4.4 Travaux dirigés

4.4.1 Application directe du cours

Exercice 4 :

Etudier la convergence des intégrales suivantes et, le cas échéant, indiquer leur valeur :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx$
4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$
7. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$
8. $\displaystyle\int_0^{1} x^n \ln x \, dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
9. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{(x-1)^2}dx$

Exercice 5 :

Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x\,(x+1)}$ et, le cas échéant, en indiquer sa valeur

Exercice 6 :

Etudier, suivant la valeur du réel positif α, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ avec $a < b$

Exercice 7 :

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+1} \frac{e^x}{x}dx$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos x}}{x}dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}dt$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^{at}}\,dt$ avec $a > 0$
9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}dx$ *(effectuer un changement de variables)*
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$
11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)\,x}dx$
12. $\displaystyle\int_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

Exercice 8 :

Etude de quelques faux amis

1. Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$, puis calculer $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{+a} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$.
2. De la même manière, étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$, puis calculer $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_{a}^{1-a} \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$.
3. Démontrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ est divergente alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\ln x}{x}\,dx = 0$
4. Quelles conclusions tirer ?

Exercice 9 :

Montrer que si $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\frac{1}{\sin t} \geqslant \frac{1}{t} > 0$; que conclure pour $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\, dt$?

Exercice 10 :

1. a est un réel ; étudier suivant les valeurs de a la convergence de l'intégrale $\int_0^1 x^a \left(6x - \left(6 + x^2\right)\sin x\right) dx$
2. Montrer qu'au voisinage de 0, $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \underset{x \to 0}{\approx} \frac{1}{\sqrt{x}}$, et qu'au voisinage de 1 $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \underset{x \to 1}{\approx} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$;

   en déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$

Exercice 11 :

On considère l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \left(1 + t^\beta\right)}$ où α et β sont deux réels strictement positifs ; pour quelles valeurs de α et β cette intégrale est-elle convergente ?

Exercice 12 :

Calcul d'intégrales généralisées

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, puis calculer $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
   (pour faire ce calcul, trouver A, B, et C, tels que $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$*)*
2. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$, puis calculer cette intégrale *(indications : trouver A, B, et C, tels que* $\frac{x}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x+1}$*)*

4.4.2 Quelques problèmes

Exercice 13 :

Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle $[a; +\infty[$. On suppose que $\lim_{t \to +\infty} f(t) = L$ et que L est finie.

Est-il possible, suivant la valeur de L de conclure quant à la nature de $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$?

Exercice 14 :

La convergence d'une intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ n'implique que pas que f admette une limite en $+\infty$

Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} f(n) = 1 \\ f\left(n - \frac{1}{2^n}\right) = 0 \\ f\left(n + \frac{1}{2^n}\right) = 0 \\ f \text{ est affine sur } \left[n - \frac{1}{2^n}; n\right] \text{ et sur } \left[n; n + \frac{1}{2^n}\right] \\ f(x) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Une autre façon d'exprimer f peut être donnée par :

$$\begin{cases} f\left(x\right) = 2^n \left(x - \left(n - \dfrac{1}{2^n}\right)\right) \text{ si } x \in \left[n - \dfrac{1}{2^n} ; n\right] \\ f\left(x\right) = -2^n \left(x - \left(n + \dfrac{1}{2^n}\right)\right) \text{ si } x \in \left[n ; n + \dfrac{1}{2^n}\right] \\ f\left(x\right) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Le graphe de la fonction est donné dans la figure 4.7

