4.5 Quelques exercices corrigés

4.5.1 Exercices proches du cours

C'est le type d'exercices dont on peut se passer de faire le corrigé, tellement ils sont élémentaires ; leur intérêt est de donner des méthodes de résolution simples

Exercice 1 :

Etudier l'existence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{(\ln t)^m}{t}\,dt$ pour $a \geqslant 1$

Tout d'abord, nous allons **calculer** $\displaystyle\int_a^X \frac{(\ln t)^m}{t}\,dt$, puis, nous allons **calculer** $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_a^X \frac{(\ln t)^m}{t}\,dt$

$\displaystyle\int_a^X \frac{(\ln t)^m}{t}\,dt$ se calcule par un simple calcul de primitives

1. Pour $m \neq -1$:
$$\int_a^X \frac{(\ln t)^m}{t}\,dt = \left[\frac{(\ln t)^{m+1}}{m+1}\right]_a^X = \frac{(\ln X)^{m+1} - (\ln a)^{m+1}}{m+1}$$
   — Si $m+1 > 0$, c'est à dire $m > -1$, nous avons $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} (\ln X)^{m+1} = +\infty$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{(\ln t)^m}{t}\,dt$ diverge
   — Si $m+1 < 0$, c'est à dire $m < -1$, nous avons $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} (\ln X)^{m+1} = 0$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{(\ln t)^m}{t}\,dt$ converge et nous avons $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{(\ln t)^m}{t}\,dt = \frac{-(\ln a)^{m+1}}{m+1}$
2. Pour $m = -1$, nous avons cette fois-ci $\displaystyle\int_a^X \frac{(\ln t)^m}{t}\,dt = \int_a^X \frac{1}{t\ln t}\,dt$. Or :
$$\int_a^X \frac{1}{t\ln t}\,dt = [\ln|\ln t|]_a^X = \ln|\ln X| - \ln|\ln a|$$
   Comme $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln|\ln X| = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{(\ln t)^m}{t}\,dt$ diverge pour $m = -1$

En conclusion, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{(\ln t)^m}{t}\,dt$ converge si et seulement si $m < -1$

Exercice 2 :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$ en précisant sa valeur en cas de convergence

1. Nous allons nous intéresser à $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$
   → Si $\lambda = 0$, alors $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{d}t = x$
   → Si $\lambda \neq 0$, alors $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x = \frac{e^{\lambda x}-1}{\lambda}$
2. Donc, si $\lambda = 0$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est donc divergente
3. Supposons, maintenant, $\lambda \neq 0$
   Alors, $F(x) = \dfrac{e^{\lambda x}-1}{\lambda} = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda x}\right)$, et en passant au module, nous avons :
$$|F(x)| = \left|\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda x}\right)\right| = \frac{\left|e^{\lambda x}\right|}{|\lambda|}\left|1-e^{-\lambda x}\right|$$

4. Nous supposons $\lambda = \alpha + i\beta$.
   Alors, $\left|e^{\lambda x}\right| = \left|e^{\alpha x + i\beta x}\right| = e^{\alpha x}$ et $\left|e^{-\lambda x}\right| = \left|e^{-\alpha x - i\beta x}\right| = e^{-\alpha x}$
   (a) Dans un premier temps, remarquons, par l'inégalité triangulaire vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, $||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$, nous avons :
   $$\left|1 - e^{-\lambda x}\right| \geqslant \left|1 - \left|e^{-\lambda x}\right|\right| = 1 - e^{-\alpha x}$$
   Et donc, $|F(x)| \geqslant \dfrac{e^{\alpha x}}{|\lambda|}\left(1 - e^{-\alpha x}\right)$
   Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - e^{-\alpha x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\alpha x} = +\infty$ et donc, par la minoration $\lim\limits_{x \to +\infty} |F(x)| = +\infty$, ce qui signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$ n'existe pas.
   Donc, en conclusion, si $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est divergente.
   (b) Regardons maintenant le cas où $\alpha < 0$
   Revenons à la valeur de $F(x)$.
   Nous avons : $F(x) = \dfrac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda} = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda}$
   Le comportement de $F(x)$ ne dépend que de celui de $\dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}$. Or : $\left|\dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right| = \dfrac{e^{\alpha x}}{|\lambda|}$
   Comme $\alpha < 0$, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{|\lambda|} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to +\infty} \left|\dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right| = 0$ et donc
   $$\lim_{x \to +\infty} F(x) = -\frac{1}{\lambda}$$
   Donc, en conclusion, si $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et
   $$\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda}$$
   (c) Si $\alpha = 0$, alors $\lambda = i\beta$ avec $\beta \neq 0$ *(Nous avons déjà traité le cas où $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ lorsque nous avons traité $\lambda = 0$)*
   Alors $F(x) = \dfrac{e^{i\beta x} - 1}{i\beta}$
   Considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = \dfrac{n\pi}{\beta}$. Alors
   $$F(x_n) = \frac{e^{i\beta x_n} - 1}{i\beta} = \frac{e^{i\beta \frac{n\pi}{\beta}} - 1}{i\beta} = \frac{e^{i\pi n} - 1}{i\beta}$$
   Ainsi, si n est pair, alors $F(x_n) = 0$ et si n est impair, $F(x_n) = \dfrac{-2}{i\beta} = \dfrac{2i}{\beta}$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F(x_n)$ n'existe pas.
   Donc, en conclusion, si $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est divergente

Exercice 3 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ deux nombres réels. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{at}\cos bt\,\mathrm{d}t$ en précisant sa valeur en cas de convergence

Cet exercice est une continuation du précédent

Posons $f(t) = e^{(a+ib)t}$. Nous avons $e^{at}\cos bt = \mathrm{Re}(f)(t)$. Nous pourrons alors écrire, en utilisant 4.1.10 que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{at}\cos bt\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe

En écrivant $\lambda = (a+ib)t$, nous avons $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$

1. D'après l'exercice précédent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$ ne converge que si $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ et nous avons, dans ce cas $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda}$
2. Nous avons $\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \Longleftrightarrow a < 0$.
   Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{at}\cos bt\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $a < 0$
3. Nous avons alors, si $a < 0$:
$$\int_0^{+\infty} e^{at}\cos bt\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{a+ib}\right) = -\frac{a}{a^2+b^2}$$

En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{at}\cos bt\,\mathrm{d}t$ ne converge que si $a < 0$, et si $a < 0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{at}\cos bt\,\mathrm{d}t = -\frac{a}{a^2+b^2}$

Exercice 4 :

Etudier la convergence des intégrales suivantes et, le cas échéant, indiquer leur valeur :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

   Il suffit de commencer par étudier $\displaystyle\int_0^{T} xe^{-x^2}dx$, puis d'en étudier la limite lorsque T tend vers $+\infty$
$$\begin{aligned}\int_0^{T} xe^{-x^2}dx &= \frac{-1}{2}\int_0^{T} -2xe^{-x^2}dx \\ &= \frac{-1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^T \\ &= \frac{-1}{2}\left(e^{-T^2}-1\right)\end{aligned}$$
   Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$

   Une jolie intégration par parties nous montre que :
$$\int_0^{T} xe^{-x}dx = Te^{-T} - e^{-T} + 1$$
   Conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 1$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx$

   Lorsqu'on écrit $\displaystyle\int_0^{T} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx$, nous sommes devant une intégrale du type $\displaystyle\int_0^{T} u'(x)\,e^{u(x)}dx$; la fonction $u'(x)\,e^{u(x)}$ admet pour primitive $e^{u(x)}$

Donc, $\displaystyle\int_0^T \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx = \left[e^{\arctan x}\right]_0^T = e^{\arctan T} - 1$

Nous en déduisons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx$ est convergente et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$

4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$

Nous étudions $\displaystyle\int_2^T \frac{dx}{x^2-1}$ et pour ce faire, nous décomposons $\dfrac{1}{x^2-1}$ en éléments simples.

