4.2 Sens d'une intégrale

Lorsque nous sommes en présence d'une intégrale, la question la plus importante que nous devons nous poser, avant tout calcul, est la **question de son sens**[2], de l'existence de cette intégrale.

— **Première question :** Est ce que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est propre ? Si elle l'est, il n'y a pas de problème

— **Seconde question :** Est ce que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est impropre ? Si elle l'est, il faut alors, étudier son sens. Une fois que nous aurons démontré la convergence, il nous restera à la calculer. Pour certaines intégrales, le calcul sera très difficile, voire impossible avec des outils élémentaires.

4.2.1 Théorème pour des fonctions positives

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a;b[$ *(b pouvant être fini ou infini)* et telles que, pour tout $x \in [a;b[$, nous avons l'inégalité $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$

1. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ diverge
2. Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ converge

Démonstration

L'une des implications étant la contrapposée de l'autre, on ne démontre qu'une seule implication.

Supposons que $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ converge.

On appelle $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\ dt$; Comme $g(x) \geqslant 0$, alors $G(x)$ est croissante, $\displaystyle\lim_{x\to b} G(x) = \int_a^b g(t)\ dt$;

$G(x)$ est donc majorée par $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$

De l'inégalité $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, nous tirons $0 \leqslant \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \leqslant \int_a^x g(t)\ dt \leqslant \int_a^b g(t)\ dt$

Si $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$, F est croissante et majorée et donc convergente ; donc, $\displaystyle\lim_{x\to b} F(x) = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\ dt$;

l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ converge donc

Exemple 5 :

1. **Existence de** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$

   (a) Il est évident que la fonction $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ est positive, mais n'est pas bornée sur l'intervalle $[0;1[$, et donc que **l'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ **est impropre.**
   Il faut donc d'abord, en étudier son sens ou sa convergence. L'idée est de majorer cette intégrale.

   (b) Pour $t \in [0;1[$, nous avons : $t^4 \leqslant t^2$, donc $-t^4 \geqslant -t^2$, c'est à dire $\sqrt{1-t^4} \geqslant \sqrt{1-t^2}$, et donc : $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, et donc, $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\ dt \leqslant \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt$, pour tout $x \in [0;1[$

2. Du sens de l'intégrale, bien sûr

(c) La dérivée de la fonction arcsin x est donnée par $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, que donc, $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin x$, qu'en particulier $\displaystyle\lim_{x\to 1}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \lim_{x\to 1}\arcsin x = \frac{\pi}{2}$

(d) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ est convergente, nous avons même $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{2}$, on en conclue donc que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ est aussi convergente

Une autre question sera d'en faire le calcul !

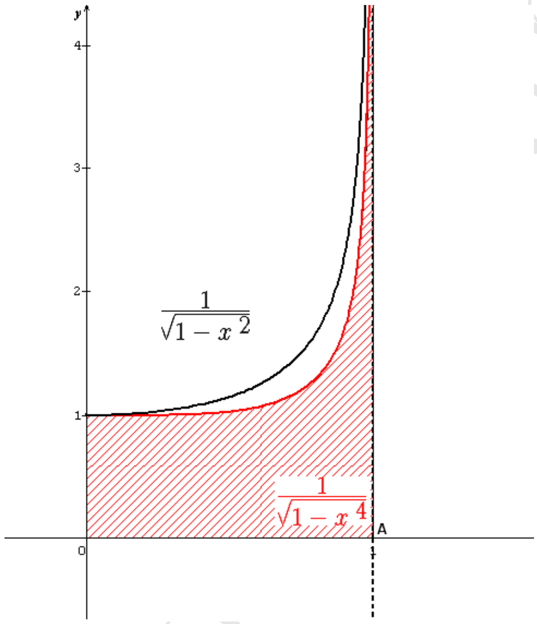

FIGURE 4.6 – Les graphes de $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ sur $[0;1[$. Nous avons $\displaystyle\int_0^{0,999} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}dt = 1,34884$

2. **Existence de** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t}\,dt$

Bien sûr, une fois de plus, le problème, pour la fonction $\dfrac{e^t}{t}$ se pose en 0 ; or, pour $t \in]0;1]$, nous avons : $\dfrac{e^t}{t} \geqslant \dfrac{1}{t}$, et donc, pour $x \in]0;1]$, $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{t}\,dt \geqslant \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt$;or, nous avons $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = -\ln x$, que donc, mes braves, comme $\displaystyle\lim_{x\to 0}(-\ln x) = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t}\,dt$ n'existe pas ; voilà !!

3. Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\,dt$, où $p > 0$

CETTE QUESTION EST UN GRAND CLASSIQUE ET POURRAIT ÊTRE UNE QUESTION DE COURS

(a) Il y a d'abord, un chose qu'il faut absolument bien connaître et savoir utiliser, et ré-utiliser, c'est : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\lambda e^{-t} = 0$, et ceci, pour tout $\lambda > 0$. ce résultat fait partie de ce qu'on appelle des comparaisons de fonctions :

L'exponentielle l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur les logarithmes

(b) Nous avons, en particulier, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{p+2}e^{-t} = 0$; pourquoi $p+2$?.......À suivre !!

(c) Il existe donc un nombre $A > 0$ tel que, si $t > A$ alors, $t^{p+2}e^{-t} < 1$; donc, si $t > A$, alors, $t^p e^{-t} < \frac{1}{t^2}$.

(d) Alors, à partir d'ici, nous allons découper l'intégrale en deux.

Nous avons : $\int_0^x t^p e^{-t}\, dt = \int_0^A t^p e^{-t}\, dt + \int_A^x t^p e^{-t}\, dt$

— En ce qui concerne l'intégrale $\int_0^A t^p e^{-t}\, dt$, pas de problème : elle est propre ; on peut même la calculer ! ![3]

— Par contre, $\int_A^x t^p e^{-t}\, dt$ pose un peu plus de problèmes, et c'est là que l'étude précédente sur $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{p+2}e^{-t} = 0$ intervient ; en effet : $\int_A^x t^p e^{-t}\, dt \leqslant \int_A^x \frac{1}{t^2}\, dt$; comme $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$, existe, il en est de même de $\int_A^{+\infty} t^p e^{-t}\, dt$

En conclusion, $\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\, dt$ existe, pour tout $p > 0$

4.2.2 Théorème

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a; b[$ (b pouvant être fini ou infini) et telles que $\forall x \in [a; b[$, $|f(x)| \leqslant g(x)$
Si $\int_a^b g(t)\, dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\, dt$ converge

Démonstration

D'après le théorème 4.2.1 précédent, l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente *(comparaison des fonctions positives)* ; l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ est donc absolument convergente, donc convergente.

4.2.3 Théorème : utilisation des équivalents

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur l'intervalle $[a; b[$ (*b pouvant être fini ou infini*) et toutes les deux positives sur l'intervalle $[a; b[$
On suppose que $f(x) \underset{x\to b}{\approx} g(x)$ au voisinage de b
Alors $\int_a^b f(t)\, dt$ et $\int_a^b g(t)\, dt$ ont même nature

Démonstration

Que $f(x) \underset{x\to b}{\approx} g(x)$ au voisinage de b, veut dire $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Il existe donc $A > 0$, tel que si $|x - b| < A$, alors, $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \frac{1}{2}$, c'est à dire que si $|x - b| < A$, alors $\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}$.
Ainsi, si $b - A < x < b$, alors,

$$\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x) \tag{4.1}$$

Cette double inégalité est donc très forte, puisqu'elle montre comment sont liées $f(x)$ et $g(x)$ au voisinage de b

3. Mais, c'est un peu long !

On découpe toujours l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^{b-A} f(t)\ dt + \int_{b-A}^b f(t)\ dt$$

L'intégrale $\displaystyle\int_a^{b-A} f(t)\ dt$ ne pose pas de problème.
De même,

$$\int_a^b g(t)\ dt = \int_a^{b-A} g(t)\ dt + \int_{b-A}^b g(t)\ dt$$

Des inégalités (4.1), du fait que f et g sont deux fonctions positives, nous tirons que les intégrales $\displaystyle\int_{b-A}^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{b-A}^b g(t)\ dt$ ont même nature.

Exemple 6 :

1. Pour commencer une remarque : **De la nécessité de connaître des intégrales remarquables** comme $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha dt$ ou $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha dt$ etc.....
2. **Existence de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}}dx$

   Premièrement, la fonction $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}}$ est positive et continue sur $[+1\ +\infty[$

   Lorsque x tend vers $+\infty$, nous avons $x^5+x+1 \underset{+\infty}{\simeq} x^5$ et donc $\sqrt{x^5+x+1} \underset{+\infty}{\simeq} x^{\frac{5}{2}}$, et donc

$$\frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}} \underset{+\infty}{\simeq} \frac{2x}{x^{\frac{5}{2}}} = 2x^{\frac{-3}{2}}$$

   Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2x^{\frac{-3}{2}}dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ converge, et donc, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}}dx$ converge aussi

3. **Existence de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)\ dt$

   On peut d'ores et déjà, faire remarquer que la fonction $\dfrac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)$ est positive pour $t \geqslant 1$ et le théorème précédent est susceptible d'être appliqué

   Deux méthodes peuvent être utilisées pour résoudre cette question.

