6.5 Exercices corrigés

6.5.1 Exercices du cours

Exercice 1 :

Etudier les convergences des séries de fonctions dont les termes généraux sont :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^{2n}$

   Soit $x \in \mathbb{R}$, intéressons nous à la somme partielle $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^{2n} = \dfrac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$ si $x^2 \neq 1$

   Ainsi :
   $\rightarrow$ Si $x^2 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^{2n} = \dfrac{1}{1-x^2}$
   $\rightarrow$ Si $x^2 \geqslant 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = +\infty$
   Le domaine de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^{2n}$ est donc $|x| < 1$

2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{1+x^n}$

   Nous allons regarder de manière assez précautionneuse cette série. Posons $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$
   $\rightarrow$ Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(0) = 0$; la série est simplement convergente en 0
   $\rightarrow$ Si $x = 1$, alors $f_n(1) = \dfrac{1}{2}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(1) = +\infty$; la série est donc divergente en 1
   $\rightarrow$ Si $x \geqslant 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n} = 1$. Le terme général ne tendant pas vers 0, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ diverge
   $\rightarrow$ Si $|x| < 1$, alors $\left|\dfrac{x^n}{1+x^n}\right| \leqslant |x|^n$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} |x|^n$ est une série géométrique convergente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{1+x^n}$ est donc simplement convergente sur l'intervalle $]-1;+1[$

3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{n^3+x^3}$

   En $+\infty$, nous avons $\dfrac{x}{n^3+x^3} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{x}{n^3}$; comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{n^3+x^3}$ converge simplement

4. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^2}{n+x^4}$

   En $+\infty$, nous avons $\dfrac{x^2}{n+x^4} \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{x^2}{n}$; comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^2}{n}$ est la série harmonique divergente, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^2}{n+x^4}$ diverge (sauf en $x = 0$ où $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^2}{n+x^4} = 0$)

Exercice 2 :

Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \sin^2(x)\cos^n(x)$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

Si cette série converge uniformément, elle converge uniformément vers la fonction $S(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

En posant $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(x)\cos^k(x)$, nous avons :

$$|S_n(x) - S(x)| = |R_n(x)| = \left|\sum_{k\geqslant n+1} \sin^2(x)\cos^k(x)\right| = \left|\sum_{k\geqslant 0} \sin^2(x)\cos^{k+n+1}(x)\right|$$

Comme $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, nous avons $0 < \sin x < 1$ et $0 < \cos x < 1$ et donc

$$\left|\sum_{k\geqslant 0} \sin^2(x)\cos^{k+n+1}(x)\right| = \sum_{k\geqslant 0} \sin^2(x)\cos^{k+n+1}(x)$$

D'autre part,

$$\sum_{k\geqslant 0} \sin^2(x)\cos^{k+n+1}(x) = \cos^{n+1}(x)\sin^2(x)\sum_{k\geqslant 0}\cos^k(x) = \frac{\cos^{n+1}(x)\sin^2(x)}{1-\cos x}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos^{n+1}(x) = 1$

D'autre part, en faisant un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0, nous avons :

- $\star$ $\sin^2 x = x^2 + x^2\varepsilon(x)$
- $\star$ $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

De telle sorte que, au voisinage de 0 :

$$\frac{\sin^2(x)}{1-\cos x} = \frac{x^2 + x^2\varepsilon(x)}{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)} = \frac{1+\varepsilon(x)}{\frac{1}{2}+\varepsilon(x)}$$

Et donc, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{1-\cos x} = 2$

Nous en concluons, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^{n+1}(x)\sin^2(x)}{1-\cos x} = 2$ et que donc

$$\sup_{x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[} |S_n(x) - S(x)| \geqslant 2$$

Nous ne pouvons donc pas avoir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[} |S_n(x) - S(x)| = 0$

La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin^2(x)\cos^n(x)$ ne converge donc pas uniformément sur l'intervalle $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 3 :

Déterminer les intervalles de convergence uniformes pour la série

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2x^2}$

   → Pour $x \neq 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2x^2}$ converge simplement vers la fonction $S(x) = \dfrac{\pi^2}{6x^2}$

   → Cette série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^*$, puisque $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^*}\frac{1}{n^2x^2} = +\infty$. On utilise là la contraposée de 6.1.7

→ Par contre, pour $a > 0$, la série converge uniformément sur la réunion des intervalles $]-\infty;-a] \cup [+a;+\infty[$.
En effet, si $|x| \geqslant a$, alors $x^2 \geqslant a^2$ et $\dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{a^2}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tels que $|x| \geqslant a$:

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2 x^2} \right| = \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2 x^2} \leqslant \frac{1}{a^2} \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2}$$

