6.3 Exercices complémentaires

Exercice 9 :

Etudier les séries suivantes *(mode de convergence, continuité de la somme)*

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{-n}\cos n^2x$ 2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\sin\frac{x}{n}$ 3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos\frac{x}{2^n}}{10^n}$ 4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n+n^2x^2}$

Exercice 10 :

Soient α, a et b, 3 nombres réels tels que $\alpha>0$ et $0<a<b$. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x}{n^\alpha\left(1+nx^2\right)}$

Montrer que cette série est uniformément convergente sur l'intervalle $[a;b]$

Exercice 11 :

Montrer que la somme de la série de fonctions de terme général $f_n(x)=(-1)^n\dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 12 :

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Etudier la continuité de la fonction définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $F(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}n^\alpha\sin^n x\cos x$

Exercice 13 :

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}f_n(x)$ où $f_n(x)=(-1)^n\dfrac{x^2}{x^4+n}$

1. Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que cette série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que la somme de cette série est continue

Exercice 14 :

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x}{\left(x^2+n^2\right)^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que cette série est continue sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{x^2+n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Exercice 15 :

Nous considérons la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}f_n(x)$ où $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{n^3}$

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}f_n(x)$ converge et que sa somme $f(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
2. Démontrer que $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=2\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n-1)^4}$
3. Démontrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(nx)}{n^2}$
4. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

Exercice 16 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous définissons la fonction $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0 : +\infty[$ vers une fonction S
2. Démontrer que $S'(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$

Exercice 17 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\, \mathrm{d}x = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2+1}$

Exercice 18 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$

1. Etudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$
2. Nous appelons $C(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$ pour tout x appartenant au domaine de convergence. Donner une expression de C à l'aide de fonctions usuelles
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous appelons :

$$J_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x \text{ et } I_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x$$

   (a) Calculer J_n puis I_n

   (b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

4. Lorsque cela existe, nous posons $S(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$

   Déterminer l'ensemble de définition de S et exprimer S à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 19 :

On considère la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$

Montrer que la série de fonctions $\sum b_n \sin nx$ converge uniformément si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} nb_n = 0$