Chapitre 6

Les séries de fonctions

6.1 Séries de fonctions

6.1.1 Définition d'une série de fonctions

Une série de fonctions de terme général f_n de $D \subset \mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est un couple formé de deux suites de fonctions définies sur $D \subset \mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = \left((f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous ayions $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ et donc, pour tout $x \in D$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n s'appelle le terme général d'ordre n de la série de fonctions et S_n s'appelle la somme partielle d'ordre n

Remarque 1 :

1. Si, pour tout $x \in D$, la suite numérique $(S_n(x))_{n_i n\mathbb{N}}$ converge vers un nombre $S(x)$, on dit que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est convergente et de somme $S(x)$, Ce qui veut dire :
$$(\forall x \in D)\left(\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = S(x)\right)$$
2. Bien entendu, si la suite $(f_p)_{p\geqslant n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un entier n_0, alors, la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est définie qu'à partir de n_0 par $S_n = \sum_{p=n_0}^{n} f_p$
3. Pour les résultats théoriques, nous supposerons toujours $n_0 = 0$, ce qui ne change rien ni aux définitions, ni aux résultats

6.1.2 Convergence simple

On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ converge simplement

Remarque 2 :

1. Il est tout autant possible de nous intéresser aux restes d'ordre n : $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$

2. Ce qui veut dire que pour tout $x \in D$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N(\varepsilon, x)$, alors $|S_n(x) - S(x)| = |R_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

Exemple 1 :

1. **Séries géométriques**
   Soit $u_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie par :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} u_n : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & u_n(z) = z^n \end{array} \right.$$
   Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons :
   $$\begin{aligned} S_n(z) = & \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \text{ si } z \neq 1 \\ S_n(1) = & \; n + 1 \end{aligned}$$
   L'ensemble de convergence de la série de terme général u_n est donc $E_0 = \{z \in \mathbb{C} \text{ avec } |z| < 1\}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(z) = \dfrac{1}{1 - z}$ pour tout z tel que $|z| < 1$
2. Soit v_n une fonction définie sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} v_n : \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & v_n(x) = \sin^2(x) \cos^n(x) \end{array} \right.$$
   La série de fonctions de terme général u_n converge simplement vers la fonction S définie par :
   $$\begin{aligned} & S(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \text{ si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ & S(0) = S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

6.1.3 Proposition

La série de fonctions $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ de D dans $\mathbb{K}$ converge simplement et a pour somme S si et seulement si, la suite des restes d'ordre n tend vers 0, c'est à dire si et seulement si :
$$(\forall x \in D)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,((n \geqslant N) \Longrightarrow (|R_n(x)| \leqslant \varepsilon))$$

Démonstration

Pour tout $x \in D$, nous avons $S(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$. La convergence simple de la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ implique que, pour tout tout $x \in D$, la série numérique de terme général $f_k(x)$ converge, et donc que sa série de restes $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ converge vers 0, c'est à dire que pour tout $x \in D$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $|R_n(x)| \leqslant \varepsilon$
Q.E.D.

Exercice 1 :

Etudier les convergences des séries de fonctions dont les termes généraux sont :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^{2n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{1+x^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{n^3+x^3}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^2}{n+x^4}$

6.1.4 Critère de Cauchy pour la convergence simple

La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $D \subset \mathbb{K}$ si et seulement si pour tout $x \in D$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q > N(x,\varepsilon)$, alors

$$|S_p(x) - S_q(x)| = \left|\sum_{n=q+1}^{p} f_n(x)\right| = |f_{q+1}(x) + f_{q+2}(x) + \cdots + f_{p-1}(x) + f_p(x)| < \varepsilon$$

6.1.5 Convergence uniforme

On dit que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ converge uniformément

Remarque 3 :