Un calcul simple, montre que : $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{x-1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{x+1}$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
\int_2^T \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\int_2^T \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|x-1| - \ln|x+1|\right]_2^T \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{|T-1|}{|T+1|}\right) + \ln 3\right)
\end{aligned}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ est convergente et nous trouvons donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{\ln 3}{2}$

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$

Ici, le problème se situe en 0. Nous allons étudier $\displaystyle\int_\varepsilon^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$.

Il est possible d'écrire différemment $\displaystyle\int_\varepsilon^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$; en effet, $\displaystyle\int_\varepsilon^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx = \int_\varepsilon^{\frac{+\pi}{2}} \cos x\,(\sin x)^{\frac{-1}{2}}\,dx$

Si nous remarquons que la dérivée de $\sin x$ est $\cos x$, nous avons une intégrale de la forme $\displaystyle\int_\varepsilon^{\frac{+\pi}{2}} u'(x)\,(u(x))^{\frac{-1}{2}}\,dx$ dont une primitive est donnée par $\dfrac{(u(x))^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{u(x)}$

Donc, $\displaystyle\int_\varepsilon^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx = \left[2\sqrt{\sin x}\right]_\varepsilon^{\frac{+\pi}{2}} = 2 - \sqrt{\sin\varepsilon}$

Donc, $\displaystyle\int_0^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{\frac{+\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx = 2$

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^T \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ est type $\displaystyle\int_0^T u'(x)\,u(x)\,dx$, et donc

$$\int_0^T \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \left[\frac{(\arctan x)^2}{2}\right]_0^T = \frac{(\arctan T)^2}{2}$$

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ est convergente et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \frac{\pi^2}{8}$

7. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

C'est le cas $m = -1$ de l'exercice 1 !

L'intégrale $\displaystyle\int_0^T \frac{dx}{x\ln x}dx$ est type $\displaystyle\int_e^T \frac{u'(x)}{u(x)}dx$, et donc $\displaystyle\int_e^T \frac{dx}{x\ln x}dx = \left[\ln|\ln x|\right]_e^T = \ln|\ln T|$

Et on retrouve $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$ divergente

8. $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x \, dx$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$

Le problème, pour cette intégrale, se pose en 0. Or, pour $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$. On peut donc prolonger $x^n \ln x$, par continuité en 0. C'est, ce qu'on appelle une **intégrale faussement impropre**. Il n'y a donc pas de problème, elle est donc convergente.

Pour la calculer, nous faisons $\displaystyle\int_\varepsilon^1 x^n \ln x \, dx$ que nous intégrons par parties. Puis, nous ferons tendre ε vers 0.

$$u' = x^n \qquad u = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad v = \ln x \qquad v' = \frac{1}{x}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 x^n \ln x \, dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \times \ln x\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x^n}{n+1} dx \\
&= -\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} \ln \varepsilon - \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_\varepsilon^1 \\
&= -\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} \ln \varepsilon - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0, nous obtenons $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x \, dx = -\frac{1}{(n+1)^2}$

9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x-1)^2} dx$

Le problème se pose en $x = 1$. Le plus simple serait de faire un changement de variables du type $t = x - 1$. Alors,

$$\int_0^1 \frac{x}{(x-1)^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1+u}{u^2} du$$

Comme souvent, nous allons calculer $\displaystyle\int_{-1}^\varepsilon \frac{1+u}{u^2} du$, puis, rechercher la limite de cette intégrale lorsque ε tend vers 0.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^\varepsilon \frac{1+u}{u^2} du &= \int_{-1}^\varepsilon \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} du \\
&= \left[\ln|u| - \frac{1}{u}\right]_{-1}^\varepsilon \\
&= \ln|\varepsilon| - \frac{1}{\varepsilon} - 1
\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon < 0}} \ln|\varepsilon| - \dfrac{1}{\varepsilon} = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon < 0}} \dfrac{1}{\varepsilon}(\varepsilon \ln|\varepsilon| - 1) - 1 = +\infty$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x-1)^2} dx$ est donc divergente.

Exercice 5 :

Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x(x+1)}$ *et, le cas échéant, en indiquer sa valeur*

Il se trouve que cette intégrale a des problèmes aux 2 bornes et qu'elle converge, si et seulement si pour tout $c \in [-1\,;\,0]$ les intégrales $\displaystyle\int_{-1}^c \frac{dx}{x(x+1)}$ **et** $\displaystyle\int_c^0 \frac{dx}{x(x+1)}$ convergent

En 0, la fonction $\dfrac{1}{x(x+1)}$ est équivalente à la fonction $\dfrac{1}{x}$; or l'intégrale $\displaystyle\int_c^0 \frac{1}{x}$ est divergente et donc l'intégrale $\displaystyle\int_c^0 \frac{dx}{x(x+1)}$ est aussi divergente.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x\,(x+1)}$ est divergente.
P.S. : il aurait aussi été possible d'utiliser des changements de variables.

Exercice 6 :

Etudier, suivant la valeur du réel positif α, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}$ avec $a<b$

Cet exercice est une généralisation de ce qui a été vu en cours.

En faisant le changement de variables $u=t-a$, nous avons $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}} = \int_0^{b-a} \frac{du}{u^{\alpha}}$.

Cette intégrale ne converge que si $\alpha<1$

Exercice 7 :

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

   Il se pose, à priori, 2 questions : l'une en 0 et l'autre en $+\infty$.

   — En 0, on peut faire un développement limité de $\cos x$:

   $$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x) \iff 1-\cos x = \frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x) \iff \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}+\varepsilon(x)$$

   De telle sorte que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

   On peut donc prolonger $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ en 0, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{1-\cos x}{x^2}dx$ où $c>0$ est une intégrale définie qui ne pose pas de problème

   — Nous allons donc étudier $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

   La fonction $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, en particulier sur tout intervalle inclus dans $[c;+\infty[$.

   Il faut donc regarder le comportement de $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ en $+\infty$.

   Or, $\left|\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right| = \dfrac{|1-\cos x|}{x^2} \leqslant \dfrac{2}{x^2}$.

   L'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{2}{x^2}dx$ est une intégrale de Riemann convergente. Nous en déduisons que l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$ est absolument convergente, donc convergente.

   En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$ est bien convergente.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1}dx$

   Le dénominateur $x^{\frac{17}{5}}+1$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^+$; il faut donc étudier le comportement de $\dfrac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1}$ en $+\infty$

   — Nous avons $x^{\frac{17}{5}}+1 \geqslant x^{\frac{17}{5}}$, et donc $\dfrac{1}{x^{\frac{17}{5}}+1} \leqslant \dfrac{1}{x^{\frac{17}{5}}}$, ce qui nous permet d'écrire que $\dfrac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1} \leqslant \dfrac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}} = \dfrac{1}{x^{\frac{7}{5}}}$

   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{7}{5}}}dx$ est une intégrale de Riemann convergente, et comme $\dfrac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1} \leqslant \dfrac{1}{x^{\frac{7}{5}}}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1}dx$ est convergente. Comme nous avons montré que l'intégrale

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1}dx$ était définie, nous en déduisons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1}dx$ est bien convergente.

— Une autre méthode consiste à utiliser les équivalents.
  En effet, on vient de voir que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1}dx$ était définie.
  En $+\infty$, nous avons $\displaystyle\frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{x^{\frac{7}{5}}}$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{7}{5}}}dx$ est une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1}dx$ est de même nature, c'est à dire convergente.
  Comme dans le point précédent, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1}dx$ est bien convergente.

