Chapitre 4

Intégrales généralisées

.

Nous avons étudié, dans le cours de L_1 l'intégrale de Riemann. Dans cette théorie, les fonctions intégrables étaient bornées, et nous ne considérions que des intervalles bornés.
Que se passe-t-il si les intervalles ne sont plus bornés ou si les fonctions elles mêmes ne sont plus bornées ?
L'objet de cette séquence est d'étendre l'intégrale de Riemann.
Nous ne considérons dans ce chapitre, que des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ou un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou l'un de ses sous-ensembles qui peut être $\mathbb{R}$.
La décomposition d'une de ces fonctions en sa partie réelle et sa partie imaginaire, nous conduit souvent, à ne considérer que les fonctions à valeurs réelles.

4.1 Premières définitions ; premières propriétés

4.1.1 Définition

Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a;b[$, intégrable au sens de Riemann sur chacun des intervalles $[x;y] \subset [a;b[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On définit

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Si $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x) = \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(t)\,dt$ existe, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ **a un sens**, et on écrit :

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 1 :

1. **Notion d'intégrale impropre**
   Dans l'intégration généralisée, on utilise beaucoup le mot **d'intégrale impropre** qui désigne une extension de l'intégrale usuelle, définie par une forme de passage à la limite dans des intégrales. On note en général les intégrales impropres sans les distinguer des véritables intégrales ou intégrales définies, ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est un exemple très classique d'intégrale impropre convergente, mais qui n'est pas définie au sens de l'intégration usuelle *(que ce soit l'intégration des fonctions continues par morceaux, l'intégrale de Riemann)*.
2. **Remarques-vocabulaire**

(a) Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ a un sens, on dit qu'elle converge, ou que c'est une intégrale convergente ; elle diverge, sinon.

(b) **Déterminer la nature d'une intégrale**, c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge

(c) On ne parle pas d'intégrale impropre lorsqu'on peut prolonger f par continuité en b.

Exemple : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$ [1] ; le problème pourrait être posé en 0 ; or, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$; on peut donc prolonger $\dfrac{\sin t}{t}$ par continuité en 0,ce n'est donc pas une intégrale impropre ; on parle plutôt d'intégrale **faussement impropre** .

(d) La définition s'étend, bien évidemment, au cas où f est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $]a;b]$, intégrable au sens de Riemann sur chacun des intervalles $[x;y] \subset]a;b]$; si $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} F(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t$ existe, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ converge.

3. Si f est à valeurs complexes, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si, $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt$ **et** $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt$ convergent en même temps

Exemple 1 :

1. $\boxed{\text{Soit } B > 0.\ \displaystyle\int_0^B \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ n'a de sens que si et seulement si : } \alpha < 1}$

(a) Comment faire pour le démontrer ?

C'est très simple : On étudie d'abord $\displaystyle\int_x^B \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ pour $x > 0$, qui ne pose pas de problème puisque continue sur $]0; B]$, puis, ensuite, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \int_x^B \frac{1}{t^\alpha}\, dt$.

(b) Par un calcul de primitives classique, $\displaystyle\int_x^B \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_x^B$, cette égalité étant vraie, bien sûr pour $\alpha \neq 1$; nous avons donc :

$$\int_x^B \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_x^B = \frac{1}{1-\alpha}\left\{B^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}\right\}$$

(c) Il devient donc évident que si $1-\alpha > 0$, c'est à dire si $\alpha < 1$ alors, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x^{1-\alpha} = 0$, et donc,

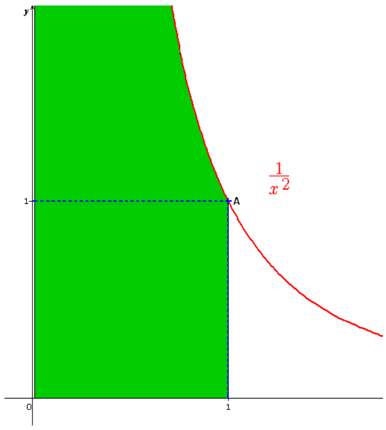
$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \int_x^B \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-\alpha}\left\{B^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}\right\} = \frac{B^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

(d) De la même manière, si $1-\alpha < 0$, c'est à dire si $\alpha > 1$ alors, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha} = +\infty$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^B \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ n'existe pas.

(e) Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_x^B \frac{1}{t}\, dt = [\ln t]_x^B = \ln B - \ln x$, et comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^B \frac{1}{t}\, dt$ diverge.