1. Ce qui veut dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N(\varepsilon)$, alors, pour tout $x \in D$ $|S_n(x) - S(x)| \leqslant \varepsilon$
2. Un autre point de vue qui peut être adopté, est celui d'écrire :
$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\left((n \geqslant N) \Longrightarrow \left(\sup_{x\in D}|S_n(x) - S(x)| = \sup_{x\in D}|R_n(x)| \leqslant \varepsilon\right)\right)$$
3. Bien entendu, une série qui converge uniformément, converge simplement
4. Comme pour les suites, la réciproque est fausse : une série qui converge simplement peut ne pas converger uniformément

   Par exemple on peut démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$ converge simplement sur l'intervalle $[0;1[$ vers la fonction $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
   Par contre, elle n'y converge pas uniformément.
   En effet, s'il y a convergence uniforme, la série converge aussi vers $S(x)$ et nous avons :
   $$\left|S(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k\right| = \left|\frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right| = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$
   Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$
   Alors $\dfrac{u_n^{n+1}}{1-u_n} = \dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}} = n \times e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$
   Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\times e^{(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n^{n+1}}{1-u_n} = +\infty$.
   Or, $\displaystyle\sup_{x\in[0;1[}\left|S(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k\right| \geqslant \frac{u_n^{n+1}}{1-u_n}$, et donc $\displaystyle\sup_{x\in[0;1[}\left|S(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k\right| = +\infty$, ce qui termine de montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $[0;1[$
5. Par contre, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$ converge uniformément sur tout intervalle du type $[-a : +a]$ où $a < 1$.

   En effet :

Nous avons, pour tout $x \in [-a : +a]$:

$$\left| S(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k \right| = \left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \leqslant \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

Or, comme $a < 1$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^{n+1}}{1-a} = 0$ et donc, pour tout $x \in [-a : +a]$,

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0;1[} \left| S(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k \right| = 0$$

Ce qui termine de montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} x^n$ converge uniformément sur l'intervalle $[-a; +a]$ lorsque $a < 1$

Exercice 2 :
Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \sin^2(x) \cos^n(x)$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

6.1.6 Critère de Cauchy pour la convergence uniforme

La série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $D \subset \mathbb{K}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q > N$, alors, pour tout $x \in D$

$$|S_p(x) - S_q(x)| = \left| \sum_{n=q+1}^{p} f_n(x) \right| = |f_{q+1}(x) + f_{q+2}(x) + \cdots + f_{p-1}(x) + f_p(x)| < \varepsilon$$

On dit que la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ vérifie le critère de Cauchy

Démonstration

Nous appelons toujours $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$.

1. Supposons que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers S
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Il existe alors $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors , pour tout $x \in D$, nous avons $|S_n(x) - S(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   Alors, pour $p \geqslant N_\varepsilon$ et $q \geqslant N_\varepsilon$, et pour tout $x \in D$:
   $$|S_p(x) - S_q(x)| \leqslant |S_p(x) - S(x)| + |S(x) - S_q(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
2. Réciproquement, supposons que la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ vérifie le critère de Cauchy
   Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p > q > N$, alors, pour tout $x \in D$, $|S_p(x) - S_q(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   Soit $x \in D$. De l'hypothèse, nous pouvons déduire que la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$, lequel est un espace complet. Cette suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente vers une limite

que nous notons $S(x)$. Nous définissons ainsi une fonction S définie sur D. Montrons que la convergence est uniforme. Nous avons :

$$S_p(x) - S(x) = S_p(x) - S_q(x) + S_q(x) - S(x)$$

D'où

$$|S_p(x) - S(x)| \leqslant |S_p(x) - S_q(x)| + |S_q(x) - S(x)|$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = S(x)$, il existe donc $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $q \geqslant \nu_1$, alors $|S_q(x) - S(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour $q \geqslant \max\{N_\varepsilon, \nu_1\}$, tout $p \geqslant N_\varepsilon$ et tout $x \in D$, nous avons

$$|S_p(x) - S(x)| \leqslant |S_p(x) - S_q(x)| + |S_q(x) - S(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ce qui montre que la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $D \subset \mathbb{K}$ vers S

Remarque 4 :