3. $\displaystyle\int_0^{+1} \frac{e^x}{x}dx$

Pas très difficile :

— Pour $x \in [0;+1]$, nous avons $e^x \geqslant 1$, et donc $\displaystyle\frac{e^x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$. Comme $\displaystyle\int_0^{+1} \frac{1}{x}dx$ est divergente, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+1} \frac{e^x}{x}dx$

— Autre méthode, celle qui consiste à dire qu'au voisinage de 0, $\displaystyle\frac{e^x}{x} \underset{0}{\approx} \frac{1}{x}$, et comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+1} \frac{1}{x}dx$ est divergente, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+1} \frac{e^x}{x}dx$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos x}}{x}dx$

Je commence par faire le changement de variables $x = -u$, et alors

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos x}}{x}dx = \int_{+\infty}^{+1} \frac{e^{\cos -u}}{-u} - du = -\int_1^{+\infty} \frac{e^{\cos u}}{u}du$$

Comme $-1 \leqslant \cos u \leqslant +1$, nous avons $e^{-1} \leqslant e^{\cos u} \leqslant e$, donc, pour $x \geqslant 1$, nous avons $\displaystyle\frac{e^{-1}}{u} \leqslant \frac{e^{\cos u}}{u}$
Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-1}}{u}du$ est une intégrale divergente, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\cos u}}{u}du$, c'est à dire de $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos x}}{x}dx$

Il faut remarquer que la résolution de la question était d'autant plus facile que la fonction $\displaystyle\frac{e^{\cos x}}{x}$ est impaire.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}dt$

La fonction $\displaystyle\frac{t}{t^3+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^+$. Le problème se situe donc en $+\infty$. Or, en $+\infty$, $\displaystyle\frac{t}{t^3+1} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{t^2}$.

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann convergente, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}dt$. Nous pouvons donc conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1}dt$ est convergente.

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$

Cette intégrale est convergente si et seulement si, pour tout $c \in \mathbb{R}$ les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} \frac{t^2}{t^4+1}dt$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$ convergent.

Supposons $c > 0$ *(la question sera la même si $c < 0$)*, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} \frac{t^2}{t^4+1}dt = \int_{-\infty}^{-c} \frac{t^2}{t^4+1}dt + \int_{-c}^{c} \frac{t^2}{t^4+1}dt$

L'intégrale $\displaystyle\int_{-c}^{c} \frac{t^2}{t^4+1}dt$ ne pose pas de problème puisque $\displaystyle\frac{t^2}{t^4+1}$ est continue sur cet intervalle.

De la parité de $\displaystyle\frac{t^2}{t^4+1}$, par le changement de variables $t = -u$, on déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-c} \frac{t^2}{t^4+1}dt = \int_{c}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$; il faut donc étudier $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$. Le problème de cette intégrale se situant en $+\infty$.

Or, en $+\infty$, nous avons $\displaystyle\frac{t^2}{t^4+1} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{t^2}$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemman convergente, il en est de même de $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$

Nous en déduisons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$ est convergente, et que, par la parité de $\displaystyle\frac{t^2}{t^4+1}$, nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$

De manière évidente, nous avons $\displaystyle\int_{+1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$ qui diverge, puisque $\displaystyle\frac{x}{x^2+1} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{x}$.

On en conclue donc que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$ est divergente.

8. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+e^{at}}\ dt$ avec $a > 0$

Pour tout $t \geqslant 0$, nous avons $1 + e^{at} > e^{at}$, c'est à dire $\displaystyle\frac{1}{1+e^{at}} < e^{-at}$. Comme $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-at}\ dt$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+e^{at}}\ dt$

9. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}dx$

Nous faisons le changement de variable qui semble le plus approprié : $u = \tan x$; alors $\displaystyle\frac{du}{dx} = 1 + \tan^2 x = 1 + u^2$, et donc :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u^2}du$$

En $+\infty$, nous avons $\displaystyle\frac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u^2} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$. Or, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}du$ est une intégrale de Riemann convergente. Donc $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u^2}du$ converge, et comme $\displaystyle\int_{0}^{+1} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u^2}du$ est une intégrale définie, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u^2}du$ est convergente, et donc, en conclusion, $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}dx$ est convergente.

10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

Ici, le problème se pose aux deux bornes. Pour que cette intégrale converge, il faut que, pour tout $c>0$, les intégrales $\displaystyle\int_0^c \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ convergent

— Pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$, le problème se situe en 0. Or, en 0, $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \underset{0}{\approx} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est convergente, il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

— Cette fois ci, pour l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$, le problème se situe en $+\infty$.

Or, en $+\infty$, $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ et comme l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ est une intégrale de Riemann convergente, il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

On en déduit donc que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ est convergente.

11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)\,x}dx$

Comme souvent, depuis quelques questions, il y a un problème aux deux bornes : en $+\infty$ et en 0

— Commençons par le plus simple, en 0 :

Nous avons, de manière classique, $\lim \dfrac{\sin x}{x} = 1$, et donc $\lim \dfrac{\sin x}{(x^2+1)\,x} = 1$. Il est donc possible de prolonger par continuité $\dfrac{\sin x}{(x^2+1)\,x}$ en 0. c'est donc une intégrale faussement impropre en 0, et donc, pour tout $c>0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{\sin x}{(x^2+1)\,x}dx$ existe

— Pour $c>0$, et $x>c$, nous avons $\left|\dfrac{\sin x}{(x^2+1)\,x}\right| \leqslant \dfrac{1}{(x^2+1)\,x} \leqslant \dfrac{1}{x^3}$. L'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ est une intégrale de Riemann convergente, donc l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)\,x}dx$ est convergente

Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)\,x}dx$ est convergente.

12. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

Question très simple ; le problème se pose en $x_0 = 4$. Pour la rendre encore plus simple, on peut faire le changement de variables $u = 4-x$, et alors :

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = -\int_4^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_0^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_0^4 u^{\frac{-1}{2}}du$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^4 u^{\frac{-1}{2}}du$ est bel et bien convergente. Nous avons même : $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = 4$

Exercice 8 :

1. (a) *Etudier la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$

L'intégrale converge si et seulement si, pour tout $c \in \mathbb{R}$, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$ convergent

Or, en $+\infty$, $\dfrac{t+1}{t^2+1} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{t}$; comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente, il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$ est une intégrale divergente.

(b) *Calculer* $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{+a} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$.

Nous allons calculer $\displaystyle\int_{-a}^{+a} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}$

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{+a} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1} &= \int_{-a}^{+a} \frac{t}{t^2+1}\,dt + \int_{-a}^{+a} \frac{1}{t^2+1}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-a}^{+a} \frac{2t}{t^2+1}\,dt + [\arctan t]_{-a}^{+a} \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(t^2+1\right)\right]_{-a}^{+a} + 2\arctan a \\
&= +2\arctan a
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} +2\arctan a = \pi$, et donc $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{+a} \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1} = \pi$

2. (a) *De la même manière, étudier la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$

Commençons par étudier $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$

En 0, $\dfrac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)} \underset{0}{\approx} \dfrac{1}{t}$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$ est divergente

(b) *Calculer* $\displaystyle\lim_{a\to 0} \int_a^{1-a} \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$

Comme tout à l'heure, on va calculer $\displaystyle\int_a^{1-a} \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$

On commence par décomposer $\dfrac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)}$ en éléments simples :

$$\frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}$$

De telle sorte que :

$$\begin{aligned}
\int_a^{1-a} \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)} &= \int_a^{1-a} \frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}\,dt \\
&= \int_a^{1-a} \frac{1}{t}\,dt + \int_a^{1-a} \frac{-1}{1-t}\,dt \\
&= [\ln t]_a^{1-a} + [\ln|1-t|]_a^{1-a} \\
&= \ln(1-a) - \ln a + \ln a - \ln(1-a) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nous avons donc $\displaystyle\lim_{a\to 0} \int_a^{1-a} \frac{(1-2t)\,dt}{t\,(1-t)} = 0$

3. *Démontrez que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ *est divergente alors que* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\ln x}{x}\,dx = 0$

   On "coupe" l'intégrale en 2. Soit $c > 0$ fixé

   Soient $T > 0$; alors $\displaystyle\int_c^T \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_c^T = \frac{(\ln T)^2}{2} - \frac{(\ln c)^2}{2}$

   Or, $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \frac{(\ln T)^2}{2} = +\infty$

   Donc l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ et donc, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ est aussi divergente.