La série $\displaystyle\sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2}$ est le reste d'une série de Riemann convergente et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{a^2} \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2} = 0$.
Nous en déduisons, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tels que $|x| \geqslant a$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} |S_n(x) - S(x)| = 0$, ce qui termine de démontrer la convergence uniforme sur les intevalles $]-\infty;-a] \cup [+a;+\infty[$

2. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 + x^2}$

→ Pour $x \in \mathbb{R}$, fixé, nous avons $0 \leqslant \dfrac{1}{n^2 + x^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série numérique de Riemann convergente. Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 + x^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$

→ Cette série converge aussi uniformément sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\dfrac{1}{n^2 + x^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, d'où :

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2 + x^2} \right| = \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2 + x^2} \leqslant \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2}$$

Et nous concluons comme prédédemment : la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2}$ est le reste d'une série de Riemann convergente et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{k^2} = 0$.
Nous en déduisons, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} |S_n(x) - S(x)| = 0$, ce qui termine de démontrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$

→ En fait, de l'inégalité $0 \leqslant \dfrac{1}{n^2 + x^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, nous pouvions conclure que la série **convergeait normalement**, donc uniformément, donc simplement.

Exercice 4 :

Etudier la convergence simple, absolue, uniforme et normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$

Nous posons $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$

$\Longrightarrow$ Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$ converge-t-elle ?
Pour le trouver, on peut faire le critère de D'Alembert :

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{n}{n+1} |x|$$

Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} |x| = |x|$. La série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$ converge donc simplement sur l'intervalle $]-1;+1[$

$\Longrightarrow$ Pour $x = -1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$ devient $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ qui est une série convergente.
La série converge donc simplement sur $[-1;+1[$

$\Longrightarrow$ Nous avons $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[-1;+1[} \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ et comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n\|_\infty = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$ ne converge pas normalement sur $[-1;+1[$

$\Longrightarrow$ Elle converge, par contre, normalement sur tout intervalle de la forme $[-a;+a]$ où $0 < a < 1$.
En effet, sur $[-a;+a]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[-a;+a]} \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{a^n}{n}$. Comme la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a^n}{n}$ est une série à termes positifs et convergente, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|f_n\|_\infty$ est elle aussi convergente.

$\Longrightarrow$ Convergeant normalement sur tout intervalle $[-a;+a]$ tel que $0 < a < 1$, elle y converge aussi uniformément

Exercice 5 :

Montrer que la série de terme général $f_n(x) = (-1)^n \left(\frac{x^2+n}{n^2}\right)$ pour $n \geqslant 1$ est uniformément convergente sur tout intervalle $[a;b] \subset \mathbb{R}$ mais n'est absolument convergente pour aucune valeur $x \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ **La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ n'est absolument convergente pour aucun $x \in \mathbb{R}$**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$|f_n(x)| = \left|(-1)^n \left(\frac{x^2+n}{n^2}\right)\right| = \frac{x^2+n}{n^2} \geqslant \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Or, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est la série harmonique divergente, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)|$ est divergente.

Nous en concluons que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ n'est pas absolument convergente

$\longrightarrow$ **La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est simplement convergente**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sum_{n\geqslant 1} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \left(\frac{x^2+n}{n^2}\right) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n x^2}{n^2} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} = x^2 \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

Les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ sont convergentes, et nous avons même $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$, de telle sorte que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge simplement vers $-\left(\frac{\pi^2}{12}x^2 + \ln 2\right)$

$\longrightarrow$ **La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est uniformément convergente sur tout intervalle $[a;b] \subset \mathbb{R}$**

Nous appelons $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

Nous devons démontrer que, pour tout $x \in [a;b]$, $\lim_{n\to+\infty} |S_n(x) - S(x)| = 0$. Or :

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k\geqslant 1} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k\geqslant n+1} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k\geqslant n+1} (-1)^k \left(\frac{x^2+k}{k^2}\right)\right|$$

La série $\sum_{k\geqslant 1} (-1)^k \left(\frac{x^2+k}{k^2}\right)$ est une série alternée et nous savons que nous faisons une erreur majorée par $|f_{k+1}(x)|$ lorsque nous remplaçons la somme $S(x)$ par $S_n(x)$ la somme d'ordre n. Nous avons donc :

$$|S_n(x) - S(x)| \leqslant \left|(-1)^{n+1}\left(\frac{x^2+n}{n^2}\right)\right| = \frac{x^2+n}{n^2}$$

