6.4 Etude de quelques curiosités

L'OBJET DE CE PARAGRAPHE EST D'ÉTUDIER DES QUESTIONS DIFFICILES ET NÉANMOINS SURPRENANTES. IL FAUT PRENDRE CE PARAGRAPHE COMME UNE SUCCESSION D'EXERCICES RÉSOLUS

6.4.1 La fonction de Van Der Waerden

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique et de période 1, et telle que :

$$\left(\forall x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[\right)\left(\varphi\left(x\right)=\left|x\right|\right)$$

(a) De la périodicité, nous tirons que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons $\varphi\left(x+n\right)=\varphi\left(x\right)$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in \left[n_0-\frac{1}{2};n_0+\frac{1}{2}\right[$, et alors $x-n_0 \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ et alors :

$$\varphi\left(x\right)=\varphi\left(x-n_0\right)=\left|x-n_0\right|$$

(c) Qu'est donc ce n_0 ?

Nous avons, dans tous les cas, $n_0-\frac{1}{2}\leqslant x<n_0+\frac{1}{2}$, c'est à dire $n_0\leqslant x+\frac{1}{2}<n_0+1$, c'est à dire que $n_0=\left[x+\frac{1}{2}\right]$ où $[\bullet]$ désigne la partie entière Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\varphi\left(x\right)=\left|x-\left[x+\frac{1}{2}\right]\right|$

Une autre écriture de cette fonction φ pourrait être, et naturellement : $\varphi\left(x\right)=\min\left\{\left|x-n\right| \text{ avec } n\in\mathbb{Z}\right\}$, c'est à dire que $\varphi\left(x\right)$ représente la distance du réel x à l'entier le plus voisin.

D'autres ont aussi pu écrire $\varphi\left(x\right)=d\left(x,\mathbb{Z}\right)$

(d) La fonction φ est paire.

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in \left[n_0-\frac{1}{2};n_0+\frac{1}{2}\right[$, et $\varphi\left(x\right)=\left|x-n_0\right|$.

Nous avons alors $-x \in \left]-n_0-\frac{1}{2};-n_0+\frac{1}{2}\right]$, et donc

$$\varphi\left(-x\right)=\left|-x-\left(-n_0\right)\right|=\left|-x+n_0\right|=\left|x-n_0\right|=\varphi\left(x\right)$$

De plus, $\varphi\left(n_0-\frac{1}{2}\right)=\varphi\left(n_0+\frac{1}{2}\right)=\varphi\left(-n_0-\frac{1}{2}\right)=\varphi\left(-n_0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ et $\varphi\left(n_0\right)=\varphi\left(-n_0\right)=0$

(e) La fonction φ est une fonction affine par morceaux.

$\Longrightarrow$ Sur chaque intervalle $I_n=\left[\frac{n}{2};\frac{n+1}{2}\right[$ avec $n \in \mathbb{Z}$, la pente de la droite est donnée par $\left(-1\right)^n$; φ est donc non dérivable dans les points $\frac{n}{2}$ avec $n \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ Les seuls points de discontinuité possibles sont du type $-\frac{1}{2}+n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{Z}$

- ⋆ Si $x<-\frac{1}{2}+n_0$, alors $\varphi\left(x\right)=\left|x-\left(n_0-1\right)\right|$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-\frac{1}{2}+n_0\\ x<-\frac{1}{2}+n_0}}\varphi\left(x\right)=\frac{1}{2}$
- ⋆ Maintenant, si $x\geqslant-\frac{1}{2}+n_0$, alors $\varphi\left(x\right)=\left|x-n_0\right|$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-\frac{1}{2}+n_0\\ x\geqslant-\frac{1}{2}+n_0}}\varphi\left(x\right)=\frac{1}{2}$

φ est donc continue sur $\mathbb{R}$, non dérivable dans les points $\frac{n}{2}$ avec $n \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ Le minimum de φ est atteint en $n \in \mathbb{Z}$ où $\varphi\left(n\right)=0$ et le maximum est atteint en $\frac{1}{2}+n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{Z}$ où $\varphi\left(\frac{1}{2}+n_0\right)=\frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $0\leqslant\varphi\left(x\right)\leqslant\frac{1}{2}$

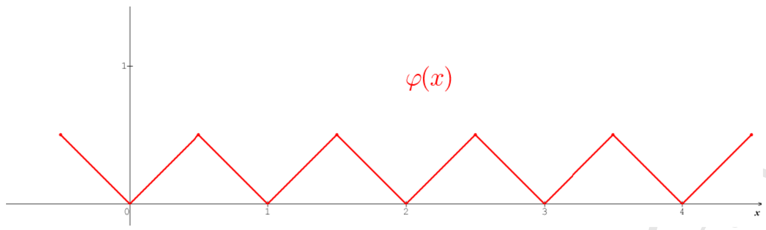

FIGURE 6.2 – Le graphe de φ

La figure 6.2 représente le graphe de φ

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et nous considérons la fonction $w_n(x) = \varphi(nx)$
   (a) En reprenant ce qui a été écrit ci-dessus, w_n est paire, de période $\dfrac{1}{n}$ et continue sur $\mathbb{R}$
   (b) w_n n'est pas dérivable en les points où $nx = \dfrac{p}{2}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, c'est à dire en les points $x = \dfrac{p}{2n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$
   ▷ Si p est pair, c'est à dire si $p = 2k$, alors :
   $$w_n\left(\frac{p}{2n}\right) = \varphi\left(n \times \frac{p}{2n}\right) = \varphi\left(\frac{p}{2}\right) = \varphi\left(\frac{2k}{2}\right) = \varphi(k) = 0$$
   ▷ Si p est impair, c'est à dire si $p = 2k+1$, alors :
   $$w_n\left(\frac{p}{2n}\right) = \varphi\left(n \times \frac{p}{2n}\right) = \varphi\left(\frac{p}{2}\right) = \varphi\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \varphi\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$
   (c) Soit $k \in \mathbb{Z}$ et considérons l'intervalle $\left[\dfrac{2k-1}{2n}, \dfrac{2k+1}{2n}\right[$ et dont le milieu est $\dfrac{k}{n}$. Si $x \in \left[\dfrac{2k-1}{2n}, \dfrac{2k+1}{2n}\right[$, alors $nx \in \left[-\dfrac{1}{2}+k, \dfrac{1}{2}+k\right[$
   ▷ Si $x \in \left[\dfrac{2k-1}{2n}, \dfrac{k}{n}\right[$, alors $nx \in \left[-\dfrac{1}{2}+k, k\right[$ et $w_n(x) = \varphi(nx) = |nx-k| = k - nx$. la pente de la fonction w_n sur $\left[\dfrac{2k-1}{2n}, \dfrac{k}{n}\right[$ est donc $n(-1)^{2k-1}$
   ▷ Si $x \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{2k+1}{2n}\right[$, alors $nx \in \left[k; \dfrac{1}{2}+k, \right[$ et $w_n(x) = \varphi(nx) = |nx-k| = nx - k$. la pente de la fonction w_n sur $\left[\dfrac{k}{n}; \dfrac{2k+1}{2n}\right[$ est donc $n(-1)^{2k}$