   Si nous regardons $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\ln x}{x}\,dx$, nous avons :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{n} = \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{\left(\ln \frac{1}{n}\right)^2}{2} = \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(-\ln n)^2}{2} = 0$$

   Nous avons donc bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\ln x}{x}\,dx = 0$

4. *Quelles conclusions tirer ?*

   C'EST UNE REMARQUE TRÈS IMPORTANTE QU'IL FAUT TIRER :

   Ce n'est pas parce que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{+a} f(t)\,dt$ existe que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. La définition de la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est :

   Pour tout $c \in \mathbb{R}$ les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt$ ET $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\,dt$ convergent

   Dans les exemples ci-dessus, aucune des intégrales ne converge, bien que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(t)\,dt$ existe, souvent grâce à des des phénomènes de symétrie.
   On peut par contre affirmer que :
   Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{+a} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$.
   Mais, la réciproque est donc fausse

Exercice 9 :

1. *Montrer que si* $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, *alors* $\dfrac{1}{\sin t} \geqslant \dfrac{1}{t} > 0$.

   On démontre facilement que si $0 < t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ alors $0 < \sin t \leqslant t$ *(formule de Taylor, étude de* $\sin t - t$*)* et donc nous avons le résultat :
   Si $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\dfrac{1}{\sin t} \geqslant \dfrac{1}{t} > 0$.

2. *Que conclure pour* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\,dt$ *?*

Comme $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}\,dt$ diverge, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\,dt$

Exercice 10 :

1. *a est un réel ; étudier suivant les valeurs de a la convergence de l'intégrale* $\int_0^1 x^a\left(6x-\left(6+x^2\right)\sin x\right)\,dx$

   Il faut faire un développement limité de la fonction $x^a\left(6x-\left(6+x^2\right)\sin x\right)$ pour trouver une fonction équivalente au voisinage de 0.

   Or, à l'ordre 5, nous avons : $\sin x = x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x)$, et à l'ordre 5, $\left(6+x^2\right)\sin x = 6x-\dfrac{7x^5}{60}+x^5\varepsilon(x)$, ce qui, après les calculs, nous donne $x^a\left(6x-\left(6+x^2\right)\sin x\right)=\dfrac{7x^{a+5}}{60}+x^5\varepsilon(x)$

   On peut donc dire qu'au voisinage de 0, $x^a\left(6x-\left(6+x^2\right)\sin x\right)\underset{0}{\approx}\dfrac{7x^{a+5}}{60}$

   Or, l'intégrale $\int_0^1 x^\alpha\,dx$ ne converge que si $\alpha>-1$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 x^a\left(6x-\left(6+x^2\right)\sin x\right)\,dx$ ne converge que si $a+5>-1$, c'est à dire $a>-6$

2. (a) *Montrer qu'au voisinage de 0,* $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\underset{x\to0}{\approx}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, *et qu'au voisinage de 1* $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\underset{x\to1}{\approx}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

   Aucune difficulté : on fait le rapport des fonctions, et on démontre que la limite est 1

   (b) *En déduire la convergence de l'intégrale* $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$

   Soit $c\in]0;+1[$

   — Considérons l'intégrale $\int_0^c \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$. Au voisinage de 0, $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\underset{x\to0}{\approx}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. L'intégrale $\int_0^c\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente, et donc l'intégrale $\int_0^c\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$ est, elle aussi, convergente.

   — Considérons maintenant l'intégrale $\int_c^1\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$. Cette fois ci, au voisinage de 1, $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\underset{x\to1}{\approx}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

     Nous avons, par le changement de variables $=1-x$, $\int_c^1\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx=\int_0^{1-c}\dfrac{1}{\sqrt{u}}\,du$ qui converge. Donc, l'intégrale $\int_c^1\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$ est aussi convergente.

   En conclusion, l'intégrale $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$ est bien convergente.

Exercice 11 :

On considère l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)}$ *où α et β sont deux réels strictement positifs ; pour quelles valeurs de α et β cette intégrale est-elle convergente ?*

On suppose donc $\alpha>0$ et $\beta>0$, et soit $c>0$

— Alors, en 0, $\dfrac{1}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)}\underset{0}{\approx}\dfrac{1}{t^\alpha}$. L'intégrale $\int_0^c\dfrac{dt}{t^\alpha}$ ne converge que si $\alpha<+1$, et donc l'intégrale $\int_0^c\dfrac{dt}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)}$ ne converge que si $\alpha<+1$

— En $+\infty$, $\dfrac{1}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)}\underset{+\infty}{\approx}\dfrac{1}{t^{\beta+\alpha}}$. L'intégrale $\int_c^{+\infty}\dfrac{dt}{t^{\beta+\alpha}}$ ne converge que si $\beta+\alpha>+1$, et donc l'intégrale $\int_c^{+\infty}\dfrac{dt}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)}$ ne converge que si $\beta+\alpha>+1$

En synthèse, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha\left(1+t^\beta\right)}$ converge si $\begin{cases} 0<\alpha<+1 \\ \beta+\alpha>+1 \end{cases}$

Exercice 12 :

1. (a) *Montrer la convergence de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,

   Il n'y a pas de problème en 0, puisque la fonction $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$; il faut donc s'intéresser à $+\infty$.
   En $+\infty$, la fonction $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ est équivalente à $\dfrac{1}{x^3}$; comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ est une intégrale de Riemann convergente, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

   (b) *Calculer* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

   La première étape consiste à décomposer $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ en éléments simples. Tout calculs faits, on trouve :

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+3}$$

   Soit $T>0$. Nous allons calculer $\displaystyle\int_0^{T} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, puis calculer $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\int_0^{T} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.
   D'après la décomposition en éléments simples, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{1}{2}\left[\ln(x+1)\right]_0^T - \left[\ln(x+2)\right]_0^T + \frac{1}{2}\left[\ln(x+3)\right]_0^T \\
&= \left(\frac{1}{2}\ln(T+1) - \ln(T+2) + \frac{1}{2}\ln(T+3)\right) - \left(-\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(T+1) - 2\ln(T+2) + \ln(T+3)\right) - \ln\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{(T+1)(T+3)}{(T+2)^2} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

   Or, nous avons $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{(T+1)(T+3)}{(T+2)^2} = 0$

   Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \ln\frac{2}{\sqrt{3}}$

2. (a) *Montrer la convergence de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+x^2+x+1}$

   Pas de grande difficulté ; la fonction $\dfrac{x}{x^3+x^2+x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$; il faut donc s'intéresser à $+\infty$. Or, en $+\infty$ la fonction $\dfrac{x}{x^3+x^2+x+1}$ est équivalente à $\dfrac{1}{x^2}$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+x^2+x+1}$ est donc aussi convergente.

   (b) *Calculer cette intégrale*

   La première étape consiste à décomposer $\dfrac{x}{x^3+x^2+x+1}$ en éléments simples. Tout calculs faits, on trouve :

$$\frac{x}{x^3+x^2+x+1} = \frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

Soit $T > 0$. Comme tout à l'heure, nous allons calculer $\displaystyle\int_0^T \frac{x\ dx}{x^3+x^2+x+1}$, puis calculer $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\int_0^T \frac{x\ dx}{x^3+x^2+x+1}$.

Nous allons calculer $\displaystyle\int_0^T \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\ dx = \int_0^T \frac{x+1}{x^2+1}\ dx - \int_0^T \frac{1}{x+1}\ dx$

— $\displaystyle\int_0^T \frac{1}{x+1}\ dx = [\ln x+1]_0^T = \ln(T+1)$
— $\displaystyle\int_0^T \frac{x+1}{x^2+1}\ dx = \int_0^T \frac{x}{x^2+1}\ dx + \int_0^T \frac{1}{x^2+1}\ dx$
  — $\displaystyle\int_0^T \frac{1}{x^2+1}\ dx = [\arctan x]_0^T = \arctan T$
  — $\displaystyle\int_0^T \frac{x}{x^2+1}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{2x}{x^2+1}\ dx = \frac{1}{2}\left[\ln x^2+1\right]_0^T = \frac{1}{2}\ln\left(T^2+1\right)$
— Donc, $\displaystyle\int_0^T \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\ dx = \frac{1}{2}\ln\left(T^2+1\right) + \arctan T - \ln(T+1) = \ln\left(\frac{\sqrt{T^2+1}}{T+1}\right) + \arctan T$

Or, $\displaystyle\ln\left(\frac{\sqrt{T^2+1}}{T+1}\right) = \ln\left(\frac{T\sqrt{1+\frac{1}{T^2}}}{T\left(1+\frac{1}{T}\right)}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{T^2}}}{\left(1+\frac{1}{T}\right)}\right)$. Comme $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{T^2}}}{\left(1+\frac{1}{T}\right)} = 1$, nous avons $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{T^2}}}{\left(1+\frac{1}{T}\right)}\right) = 0$.