(f) **Par exemple,** *(cf figures 4.1)* l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale divergente *(nous avons* $2 > 1$*)*, alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est convergente *(nous avons* $\dfrac{1}{2} < 1$*)* et nous avons $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2$

1. Quelle est la différence avec l'exemple 1 précédent ?



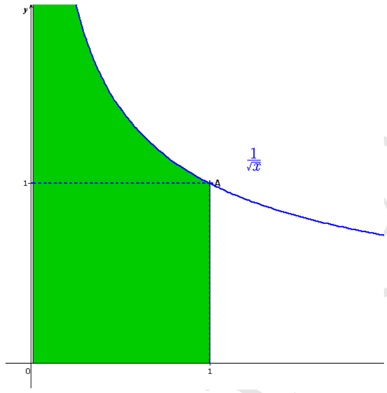


FIGURE 4.1 – Les graphes de $\dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0,1]$. Nous avons $\displaystyle\int_{0,01}^{1} \frac{1}{t^2}dt = 99,47$ et $\displaystyle\int_{0,01}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 1,800$

2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$ converge

De la même manière, on calcule $\displaystyle\int_x^1 \ln t\ dt$, et nous avons, en utilisant une intégration par parties :

$$\int_x^1 \ln t\ dt = [t\ln t - t]_x^1 = -1 - x\ln x + x$$

De la limite classique $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, on tire :

$$\boxed{\int_0^1 \ln t\ dt = -1}$$

Ce que nous voulions.

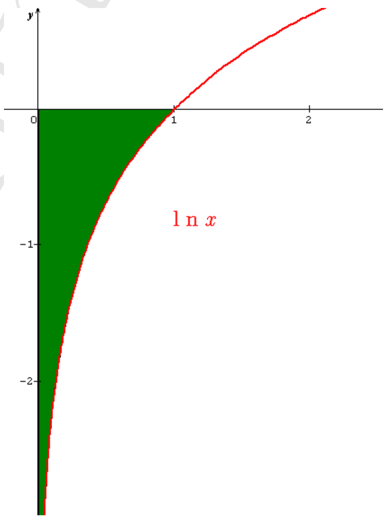


FIGURE 4.2 – Le graphe de $\ln x$ sur $]0,1]$. Nous avons $\displaystyle\int_{0,01}^{1} \ln t dt = -0,944$

3. Est ce que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arccos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ existe ?

(a) Comme précédemment , on étudie $\displaystyle\int_x^1 \frac{\arccos t}{\sqrt{t}}\,dt$.

On peut remarquer que la fonction $\dfrac{\arccos t}{\sqrt{t}}$ n'est pas bornée sur $]0;1]$

En effet, comme $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \arccos t = \frac{\pi}{2}$, nous avons $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\arccos t}{\sqrt{t}} = +\infty$

(b) On fait le changement de variable : $s=\sqrt{t}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} = \dfrac{1}{2s}$; d'où $2s\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}t$, et si $t\in[x;1]$, alors $s\in[\sqrt{x};1]$, donc $\displaystyle\int_x^1 \frac{\arccos t}{\sqrt{t}}\,dt = \int_{\sqrt{x}}^1 \left(\arccos s^2\right)\times(2s)\ ds$; or, $f(s) = \left(\arccos s^2\right)\times(2s)$ est continue sur $[0;1]$.

(c) Donc, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{\arccos t}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to 0}\int_{\sqrt{x}}^1 \left(\arccos s^2\right)\times(2s)\ ds = \int_0^1 \left(\arccos s^2\right)\times(2s)\ ds$

(d) Reste à calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(\arccos s^2\right)\times(2s)\ ds$.

Le calcul de $\displaystyle\int_0^1 \left(\arccos s^2\right)\times(2s)\ ds$ ne pose pas tant de difficultés est ressort du cours de $L1$.