   En synthèse, la fonction w_n est affine sur les intervalles $\left[\dfrac{s}{2n}, \dfrac{s+1}{2n}\right[$ avec $s \in \mathbb{Z}$ de pente $n(-1)^s$

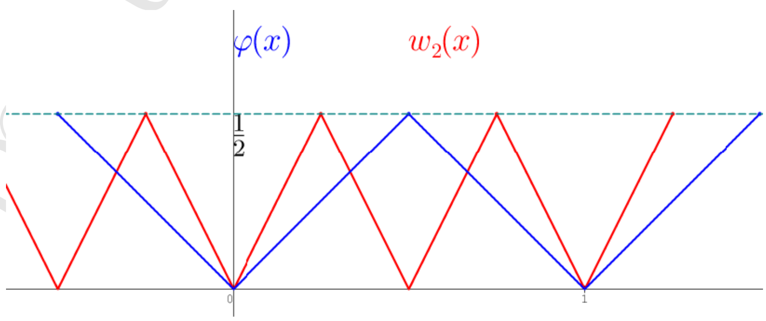

FIGURE 6.3 – Les graphes de φ et w_2

3. Nous allons, maintenant, un peu plus loin en considérant $w_n^1(x) = \varphi(2^n x)$

(a) La période de w_n^1 est $\dfrac{1}{2^n}$

(b) Les points anguleux (ou non dérivables sont du type $\left(\dfrac{k}{2^{n+1}}\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et elle est affine, de pente $2^n(-1)^k$ sur les intervalles $\left[\dfrac{k}{2^{n+1}}; \dfrac{k+1}{2^{n+1}}\right]$

(c) Soit $f(x) = \varphi(x) + \dfrac{1}{2} \times \varphi(2x)$

$\longrightarrow$ f est périodique et de période 1 ; nous pouvons donc ne l'étudier que sur l'intervalle $[0; 1]$

$\longrightarrow$ Sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{1}{4}\right]$, nous avons $\varphi(x) = x$ et $\varphi(2x) = 2x$; d'où :

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \times \varphi(2x) = x + \frac{1}{2} \times (2x) = 2x$$

$\longrightarrow$ Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right]$, nous avons $\varphi(x) = x$ et $\varphi(2x) = -2x + 1$; d'où :

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \times \varphi(2x) = x + \frac{1}{2} \times (-2x + 1) = \frac{1}{2}$$

$\longrightarrow$ Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{4}\right]$, nous avons $\varphi(x) = -x + 1$ et $\varphi(2x) = 2x - 1$; d'où :

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \times \varphi(2x) = -x + 1 + \frac{1}{2} \times (2x - 1) = \frac{1}{2}$$

$\longrightarrow$ Sur l'intervalle $\left[\dfrac{3}{4}; 1\right]$, nous avons $\varphi(x) = -x + 1$ et $\varphi(2x) = -2x + 2$; d'où :

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \times \varphi(2x) = -x + 1 + \frac{1}{2} \times (-2x + 2) = -2x + 2$$

D'où le graphe en figure 6.4 :

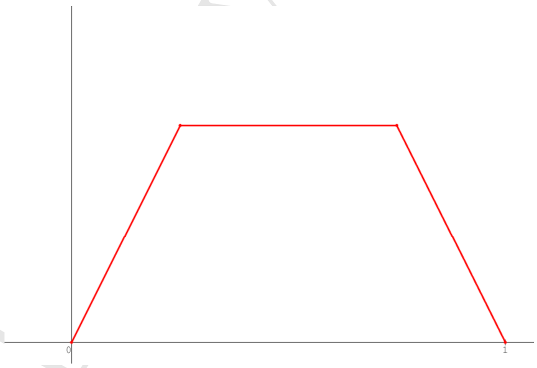

FIGURE 6.4 – Les graphes de f où $f(x) = \varphi(x) + \dfrac{1}{2} \times \varphi(2x)$

(d) Il n'est pas inutile de remarquer que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \varphi(2^n x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$

▷ Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$ n'est pas difficile. En effet :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 -x + 1\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

▷ Démontrons, maintenant, que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(2^n x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$

Faisons le changement de variables $u = 2^n x$; alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2^n$, ce qui donne $\mathrm{d}x = 2^{-n}\,\mathrm{d}u$. Donc :

$$\int_0^1 \varphi(2^n x)\,\mathrm{d}x = 2^{-n}\int_0^{2^n} \varphi(u)\,\mathrm{d}u = 2^{-n}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}\int_k^{k+1}\varphi(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

On sait que φ est périodique et de période 1. Donc : $\displaystyle\int_k^{k+1}\varphi(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}$

Nous en déduisons que :

$$\int_0^1 \varphi(2^n x)\,\mathrm{d}x = 2^{-n}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{4}\right) = 2^{-n}\times 2^n \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

4. On appelle fonction de Van Der Waerden, la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}\varphi(2^n x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{\varphi(2^n x)}{2^n} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{w_{2^n}(x)}{2^n}$$

C'est une fonction partout continue et nulle part dérivable

(a) **f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$**

▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\dfrac{\varphi(2^n x)}{2^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$

▷ D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $0 \leqslant \dfrac{\varphi(2^n x)}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$

La série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2^{n+1}}$ est une série convergente et donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\varphi(2^n x)}{2^n}$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$

▷ En utilisant le résultat sur convergence uniforme et continuité, nous pouvons déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$

(b) **f est périodique et de période 1**

φ est une fonction continue et de période 1.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(2^n(x+1)) = \varphi(2^n x + 2^n) = \varphi(2^n x)$, et donc :

$$f(x+1) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{\varphi(2^n(x+1))}{2^n} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{\varphi(2^n x)}{2^n} = f(x)$$

