6.2 Théorèmes généraux

Certaines littératures appellent aussi ces théorèmes généraux, des <u>théorèmes de transfert</u>. L'idée est effectivement de voir ce qui se passe lorsque les fonctions ont certaines qualités, et si ces qualités sont conservées par « passage aux séries »

Les outils utilisés dans cette section reprennent en très grande partie, ceux exposés dans les suites de fonctions de L_1. Ils seront rappelés lorsque cela sera nécessaire

6.2.1 Théorème d'interversion des limites pour les séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $D \subset \mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $a \in \overline{D}$. On suppose :

1. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur D vers une fonction S
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x) = l_n(a)$

Alors

1. La série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} l_n(a)$ est convergente dans $\mathbb{K}$. Appelons $L(a) = \sum\limits_{n\geqslant 0} l_n(a)$
2. Nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} S(x) = L(a)$; autrement dit :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} \left(\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)\right) = \sum_{n\geqslant 0}\left(\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x)\right)$$

Démonstration

Avant de débuter la démonstration, nous allons rappeler un théorème vu en L_1 :

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$ adhérent à D. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D telles que :

$\Longrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x) = l_n$

$\Longrightarrow$ La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f définie sur D

Alors

$\longrightarrow$ La suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \mathbb{K}$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = l$

$\longrightarrow$ La fonction f admet une limite lorsque x tend vers a, plus précisément : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x) = l$

Nous avons donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x)\right) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$$

Nous allons appliquer ce résultat à la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_n(x)$

$\rightarrow$ D'après l'hypothèse, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction S

$\rightarrow$ D'après les théorèmes classiques sur les limites, nous avons :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} S_n(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}}\left(\sum_{k=0}^{n} f_n(x)\right) = \sum_{k=0}^{n}\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(a) = L_n(a)$$

Donc, d'après le résultat vu en L_1 :

$\rightarrow$ La suite numérique $(L_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$, c'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n(a) = L(a)$, c'est à dire, traduit en termes de séries :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} l_k(a) = L(a)$$

La série numérique $\sum_{n\geqslant 0} l_n(a)$ est convergente et a pour somme $L(a)$

$\rightarrow$ Et $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} S(x) = L(a)$

Ce que nous voulions

6.2.2 Proposition

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $D\subset\mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose :

1. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur D vers une fonction S
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, les fonctions f_n sont continues sur D

Alors la somme $S=\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est une fonction continue sur D

Démonstration

On rappelle le résultat vu en L_1 :

La limite uniforme d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues est continue.

$\longrightarrow$ Appelons $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$; S_n est une fonction continue sur D, comme somme finie de fonctions continues sur D

$\longrightarrow$ La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction S

La fonction S est donc continue sur D

Exemple 4 :

Exemple et contre-exemple :

1. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ où $f_n(x) = (1-x)\,x^n$.
   - ▷ Cette série converge simplement sur l'intervalle $[0;+1]$ vers la fonction S définie par :
   $$\begin{cases} S(x) = 1 \text{ si } x\in\,]0;+1[\\ S(0) = S(1) = 0 \end{cases}$$
   - ▷ La fonction S n'est pas continue sur $[0;+1]$
   - ▷ La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ où $f_n(x) = (1-x)\,x^n$ ne converge donc pas uniformément sur l'intervalle $[0;+1]$
2. Considérons la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$
   - ▷ Nous avons, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left|\frac{e^{-nx^2}}{n^2}\right| = \frac{e^{-nx^2}}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$

   La série numérique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ; la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{-nx^2}}{n^2}$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Elle est donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$
   - ▷ Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $\frac{e^{-nx^2}}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc la somme $S(x) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{-nx^2}}{n^2}$ est elle-même continue sur $\mathbb{R}$
   - ▷ Nous avons, en particulier $S(0) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

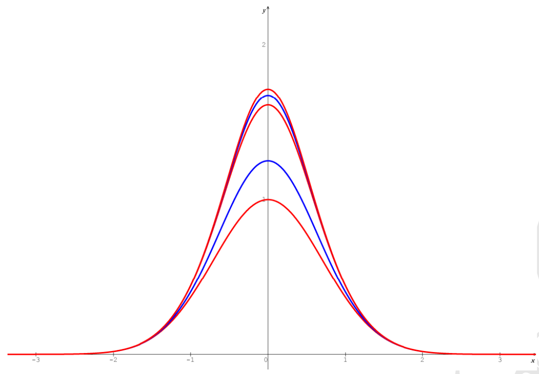

FIGURE 6.1 – Une visualisation des sommes successives (jusque $n = 5$) amenant au graphe de S

3. **La série de fonctions** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\,\frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ **est continue sur** $\mathbb{R}$

   Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $(-1)^n\,\dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ continue sur $\mathbb{R}$ en entier.

