4.3 Quelques idées pratiques

4.3.1 Plan d'étude d'une intégrale généralisée

Nous résumons ici l'ensemble des techniques vues dans ce chapitre pour l'étude de l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle non borné de $\mathbb{R}$, la fonction étant éventuellement non bornée au voisinage d'un ou plusieurs points de l'intervalle. Pour illustrer le plan d'étude, nous détaillerons l'exemple :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{\frac{-3}{2}} \sin t dt$$

1. **Identifier le ou les points incertains**

   La fonction $|t|^{\frac{-3}{2}} \sin t$ est impaire, elle tend vers 0 en oscillant quand t tend vers $-\infty$ et $+\infty$, elle tend vers $-\infty$ en 0^- et vers $-\infty$ en 0^+. Il y a donc 4 points incertains à étudier.

2. **Isoler les points incertains**

   Pour cela, il faut découper l'intervalle d'étude en autant de sous-intervalles qu'il y a de points incertains, de manière à ce que les problèmes soient tous situés sur une borne de chaque intervalle. Dans notre exemple, on divisera en 4 intervalles.

   $$I_1 = \int_{-\infty}^{-1} |t|^{\frac{-3}{2}} \sin t dt \qquad I_2 = \int_{-1}^{0} |t|^{\frac{-3}{2}} \sin t dt$$
   $$I_3 = \int_{0}^{+1} |t|^{\frac{-3}{2}} \sin t dt \quad I_4 = \int_{1}^{+\infty} |t|^{\frac{-3}{2}} \sin t dt$$

   Chacune des intégrales obtenues doit être étudiée séparément. L'intégrale I n'est définie que si chacun des morceaux converge.

3. **Se ramener à une intégrale sur** $[a, +\infty[$ **ou sur** $]a, b]$

   Pour cela, il suffit d'effectuer le changement de variable $t \mapsto -t$. Dans notre cas, puisque la fonction est impaire, $I_1 = I_4$ et $I_2 = I_3$.

4. **Calculer une primitive si c'est possible**

   Ayant une primitive, le problème est ramené à un calcul de limite. Si on n'a pas de primitive explicite, alors :

   (a) **Si la fonction est de signe constant**

   Changer éventuellement le signe pour se ramener à une fonction positive. Calculer un équivalent au voisinage du point incertain et utiliser le théorème sur les équivalents.

   Si l'équivalent ne donne pas la réponse directement, utiliser les théorèmes de comparaison.

   Dans notre exemple, l'intégrale I_3 est celle d'une fonction positive, tendant vers $+\infty$ en 0^+.

   $$|t|^{\frac{-3}{2}} \sin t \underset{0}{\approx} t^{\frac{-1}{2}}$$

   Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{\frac{-1}{2}} dt$ converge, donc I_3 converge.

   (b) **Si la fonction n'est pas de signe constant**

   Commencer par étudier l'intégrale de $|f|$, comme dans le cas précédent *(équivalent ou comparaison)*.

   Si elle converge, l'intégrale étudiée est absolument convergente, donc convergente.

   Dans notre exemple, l'intégrale I_4 est absolument convergente : on le déduit du théorème de comparaison, car, très simplement,

   $$\left| |t|^{\frac{-3}{2}} \sin t \right| \leqslant |t|^{\frac{-3}{2}} = t^{\frac{-3}{2}}$$

   et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{\frac{-3}{2}} dt$ est convergente. Donc l'intégrale I_4 est absolument convergente, donc convergente.

4.3.2 Tableau redonnant quelques primitives

Intervalle de définition	Fonction	Fonction primitive
$\mathbb{R}$	x^m avec $m \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1} + k$
$\mathbb{R}^*$	x^m avec $m \in \mathbb{Z}$ et $m < -1$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1} + k$
$]0,\ +\infty[$	x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$
$\{x \in \mathbb{R} \text{ tq } f(x) \in]0,\ +\infty[\}$	$f'(x) \times f(x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq -1$	$\dfrac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + k$
$\{x \in \mathbb{R} \text{ tq } u(x) > 0\}$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + k$
$\mathbb{R}$	e^x	$e^x + k$
$\mathbb{R}$	$u'(x)\, e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$
$\mathbb{R}$	a^x avec $a > 0$ et $a \neq +1$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + k$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + k$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + k$
$\left]-\dfrac{\pi}{2}\ \dfrac{\pi}{2}\right[$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + k$
$]-1\ \ +1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + k$
$]-1\ \ +1[$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + k$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + k$
$\left]-\dfrac{\pi}{2}\ \dfrac{\pi}{2}\right[$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$