D'autre part, $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\arctan T = \frac{\pi}{2}$, nous avons donc $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\int_0^T \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\ dx = \frac{\pi}{2}$, c'est à dire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ dx}{x^3+x^2+x+1} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 13 :

Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle $[a;+\infty[$. On suppose que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = L$ et que L est finie.

Est-il possible, suivant la valeur de L de conclure quant à la nature de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$?

La réponse est NON : connaissant la valeur de L, on ne peut rien conclure

— Supposons $L > 0$

Il existe $A \in [a;+\infty[$ tel que, si $t > A$, alors $|f(t) - L| \leqslant \dfrac{L}{2}$, c'est à dire, de manière équivalente, si $t > A$, alors $\dfrac{L}{2} \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{3L}{2}$

Soit $X > A$, alors, $\displaystyle\int_a^X f(t)\ dt = \int_a^A f(t)\ dt + \int_A^X f(t)\ dt$

f étant continue par morceaux sur l'intervalle $[a;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^A f(t)\ dt$ ne pose pas de problème.

Par contre, $\displaystyle\int_A^X f(t)\ dt \geqslant \frac{L}{2}(X-A)$.

Donc, $\displaystyle\int_a^X f(t)\ dt \geqslant \int_a^A f(t)\ dt + \frac{L}{2}(X-A)$

Comme $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{L}{2}(X-A) = +\infty$, nous avons $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_a^X f(t)\ dt = +\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ est donc divergente.

— Supposons $L < 0$

Considérons $g = -f,$; alors, $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = -L$, et $-L > 0$; donc, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ est divergente, c'est à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est donc divergente

Ainsi, si $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = L$, il est nécessaire que $L = 0$, mais cette condition n'est pas suffisante ; par exemple :

— $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^3} = 0$

— Mais, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ diverge, alors que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} = 0$

Exercice 14 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} f(n) = 1 \\ f\left(n - \dfrac{1}{2^n}\right) = 0 \\ f\left(n + \dfrac{1}{2^n}\right) = 0 \\ f \text{ est affine sur } \left[n - \dfrac{1}{2^n}; n\right] \text{ et sur } \left[n; n + \dfrac{1}{2^n}\right] \\ f(x) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Une autre façon d'exprimer f peut être donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = 2^n\left(x - \left(n - \dfrac{1}{2^n}\right)\right) \text{ si } x \in \left[n - \dfrac{1}{2^n}; n\right] \\ f(x) = -2^n\left(x - \left(n + \dfrac{1}{2^n}\right)\right) \text{ si } x \in \left[n; n + \dfrac{1}{2^n}\right] \\ f(x) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Montrer que f n'admet pas de limite lorsque t tend vers $+\infty$, mais que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

Il est tout à fait clair que, par construction, f est continue, positive et bornée par 1 (nous avons, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$. D'autre part, f n'admet pas de limite en $+\infty$

Il n'est pas inintéressant de calculer $\displaystyle\int_{n-\frac{1}{2^n}}^{n+\frac{1}{2^n}} f(t)\,dt$. C'est, en fait, l'aire d'un triangle de base de longueur $\dfrac{2}{2^n}$ et de hauteur 1. Nous avons donc $\displaystyle\int_{n-\frac{1}{2^n}}^{n+\frac{1}{2^n}} f(t)\,dt = \frac{1}{2^n}$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Nous allons considérer l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, puis, rechercher $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt$

Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n - \dfrac{1}{2} \leqslant x < n + \dfrac{1}{2}$; en fait, n est tel que $n = \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$

Alors, $\displaystyle\int_0^{n-\frac{1}{2}} f(t)\,dt \leqslant \int_0^x f(t)\,dt < \int_0^{n+\frac{1}{2}} f(t)\,dt$, c'est à dire :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \leqslant \int_0^x f(t)\,dt < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Par la définition de n, lors que x tend vers $+\infty$, n tend également vers $+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\ dt = 1$, c'est à dire $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = 1$, alors que le fonction f n'admet pas de limite.

Exercice 15 :

Soit f, une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (autrement dit, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L_1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L_2$

1. *Démontrez l'existence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+1) - f(x)\ dx$, puis calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+1) - f(x)\ dx$*

   Considérons $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$; f étant continue sur $\mathbb{R}$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $F' = f$.Nous allons étudier $\int_0^x f(t+1) - f(t)\ dt$

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t+1) - f(t)\ dt &= \int_0^x f(t+1)\ dt - \int_0^x f(t)\ dt \\
&= \int_0^x f(t+1)\ dt - F(x) \\
&= \int_1^{x+1} f(u)\ du - F(x) \text{ par le changement de variables } u = t+1 \\
&= F(x+1) - F(1) - F(x) \\
&= F(x+1) - F(x) - F(1)
\end{aligned}$$

   D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\theta_x \in]x; x+1[$ tel que $F(x+1) - F(x) = f(\theta_x)$

   Lorsque x tend vers $+\infty$, θ_x tend aussi vers $+\infty$; on en déduit alors que $\int_0^{+\infty} f(t+1) - f(t)\ dt = L_1 - F(1)$

   Si nous considérons, maintenant $\int_x^0 f(t)\ dt$, par une démonstration semblable, nous obtenons $\int_{-\infty}^0 f(t+1) - f(t)\ dt = F(1) - L_2$

   Nous avons donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+1) - f(x)\ dx = L_1 - L_2$

2. *Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan(x+1) - \arctan(x)\ dx$*

   Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \arctan(x+1) - \arctan(x)\ dx = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Exercice 16 :

1. *Démontrer la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\ dx$*

   Il y a deux problèmes qui se posent à cette intégrale : en 0 et en 1. Posons $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$

   — En 1

     En utilisant la limite remarquable $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$, on peut donc prolonger $\frac{x-1}{\ln x}$ en 1 en posant $f(1) = 1$.

     Nous sommes devant une intégrale « faussement impropre » en 1

— En 0

Nous avons $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\left(\dfrac{x-1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x-1}{\ln x}\right)=0$, c'est à dire qu'il existe $\alpha<1$, $\alpha=\dfrac{1}{2}$ tel que $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{2}}f(x)=0$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^c\frac{x-1}{\ln x}\,dx$ existe, pour tout $c\in\,]0;1[$

Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{x-1}{\ln x}\,dx$ est convergente.

2. *Utiliser le théorème des accroissements finis pour démontrer que pour tout $x\in\,]0;1[$,*

$$1-\frac{1}{x}<\ln x<x-1$$

Soit $x\in\,]0;1[$. Ecrivons le théorème des accroissements finis entre x et 1 pour la fonction $\ln x$
Il existe donc $c\in\,]x;1[$ tel que

$$\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=\frac{\ln x}{x-1}=\ln' c=\frac{1}{c}$$

Comme $x<c<1$, nous avons $1<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{x}$, c'est à dire $1<\dfrac{\ln x}{x-1}<\dfrac{1}{x}$.
Tout en remarquant que $x-1<0$, nous multiplions par $x-1$, et nous obtenons :

$$\frac{x-1}{x}<\ln x<x-1$$

Ce que nous voulions.