   D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

   $$\left|(-1)^n\,\frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}\right| = \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3} \leqslant \frac{1}{(n+1)^3}$$

   La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^3}$ est une série de Riemann convergente ; la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\,\frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ est donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

   Nous en déduisons donc que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\,\frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 8 :

Soit α un réel tel que $\alpha < 2$. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}x^{2-\alpha}e^{-nx}$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$

1. Démontrer que cette série est simplement convergente sur $[0;+\infty[$
2. Démontrer que, si $1 \leqslant \alpha < 2$ alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}x^{2-\alpha}e^{-nx}$ n'est pas uniformément convergente sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
3. Montrer que si $\alpha < 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}x^{2-\alpha}e^{-nx}$ est uniformément convergente sur $[0;+\infty[$

6.2.3 Théorème sur la dérivation

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable sur D (c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n' existe et est défini sur D)
2. Il existe $x_0 \in D$ tel que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x_0)$ soit convergente
3. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ converge uniformément sur D

Alors :

1. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est uniformément convergente sur D vers une fonction S
2. La somme $S = \sum_{n\geqslant 0} f_n$ est dérivable et $S' = \sum_{n\geqslant 0} f_n'$

Démonstration

C'est l'application aux sommes partielles du théorème vu en L_1 :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On suppose que :

- Il existe $c \in [a;b]$ tel que la suite numérique $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ converge
- La suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions dérivées des f_n converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction φ

Alors :

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction f
2. f est dérivable sur $[a;b]$
3. Pour tout $x \in [a;b]$, $f'(x) = \varphi(x) \Longleftrightarrow f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$, c'est à dire que nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)'$$

La démonstration est donc laissée en exercice

6.2.4 Corollaire

Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur $D \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D
2. La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est simplement convergente
3. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ converge uniformément sur D

Alors :

1. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est uniformément convergente sur D vers une fonction S
2. La somme $S = \sum_{n\geqslant 0} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $S' = \sum_{n\geqslant 0} f_n'$

Démonstration

La démonstration est laissée en exercice.

Exemple 5 :

Retravaillons la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$.
Nous avons démontré que cette série convergeait simplement sur l'intervalle $[-1;+1[$ et uniformément sur tout intervalle $[-a;+a]$ où $0 < a < 1$ *(en fait, la série converge uniformément sur tout intervalle $[a;b] \subset]-1;+1[$)*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[-a;+a]$, et donc $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ est continue sur $[-a;+a]$
D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $f_n'(x) = x^{n-1}$, et la série $\sum_{n\geqslant 1} x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} x^n$ est elle aussi uniformément convergente sur $[-a;+a]$. Nous avons alors :

$$\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n\geqslant 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

D'où, en passant à la primitive, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x) + k$; or, pour $x = 0$, nous avons $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{0^n}{n} = -\ln(1-0) = 0$, d'où $k = 0$, et donc $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

En prolongeant par continuité en $x = -1$, nous obtenons $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

6.2.5 Théorème

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$
On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions sont continues sur l'intervalle $[a,b]$
2. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément vers une fonction S

Alors
Si nous définissons $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t$

1. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} F_n$ converge uniformément vers une fonction Σ
2. Pour tout $x \in [a,b]$, la fonction Σ est définie par :

$$\Sigma(x) = \int_a^x S(t)\ \mathrm{d}t$$

C'est à dire que nous avons :

$$\sum_{n\geqslant 0} \int_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^x \sum_{n\geqslant 0} f_n(t)\ \mathrm{d}t$$

Démonstration

Nous allons commencer cette démonstration par un lemme de rappel sur les suites de fonctions

Lemme

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$
On suppose que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions sont continues sur l'intervalle $[a,b]$
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f

Alors

La suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $x \in [a,b]$ par $F_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)\, \mathrm{d}t$ converge uniformément vers la fonction F définie, pour tout $x \in [a,b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$

Une nouvelle fois, nous avons : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\, \mathrm{d}t$

Démonstration

1. Comme pour chacun des $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue, f, limite uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une fonction continue et $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$ est bien définie
2. Démontrons que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F.
   Pour tout $x \in [a,b]$, nous avons :
   $$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_a^x (f_n(t) - f(t))\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\, \mathrm{d}t$$
   Soit $\varepsilon > 0$
   Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$, pour tout $t \in [a,b]$, nous avons $|f_n(t) - f(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{|b-a|}$.
   Donc, pour $n \geqslant N$, nous avons $\displaystyle\int_a^x |f_n(t) - f(t)|\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{|b-a|} \times |b-a| = \varepsilon$
   Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$, pour tout $x \in [a,b]$, nous avons
   $$|F_n(x) - F(x)| \leqslant \varepsilon$$
   La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers F

Il suffit, maintenant, de considérer la suite des sommes partielles $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$.