On effectue le changement de variables $u=s^2$, alors $\dfrac{du}{ds} = 2s$ et nous avons :

$$\int_0^1 \left(\arccos s^2\right)\times(2s)\ ds = \int_0^1 (\arccos u)\ du$$

La primitive de $\arccos x$ s'obtient par une intégration par parties classique, et nous avons :

$$\int_0^1 \left(\arccos s^2\right)\times(2s)\ ds = \int_0^1 (\arccos u)\ du = \left[x\arccos x - \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 1$$

Donc, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arccos t}{\sqrt{t}}\,dt = 1$

Remarque 2 :

Si $f : [a;b[\longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux et si $c\in[a;b[$ alors l'intégrale de f est convergente sur $[a;b[$ si, et seulement si, l'intégrale de f est convergente sur $[c;b[$ *(le problème de la convergence se pose en b)* c'est à dire :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \text{ est convergente si et seulement si } \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t \text{ est convergente}$$

Et dans ce cas, nous avons :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

Cela résulte immédiatement de la relation de Chasles pour les intégrales définies :

$$(\forall x\in\,]a;b[)\left(\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t\right)$$

4.1.2 Rappel du critère de Cauchy pour les fonctions

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point a, sauf, peut-être en a.
Pour que f ait une limite finie lorsque x tend vers a, par valeurs différentes de a, il faut et il suffit que :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tels que :

$$(x \neq a \ y \neq a \ |x-a| \leqslant \eta \ |y-a| \leqslant \eta) \Longrightarrow (|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon)$$

Remarque 3 :

Pour la démonstration et plus de développement, il faut aller voir le cours de $L1$

4.1.3 Proposition : le critère de Cauchy

Critère difficile à utiliser en pratique, mais d'une grande importance théorique.

Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle$[a; b[$ ou sur $]a; b]$, intégrable au sens de Riemann sur chacun des intervalles $[x; y] \subset [a; b[$ ou sur $[x; y] \subset]a; b]$
Alors, $\displaystyle\int_a^b f(t) \ dt$ a un sens, si et seulement si,
$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon > 0)$ tels que :

$$((b - \eta_\varepsilon < x < y < b)) \Longrightarrow \left(\left|\int_x^y f(t) \ dt\right| < \varepsilon\right)$$

Ou bien :$(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \eta_\varepsilon > 0)$ tels que

$$((a < x < y < a + \eta_\varepsilon)) \Longrightarrow \left(\left|\int_x^y f(t) \ dt\right| < \varepsilon\right)$$

Démonstration

On applique, très simplement, le critère de Cauchy pour les fonctions, dans le premier cas à la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t) \ dt$ ou à la fonction $G(x) = \displaystyle\int_x^b f(t) \ dt$ dans le second cas

4.1.4 Proposition

Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a; b[$. Si f est bornée sur $[a; b[$ alors, $\displaystyle\int_a^b f(t) \ dt$ converge

Démonstration

C'est le moment d'utilise le critère de Cauchy.
On suppose donc que f est bornée, et nous écrivons qu'elle est bornée :

Il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [a; b[$, $|f(x)| \leqslant M$.

Soient $x \in [a; b[$ et $y \in [a; b[$; alors, $\left|\displaystyle\int_x^y f(t) \ \mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_x^y |f(t)| \ \mathrm{d}t \leqslant M\,|x-y|$
Ce qui montre que si $\eta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{M}$

$$|x-y| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow \left|\int_x^y f(t) \ \mathrm{d}t\right| \leqslant M \times \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

D'après le critère de Cauchy, l'intégrale converge donc.

Exemple 2 :

1. Bien que $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'existe pas, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\, dt$ existe, car la fonction $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est bornée sur $[0;\pi]$ *(cf figure 4.3)*

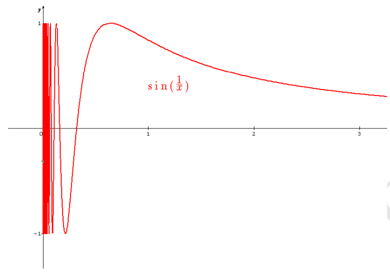


FIGURE 4.3 – Le graphe de $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$. Nous avons $\displaystyle\int_{0,01}^{\pi} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = 1,56413$

2. **Est ce que** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\, dt$ **est définie ? *(cf figure 4.4)***

   (a) Dans un premier temps, comme dans tous les exemples précédents, nous étudions $\displaystyle\int_x^{\pi} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\, dt$ en en faisant une intégration par parties.