1. Il faut toujours remarquer **la place du quantificateur universel**.
2. Ce critère de Cauchy pour la convergence uniforme peut aussi s'écrire :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\left((p > q > N) \Longrightarrow \left(\left|\sum_{n=q+1}^{p} f_n(x)\right| = |f_{q+1}(x) + f_{q+2}(x) + \cdots + f_{p-1}(x) + f_p(x)| < \varepsilon\right)\right)$$

6.1.7 Corollaire

Si une série de fonctions $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $D \subset \mathbb{K}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in D} |f_n(x)| = 0$

Démonstration

Si la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $D \subset \mathbb{K}$ alors, elle vérifie le critère de Cauchy. Or :

$$|f_n(x)| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)|$$

Et donc, d'après ce critère de Cauchy, nous avons le résultat.

Exemple 2 :

En fait, il est facile d'utiliser la contraposée pour démontrer que la série ne converge pas uniformément.

1. La série de terme général $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $]-1;+1[$; on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in]-1;+1[} |f_n(x)| = \sup_{x \in]-1;+1[} |x^n| = 1$$

On retrouve ainsi le fait, déjà vu précédemment, que cette série ne converge pas uniformément sur $]-1;+1[$

2. La série de terme général $f_n(x) = \frac{x}{x+n^2}$ converge simplement sur $[0;+\infty[$; en effet, pour chaque $x \geqslant 0$ nous avons $0 \leqslant \frac{x}{x+n^2} \leqslant \frac{x}{n^2}$ et la série numérique de terme général $\frac{x}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

D'autre part, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{x \in [0;+\infty[} \frac{x}{x+n^2} = 1$

En effet :

⋆ La fonction $f_n(x) = \frac{x}{x+n^2}$ est croissante sur $[0;+\infty[$

$\star$ Et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+n^2} = 1$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup\limits_{x\in[0;+\infty[} \dfrac{x}{x+n^2} \right) = 1$

La série de terme général $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n^2}$ ne converge donc pas uniformément sur $[0;+\infty[$

Exercice 3 :

Déterminer les intervalles de convergence uniformes pour les séries

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2x^2}$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2+x^2}$

6.1.8 Convergence absolue

On dit que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge absolument si et seulement si la suite des sommes partielles $\sum\limits_{k=0}^{n} |f_k|$ converge simplement

6.1.9 Proposition

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions qui converge absolument, alors, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement
Autrement dit : la convergence absolue implique la convergence simple.

Démonstration

Supposons que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge absolument.

Soit $x \in D$; ceci veut donc dire que la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge absolument et, d'après ce qui a été vu dans les séries numériques, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge.

Ce qui veut dire que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement.

Remarque 5 :

1. Bien entendu, la réciproque est fausse ! !

   Par exemple :

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^{*+}$, nous considérons la fonction $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$

   Considérons maintenant la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$.

   (a) Cette série est simplement convergente

   $\to$ Soit $x > 0$. La série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ est une série numérique alternée convergente

   $\to$ En effet, d'une part $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x+n} = 0$ et d'autre part, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{1}{x+n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

   $\to$ D'après le critère des séries alternées 5.5.1, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ est donc convergente

La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ est une série simplement convergente.

(b) Cette série est-elle absolument convergente ?

→ Soit $x>0$. La série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |f_n(x)| = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{x+n}$

→ En $+\infty$, nous avons $\frac{1}{x+n} \approx_{+\infty} \frac{1}{n}$; la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente et donc la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |f_n(x)|$ est divergente.

→ La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ n'est pas une série absolument convergente.