3. *Soit $T\in\,]0;1[$; démontrer que* $\displaystyle\int_0^T\frac{x}{\ln x}\,dx=\int_0^{T^2}\frac{1}{\ln x}\,dx$

En faisant le changement de variable $u=x^2$, nous avons $\dfrac{du}{dx}=2x\Longleftrightarrow x\,dx=\dfrac{du}{2}$, et alors :

$$\int_0^T\frac{x}{\ln x}\,dx=\int_0^{T^2}\frac{1}{\frac{1}{2}\ln u}\frac{du}{2}=\int_0^{T^2}\frac{1}{\ln u}\,du$$

4. (a) *En déduire un encadrement de* $\displaystyle\int_0^T\frac{x-1}{\ln x}\,dx$

Nous avons :

$$\int_0^T\frac{x-1}{\ln x}\,dx=\int_0^T\frac{x}{\ln x}\,dx-\int_0^T\frac{1}{\ln x}\,dx=\int_0^{T^2}\frac{1}{\ln x}\,dx-\int_0^T\frac{1}{\ln x}\,dx=\int_T^{T^2}\frac{1}{\ln x}\,dx$$

Nous avons, pour $0<x<1$, $\dfrac{x-1}{x}<\ln x<x-1$, c'est à dire $\dfrac{x}{x-1}<\dfrac{1}{\ln x}<\dfrac{1}{x-1}$, et donc :

$$\int_T^{T^2}\frac{1}{x-1}\,dx<\int_T^{T^2}\frac{1}{\ln x}\,dx<\int_T^{T^2}\frac{x}{x-1}\,dx$$

— Or, $\displaystyle\int_T^{T^2}\frac{1}{x-1}\,dx=\left[\ln|x-1|\right]_T^{T^2}=\ln\left|T^2-1\right|-\ln|T-1|=\ln|T+1|$

— Et $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x-1+1}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}$ et donc

$$\begin{aligned}\int_T^{T^2}\frac{x}{x-1}\,dx &= \int_T^{T^2}1+\frac{1}{x-1}\,dx\\ &= \left[x+\ln|x-1|\right]_T^{T^2}\\ &= T^2-T+\left|T^2-1\right|-|T-1|\\ &= T^2-T+\ln|T+1|\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$< T^2 - T + \ln|T+1| < \int_T^{T^2} \frac{1}{\ln x}\, dx < \ln|T+1|$$

(b) *Démontrer que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx = \ln 2$

Nous avons $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx = \lim_{T\to 1}\int_0^T \frac{x-1}{\ln x}\, dx = \lim_{T\to 1}\int_T^{T^2} \frac{1}{\ln x}\, dx$.

Or, $\displaystyle\lim_{T\to 1} \ln|T+1| = \lim_{T\to 1} T^2 - T + \ln|T+1| = \ln 2$. De l'encadrement

$$< T^2 - T + \ln|T+1| < \int_T^{T^2} \frac{1}{\ln x}\, dx < \ln|T+1|$$

Nous avons $\displaystyle\lim_{T\to 1}\int_T^{T^2} \frac{1}{\ln x}\, dx = \ln 2$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{T\to 1}\int_0^T \frac{x-1}{\ln x}\, dx = \ln 2$

Nous avons donc bien : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx = \ln 2$

Exercice 17 :

Soit $f(x) = \ln(\sin x)$ *et* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$

1. *En écrivant* $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) + \ln x$*, démontrer qu'au voisinage de 0, nous avons* $f(x) \underset{0}{\approx} \ln x$*.*

   Le fait que $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) + \ln x$ ne pose pas de difficultés.

   Nous avons $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 0$

   En écrivant $\dfrac{f(x)}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\ln x}$, nous voyons que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln x} = 1$ et que donc, $f(x) \underset{0}{\approx} \ln x$

   Etablir alors la convergence de l'intégrale I

   Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x\, dx$ est convergente, que $f(x) \underset{0}{\approx} \ln x$, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x), dx$; donc I est convergente.

2. *Montrer que nous avons* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx$

   Le problème de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx$ se situe en $\dfrac{\pi}{2}$

   Pour $\varepsilon > 0$, nous étudions donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \ln(\cos x)\, dx$

   En faisant le changement de variables $t = -x + \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} - t$ et $dt = -dx$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \ln(\cos x)\, dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) - dt\\ &= \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt\end{aligned}$$

   Comme $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt$ existe, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx$, et, de plus :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\, dt = I$$

Puis que $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx$

Il faut remarquer que $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, et que, donc, $\frac{\sin 2x}{2} = \sin x \cos x$.
De ce fait :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\ dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\ dt \\ &= 2I \end{aligned}$$

3. *Démontrer que* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\ dx = I$

   On effectue le changement de variables $u = 2x$ (donc $du = 2dx \Longleftrightarrow dx = \frac{du}{2}$)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\ dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\ du \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\ du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\ du\right) \end{aligned}$$

   Il faut donc, maintenant, étudier $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\ du$. En faisant un nouveau changement de variables $v = u - \frac{\pi}{2}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\ du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right)\right) dv \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos v)\ dv = I \end{aligned}$$

   Donc, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\ dx = I$

4. *En déduire la valeur de* I

   Faisons une synthèse :

   — $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx$

   — $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\ dx = I$

   Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(sin2x) - \ln 2\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(sin2x)\ dx - \frac{\pi}{2}\ln 2 \end{aligned}$$

   Nous avons donc $2T = I - \frac{\pi}{2}\ln 2$; d'où $\boxed{I = -\frac{\pi}{2}\ln 2}$

5. *Question de prolongement(non résolue) Que dire de* $I = \int_0^1 \ln(\sin x)\ dx$ *?*

Exercice 18 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$*, continue, telle que* $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ *converge.*
Soient $0 < a < b$ *et* $0 < x < y$*, et on pose :*

$$F(x, y) = \int_x^y \frac{f(at) - f(bt)}{t}\, dt$$

1. *Montrer que* $F(x,y) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t}\,dt$

   C'est une question qui ne pose pas trop de difficultés. Nous allons procéder en plusieurs temps :
   — Dans un premier temps, on écrit :
   $$F(x,y) = \int_x^y \frac{f(at)}{t}\,dt - \int_x^y \frac{f(bt)}{t}\,dt$$
   — Dans un second temps, on étudie $\displaystyle\int_x^y \frac{f(at)}{t}\,dt$
   On fait le changement de variables $u = at \Longrightarrow du = adt$. Alors :
   $$\int_x^y \frac{f(at)}{t}\,dt = \int_{ax}^{ay} \frac{f(u)}{\frac{u}{a}}\,\frac{du}{a} = \int_{ax}^{ay} \frac{f(u)}{u}\,du$$
   De la même manière, nous aurions $\displaystyle\int_x^y \frac{f(bt)}{t}\,dt = \int_{bx}^{by} \frac{f(u)}{u}\,du$
   — Faisons une synthèse :
   $$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{ax}^{ay} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_{bx}^{by} \frac{f(u)}{u}\,du \\ &= \int_{ax}^{0} \frac{f(u)}{u}\,du + \int_{0}^{ay} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_{bx}^{0} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_{0}^{by} \frac{f(u)}{u}\,du \\ &= \int_{ax}^{0} \frac{f(u)}{u}\,du + \int_{0}^{bx} \frac{f(u)}{u}\,du - \left(\int_{ay}^{0} \frac{f(u)}{u}\,du + \int_{0}^{by} \frac{f(u)}{u}\,du\right) \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_{ay}^{by} \frac{f(u)}{u}\,du \end{aligned}$$

2. *On appelle* $G(x) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt$ *; montrer que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$

   Remarquons que $F(x,y) = G(x) - G(y)$

   On peut écrire $G(x) = \displaystyle\int_1^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_1^{ax} \frac{f(t)}{t}\,dt.$

   Par hypothèse, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge, et on appelle $L = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$; nous avons alors
   $$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\int_1^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt - \int_1^{ax} \frac{f(t)}{t}\,dt\right) = L - L = 0$$

3. *Montrer que* $G(x) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt + f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

   Enfin une question facile !!
   $$\begin{aligned} G(x) &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)-f(0)+f(0)}{t}\,dt \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt + I_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t}\,dt \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt + f(0)\left[\ln t\right]_{ax}^{bx} \end{aligned}$$
   Or,$\ln(bx) - \ln(ax) = \ln\left(\dfrac{bx}{ax}\right) = \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$. Donc
   $$G(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt + f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