⋆ La période ne peut pas être plus petite puisque, pour $n = 0$, $\varphi(2^n x) = \varphi(x)$

⋆ On peut donc n'étudier cette fonction que sur un intervalle de longueur 1, et nous choisirons l'intervalle $[0;+1]$

(c) **Nous avons f intégrable et $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$**

Le théorème de convergence uniforme et de calcul intégral 6.2.5 nous permet d'écrire :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1\sum_{n\geqslant 0}2^{-n}\varphi(2^n x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}2^{-n}\int_0^1\varphi(2^n x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}2^{-n}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(d) **f n'est dérivable en aucun point**

i. *Nous aurons besoin du lemme suivant, qui aurait pu être démontré en exercice, dans le chapitre sur la dérivation dans le cours de L_1*

Lemme

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ et de dérivée $f'(x_0)$
Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites numériques telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n \leqslant x \leqslant y_n \qquad x_n < y_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = x$$

Alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(x_0)$

Démonstration

⇒ f est dérivable en x_0, il existe donc un voisinage $V \in \mathcal{V}(0)$ de 0 tel que, pour tout $h \in V$, nous avons :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

Où ε est une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

⇒ Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites numériques telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x_n \leqslant x \leqslant y_n$, $x_n < y_n$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = x$

Appelons $\alpha_n = x_0 - x_n$; alors $\alpha_n \geqslant 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$; il existe donc un $N_\alpha \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_\alpha$ $\alpha_n \in V$

De même, si $\beta_n = y_n - x_0$; alors $\beta_n \geqslant 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 0$; il existe donc un $N_\beta \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_\beta$ $\beta_n \in V$

En posant $N = \max\{N_\alpha; N_\beta\}$, si $n \geqslant N$, alors $\alpha_n \in V$ et $\beta_n \in V$, et à ce moment là :

$$f(x_0 - \alpha_n) = f(x_0) - \alpha_n f'(x_0) - \alpha_n\varepsilon(-\alpha_n)$$

et

$$f(x_0 + \beta_n) = f(x_0) + \beta_n f'(x_0) + \beta_n\varepsilon(\beta_n)$$

⇒ D'où, en soustrayant les 2 égalités, nous obtenons :

$$f(x_0 - \alpha_n) - f(x_0 + \beta_n) = (-\alpha_n - \beta_n) f'(x_0) - \alpha_n\varepsilon(-\alpha_n) - \beta_n\varepsilon(\beta_n)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$f(x_0 + \beta_n) - f(x_0 - \alpha_n) = (\alpha_n + \beta_n) f'(x_0) + \alpha_n\varepsilon(-\alpha_n) + \beta_n\varepsilon(\beta_n)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{f(x_0 + \beta_n) - f(x_0 - \alpha_n)}{\alpha_n + \beta_n} - f'(x_0) = \frac{\alpha_n\varepsilon(-\alpha_n) + \beta_n\varepsilon(\beta_n)}{\alpha_n + \beta_n}$$

De là, nous tirons

$$\left|\frac{f(x_0 + \beta_n) - f(x_0 - \alpha_n)}{\alpha_n + \beta_n} - f'(x_0)\right| = \left|\frac{\alpha_n\varepsilon(-\alpha_n) + \beta_n\varepsilon(\beta_n)}{\alpha_n + \beta_n}\right| \leqslant \frac{\alpha_n|\varepsilon(-\alpha_n)|}{\alpha_n + \beta_n} + \frac{\beta_n|\varepsilon(\beta_n)|}{\alpha_n + \beta_n}$$

C'est à dire :

$$\left|\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x_0)\right| = \left|\frac{\alpha_n\varepsilon(-\alpha_n) + \beta_n\varepsilon(\beta_n)}{\alpha_n + \beta_n}\right| \leqslant \frac{\alpha_n|\varepsilon(-\alpha_n)|}{\alpha_n + \beta_n} + \frac{\beta_n|\varepsilon(\beta_n)|}{\alpha_n + \beta_n}$$

⇒ Comme $\alpha_n \geqslant 0$ et $\beta_n \geqslant 0$, nous avons $\dfrac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n} \leqslant 1$ et $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n + \beta_n} \leqslant 1$ et donc :

$$\frac{\alpha_n|\varepsilon(-\alpha_n)|}{\alpha_n + \beta_n} + \frac{\beta_n|\varepsilon(\beta_n)|}{\alpha_n + \beta_n} \leqslant |\varepsilon(-\alpha_n)| + |\varepsilon(\beta_n)|$$

C'est à dire, plus généralement :

$$\left|\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x_0)\right| \leqslant |\varepsilon(-\alpha_n)| + |\varepsilon(\beta_n)|$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} |\varepsilon(-\alpha_n)| = \lim_{n\to+\infty} |\varepsilon(\beta_n)| = 0$, nous avons alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(x_0) \right| = 0$$

Et donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(x_0)$

Ainsi, si nous réussissons à exhiber 2 suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n \leqslant x \leqslant y_n$, $x_n < y_n$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = x$ telles que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}$ n'existe pas, nous aurons gagné

ii. Soit $x \in \mathbb{R}$. On construit les suites $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout $p \in \mathbb{N}$ par :

$$x_p = 2^{-p}[2^p x] \text{ et } y_p = 2^{-p}[2^p x] + 2^{-p}$$

Les suites $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont des approximations dyadiques de x et nous avons :

$$x_n \leqslant x \leqslant y_n \qquad x_n < y_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = x$$

Nous allons démontrer que $\lim_{p\to+\infty} \dfrac{f(y_p) - f(x_p)}{y_p - x_p}$ n'existe pas.

iii. Nous avons : $\dfrac{f(y_p) - f(x_p)}{y_p - x_p} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{2^{-n}(w_{2^n}(y_p) - w_{2^n}(x_p))}{y_p - x_p}$.

Les fonctions w_{2^n} sont affines par morceaux, et sur chacun des intervalles $\left[\dfrac{s}{2^{n+1}}; \dfrac{s+1}{2^{n+1}}\right[$, où $s \in \mathbb{Z}$, les fonctions w_{2^n} sont des droites de pente $2^n(-1)^s$

Pour qu'un intervalle $[x_p; y_p] = \left[\dfrac{[2^p x]}{2^p}; \dfrac{[2^p x]+1}{2^p}\right]$ soit inclus dans un intervalle du type $\left[\dfrac{s}{2^{n+1}}; \dfrac{s+1}{2^{n+1}}\right[$, il faut que $\dfrac{1}{2^p} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$, c'est à dire $p \geqslant n+1$. Nous avons affaire à des intervalles emboités. le plus grand est donc déterminé par $n = p-1$.