   (b) On remarque que : $\dfrac{1}{t}\sin\left(\dfrac{1}{t}\right) = t \times \left(\dfrac{1}{t^2}\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)$, et en utilisant cette remarque, nous avons :

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{t^2}\sin\left(\dfrac{1}{t}\right) & u = \cos\left(\dfrac{1}{t}\right) \\ v = t & v' = 1 \end{cases}$$

   (c) Donc,

$$\int_x^{\pi} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\, dt = \left[t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right]_x^{\pi} - \int_x^{\pi} \cos\left(\frac{1}{t}\right)\, dt = \pi\cos\left(\frac{1}{\pi}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \int_x^{\pi} \cos\left(\frac{1}{t}\right)\, dt$$

   (d) Comme, $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, et que $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{1}{t}\right)\, dt$ existe **car** $\cos\left(\dfrac{1}{t}\right)$ **est bornée,** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\, dt$ existe et, mieux que cela, nous avons : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\, dt = \pi\cos\left(\frac{1}{\pi}\right) - \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{1}{t}\right)\, dt$

   (e) Reste à calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{1}{t}\right)\, dt$, ce qui est une autre affaire !

4.1.5 Définition

Soit f, continue par morceaux sur l'intervalle $[a;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que $\forall x \geqslant a$ et $\forall y \geqslant a$, f soit intégrable sur l'intervalle $[x;y]$.

On définit $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **a un sens,** et on écrit :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

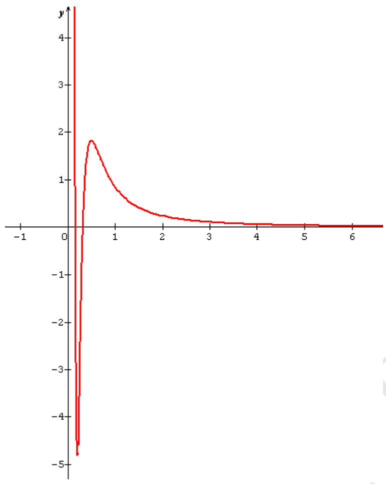


FIGURE 4.4 – Le graphe de $\dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Remarque 4 :

1. On dit que l'intégrale converge si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ a un sens ; elle diverge, sinon.
2. Déterminer **la nature d'une intégrale**, c'est déterminer l'existence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$
3. Pour tout $c \geqslant a$, les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\ dt$ ont même nature. C'est le comportement à l'infini qui nous importe.

Exemple 3 :

Nous allons commencer par des exemples élémentaires, mais néanmoins très importants

1. Existence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ dt$

   On calcule $\displaystyle\int_a^{x} \frac{1}{t^\alpha}\ dt$, puis on étudie $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^{x} \frac{1}{t^\alpha}\ dt$

   (a) Commençons par le plus simple : si $\alpha = 1$, nous avons $\displaystyle\int_a^{x} \frac{1}{t}\ dt = \ln x - \ln a$, et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ dt$ diverge

   (b) Si $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_a^{x} \frac{1}{t^\alpha}\ dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^x = \frac{1}{1-\alpha}\left\{x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right\}$

   Donc,
   — Si $1-\alpha < 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = 0$,
   — Si $1-\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = +\infty$

   (c) En conclusion, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ dt$ n'existe que si $\alpha > 1$ *(cf figure 4.5)*

2. Existence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{At}\ dt$ avec $A \neq 0$

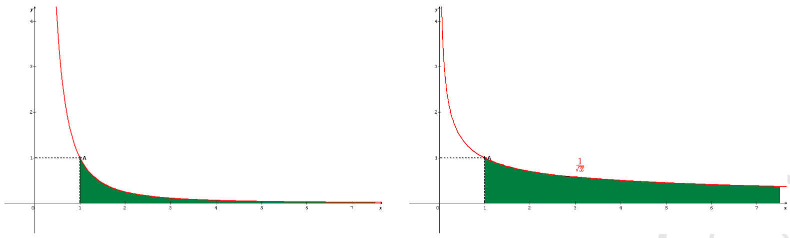


FIGURE 4.5 – Les graphes de $\dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

(a) Nous calculons $\displaystyle\int_a^x e^{At}\,dt$; ici, nous avons un calcul très simple. Donc, $\displaystyle\int_a^x e^{At}\,dt = \left[\frac{e^{At}}{A}\right]_a^x = \frac{e^{Ax} - e^{Aa}}{A}$;

   i. D'où, si $A < 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{Ax} = 0$, et donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{At}\,dt = \frac{-e^{Aa}}{A}$

   ii. D'où, si $A > 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{Ax} = +\infty$, et donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{At}\,dt$ n'existe pas.