Nous venons d'exhiber une série de fonctions qui est simplement convergente sans l'être absolument

2. **Il n'y a pas de lien entre la convergence absolue et la convergence uniforme**

$\Longrightarrow$ Considérons toujours la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{x+n}$; nous avons démontré qu'elle convergeait simplement sur $[0;+\infty[$ mais pas absolument. Nous allons montrer qu'elle converge uniformément sur $[0;+\infty[$ vers la fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{x+n}$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{x+n} - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{x+n}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}\right| = |R_n(x)|$$

Lorsque nous avons travaillé le critère des séries alternées en 5.5.1, nous avons démontré que, si S est la somme de la série alternée, nous avons $|S-S_n| \leqslant u_{n+1}$.
Donc, pour tout $x \in [0;+\infty[$, nous avons :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{x+n} - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{x+n}\right| = |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{x+n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Donc, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, pour tout $x \geqslant 0$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{x+n} - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{x+n}\right| = 0$, ce qui montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur $[0;+\infty[$

$\Longrightarrow$ Considérons maintenant la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x}{1+n^2x^2}$

C'est une série qui converge absolument sur $[0;+\infty[$, mais pas uniformément.

→ Soit $x \in [0;+\infty[$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x}{1+n^2x^2}$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, nous avons $\frac{x}{1+n^2x^2} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{n^2x}$.

Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2x}$ est une série de Riemann convergente, il en est de même de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x}{1+n^2x^2}$.

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x}{1+n^2x^2}$ converge donc bien absolument sur $[0;+\infty[$

→ Montrons qu'elle ne converge pas uniformément.
Comme souvent, nous utilisons les restes d'ordre n. En effet :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{x}{1+k^2x^2} - \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x}{1+n^2x^2}\right| = \left|\sum_{k\geqslant n+1} \frac{x}{1+k^2x^2}\right| = |R_n(x)|$$

Or :

$$R_n(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{x}{1+k^2x^2}$$

Et nous avons (parce que $x \geqslant 0$) :

$$R_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{x}{1+k^2x^2} \geqslant x \times \frac{N-n}{1+N^2x^2}$$

Nous avons, clairement :

$$\sup_{x\in[0;+\infty[} |R_n(x)| \geqslant R_n\left(\frac{1}{N}\right) \geqslant \frac{N-n}{2N}$$

Comme $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{N-n}{2N} = \frac{1}{2}$, et de $\displaystyle R_n(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{x}{1+k^2x^2}$, nous avons :

$$\sup_{x\in[0;+\infty[} |R_n(x)| \geqslant \frac{1}{2}$$

Nous ne pouvons donc pas avoir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0;+\infty[} |R_n(x)| = 0$, ce qui montre que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x}{1+n^2x^2}$ ne converge pas uniformément sur $[0;+\infty[$.

6.1.10 Convergence normale

On dit que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ <u>converge normalement</u> sur $D \subset \mathbb{K}$ s'il existe une série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ à termes positifs et convergente telle que :

$$(\forall x \in D)\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(|f_n(x)| \leqslant u_n)$$

6.1.11 Proposition

On considère $\displaystyle\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in D} |f_n(x)|$. Alors, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $D \subset \mathbb{K}$ si et seulement si, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge

<u>Démonstration</u>

1. <u>Supposons que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement</u>

   Alors, pour tout $x \in D$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|f_n(x)| \leqslant u_n$, en particulier, $\displaystyle\sup_{x\in D} |f_n(x)| \leqslant u_n$, et donc $\|f_n\|_\infty \leqslant u_n$.
   En utilisant les résultats sur les séries numériques, le terme général $\|f_n\|_\infty$ de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ est majoré par celui d'une série numérique convergente et donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge

2. <u>Réciproquement, supposons que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge</u>

   Alors, pour tout $x \in D$, nous avons $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$, ce qui est la définition de la convergence normale.

Remarque 6 :

Le vocabulaire de **convergence normale** est bien utilisé puisque $\|f_n\|_\infty$ définit une norme sur $\mathcal{B}(X)$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions bornées sur D

Exemple 3 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f_n(x) = \dfrac{x}{(x+n)^3}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \geqslant 0$:
$$|f_n(x)| = \frac{x}{(x+n)^3} \leqslant \frac{x+n}{(x+n)^3} = \frac{1}{(x+n)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série numérique convergente, donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{(x+n)^3}$ converge normalement.
2. Soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|\dfrac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série numérique convergente, donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement.