   (a) La première : utiliser les limites classiques, du type : $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1$; nous avons donc, ici, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}-1}{\frac{1}{t}} = 1$; comme, $\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right) = \dfrac{\frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)}{\frac{1}{t}}$, nous avons $\dfrac{\frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)}{\frac{1}{t}\times\frac{1}{t}} = \dfrac{\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)}{\frac{1}{t}}$ et donc, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)}{\frac{1}{t}\times\frac{1}{t}} = 1$, ce qui montre que $\dfrac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{t^2}$; comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)\ dt$

   (b) La seconde donne un autre moyen de trouver un équivalent, est de faire un **développement asymptotique.** En effet, le développement limité de e^x en zéro est donné par :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$$

   Or, si t est voisin de $+\infty$, $\dfrac{1}{t}$ est voisin de zéro, et, au voisinage de $+\infty$

$$e^{\frac{1}{t}} = 1 + \frac{1}{t} + \frac{\frac{1}{t^2}}{2} + \frac{\frac{1}{t^3}}{6} + \frac{\frac{1}{t^4}}{24} + \frac{1}{t^4}\varepsilon\left(\frac{1}{t}\right)$$

C'est à dire que :
$$\frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)=\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}+\frac{\frac{1}{t^2}}{2}+\frac{\frac{1}{t^3}}{6}+\frac{\frac{1}{t^4}}{24}+\frac{1}{t^4}\varepsilon\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$
Ce qui montre donc, mais d'une autre façon, que $\frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)\underset{+\infty}{\approx}\frac{1}{t^2}$

4. **Existence de** $B(p,q)=\displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\ dt$**, où** $p\in\mathbb{R}$**, et** $q\in\mathbb{R}$

   Ce n'est pas un problème aussi simple que cela, surtout parce que $p\in\mathbb{R}$ et $q\in\mathbb{R}$.

   (a) Il faut d'abord remarquer que si $p\geqslant 0$ **et** $q\geqslant 0$, alors il n'y a aucun problème de continuité de la fonction $f(t)=t^p(1-t)^q$ sur l'intervalle $[0;1]$; l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\ dt$ est propre donc bien convergente.

   (b) Il reste donc à étudier les autres cas, du type, par exemple $p<0$ et $q\in\mathbb{R}$. Les problèmes, pour cette intégrale, se posent donc en 0 et en 1. Nous allons donc scinder l'intervalle $[0;1]$ en deux, et nous allons étudier $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^p(1-t)^q\ dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 t^p(1-t)^q\ dt$

   — Etudions premièrement $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^p(1-t)^q\ dt$

   En 0, la fonction $f(t)=t^p(1-t)^q$ est équivalente à la fonction $g(t)=t^p$; en effet,
$$\lim_{t\to 0}\frac{t^p(1-t)^q}{t^p}=\lim_{t\to 0}(1-t)^q=+1$$
   Nous avons étudié *(cf 4.1.1)* $\displaystyle\int_0^B\frac{1}{t^\alpha}\,dt=\int_0^B t^{-\alpha}\,dt$ et nous avons montré que
$$\int_0^B\frac{1}{t^\alpha}\,dt=\int_0^B t^{-\alpha}\,dt$$
   n'a de sens que si et seulement si : $\alpha<1$ i.e. si $-\alpha>-1$; donc, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^p\,dt$ n'a de sens que si $p>-1$.

   On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^p(1-t)^q\ dt$ **n'existe que si** $p>-1$

   — Etudions maintenant $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 t^p(1-t)^q\ dt$

   Intelligents comme vous êtes, vous avez sûrement vu tout de suite, qu'un changement de variable s'imposait.
   Effectivement, si nous faisons le changement : $u=1-t$, nous obtenons $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}t$, alors, c'est là que le miracle s'opère, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 t^p(1-t)^q\ dt=\int_{\frac{1}{2}}^0 u^q(1-u)^p\ -du=\int_0^{\frac{1}{2}} u^q(1-u)^p\ du$
   Nous retombons alors sur l'étude du point précédent ; nous pouvons alors conclure, tout bonnement, que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} u^q(1-u)^p\ du$ n'existe que si $q>-1$

   Autre forme de de l'énoncé précédent : $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 t^p(1-t)^q\ dt$ **n'existe que si** $q>-1$

   (c) <u>Conclusion :</u>$B(p,q)=\displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\ dt$ **n'existe que si** $p>-1$ **et** $q>-1$