0, y_0) + iB(x_0, y_0)] + \\ & \qquad (h + ik)(\alpha(h, k) + i\beta(h, k)) \\ = & \quad P(x_0, y_0) + hA(x_0, y_0) - kB(x_0, y_0) + h\alpha(h, k) - k\beta(h, k) \\ & \quad +i[Q(x_0, y_0) + hB(x_0, y_0) + kA(x_0, y_0) + h\beta(h, k) + k\alpha(h, k)] \end{aligned}$$

(e) En identifiant parties réelles et parties imaginaires, nous obtenons :

$$P(x_0 + h, y_0 + k) = P(x_0, y_0) + hA(x_0, y_0) - kB(x_0, y_0) + h\alpha(h, k) - k\beta(h, k)$$

Et

$$Q(x_0 + h, y_0 + k) = Q(x_0, y_0) + hB(x_0, y_0) + kA(x_0, y_0) + h\beta(h, k) + k\alpha(h, k)$$

Avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \alpha(h, k) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \beta(h, k) = 0$

(f) Les deux égalités précédentes montrent que les fonctions $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et leurs dérivées partielles vérifient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) &= A(x_0, y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) &= -B(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) &= B(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) &= A(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Ces identités montrent que :

$$F'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$$

2. **Supposons $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiables en (x_0, y_0) et vérifiant 3.1**

(a) Nous allons poser

$$\begin{cases} A(x_0, y_0) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ B(x_0, y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases} \tag{3.2}$$

(b) Ecrivons que P et Q sont différentiables en (x_0, y_0)

$\longrightarrow$ Tout d'abord

$$\begin{aligned} P(x_0 + h, y_0 + k) = & \quad P(x_0, y_0) + h\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) + \\ & \qquad h\alpha_1(h, k) + k\beta_1(h, k) \end{aligned}$$

Avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \alpha_1(h, k) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \beta_1(h, k) = 0$

$\longrightarrow$ Puis

$$\begin{aligned} Q(x_0+h,y_0+k) = \quad & Q(x_0,y_0) + h\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) + \\ & h\alpha_2(h,k) + k\beta_2(h,k) \end{aligned}$$

Avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \alpha_2(h,k) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \beta_2(h,k) = 0$

(c) Regardons maintenant $F(z_0+u) - F(z_0)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} F(z_0+u) - F(z_0) = \quad & F((x_0+h) + i(y_0+k)) - F(x_0+iy_0) \\ = \quad & P(x_0+h,y_0+k) + iQ(x_0+h,y_0+k) - P(x_0,y_0) - iQ(x_0,y_0) \\ = \quad & P(x_0+h,y_0+k) - P(x_0,y_0) + i(Q(x_0+h,y_0+k) - Q(x_0,y_0)) \end{aligned}$$

Et alors :

$$\begin{aligned} F(z_0+u) - F(z_0) = \quad & h\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) + h\alpha_1(h,k) + k\beta_1(h,k) \\ & +i\left(h\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) + h\alpha_2(h,k) + k\beta_2(h,k)\right) \end{aligned}$$

En utilisant les égalités de 3.2, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(z_0+u) - F(z_0) = \quad & hA(x_0,y_0) - kB(x_0,y_0) + h\alpha_1(h,k) + k\beta_1(h,k) \\ & +i(hB(x_0,y_0) + kA(x_0,y_0) + h\alpha_2(h,k) + k\beta_2(h,k)) \\ = \quad & (h+ik)A(x_0,y_0) + (h+ik)iB(x_0,y_0) \\ & \qquad +h(\alpha_1(h,k) + i\alpha_2(h,k)) + k(\beta_1(h,k) + i\beta_2(h,k)) \\ = \quad & (h+ik)(A(x_0,y_0) + iB(x_0,y_0)) + h\alpha(u) + k\beta(u) \end{aligned}$$

Où nous avons posé $\alpha(u) = \alpha_1(h,k) + i\alpha_2(h,k)$ et $\beta(u) = \beta_1(h,k) + i\beta_2(h,k)$.
Remarquons que $\lim\limits_{u\to 0} \alpha(u) = \lim\limits_{u\to 0} \beta(u) = 0$

(d) Nous avons :

$$\frac{F(z_0+u) - F(z_0)}{u} = A(x_0,y_0) + iB(x_0,y_0) + \frac{h\alpha(u) + k\beta(u)}{u}$$

Et nous devons rechercher $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{F(z_0+u) - F(z_0)}{u}$, c'est à dire $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{h\alpha(u) + k\beta(u)}{u}$
Pour commencer, $\left|\dfrac{h\alpha(u) + k\beta(u)}{u}\right| \leqslant \dfrac{|h|\,|\alpha(u)| + |k|\,|\beta(u)|}{|u|}$
Posons $\rho(u) = \max\{|\alpha(u)|, |\beta(u)|\}$; nous avons aussi $\lim\limits_{u\to 0} \rho(u) = 0$ et :

$$\left|\frac{h\alpha(u) + k\beta(u)}{u}\right| \leqslant \rho(u)\left(\frac{|h|+|k|}{|u|}\right) = \rho(u)\left(\frac{|h|+|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$$