4. *Montrer que* $\lim_{x\to 0} G(x) = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

   Il faut donc montrer que $\lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt = 0$
   Pour ce faire, soit donc $\varepsilon > 0$
   Par hypothèse, f est continue en 0. Il existe donc $\eta_\varepsilon > 0$ tel que si $0 < t < \eta_\varepsilon$ alors $|f(t)-f(0)| < \varepsilon$
   Soit maintenant x tel que $0 < ax < bx < \eta_\varepsilon$, c'est à dire x tel que $0 < x < \frac{\eta_\varepsilon}{b}$. Alors,

$$\left|\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt\right| \leqslant \int_{ax}^{bx}\frac{|f(t)-f(0)|}{t}\,dt < \varepsilon\int_{ax}^{bx}\frac{1}{t}\,dt = \varepsilon\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

   Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que, si $0 < x < \eta_\varepsilon$, alors, $\left|\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt\right| \leqslant \varepsilon$

   Donc $\lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt = 0$ et on conclue que $\lim_{x\to 0} G(x) = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

5. *Montrer que* $\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

   Soit $c > 0$ fixé tel que $x < c < y$
   Nous avons :

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_x^y \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt \\ &= \int_x^c \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt + \int_c^y \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt \\ &= G(x) - G(c) + G(c) - G(y) \end{aligned}$$

   — On a démontré que $\lim_{y\to+\infty} G(y) = 0$; donc $\lim_{y\to+\infty}\int_c^y\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = G(c)$
   — On a démontré que $\lim_{x\to 0} G(x) = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$; donc $\lim_{x\to x}\int_x^c\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right) - G(c)$

   Donc, $\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt$ existe et $\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

6. *Démontrer que* $\int_0^{+\infty}\frac{2\sin t - \sin(2t)}{t^2}\,dt = \ln 2$

   La fonction $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $[0;+\infty[$ lorsqu'on a posé $f(0) = 1$.
   D'autre part, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt = \int_1^{+\infty}\frac{\sin t)}{t^2}\,dt$ converge *(elle converge même absolument)*
   Donc, nous avons, pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$ tels que $0 < a < b$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\frac{\sin at}{at}-\frac{\sin bt}{bt}}{t}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{b\sin at - a\sin bt}{abt^2}\,dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

   En particulier si $a = 1$ et $b = 2$, nous avons $\int_0^{+\infty}\frac{2\sin t - \sin 2t}{2t^2}\,dt = \ln 2$

7. (a) *Soit* $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$*, continue et telle que* $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \alpha$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta$

   Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = (\alpha-\beta)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

   Nous écrivons toujours $F(x,y) = \int_x^y\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt$, $G(x) = \int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}\,dt$, et nous avons toujours $F(x,y) = G(x) - G(y)$

— Tout d'abord, nous avons $G(y) = \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_{ay}^{by} \frac{f(t)-\beta}{t}\,dt + \int_{ay}^{by} \frac{\beta}{t}\,dt$, c'est à dire que $G(y) = \int_{ay}^{by} \frac{f(t)-\beta}{t}\,dt + \beta \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Nous allons démontrer que $\lim_{y\to+\infty} \int_{ay}^{by} \frac{f(t)-\beta}{t}\,dt = 0$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, si $x > A$, alors $|f(x) - \beta| < \varepsilon$

Ainsi, pour y tel que $A < ay < by$, c'est à dire $y > \frac{A}{a}$, nous avons :

$$\left|\int_{ay}^{by} \frac{f(t)-\beta}{t}\,dt\right| \leqslant \int_{ay}^{by} \frac{|f(t)-\beta|}{t}\,dt \leqslant \varepsilon \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Donc, $\lim_{y\to+\infty} \int_{ay}^{by} \frac{f(t)-\beta}{t}\,dt = 0$, et $\lim_{y\to+\infty} G(y) = \beta \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

— On démontrerait de la même manière que $\lim_{x\to 0} G(x) = \alpha \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

— On conclue donc, avec les mêmes arguments que dans la question 6, que $\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = (\alpha-\beta)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

(b) Applications

i. *Montrer que* $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t) - \arctan(2t)}{t}\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

Nous avons $\lim_{t\to 0} \arctan t = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$, et nous appliquns les résultats de la question précédente avec $a = 1$ et $b = 2$

ii. *Etude et existence de* $\int_0^{+\infty} \frac{\tanh(3t) - \tanh t}{t}\,dt$

Nous avons $\tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$, et donc $\lim_{t\to+\infty} \tanh t = 1$ et $\lim_{t\to 0} \tanh t = 0$

Donc, d'après l'étude précédente, $\int_0^{+\infty} \frac{\tanh(3t) - \tanh t}{t}\,dt = -1 \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln 3$

iii. *On considère* $A = \int_0^1 \frac{x}{\ln(1-x)}\,dx$ *; montrer que* $A = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}\,dx$ *; en déduire* A

Dans l'exercice 13, nous avons réussi à montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx$ existait, et que même $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx = \ln 2$

Dans $A = \int_0^1 \frac{x}{\ln(1-x)}dx$, il est possible de faire le changement de variables $u = 1 - x$, donc $x = 1 - u$ et $dx = -du$.

Donc, $A = \int_0^1 \frac{x}{\ln(1-x)}dx = \int_1^0 \frac{1-u}{\ln(u)} - du = \int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)}du = -\ln 2$

La question posée ici, propose une autre façon de calculer cette intégrale

En faisant un autre changement de variables :

$$u = \ln(1-x) \iff 1 - x = e^u \iff x = 1 - e^u$$

Et donc, en passant aux différentielles :

$$\frac{du}{dx} = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{(1-e^u)-1} = -e^{-u} \iff dx = -e^u du$$

D'où $A = \displaystyle\int_0^{-\infty} \frac{1-e^u}{u} - e^u du = \int_{-\infty}^0 \frac{e^u - e^{2u}}{u} du$. En faisant un nouveau changement de variables $v = -u$, nous avons :

$$A = \int_{-\infty}^0 \frac{e^u - e^{2u}}{u} du = \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-v} - e^{-2v}}{-v} - dv = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2v} - e^{-v}}{v} dv$$

Sachant que $\displaystyle\lim_{v\to 0} e^{-v} = 1$ et que $\displaystyle\lim_{v\to+\infty} e^{-v} = 0$, nous avons :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2v} - e^{-v}}{v} dv = 1 \times \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

Ce que nous savions déjà !!

Remarque : Quel lien y-a-t-il entre les questions 1 à 6 et la question 7 ?

Dans la question 7, on ne s'intéresse pas à la convergence d'une intégrale du type $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$, seulement à l'existence de limites finies en 0 et $+\infty$

— Il aurait été impossible d'appliquer les questions 1 à 6 à la fonction $\arctan t$ puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t} dt$ diverge.

— Il aurait, par contre, été tout à fait possible d'appliquer la question 7 à la fonction $\dfrac{\sin t}{t}$

Exercice 19 :

1. *Dans cette question, nous considérons l'intégrale* $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$

   (a) *On suppose $\alpha = 1$. L'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx$ est-elle convergente ?*

   — On suppose $\beta \neq 1$

   Soit $T > e$, et on considère $\displaystyle\int_e^T \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_e^T \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx &= \int_e^T \frac{1}{x}(\ln x)^{-\beta} dx \\ &= \left[\frac{(\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_e^T \\ &= \frac{1}{1-\beta}\left(\frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}} - 1\right)\end{aligned}$$

   - Si $\beta > 1$, alors, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\beta-1} = +\infty$, et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_e^T \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx = \frac{1}{\beta-1}$.

     L'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx$ est donc convergente.
   - Si $\beta < 1$, alors $\dfrac{1}{(\ln x)^{\beta-1}} = (\ln x)^{1-\beta}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{1-\beta} = +\infty$; l'intégrale est donc divergente.