6.1.12 Proposition

Si une série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur un ensemble $D \subset \mathbb{K}$, alors elle converge absolument sur D
Autrement dit : la convergence normale implique la convergence absolue

Démonstration

Soit $x \in D$. Alors $|f_n(x)| \leqslant u_n$ où u_n est le terme général d'une série à termes positifs et convergente. Donc, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|$ converge, c'est à dire que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge absolument.

6.1.13 Proposition

Si une série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur un ensemble $D \subset \mathbb{K}$, alors elle converge uniformément sur D
Autrement dit : la convergence normale implique la convergence uniforme

Démonstration

Pour le démontrer, nous allons utiliser le critère de Cauchy pour les convergences uniformes vu en 6.1.6. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $q > p$. Alors :
$$|f_p(x) + f_{p+1}(x) + \cdots + f_q(x)| \leqslant |f_p(x)| + |f_{p+1}(x)| + \cdots + |f_q(x)| \tag{6.1}$$
Comme la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement, il existe une série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ à termes positifs et convergente, telle que, pour tout $x \in D$, $|f_n(x)| \leqslant u_n$, en particulier $\displaystyle\sup_{x\in D} |f_n(x)| \leqslant u_n$

De l'inégalité 6.1, nous tirons :

$$\sup_{x\in D}\left(\left|f_p(x)+f_{p+1}(x)+\cdots+f_q(x)\right|\right)\leqslant \sup_{x\in D}\left|f_p(x)\right|+\sup_{x\in D}\left|f_{p+1}(x)\right|+\cdots+\sup_{x\in D}\left|f_q(x)\right|$$

Nous avons donc :

$$\sup_{x\in D}\left(\left|f_p(x)+f_{p+1}(x)+\cdots+f_q(x)\right|\right)\leqslant u_p+u_{p+1}+\cdots+u_q=\sum_{n=p}^{q}u_n$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ étant convergente, elle est de Cauchy. Donc, pour $\varepsilon>0$, il existe $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que si $q>p\geqslant N_\varepsilon$, alors

$$u_p+u_{p+1}+\cdots+u_q=\sum_{n=p}^{q}u_n<\varepsilon$$

Donc, pour ce même $\varepsilon>0$, pour $q>p\geqslant N_\varepsilon$, nous avons

$$\sup_{x\in D}\left(\left|f_p(x)+f_{p+1}(x)+\cdots+f_q(x)\right|\right)\leqslant u_p+u_{p+1}+\cdots+u_q<\varepsilon$$

Ce qui montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $D\subset\mathbb{K}$

Remarque 7 :

1. **Bien entendu, nous n'avons pas la réciproque**
   Exemple :
   Nous avons démontré que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{x+n}$ convergeait uniformément sur $\mathbb{R}^+$. Nous allons démontrer que cette série n'est pas normalement convergente. En effet,

   $$\|f_n\|_\infty=\sup_{x\geqslant 0}\left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right|=\sup_{x\geqslant 0}\frac{1}{x+n}=\frac{1}{n}$$

   Or, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\|f_n\|_\infty=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$ est une série divergente, et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{x+n}$ n'est pas normalement convergente.
   Nous avons donc un exemple de série uniformément convergente qui n'est pas normalement convergente.
2. Nous avons donc :

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Convergence absolue} \arrow[dr] & \\
\text{Convergence normale} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Convergence simple} \\
 & \text{Convergence uniforme} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Exercice 4 :

Etudier la convergence simple, absolue, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{x^n}{n}$

Exercice 5 :

Montrer que la série de terme général $f_n(x) = (-1)^n \left(\dfrac{x^2 + n}{n^2} \right)$ pour $n \geqslant 1$ est uniformément convergente sur tout intervalle $[a; b] \subset \mathbb{R}$ mais n'est absolument convergente pour aucune valeur $x \in \mathbb{R}$

Exercice 6 :

Montrer que si la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} |a_n|$ converge, alors la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n e^{inx}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$

Exercice 7 :

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{e^{-nx} \sin nx}{\ln n}$ est normalement convergente sur l'intervalle $[a; +\infty[$ où $a > 0$