Appelons $M = \max\{|a|;|b|\}$. Alors $x \in [a;b] \iff |x| \leqslant M$, et donc, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons :

$$|S_n(x) - S(x)| \leqslant \frac{x^2+n}{n^2} \leqslant \frac{M^2+n}{n^2}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M^2+n}{n^2} = 0$, nous avons, pour tout $x \in [a;b]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |S_n(x) - S(x)| = 0$.
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est donc uniformément convergente sur tout intervalle $[a;b] \subset \mathbb{R}$

Exercice 6 :

Montrer que si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n|$ converge, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n e^{inx}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$

Ce n'est pas très difficile, puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|a_n e^{inx}| = |a_n|$, ce qui montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n e^{inx}$ est normalement et donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
Remarque : nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{C}$

Exercice 7 :

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{e^{-nx}\sin nx}{\ln n}$ est normalement convergente sur l'intervalle $[a;+\infty[$ où $a > 0$

Pas trop compliqué !
Nous avons : $\left|\dfrac{e^{-nx}\sin nx}{\ln n}\right| \leqslant \left|\dfrac{e^{-nx}}{\ln n}\right| = \dfrac{e^{-nx}}{\ln n}$.
Pour tout $x \in [a;+\infty[$, nous avons $e^{-nx} \leqslant e^{-na}$, et donc, pour tout $x \in [a;+\infty[$, nous avons

$$\left|\frac{e^{-nx}\sin nx}{\ln n}\right| \leqslant \frac{e^{-na}}{\ln n}$$

Or, la série de terme général $\dfrac{e^{-na}}{\ln n} = \dfrac{(e^{-a})^n}{\ln n}$ qui est du type $\dfrac{x^n}{\ln n}$ avec $0 < x < 1$; nous savons que les séries numériques $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{x^n}{\ln n}$ sont convergentes. Nous en déduisons que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{e^{-nx}\sin nx}{\ln n}$ est normalement convergente sur l'intervalle $[a;+\infty[$ où $a > 0$; elle y est donc aussi normalement convergente.

Exercice 8 :

Soit α un réel tel que $\alpha < 2$. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$

1. *Démontrer que cette série est simplement convergente sur $[0;+\infty[$*

   Appelons, pour simplifier, $f_n(x) = x^{2-\alpha}e^{-nx}$. Alors :
   - ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $f_n(0) = 0$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ converge donc en $x = 0$, et si $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$, nous avons $S(0) = 0$
   - ⋆ Supposons $x > 0$; alors $e^{-x} < 1$ et donc :

$$\sum_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx} = x^{2-\alpha}\sum_{n\geqslant 1} e^{-nx} = x^{2-\alpha}\sum_{n\geqslant 1}\left(e^{-x}\right)^n = \frac{x^{2-\alpha}e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x^{2-\alpha}}{e^x - 1}$$

⋆ La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ converge donc simplement, sur $[0;+\infty[$ vers la fonction S définie par :

$$\begin{cases} S(x) = \dfrac{x^{2-\alpha}}{e^x-1} \text{ si } x>0 \\ S(0)=0 \end{cases}$$

2. *Démontrer que, si $1 \leqslant \alpha < 2$ alors la série $\sum_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ n'est pas uniformément convergente sur l'intervalle $[0;+\infty[$.*

Pour le démontrer, nous allons étudier la continuité de S. Cette démarche est justifiée par le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x^{2-\alpha}e^{-nx}$ sont continues sur $[0;+\infty[$. S'il y a convergence uniforme, alors S est elle aussi continue.
Le problème de continuité se pose en $x=0$. Il nous faut donc étudier $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} S(x)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{x^{2-\alpha}}{e^x-1} &= \frac{\left(x^{2-\alpha}\right)\times x}{x\left(e^x-1\right)} \\ &= x^{2-\alpha}\times\frac{x}{x\left(e^x-1\right)} \\ &= \frac{x^{2-\alpha}}{x}\times\frac{x}{\left(e^x-1\right)} \\ &= x^{1-\alpha}\times\frac{x}{\left(e^x-1\right)} \end{aligned}$$

En utilisant les limites remarquables (ou les développements limités), nous avons

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$$

Et :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty \text{ si } 1<\alpha<2 \\ 0 \text{ si } \alpha<1 \\ 1 \text{ si } \alpha=1 \end{cases}$$

Nous en déduisons donc :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} S(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } 1<\alpha<2 \\ 0 \text{ si } \alpha<1 \\ 1 \text{ si } \alpha=1 \end{cases}$$

Visiblement, la fonction S n'est pas continue pour $1\leqslant\alpha<2$, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ n'est pas uniformément convergente sur l'intervalle $[0;+\infty[$ lorsque $1\leqslant\alpha<2$

3. *Montrer que si $\alpha<1$, alors elle est uniformément convergente sur $[0;+\infty[$*