Le rapport $\dfrac{w_{2^n}(y_p) - w_{2^n}(x_p)}{y_p - x_p}$ représente le taux de variaton, c'est à dire, ici, le coefficient directeur de w_{2^n} entre x_p et y_p, c'est à dire :

$$\frac{w_{2^n}(y_p) - w_{2^n}(x_p)}{y_p - x_p} = 2^n(-1)^{[x2^{n+1}]}$$

Si $n \geqslant p$, alors $\dfrac{w_{2^n}(y_p) - w_{2^n}(x_p)}{y_p - x_p} = \dfrac{\varphi(2^n y_p) - \varphi(2^n x_p)}{y_p - x_p}$

Alors, $2^n y_p = 2^n(2^{-p}[2^p x] + 2^{-p}) = 2^{n-p}([2^p x] + 1)$, et nous avons $2^n y_p \in \mathbb{Z}$; nous démontrerions de même que $2^n x_p \in \mathbb{Z}$ et donc $\varphi(2^n y_p) = \varphi(2^n x_p) = 0$.

Nous tirons alors, que, pour $n \geqslant p$, nous avons :

$$\frac{w_{2^n}(y_p) - w_{2^n}(x_p)}{y_p - x_p} = \frac{\varphi(2^n y_p) - \varphi(2^n x_p)}{y_p - x_p} = 0$$

iv. Donc :

$$\frac{f(y_p) - f(x_p)}{y_p - x_p} = \sum_{k=0}^{p-1} 2^{-n}\left(2^n(-1)^{[x2^{k+1}]}\right) = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{[x2^{k+1}]}$$

La suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{[x2^{k+1}]}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une suite divergente *(elle n'est pas de Cauchy -facile à démontrer-)* donc, $\lim_{p\to+\infty} \dfrac{f(y_p) - f(x_p)}{y_p - x_p}$ n'existe pas et f n'est pas dérivable en x

f n'est donc nulle part dérivable

(e) **f est une fonction Holdérienne sur** $]0;+1[$

Nous allons procéder par petit pas

i. Tout d'abord, la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, et sur cet ensemble $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, nous avons $|\varphi'(x)| = 1$.
D'après le théorème des accroissements finis, nous pouvons écrire, pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$ et tout $x_2 \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|$

ii. D'autre part, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, nous avons $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et donc, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < 1$, nous avons :

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| = |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|^{1-\alpha} \times |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|^{\alpha} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha}$$

Et donc $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha}$

Par exemple, pour $x_1 = 0$ et $x_2 = \dfrac{1}{2}$, nous avons :

$$\left|\varphi(0) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2} \text{ et } \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)$$

Ce qui montre que cette inégalité est la meilleure

iii. Pour $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\sum_{n\geqslant 0} 2^{-n}\left(\varphi(2^n x_1) - \varphi(2^n x_2)\right)\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} 2^{-n} |\varphi(2^n x_1) - \varphi(2^n x_2)|$$

En utilisant l'inégalité $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha}$, nous avons :

$$|\varphi(2^n x_1) - \varphi(2^n x_2)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} |2^n x_1 - 2^n x_2|^{\alpha} = 2^{\alpha-1} 2^{n\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant & \sum_{n\geqslant 0} 2^{-n} 2^{\alpha-1} 2^{n\alpha} |x_1 - x_2|^{\alpha} \\
& = 2^{\alpha-1} |x_1 - x_2|^{\alpha} \sum_{n\geqslant 0} 2^{n(\alpha-1)} = 2^{\alpha-1} |x_1 - x_2|^{\alpha} \sum_{n\geqslant 0} \left(2^{\alpha-1}\right)^n \\
& = 2^{\alpha-1} \times \frac{1}{1 - 2^{\alpha-1}} \times |x_1 - x_2|^{\alpha}
\end{aligned}$$

Ainsi, $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \dfrac{2^{\alpha-1}}{1 - 2^{\alpha-1}} \times |x_1 - x_2|^{\alpha}$, et ceci, pour tout $\alpha \in]0;1[$.

On dit donc que f est $\underline{\dfrac{2^{\alpha-1}}{1 - 2^{\alpha-1}}\text{-Holdérienne}}$ d'exposant α, pour tout $\alpha \in]0;1[$

Remarque 9 :

1. Le développement précédent doit beaucoup à l'article de LG Vidiani parut dans Quadrature
2. L'exemple original de Van Der Waerden (1930) était $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} 10^{-n}\varphi(10^n x)$
3. Il y a plusieurs façons de définir des fonctions de Van Der Waerden :

$\Rightarrow$ Nous partons de la même fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique et de période 1, et telle que :

$$\left(\forall x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[\right)(\varphi(x) = |x|)$$

Et nous posons $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} 4^{-n}\varphi(4^n x)$

$\Rightarrow$ Autre possibilité, nous partons de la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique et de période 2, et telle que :

$$(\forall x \in [-1;1[)(\varphi(x) = |x|)$$

Et nous posons $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$

4. La courbe représentative de la fonction de Van Der Waerden, s'appelle **courbe du blanc-manger**. En 6.5, vous avez 2 représentations de celle que nous avons étudiée

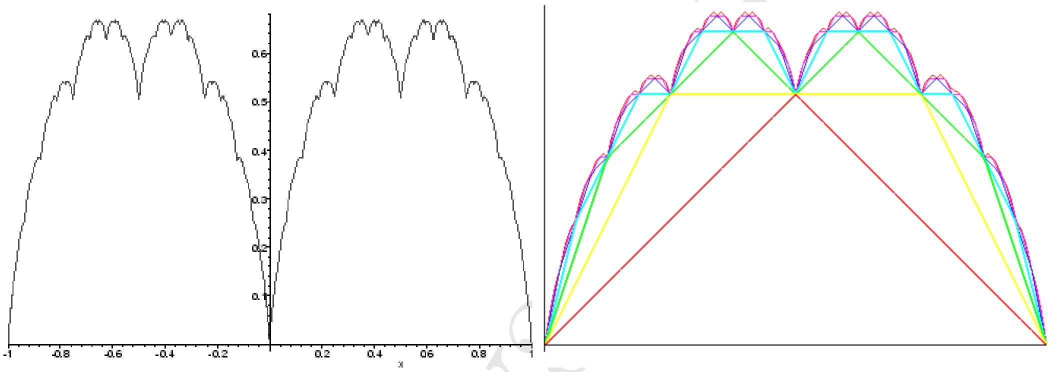

FIGURE 6.5 – La représentation de 2 courbes de Van Der Waerden

6.4.2 La fonction de Weierstrass

On appelle Fonction de Weierstrass, une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{\sin 2\pi N^n x}{c^n} \end{cases}$$