- ▷ Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les S_n sont continues comme somme finie de fonctions continues.
- ▷ La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S

Donc la série de fonctions $\displaystyle\int_a^x S_n(t)\, \mathrm{d}t$ converge uniformément vers la fonction $\displaystyle\int_a^x S(t)\, \mathrm{d}t$.
Nous avons donc bien

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^x \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\, \mathrm{d}t\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \int_a^x f_n(t)\, \mathrm{d}t\right) = \int_a^x \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_n(t)\right) \mathrm{d}t$$

Autrement dit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_a^x f_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^x \sum_{n\geqslant 0} f_n(t)\, \mathrm{d}t$

Remarque 8 :

C'est un exemple de permutation des signes $\sum$ et $\int$

Exemple 6 :

Soit $h > 0$
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} ne^{-nx}$ est uniformément convergente sur $[h;+\infty[$.

Soit S sa somme. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $h < a < b$, calculer $\displaystyle\int_a^b S(x)\, \mathrm{d}x$

Je trouve qu'il y a 2 façons de répondre à la question, et je vais tenter de la faire.

1. **Première méthode**
   Soit $f_n(x) = ne^{-nx}$; cette fonction est définie et continue sur l'intervalle $[h; +\infty[$.
   Pour tout $x \in [h; +\infty[$, nous avons $0 < e^{-nx} \leqslant e^{-nh}$, et donc, pour tout $x \in [h; +\infty[$, nous avons $< f_n(x) \leqslant ne^{-nh}$
   Comme $h > 0$, nous avons $0 < e^{-h} < 1$ et ne^{-nh} est le terme général d'une série numérique à termes positifs convergente.
   La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} ne^{-nx}$ est donc normalement convergente sur $[h; +\infty[$, c'est à dire uniformément convergente sur $[h; +\infty[$.
   Nous pouvons donc écrire $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1}\int_a^b ne^{-nx}\,\mathrm{d}x$. Or :
   $$\int_a^b ne^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-nx}\right]_a^b = e^{-na} - e^{-nb}$$
   Et donc
   $$\begin{aligned}\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n\geqslant 1}\left(e^{-na} - e^{-nb}\right)\\ &= \sum_{n\geqslant 1} e^{-na} - \sum_{n\geqslant 1} e^{-nb}\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\left(e^{-a}\right)^n - \sum_{n\geqslant 1}\left(e^{-b}\right)^n\\ &= \frac{e^{-a}}{1-e^{-a}} - \frac{e^{-b}}{1-e^{-b}}\\ &= \frac{1}{e^a-1} - \frac{1}{e^b-1}\\ &= \frac{e^b-e^a}{(e^a-1)(e^b-1)}\end{aligned}$$
   Et donc, $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^b-e^a}{(e^a-1)(e^b-1)}$
2. **Seconde méthode**
   Soit $F_n(x) = e^{-nx}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction F_n est continue et dérivable sur l'intervalle $[h; +\infty[$.
   D'autre part, pour tout $x \in [h; +\infty[$, nous avons $|F_n(x)| \leqslant e^{-nh}$; ainsi la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} F_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[h; +\infty[$.
   Nous avons $F_n'(x) = -f_n(x)$. Nous venons de démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} F_n' = \sum_{n\geqslant 1} f_n$ convergeait uniformément sur $[h; +\infty[$, nous avons :
   $$\left(\sum_{n\geqslant 0} F_n\right)' = \sum_{n\geqslant 0} F_n' \Longleftrightarrow \left(\sum_{n\geqslant 0} F_n\right)' = -\sum_{n\geqslant 1} f_n$$
   De telle sorte que :
   $$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b \left(\sum_{n\geqslant 0} F_n\right)'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0} F_n(a) - \sum_{n\geqslant 0} F_n(b)$$
   Or, $\sum_{n\geqslant 0} F_n(x) = \sum_{n\geqslant 0} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x-1}$, et donc
   $$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^a}{e^a-1} - \frac{e^b}{e^b-1} = \frac{e^b-e^a}{(e^a-1)(e^b-1)}$$