(e) Interviennent, ici, des inégalités classiques vues en L_0 :
 $\star$ Tout d'abord :

$$(|h|+|k|)^2 = h^2 + k^2 + 2|h|\,|k|$$

 Puis, $2|h|\,|k| \leqslant h^2+k^2$, et donc

$$(|h|+|k|)^2 = 2\left(h^2+k^2\right)$$

 $\star$ Ainsi :

$$\left(\frac{|h|+|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)^2 = \frac{(|h|+|k|)^2}{h^2+k^2} \leqslant \frac{2\left(h^2+k^2\right)}{h^2+k^2} = 2$$

 $\star$ Et donc $\rho(u)\left(\dfrac{|h|+|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) \leqslant 2\rho(u)$, c'est à dire

$$\left|\frac{h\alpha(u) + k\beta(u)}{u}\right| \leqslant 2\rho(u)$$

(f) Il en résulte que $\lim_{u\to 0}\left|\frac{h\alpha(u)+k\beta(u)}{u}\right| = 0$, c'est à dire $\lim_{u\to 0}\frac{h\alpha(u)+k\beta(u)}{u} = 0$

(g) Nous avons donc $\lim_{u\to 0}\frac{F(z_0+u)-F(z_0)}{u} = A(x_0,y_0)+iB(x_0,y_0)$.
F est donc holomorphe en z_0 et de dérivée

$$F'(z_0) = A(x_0,y_0)+iB(x_0,y_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Ce qu'il fallait démontrer

Exemple 6 :

1. Soit $\Lambda \in \mathbb{C}$, et $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est la fonction constante telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $F(z) = \lambda$. Alors F est holomorphe sur $\mathbb{C}$ en entier et de dérivée $F'(z) = 0$

   La démonstration est simple : ou bien utiliser le rapport de dérivation $\frac{F(z_0+u)-F(z_0)}{u}$, lequel est toujours nul ou les conditions de Cauchy.

2. La fonction
$$\begin{cases} F : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad z & \longrightarrow & F(z) = z \end{cases}$$
   est, elle aussi, holomorphe sur $\mathbb{C}$ entier et de dérivée $F'(z) = 1$. Il suffit, une fois de plus d'utiliser le rapport de dérivation $\frac{F(z_0+u)-F(z_0)}{u}$ ou les conditions de Cauchy.

3. La fonction
$$\begin{cases} F : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad z & \longrightarrow & F(z) = |z| \end{cases}$$
   n'est pas holomorphe.

   Pour le voir, il suffit de voir que $F(z) = F(x+iy) = \sqrt{x^2+y^2}$ et nous avons $P(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ alors que $Q(x,y) = 0$. F ne vérifie pas les conditions de Cauchy 3.1

Exercice 1 :

Démontrer que $F(z) = e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ en entier et donner $F'(z)$

Remarque 11 :

Les résultats énoncés dans les points qui suivent, ont pour démonstrations **mot pour mot**, celles données pour les fonctions numériques d'une variable réelle.

1. Il est bien entendu que **si la fonction F est holomorphe en $z_0 \in \mathbb{C}$, alors elle y est continue.**

   En effet :
   Supposons F holomorphe en $z_0 \in \mathbb{C}$.
   Alors $\lim_{z\to z_0}\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = F'(z_0)$
   Posons $\varpi(z) = \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - F'(z_0)$, nous avons alors $\lim_{z\to z_0}\varpi(z) = 0$. Or :

$$\varpi(z) = \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - F'(z_0) \Longleftrightarrow F(z) = F(z_0)+(z-z_0)F'(z_0)+(z-z_0)\varpi(z)$$

   Et nous avons $\lim_{z\to z_0}F(z) = F(z_0)$; F est donc continue en z_0

   C'est la même démonstration que pour les fonctions numériques d'une variable réelle

2. Si F et G sont holomorphes en $z_0 \in \mathbb{C}$ de dérivées respectives $F'(z_0)$ et $G'(z_0)$

   (a) **Somme :** $F+G$ est dérivable en z_0 et $(F+G)'(z_0) = F'(z_0)+G'(z_0)$

(b) **Produit :** $F \times G$ est dérivable en z_0 et $(F \times G)'(z_0) = F'(z_0)\,G(z_0) + F(z_0)\,G'(z_0)$
En particulier, la dérivée de λF, où $\lambda \in \mathbb{C}$ est $\lambda F'$

(c) **Quotient :** Si $G(z) \neq 0$, alors $\left(\dfrac{F}{G}\right)$ est dérivable en z_0 et $\left(\dfrac{F}{G}\right)'(z_0) = \dfrac{F'(z_0)\,G(z_0) - F(z_0)\,G'(z_0)}{(G(z_0))^2}$

3. Si F est holomorphe en $z_0 \in \mathbb{C}$ et G holomorphes en $F(z_0)$ alors $G \circ F$ est holomorphe en z_0 et de dérivée $(G \circ F)'(z_0) = F'(z_0) \times G'(F(z_0))$ qui s'écrit souvent : $(G \circ F)' = F' \times G' \circ F$

Exemple 7 :

La dérivée de $F(z) = z^n$ où $n \in \mathbb{N}$ est donnée par $F'(z) = nz^{n-1}$

Exercice 2 :

Démontrer que $F(z) = \sin z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ en entier et donner $F'(z)$

Exercice 3 :

Soit $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe. Démontrer que si F est holomorphe, alors les conditions suivantes sont équivalentes

1. F est constante
2. $\mathrm{Re}\,F$ est constante
3. $\mathrm{Im}\,F$ est constante