Où nous avons N entier pair et $N \geqslant 20$ et $1 < c < \dfrac{N}{1+6\pi}$

Alors, f est partout continue sur $\mathbb{R}$ et nulle part dérivable

Démonstration

1. **f est continue sur $\mathbb{R}$**

Soit $u_n(x) = \dfrac{\sin 2\pi N^n x}{c^n}$; u_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{c^n}$, et comme $c > 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{c^n}$ est convergente et la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et donc la somme est continue sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{\sin 2\pi N^n x}{c^n}$ est donc continue sur $\mathbb{R}$

2. **f n'est nulle part dérivable sur $\mathbb{R}$**
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Nous allons démontrer que f n'est pas dérivable en x_0
   Nous définissons $k_n = \left[x_0 N^n + \dfrac{1}{4\pi}\right]$ où, comme d'habitude, $[\bullet]$ définit la fonction partie entière.
   Nous avons donc :
$$k_n \leqslant x_0 N^n + \frac{1}{4\pi} < k_n + 1 \text{ et } k_n \in \mathbb{Z}$$
   $\Rightarrow$ Nous construisons 2 suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$x_n = \frac{4k_n - 1}{4N^n} \text{ et } y_n = \frac{4k_n + 5}{4N^n}$$
   Tout d'abord, nous avons $y_n - x_n = \dfrac{3}{2N^n}$ d'où nous tirons que $x_n < y_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n - x_n = 0$
   De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$.
   En effet, nous avons :
$$\begin{gathered} k_n \leqslant x_0 N^n + \frac{1}{4\pi} < k_n + 1 \\ \Longleftrightarrow \\ 4k_n \leqslant 4x_0 N^n + \frac{1}{\pi} < 4k_n + 4 \\ \Longleftrightarrow \\ 4k_n - 1 \leqslant 4x_0 N^n + \frac{1}{\pi} - 1 < 4k_n + 3 \\ \Longleftrightarrow \\ \frac{4k_n - 1}{4N^n} \leqslant x_0 + \frac{1-\pi}{4\pi N^n} < \frac{4k_n - 1}{4N^n} + \frac{4}{4N^n} \\ \Longleftrightarrow \\ x_n \leqslant x_0 + \frac{1-\pi}{4\pi N^n} < x_n + \frac{1}{N^n} \\ \Longleftrightarrow \\ 0 \leqslant x_0 - x_n \leqslant \frac{1}{N^n}\left(1 + \frac{\pi - 1}{4\pi}\right) \end{gathered}$$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{N^n}\left(1 + \dfrac{\pi-1}{4\pi}\right) = 0$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$
   Nous aurions démontré, de la même manière, que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x_0$
   $\Rightarrow$ Nous appelons $\tau_n = \dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$.
   Nous allons démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_n$ n'existe pas.
   Nous appelons $u_k(x) = \dfrac{\sin 2\pi N^k x}{c^k}$, de telle sorte que $f(x) = \sum\limits_{k\geqslant 0} u_k(x)$ et alors
$$f(y_n) - f(x_n) = \sum_{k\geqslant 0} \left(u_k(y_n) - u_k(x_n)\right)$$
   Nous allons étudier $\sin\left(2\pi N^k y_n\right)$ et $\sin\left(2\pi N^k x_n\right)$
   Nous avons :
$$\sin\left(2\pi N^k y_n\right) = \sin\left(2\pi N^k\left(\frac{4k_n+5}{4N^n}\right)\right) = \sin\left(\pi N^{k-n}\left(2k_n + \frac{5}{2}\right)\right)$$
   Et
$$\sin\left(2\pi N^k x_n\right) = \sin\left(2\pi N^k\left(\frac{4k_n-1}{4N^n}\right)\right) = \sin\left(\pi N^{k-n}\left(2k_n - \frac{1}{2}\right)\right)$$
   - ⋆ Si $k > n$, alors N^{k-n} est un entier pair et l'expression $N^{k-n}\left(2k_n + \dfrac{5}{2}\right)$ est entière et donc $\sin\left(\pi N^{k-n}\left(2k_n + \dfrac{5}{2}\right)\right) = 0$ d'où on déduit facilement que si $k > n$, alors $u_k(y_n) = 0$, et

de la même manière, nous démontrons que si $k > n$, alors $u_k(x_n) = 0$, ce qui fait que :

$$(k > n) \Longrightarrow ((u_k(y_n) - u_k(x_n)) = 0)$$

⋆ Si $k = n$ alors, d'après les calculs précédents :

$$\sin(2\pi N^n y_n) = \sin\left(\pi\left(2k_n + \frac{5}{2}\right)\right) = \sin\left(\pi\left(2k_n + 2 + \frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2(k_n+1)\pi\right) = 1$$

et

$$\sin(2\pi N^n x_n) = \sin\left(\pi\left(2k_n - \frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{2} + 2k_n\pi\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1$$

D'où $(u_n(y_n) - u_n(x_n)) = \dfrac{2}{c^n}$

⇒ De cette étude, nous tirons que :

$$\tau_n = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n} + \frac{2}{c^n(y_n - x_n)}$$

⇒ Pour tout $A \in \mathbb{R}$ et tout $B \in \mathbb{R}$, nous avons $|A+B| \geqslant |A| - |B|$, et donc nous avons :

$$\left|\frac{2}{c^n(y_n - x_n)}\right| - \left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n}\right| \leqslant |\tau_n|$$

⇒ Or, $\left|\dfrac{2}{c^n(y_n - x_n)}\right| = \dfrac{2}{c^n(y_n - x_n)} = \dfrac{2}{c^n} \times \dfrac{1}{y_n - x_n} = \dfrac{2}{c^n} \times \dfrac{2N^n}{3} = \dfrac{4}{3} \times \left(\dfrac{N}{c}\right)^n$

⇒ Et $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n}\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n}\right|$, et donc :

$$|\tau_n| \geqslant \frac{4}{3} \times \left(\frac{N}{c}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n}\right|$$