(b) En conclusion, $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{At}\,dt$ n'existe que si et seulement si $A < 0$

Exercice 1 :

Etudier l'existence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{(\ln t)^m}{t}\,dt$ pour $a \geqslant 1$

Exercice 2 :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$ en précisant sa valeur en cas de convergence

4.1.6 Définition

Cette définition est identique à la définition précédente 4.1.5

Soit f, continue par morceaux sur l'intervalle $]-\infty; a]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que pour tout $x \leqslant a$ et pour tout $y \leqslant a$, f soit intégrable sur l'intervalle $[x; y]$.
On définit $F(x) = \displaystyle\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$
Si $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ **a un sens,** et on écrit :

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

4.1.7 Critère de Cauchy

1. Pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ soit convergente, il faut et il suffit que :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists B_0)\ \text{tel que}\ \Big((y \geqslant x \geqslant B_0) \Longrightarrow \Big(\Big|\int_x^y f(t)\,dt\Big| \leqslant \varepsilon\Big)\Big)$$

2. De même, pour que l'intégrale $\int_{-\infty}^{a} g(t)\,dt$ soit convergente, il faut et il suffit que :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists B_0)\ \text{tel que}\ \Big((y \leqslant x \leqslant B_0) \Longrightarrow \Big(\Big|\int_x^y g(t)\,dt\Big| \leqslant \varepsilon\Big)\Big)$$

Démonstration

C'est le critère de Cauchy appliqué aux fonctions $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ et $G(x) = \int_x^a g(t)\,dt$

4.1.8 Généralisation

1. Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle$]a;b]$, intégrable au sens de Riemann sur chacun des intervalles $[x;y] \subset [a;b[$.
   On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ a un sens, si, pour tout $c \in]a;b]$, $\int_a^c f(t)\ dt$ et $\int_c^b f(t)\ dt$ ont un sens, et on a alors $\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt$
2. Soit f, une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, intégrable au sens de Riemann sur chacun des intervalles $[x;y] \subset \mathbb{R}$. On dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ a un sens, si, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t)\ dt$ ont un sens, et on a alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)\ dt + \int_c^{+\infty} f(t)\ dt$

Remarque 5 :

1. Il faut bien noter que la divergence de **l'une des deux intégrales** $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ équivaut à la divergence de $\int_a^b f(t)\ dt$
2. Dans le cas où $a = -\infty$ et $b = +\infty$ l'existence de $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-x}^{+x} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne prouve pas la convergence de l'intégrale de f sur $]-\infty;+\infty[$

   Par exemple pour $f(t) = t$ on a $\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et pourtant l'intégrale diverge.

   En effet $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t\,\mathrm{d}t = +\infty$

   Pour prouver la convergence de l'intégrale de f sur $]-\infty;+\infty[$ on doit prouver indépendamment la convergence de $\int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, et ce, pour tout $c \in \mathbb{R}$.*(Après les exemples qui suivent, allez voir aussi dans les travaux dirigés)*

Exemple 4 :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ *a un sens*

   En effet, soit $c \in \mathbb{R}$; alors, $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{c}^{x} \frac{1}{1+t^2}\, dt$; or,

   $$\int_{c}^{x} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan x - \arctan c$$

   Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\arctan x) = \frac{\pi}{2}$, $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} - \arctan c$

   De même, $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan c - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \arctan c + \frac{\pi}{2}$, c'est à dire

   $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \pi}$$

2. *L'intégrale impropre* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t\, dt$ *n'existe pas.*

   En effet, soit $c \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_{c}^{x} \sin t\, dt = \cos c - \cos x$ qui n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$

3. *Est-ce que l'intégrale* $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ *a un sens ?*

   La fonction $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{\star +}$

   Or $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{t^2}\, dt$ n'a pas de sens, donc, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ n'existe pas.

   Une autre façon de faire, est de considérer l'intégrale $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{A} \frac{1}{t^2}\, dt$, puis de regarder les limites lorsque ε tend vers 0 et A vers $+\infty$.

   Or, $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{A} \frac{1}{t^2}\, dt = \left[\frac{-1}{t}\right]_{\varepsilon}^{A} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{A}$ et $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ A \to +\infty}} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{A}\right) = +\infty$ et, donc, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ n'existe pas.

4.1.9 Proposition

Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a; b[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\, dt$ ait un sens.

De même, soit g une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a; b[$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{b} g(t)\, dt$ ait aussi un sens.

Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $\mu \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\int_{a}^{b} \lambda f(t) + \mu g(t)\, dt$ a un sens, et

$$\int_{a}^{b} \lambda f(t) + \mu g(t)\, dt = \int_{a}^{b} \lambda f(t)\, dt + \int_{a}^{b} \mu g(t)\, dt = \lambda \int_{a}^{b} f(t)\, dt + \mu \int_{a}^{b} g(t)\, dt$$

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a; b[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telles que l'intégrale $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\, dt$ soit convergente est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Démonstration

C'est très facile ; soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^x \lambda f(t) + \mu g(t)\ dt = \int_a^x \lambda f(t)\ dt + \int_a^x \mu g(t)\ dt = \lambda \int_a^x f(t)\ dt + \mu \int_a^x g(t)\ dt$$

Et le reste s'obtient par passage à la limite.

Remarque 6 :

1. On peut, évidemment, généraliser à $]a;b]$, $]a;b]$, avec des bornes éventuellement infinies.
2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ converge, alors que $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ diverge, $\displaystyle\int_a^b f(t) + g(t)\ dt$ diverge
3. On ne peut rien affirmer sur $\displaystyle\int_a^b f(t) + g(t)\ dt$ lorsque $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ diverge et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ diverge.

4.1.10 Proposition

1. Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a;b[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ ait un sens.

   Alors, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$ a un sens, et $\displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}\ \mathrm{d}t = \overline{\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t}$
2. Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a;b[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ a un sens si et seulement si $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}\,(f)\,(t)\ \mathrm{d}t$ **et** $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}\,(f)\,(t)\ \mathrm{d}t$ ont un sens, et alors

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f)\,(t)\ \mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}\,(f)\,(t)\ \mathrm{d}t$$

Démonstration

Résulte du fait que $f = \mathrm{Re}\,(f) + i\,\mathrm{Im}\,(f)$ et de $\mathrm{Re}\,(f) = \dfrac{f+\overline{f}}{2}$ et $\mathrm{Im}\,(f) = \dfrac{f-\overline{f}}{2}$. En effet

1. Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ a un sens, alors $\displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$ a aussi un sens et comme $\mathrm{Re}\,(f) = \dfrac{f+\overline{f}}{2}$, nous avons

$$\int_a^b \mathrm{Re}\,(f)\,(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{f+\overline{f}}{2}(t)\ \mathrm{d}t$$

   Nous en déduisons donc $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}\,(f)\,(t)\ \mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

   On démontre que la même manière que $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}\,(f)\,(t)\ \mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.
2. Réciproquement, supposons que $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}\,(f)\,(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}\,(f)\,(t)\ \mathrm{d}t$ ont un sens.

   Alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f)\,(t) + i\,\mathrm{Im}\,(f)\,(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f)\,(t)\ \mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}\,(f)\,(t)\ \mathrm{d}t$ qui montre bien que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ a un sens.

Exercice 3 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ deux nombres réels. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{at} \cos bt \, dt$ en précisant sa valeur en cas de convergence

4.1.11 Définition et proposition

Soit f, une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a; b[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)| \, dt$ ait un sens.

Alors, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \, dt$ a un sens, et nous avons :

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)| \, dt$$

Si $\displaystyle\int_a^b |f(t)| \, dt$ existe, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \, dt$ est **absolument convergente**

Démonstration

Pour démontrer cette proposition, on utilise le critère de Cauchy vu en 4.1.3 et 4.1.7.
Soit donc $\varepsilon > 0$

On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)| \, dt$ converge ; elle vérifie donc le critère de Cauchy .

Il existe donc $\eta_\varepsilon > 0$, tel que $((b - \eta_\varepsilon < x < y < b)) \Longrightarrow \left(\left| \displaystyle\int_x^y |f(t)| \, dt \right| < \varepsilon \right)$

Nous avons $\left| \displaystyle\int_x^y |f(t)| \, dt \right| = \displaystyle\int_x^y |f(t)| \, dt$. Donc, nous avons aussi $\displaystyle\int_x^y |f(t)| \, dt < \varepsilon$

De l'inégalité *(toujours vraie)* $\left| \displaystyle\int_x^y f(t) \, dt \right| \leqslant \displaystyle\int_x^y |f(t)| \, dt$, nous en déduisons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t) \, dt$ vérifie aussi le critère de Cauchy ; elle est donc convergente.

Remarque 7 :

Il existe des intégrales convergentes sans être absolument convergentes : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$, par exemple.