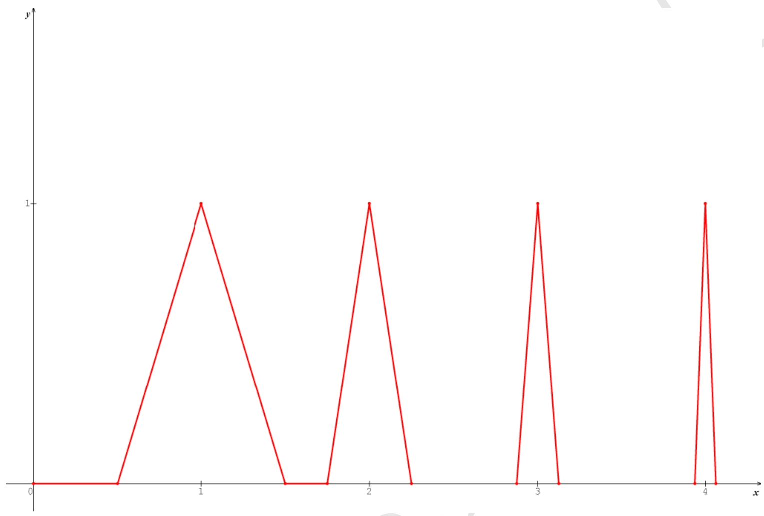

FIGURE 4.7 – le graphe de f

Montrer que f n'admet pas de limite lorsque t tend vers $+\infty$, mais que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f\left(t\right)\, dt$ converge

Exercice 15 :

Soit f, une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (autrement dit, $f \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}\right)$. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = L_1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = L_2$

1. Démontrez l'existence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f\left(x+1\right) - f\left(x\right)\right) dx$, puis calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f\left(x+1\right) - f\left(x\right)\right) dx$

   (Considérer $F\left(x\right) = \displaystyle\int_0^x f\left(t\right)\, dt$)

2. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\arctan\left(x+1\right) - \arctan\left(x\right)\right) dx$

Exercice 16 :

1. Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx$
2. Utiliser le théorème des accroissements finis pour démontrer que pour tout $x \in \left]0; 1\right[$,

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

3. Soit $T \in \left]0; 1\right[$; démontrer que $\displaystyle\int_0^T \frac{x}{\ln x}\, dx = \int_0^{T^2} \frac{1}{\ln x}\, dx$
4. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^T \frac{x-1}{\ln x}\, dx$ et démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx = \ln 2$

Exercice 17 :

Soit $f(x) = \ln(\sin x)$ et $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\ dx$

1. En écrivant $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) + \ln x$, démontrer qu'au voisinage de 0, nous avons $f(x) \underset{0}{\approx} \ln x$. Etablir alors la convergence de l'intégrale I
2. Montrer que nous avons $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\ dx$, puis que $2I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\ dx$
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\ dx = I$
4. En déduire la valeur de I

Exercice 18 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge.
Soient $0 < a < b$ et $0 < x < y$, et on pose :

$$F(x,y) = \int_x^y \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,dt$$

1. Montrer que $F(x,y) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t}\,dt$
2. On appelle $G(x) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt$; montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$
3. Montrer que $G(x) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0)}{t}\,dt + f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} G(x) = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
5. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,dt = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
6. Application : Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\sin t - \sin(2t)}{t^2}\,dt = \ln 2$
7. Prolongements
   (a) Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue et telle que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \alpha$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta$
   Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,dt = (\alpha - \beta)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
   (b) Application :
      i. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t) - \arctan(2t)}{t}\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2$
      ii. Etude et existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\tanh(3t) - \tanh t}{t}\,dt$
      iii. On considère $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\ln(1-x)}dx$; montrer que $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}dx$; en déduire A

Exercice 19 :

Les intégrales de Bertrand

1. Dans cette question, nous considérons l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}dx$

(a) On suppose $\alpha = 1$. L'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\left(\ln x\right)^{\beta}} dx$ est-elle convergente ?

(b) Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}\left(\ln x\right)^{\beta}} dx$ lorque $\alpha \neq 1$

2. Etudier maintenant la convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^{\alpha}\left(|\ln x|\right)^{\beta}} dx$

Exercice 20 :

La fonction Γ dans le domaine réel

1. Etudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ ne converge que si $x > 0$
3. Quel est le domaine de définition de $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$?
4. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
5. Calculer $\Gamma(1)$, et en déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
6. Calculer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$
7. Démontrer, par récurrence que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}\,(2n)!}{2^{2n}n!}$