⇒ D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, il existe $\lambda_{k,n} \in [x_n; y_n]$ tel que :

$$\frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n} = u'_k(\lambda_{k,n})$$

Et nous pouvons écrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n}\right| = \sum_{k=0}^{n-1} |u'_k(\lambda_{k,n})|$

En calculant la dérivée de u_k, nous avons $u'_k(x) = 2\pi\left(\dfrac{N}{c}\right)^k \cos\left(2\pi N^k x\right)$, et donc $|u'_k(x)| \leqslant 2\pi\left(\dfrac{N}{c}\right)^k$, ce qui fait que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n}\right| \leqslant 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{N}{c}\right)^k = 2\pi \frac{\left(\frac{N}{c}\right)^n - 1}{\frac{N}{c} - 1}$$

Et donc, $-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{u_k(y_n) - u_k(x_n)}{y_n - x_n}\right| \geqslant -2\pi \frac{\left(\frac{N}{c}\right)^n - 1}{\frac{N}{c} - 1}$

⇒ Nous en déduisons que :

$$|\tau_n| \geqslant \frac{4}{3} \times \left(\frac{N}{c}\right)^n - 2\pi \frac{\left(\frac{N}{c}\right)^n - 1}{\frac{N}{c} - 1} = \frac{4}{3} \times \left(\frac{N}{c}\right)^n - \left(\frac{2\pi}{\frac{N}{c} - 1}\right)\left(\frac{N}{c}\right)^n + \frac{2\pi}{\frac{N}{c} - 1} = \left(\frac{N}{c}\right)^n\left(\frac{4}{3} - \frac{2\pi}{\frac{N}{c} - 1}\right) + \frac{2\pi}{\frac{N}{c} - 1}$$

$\Rightarrow$ De l'hypothèse $\dfrac{N}{c} > 1 + 6\pi > 1$, nous déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{N}{c}\right)^n = 0$ et $\dfrac{2\pi}{\frac{N}{c}-1} > 0$

D'autre part, nous avons $\dfrac{N}{c} - 1 > 6\pi$ et donc $\dfrac{1}{\frac{N}{c}-1} < \dfrac{1}{6\pi}$ d'où $\dfrac{2\pi}{\frac{N}{c}-1} < \dfrac{2\pi}{6\pi} = \dfrac{1}{3}$ Ainsi $\dfrac{4}{3} - \dfrac{2\pi}{\frac{N}{c}-1} > 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{N}{c}\right)^n\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{2\pi}{\frac{N}{c}-1}\right) = +\infty$

En conclusion, $\lim\limits_{n\to+\infty}|\tau_n| = +\infty$

La fonction f n'est donc pas dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$

La fonction de Weierstrass n'est donc nulle part dérivable

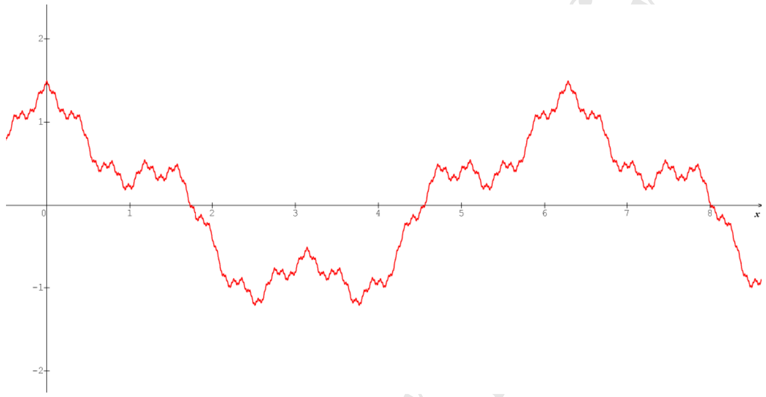

Figure 6.6 – La fonction de Weierstrass -du moins les premiers éléments de la somme-

Remarque 10 :

Ce n'est pas le seul mode de définition de la fonction de Weierstrass.

Par exemple, $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{2^n}\cos(12^n\pi x)$. C'est la même chose, en moins théorique.

Ou encore, en plus théorique, avec des conditions qui reviennent à notre présentation

$f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0}\alpha^n\cos(\beta^n x)$ où $\alpha \in]0;1[$, et β un entier *impair* tel que $\alpha \times \beta > 1$.

Voilà des sujets de méditation !

6.4.3 La fonction ζ de Riemann

On appelle fonction ζ de Riemann, la fonction ζ définie sur $]+1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} \zeta :]+1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \zeta(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^x} \end{cases}$$

Remarque 11 :

1. Cette fonction ζ est bien définie, puisque nous avons vu que la série numérique, dite série de Riemann, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^x}$ ne converge que si et seulement si $x > 1$
2. Allons du côté des nombres complexes.
   Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $n^z = e^{(\mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Im}(z))\ln n} = n^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\ln n\,\mathrm{Im}(z)}$, et donc $|n^z| = n^{\mathrm{Re}(z)}$.
   Par suite, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^z}$ ne converge que si $\mathrm{Re}(z) > 1$

6.4.4 Etude de la fonction ζ

1. On appelle $f(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. Nous avons, pour tout $x>1$ $\zeta(x)=\frac{1}{1-2^{1-x}}f(x)$

Démonstration

(a) Tout d'abord, remarquons que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est une série alternée qui converge si et seulement si $x>0$. Donc, f est définie sur $]0;+\infty[$

(b) Soit $x>1$. Alors :

$$\zeta(x)-f(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^x}-\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\left(1-(-1)^{n-1}\right)}{n^x}$$

C'est ici qu'intervient la notion de parité :
 ⋆ Si n est pair, alors $(-1)^{n-1}=-1$ et $\left(1-(-1)^{n-1}\right)=2$
 ⋆ Si n est impair, alors $(-1)^{n-1}=1$ et $\left(1-(-1)^{n-1}\right)=0$
D'où

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\left(1-(-1)^{n-1}\right)}{n^x}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\left(1-(-1)^{2n-1}\right)}{(2n)^x}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{2}{2^x n^x}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^{1-x}}{n^x}=2^{1-x}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^x}=2^{1-x}\zeta(x)$$