   — Si $\beta = 1$, alors $\displaystyle\int_e^T \frac{1}{x\ln x} dx = [\ln(|\ln x|)]_e^T = \ln(|\ln T|)$

   Comme $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \ln(|\ln T|) = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x} dx$ est divergente.

(b) *Etudier la convergence de l'intégrale* $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$ *lorque* $\alpha \neq 1$

— <u>On suppose $\alpha < 1$</u>

Alors, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, nous avons $\displaystyle\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^\gamma} \times \frac{x^{\gamma-\alpha}}{(\ln x)^\beta}$

On peut choisir γ tel que $\alpha < \gamma < 1$, et alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\gamma-\alpha}}{(\ln x)^\beta} = +\infty$

Il existe donc $A > 0$ tel que, si $x > A$, alors $\displaystyle\frac{x^{\gamma-\alpha}}{(\ln x)^\beta} > 1$, et alors, si $t > A$, $\displaystyle\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^\gamma} \times \frac{x^{\gamma-\alpha}}{(\ln x)^\beta} > \frac{1}{x^\gamma}$

Or, $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\gamma} dx$ diverge si $\gamma < 1$, et donc $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$ diverge

— <u>On suppose maintenant $\alpha > 1$</u>

Pour $\gamma \in \mathbb{R}$, nous avons $\displaystyle x^\gamma \times \left(\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}\right) = \frac{1}{x^{\alpha-\gamma} (\ln x)^\beta}$

On peut choisir γ tel que $\alpha > \gamma > 1$ et alors, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-\gamma} (\ln x)^\beta = +\infty$, c'est à dire

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-\gamma} (\ln x)^\beta} = 0$$

Nous avons bien, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\gamma \times \left(\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}\right) = 0$, et donc $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$ converge.

Synthèse

	$\alpha < 1$	$\alpha = 1$	$\alpha > 1$
$\beta < 1$	Diverge	Diverge	Converge
$\beta = 1$	Diverge	Diverge	Converge
$\beta > 1$	Diverge	Converge	Converge

2. *Etudier maintenant la convergence de* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^\alpha (|\ln x|)^\beta} dx$

On fait le changement de variables $u = \dfrac{1}{t}$ donc $\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{t^2} \iff dt = -u^2 du$; d'où :

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^\alpha (|\ln x|)^\beta} dx = \int_{+\infty}^{e} \frac{-du}{u^{-\alpha} u^2 (|\ln u|)^\beta} = \int_e^{+\infty} \frac{du}{u^{2-\alpha} (\ln u)^\beta}$$

Donc :
— Si $2-\alpha < 1 \iff \alpha > 1$, alors l'intégrale diverge.
— Si $2-\alpha > 1 \iff \alpha < 1$, alors l'intégrale converge.
— Si $2-\alpha = 1$ et $\beta > 1 \iff \alpha = 1$ et $\beta > 1$, alors l'intégrale converge.
— Si $2-\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 1 \iff \alpha = 1$ et $\beta \leqslant 1$, alors l'intégrale diverge

Exercice 20 :

1. *Étudier la convergence de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

Question des plus classiques ! !
Nous avons $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 \left(t^{x-1} e^{-t}\right) = \lim_{t\to+\infty} \left(t^{x+1} e^{-t}\right) = 0$

Il existe donc $A > 0$ tel que si $t > A$, alors $t^2 \left(t^{x-1} e^{-t}\right) < 1$, et donc, si $t > A$, alors $\left(t^{x-1} e^{-t}\right) < \dfrac{1}{t^2}$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

2. *Montrer que* $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ *ne converge que si* $x > 0$

   Au voisinage de 0, $t^{x-1}e^{-t} \underset{0}{\approx} t^{x-1}$ et l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}e^{-t}dt$ converge si et seulement si $1 - x < 1$, c'est à dire $x > 0$
   Ce que nous voulions

3. *Quel est le domaine de définition de* $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ *?*

   On découpe l'intégrale. Soit donc $c > 0$; alors, $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^c t^{x-1}e^{-t}dt + \int_c^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$
   Nous avons montré que $\int_c^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$
   Nous avons montré que $\int_0^c t^{x-1}e^{-t}dt$ converge pour tout $x > 0$
   Donc, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ ne converge que pour $x > 0$, et le domaine de définition de $\Gamma(x)$ est donc $\mathbb{R}^{*+}$

4. *Démontrer que, pour tout* $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

   Nous avons $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$.
   Nous allons décomposer l'intégrale en 2.
   Soit donc $c > 0$, alors $\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = \int_0^c t^x e^{-t}dt + \int_c^{+\infty} t^x e^{-t}dt$

   — Calcul de $\int_0^c t^x e^{-t}dt$
   On fait une intégration par parties :

   $$\begin{array}{ll} u = t^x & u' = xt^{x-1} \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array}$$

   D'où $\int_0^c t^x e^{-t}dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^c + x\int_0^c t^{x-1}e^{-t}dt$
   Or, $t^x e^{-t} = e^{x\ln t}e^{-t}$ et $\lim\limits_{t\to 0} e^{x\ln t} = 0$; donc $\left[-t^x e^{-t}\right]_0^c = -c^x e^{-c}$, et nous en déduisons :

   $$\int_0^c t^x e^{-t}dt = -c^x e^{-c} + x\int_0^c t^{x-1}e^{-t}dt$$

   — Calcul de $\int_c^{+\infty} t^x e^{-t}dt$
   Nous faisons toujours une intégration par parties :

   $$\begin{array}{ll} u = t^x & u' = xt^{x-1} \\ v' = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{array}$$

   D'où $\int_c^{+\infty} t^x e^{-t}dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_c^{+\infty} + x\int_c^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$
   Or, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^x e^{-t} = 0$; donc $\left[-t^x e^{-t}\right]_c^{+\infty} = c^x e^{-c}$, et nous en déduisons :

   $$\int_c^{+\infty} t^x e^{-t}dt = c^x e^{-c} + x\int_c^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

   D'où $\Gamma(x+1) = -c^x e^{-c} + x\int_0^c t^{x-1}e^{-t}dt + c^x e^{-c} + x\int_c^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$
   Nous avons bien $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

5. *Calculer* $\Gamma(1)$

   De manière évidente, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$

   En déduire $\Gamma(n)$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$

   En utilisant la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, et le fait que $\Gamma(1) = 1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\
\Gamma(n-1) &= (n-2)\Gamma(n-2) \\
\Gamma(n-2) &= (n-3)\Gamma(n-3) \\
&\vdots \quad \vdots \\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2) \\
\Gamma(2) &= \Gamma(1)
\end{aligned}$$

   Et en faisant le produit télescopique, qui arrive à des simplifications termes à termes, nous obtenons ;

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

6. *Calculer* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

   Nous avons $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{-1}{2}} e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$

   On effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$ alors $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Longleftrightarrow dt = 2udu$

   Alors :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}2u\,du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$$

   Nous avons donc $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

7. *Démontrer, par récurrence que, pour* $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}$

   Nous allons donc démontrer, par récurrence, que pour $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}$

   * **Vérifions pour** $n = 0$

     Pour $n = 0$, $\Gamma\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

     $\frac{\sqrt{\pi}(2\times 0)!}{2^{2\times 0}0!} = \frac{\sqrt{\pi}(1)}{1\times 1} = \sqrt{\pi}$ puisque $0! = 1$. La proposition est donc vraie pour $n = 0$

   * **Supposons qu'au rang** n**, nous ayions :** $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}$

   * **Démontrons la propriété à l'ordre** $n + 1$

     $\Gamma\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2n+1}{2} \times \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!} \\
&= \frac{(2n+1)(2n+2)}{2(2n+2)} \times \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!} \\
&= \frac{(2(n+1))!\sqrt{\pi}}{2^2(n+1)\times 2^{2n}n!} \\
&= \frac{(2(n+1))!\sqrt{\pi}}{2^{2(n+1)}(n+1)!}
\end{aligned}$$

     La propriété est donc vraie à l'ordre $n + 1$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,(2n)!}{2^{2n} n!}$