## 3.4 Correction d'exercices

**Exercice 1 :**

*Démontrer que $F(z) = e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ en entier et donner $F'(z)$*

- Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, nous avons $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ de telle sorte que si $F(z) = F(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$, nous avons :

$$P(x,y) = e^x \cos y \text{ et } Q(x,y) = e^x \sin y$$

  D'où :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = e^x \sin y \qquad \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y$$

  Nous avons : $\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$
  $F$ vérifie bien les conditions de Cauchy 3.1
- La fonction dérivée est donnée par :

$$F'(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

  Nous avons donc $F'(z) = e^z$

**Exercice 2 :**

*Démontrer que $F(z) = \sin z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ en entier et donner $F'(z)$*

On écrit $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et nous utilisons les théorèmes de dérivation classique :

$$(\sin z)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

**Exercice 3 :**

*Soit $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe. Démontrer que si $F$ est holomorphe, alors les conditions suivantes sont équivalentes*

*1. $F$ est constante* *2. $\operatorname{Re} F$ est constante* *3. $\operatorname{Im} F$ est constante*

1. Si $F$ est constante, alors $\operatorname{Re} F$ et $\operatorname{Im} F$ sont constantes
2. Maintenant, supposons $\operatorname{Re} F$ constante. Si nous posons $F(z) = F(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$, alors $P$ est donc constante, et nous avons :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$$

   $F$ étant holomorphe, par les conditions de Cauchy 3.1, nous avons :

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 0$$

   Ce qui prouve que la fonction $Q$ est, elle aussi, constante
   Donc, la fonction $F$ est constante
3. Nous avons une démonstration semblable pour montrer que si $\operatorname{Im} F$ est constante, alors $F$ est constante.

Il est possible de ré-utiliser ce résultat sur la fonction $F(z) = |z|$ puisque $\operatorname{Im} F = 0$ et est donc constante alors que la fonction $F$ n'est pas constante. Donc $F(z) = |z|$ n'est pas holomorphe.