(c) Nous avons donc l'égalité, vraie pour $x>1$: $\zeta(x)-f(x)=2^{1-x}\zeta(x)$, c'est à dire

$$\zeta(x)=\frac{1}{1-2^{1-x}}f(x)$$

Ce que nous voulions

2. La fonction ζ est continue sur l'intervalle $]1;+\infty[$

Démonstration

Soit $a\in\mathbb{R}$ tel que $a>1$.
Alors $\frac{1}{n^x}=e^{-x\ln n}$ est continue et décroissante sur $[a;+\infty[$, et donc, pour tout $x\in[a;+\infty[$, nous avons $\frac{1}{n^x}\leqslant\frac{1}{n^a}$.
La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^a}$ étant une série de Riemann convergente, puisque $a>1$, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^x}$ converge normalement sur l'intervalle $[a;+\infty[$. La somme $\zeta(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^x}$ est donc continue comme somme uniforme sur $[a;+\infty[$ de fonctions continues sur $[a;+\infty[$.
Cette propriété étant vraie pour tout $a>1$, la fonction ζ est donc continue sur l'intervalle $]1;+\infty[$

3. La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$

Démonstration

L'égalité $f(x)=\left(1-2^{1-x}\right)\zeta(x)$ montre déjà que f est continue sur $]1;+\infty[$. Montrons que f est continue sur $]0;+\infty[$.

Soit $a>0$; nous allons montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge uniformément sur l'intervalle $[a;+\infty[$

Nous allons démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in[a;+\infty[}|R_n(x)|\right)=0$. Qu'est donc $R_n(x)$? C'est très simple :

$$|R_n(x)|=\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}\right|=\left|\sum_{k\geqslant n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}\right|$$

La série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$ est une série alternée, et nous avons vu dans le chapitre sur les séries alternées que :

$$\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)^x}$$

C'est à dire que $|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{(n+1)^x}$

Comme la fonction $\frac{1}{(n+1)^x}$ est une fonction décroissante sur l'intervalle $[a;+\infty[$, nous avons, pour tout $x\in[a;+\infty[$:

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{(n+1)^x}\leqslant\frac{1}{(n+1)^a}$$

En particulier, nous avons : $\sup\limits_{x\in[a;+\infty[}|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{(n+1)^a}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)^a}=0$, nous en concluons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in[a;+\infty[}|R_n(x)|\right)=0$

Ce qui montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge uniformément sur l'intervalle $[a;+\infty[$ et que la fonction f est continue sur l'intervalle $[a;+\infty[$

Ceci étant vrai pour tout $a>0$, nous avons ainsi démontré que la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$

4. La fonction ζ est décroissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$

Démonstration

Pour $n\geqslant 1$, la fonction $\frac{1}{n^x}=n^{-x}=e^{-x\ln n}$ est une fonction de x décroissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$. La fonction ζ, somme de fonctions décroissantes sur $]1;+\infty[$ est donc décroissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$

5. La fonction ζ est convexe sur l'intervalle $]1;+\infty[$

Démonstration

- ⋆ On appelle $u_n(x)=\frac{1}{n^x}=n^{-x}=e^{-x\ln n}$.
  Cette fonction est indéfiniment dérivable sur $]1;+\infty[$.
  → Nous avons $u'_n(x)=-\ln x e^{-x\ln n}=\frac{-\ln x}{n^x}$
  → Nous avons donc $u''_n(x)=(-\ln x)^2e^{-x\ln n}=\frac{(-\ln x)^2}{n^x}$. Cette dérivée seconde est positive.
  Donc, de la positivité de la dérivée seconde de $u_n(x)$, on déduit que la fonction $u_n(x)$ est une fonction convexe
- ⋆ Comme nous avons $\zeta(x)=\sum\limits_{k\geqslant 1}u_n(x)$, ζ est une fonction convexe comme somme de fonctions convexes.

Nous avons donc, pour tout $x > 1$, tout $y > 1$ et tout $\lambda \in [0;1]$, $\zeta(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda\zeta(x) + (1-\lambda)\zeta(y)$

En particulier si $\lambda = \dfrac{1}{2}$:

$$\zeta\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{\zeta(x)+\zeta(y)}{2} \Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n^{x+y}}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^x} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^y}\right)$$

6. Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$

Démonstration

(a) Comme nous étudions la limite de ζ en $+\infty$, nous nous plaçons dans le domaine $[+2;+\infty[$ *(cela pourrait être tout autre intervalle du type $[\lambda;+\infty[$ où $\lambda > 1$)*

(b) Posons, comme tout à l'heure, nous posons $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ et $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)\dfrac{1}{k^x}$

la suite de fonctions $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément, sur l'intervalle $[+2;+\infty[$, vers la fonction $\zeta(x)$

(c) Remarquons que :

→ Pour tout $x \geqslant 2$, $u_1(x) = 1$

→ Et que pour tous les entiers k tels que $k \geqslant 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u_k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{n^x} = 0$

De telle sorte que $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) = 1$

(d) D'après le théorème d'inversion des limites lié à la convergence uniforme des séries de fonctions, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\lim_{x\to+\infty} S_n(x)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\lim_{n\to+\infty} S_n(x)\right]$$

C'est à dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$

Ce que nous voulions

7. En $+\infty$, nous avons $\zeta(x) \underset{+\infty}{\simeq} 1 + 2^{-x}$

Démonstration

Voilà une question qui n'est pas facile, et surtout, déroutante

(a) Tout d'abord, $\zeta(x) - 1 = \sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^x}$ et donc $2^x(\zeta(x) - 1) = \sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{2^x}{n^x} = \sum\limits_{n\geqslant 2}\left(\dfrac{2}{n}\right)^x$

(b) Comme nous étudions le comportement de ζ en $+\infty$, nous nous plaçons dans le domaine $[+2;+\infty[$

(c) Appelons $v_n(x) = \left(\dfrac{2}{n}\right)^x$. Pour tout $n \geqslant 2$, la fonction v_n est décroissante sur l'intervalle $[+2;+\infty[$, et nous avons, pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \geqslant 2$, $v_n(x) \leqslant v_n(2)$, c'est à dire :

$$v_n(x) \leqslant v_n(2) \Longleftrightarrow 0 < \left(\frac{2}{n}\right)^x \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{4}{n^2}$$

Ce qui montre que la série de fonctions de terme général $v_n(x) = \left(\dfrac{2}{n}\right)^x$ converge normalement sur l'intervalle $[+2;+\infty[$

(d) Nous reprenons la méthode utilisée ci-dessus ; soit $S_n^1(x) = \sum_{k=2}^{n} v_k(x)$; d'après ce que nous venons de voir, la suite de fonctions $\left(S_n^1\right)_{n\geqslant 2}$ converge uniformément vers la fonction $\Phi(x) = \sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{2}{n}\right)^x$

(e) Remarquons que :
$\rightarrow$ Pour tout $x \geqslant 2$, $v_2(x) = 1$
$\rightarrow$ Et que pour tous les entiers k tels que $k \geqslant 3$, $\lim_{x\to+\infty} v_k(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^x = 0$
De telle sorte que $\lim_{x\to+\infty} S_n^1(x) = \lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} v_k(x) = 1$

(f) D'après le théorème d'inversion des limites lié à la convergence uniforme des séries de fonctions, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\lim_{x\to+\infty} S_n^1(x)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\lim_{n\to+\infty} S_n^1(x)\right]$$

C'est à dire : $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = 1$

Ce qui montre que $\lim_{x\to+\infty}\left(2^x(\zeta(x)-1)\right) = 1$ et qu'il est possible d'écrire

$$2^x(\zeta(x)-1) = 1+\varepsilon(x) \longleftrightarrow \zeta(x)-1 = 2^{-x}+2^{-x}\varepsilon(x) \longleftrightarrow \zeta(x) = 1+2^{-x}+2^{-x}\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)$ est telle que $\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = 0$

Il est aussi possible d'écrire $\zeta(x) = 1+2^{-x}+o\left(2^{-x}\right)$

8. Nous avons $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\zeta(x) = +\infty$

Démonstration

(a) Pour $x > 1$, nous définissons sur l'intervalle $[1;+\infty[$ la fonction u définie par $u(t) = \frac{1}{t^x} = t^{-x}$. Cette fonction est décroissante sur $[1;+\infty[$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 1$, nous avons :

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \int_n^{n+1}\frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^x}$$

(b) En passant aux sommations, nous avons, pour $N\in\mathbb{N}$ et $N_geqslant1$:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}\frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n^x} \leqslant I_1^{N+1}\frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^x}-1 \leqslant \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{(N+1)^{x-1}}-1\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}$$

Regardons les limites lorsque N tend vers l'infini :

$\star$ $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n^x}-1 = \zeta(x)-1$

$\star$ $\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{(N+1)^{x-1}}-1\right) = \frac{1}{x-1}$

$\star \displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}=\zeta(x)$

Les limites respectant les inégalités, nous obtenons, pour $x>1$:

$$\zeta(x)-1\leqslant\frac{1}{x-1}\leqslant\zeta(x)$$

(c) Comme $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{1}{x-1}=+\infty$, de l'inégalité $\dfrac{1}{x-1}\leqslant\zeta(x)$ que nous avons prouvée ci-dessus, nous tirons que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\zeta(x)=+\infty$

9. En $x_0=+1$, nous avons $\zeta(x)\underset{x_0=+1}{\simeq}\dfrac{1}{x-1}$

Démonstration

De l'inégalité $\zeta(x)-1\leqslant\dfrac{1}{x-1}\leqslant\zeta(x)$, nous tirons, sans difficulté :

$$\frac{1}{x-1}\leqslant\zeta(x)\leqslant1+\frac{1}{x-1}$$

En multipliant l'inégalité par $x-1$, avec $x>1$, nous obtenons :

$$1\leqslant(x-1)\zeta(x)\leqslant x$$

Et donc, nous obtenons $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}(x-1)\zeta(x)=1$, et donc $\zeta(x)\underset{x_0=+1}{\simeq}\dfrac{1}{x-1}$

10. Toujours de l'inégalité précédente, et du fait que pour tout $x>1$, nous avons $1<\zeta(x)$, nous avons la double inégalité :

$$1<\zeta(x)\leqslant1+\frac{1}{x-1}$$

Nous tirons, et de manière plus simple que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$

11. La fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$

De plus, pour tout $x>1$ et tout $k\in\mathbb{N}$, nous avons $\zeta^{(k)}(x)=(-1)^k\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{(\ln n)^k}{n^x}$

Démonstration

Pour démontrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$, nous allons montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[a;+\infty[$ pour tout $a>1$

Soit donc $a>1$.

(a) On appelle toujours $u_n(x)=\dfrac{1}{n^x}=e^{-x\ln n}$. u_n est une fonction indéfiniment dérivable, et pour tout $k\in\mathbb{N}$, nous avons :

$$u_n^{(k)}(x)=(-1)^k(\ln n)^k e^{-x\ln n}=\frac{(-1)^k(\ln n)^k}{n^x}$$

(b) Comme la fonction $u_n(x)=\dfrac{1}{n^x}$ est une fonction décroissante sur l'intervalle $[a;+\infty[$, pour tout $x\geqslant a$, nous avons $\dfrac{1}{n^x}\leqslant\dfrac{1}{n^a}$ et donc :

$$\left|u_n^{(k)}(x)\right|=\frac{(\ln n)^k}{n^x}\leqslant\frac{(\ln n)^k}{n^a}$$

(c) Par les théorèmes de comparaisons, nous avons, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $h > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln n)^k}{n^h} = 0$. or :

$$\frac{(\ln n)^k}{n^a} \times n^{\frac{a+1}{2}} = \frac{(\ln n)^k}{n^{\frac{a-1}{2}}}$$

En posant $h = \dfrac{a-1}{2}$, nous avons $h > 0$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln n)^k}{n^a} \times n^{\frac{a+1}{2}} = 0$

(d) Il existe donc un entier $M \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant M$, alors :

$$\frac{(\ln n)^k}{n^a} \times n^{\frac{a+1}{2}} \leqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{(\ln n)^k}{n^a} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$$

Comme $a > 1$, nous avons $\dfrac{a+1}{2} > 1$ et la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$ est donc convergente.

(e) Nous venons donc de montrer qu'à partir d'un certain rang, $\left|u_n^{(k)}(x)\right|$ était majoré, sur l'intervalle $[a; +\infty[$ par le terme général d'une série numérique convergente.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de fonction $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n^{(k)}(x)$ converge normalement, donc uniformément, sur l'intervalle $[a; +\infty[$

Ainsi, la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$ et, pour tout $x > 1$ et tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(\ln n)^k}{n^x}$

Remarque 12 :

1. Cette étude doit énormément au développement de Jean-Louis Rouget sur MATHS-FRANCE, au moins pour le plan de l'étude
2. La fonction ζ intervient en arithmétique dans l'étude des nombres premiers
3. On pourrait aussi étudier cette fonction ζ dans le champ complexe