Pour montrer l'uniforme convergence de la série, nous allons démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ converge normalement sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
Pour cela, il faut majorer $\left|x^{2-\alpha}e^{-nx}\right|$ par le terme général d'une série numérique convergente.
Déjà, $\left|x^{2-\alpha}e^{-nx}\right| = x^{2-\alpha}e^{-nx}$. Nous avons posé $f_n(x)=x^{2-\alpha}e^{-nx}$; calculons la dérivée de f_n. Nous avons :

$$f_n'(x) = (2-\alpha)\,x^{1-\alpha}e^{-nx} - nx^{2-\alpha}e^{-nx} = e^{-nx}x^{1-\alpha}\left((2-\alpha)-nx\right)$$

Pour $x\geqslant 0$, nous avons $e^{-nx}x^{1-\alpha}\geqslant 0$. Le signe de f_n' ne dépend donc que de celui de $(2-\alpha)-nx$.
Ainsi, si $0\leqslant x\leqslant\dfrac{2-\alpha}{n}$, alors $f_n'\geqslant 0$ et donc f_n est croissante. Si $x\geqslant\dfrac{2-\alpha}{n}$, alors $f_n'\leqslant 0$ et donc f_n est décroissante. f_n admet donc un maximum $M_n=f_n\left(\dfrac{2-\alpha}{n}\right)$ en $x_0=\dfrac{2-\alpha}{n}$.

Or, par calcul, $M_n = \left[(2-\alpha)\, e^{-1}\right]^{2-\alpha} \times \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$ est une série de Riemann, convergente si et seulement si $2-\alpha > 1$, c'est à dire si $\alpha < 1$.
Ainsi, $\left|x^{2-\alpha}e^{-nx}\right| \leqslant \left[(2-\alpha)\, e^{-1}\right]^{2-\alpha} \times \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$, et si $\alpha < 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} x^{2-\alpha}e^{-nx}$ est normalement convergente sur $[0;+\infty[$

6.5.2 Exercices complémentaires

Exercice 9 :

Etudier les séries suivantes

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-n}\cos n^2x$

   ▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|e^{-n}\cos n^2x\right| \leqslant e^{-n}$. Or, e^{-n} est le terme général d'une série numérique convergente. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-n}\cos n^2x$ est donc normalement convergente, donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$

   ▷ D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $e^{-n}\cos n^2x$ sont continues sur $\mathbb{R}$; de la convergence uniforme de la série, nous déduisons que la somme $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-n}\cos n^2x$ est continue sur $\mathbb{R}$

   ▷ La fonction $e^{-n}\cos n^2x$ est dérivable sir $\mathbb{R}$ et de dérivée $-n^2e^{-n}\sin n^2x$. Comme tout à l'heure, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|-n^2e^{-n}\sin n^2x\right| \leqslant n^2e^{-n}$. Or, n^2e^{-n} est le terme général d'une série numérique convergente. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} -n^2e^{-n}\sin n^2x$ est donc normalement convergente, donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. En conclusion, nous avons

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} e^{-n}\cos n^2x\right)' = \sum_{n\geqslant 1} -n^2e^{-n}\sin n^2x$$

2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin \dfrac{x}{n}$

   $\Longrightarrow$ Convergence simple

   ▷ D'une part, du fait que la fonction $\sin x$ soit impaire, l'étude de la série peut se réduire à $[0;+\infty[$

   ▷ Soit $x \geqslant 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $0 \leqslant \dfrac{x}{n} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; ainsi, pour $n \geqslant N$, nous avons $0 \leqslant \dfrac{x}{n+1} \leqslant \dfrac{x}{n} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et comme la fonction sin est croissante sue l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, nous avons $\sin\dfrac{x}{n+1} \leqslant \sin\dfrac{x}{n}$; ce qui montre que la suite $\left(\sin\dfrac{x}{n}\right)_{n\geqslant N}$ est décroissante

   ▷ D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\dfrac{x}{n} = 0$; d'après le critère des séries alternées, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin\dfrac{x}{n}$ converge simplement sur $[0;+\infty[$, et par parité (ou imparité), sur $\mathbb{R}$

   $\Longrightarrow$ Convergence absolue

   Pour $n \geqslant N$, nous avons $\left|(-1)^n \sin\dfrac{x}{n}\right| = \sin\dfrac{x}{n}$, et lorsque n tend vers $+\infty$, nous avons $\sin\dfrac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\approx} \dfrac{x}{n}$. Or, $\dfrac{x}{n}$ est le terme général d'une série divergente. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin\dfrac{x}{n}$ ne converge donc pas absoluement.

   $\Longrightarrow$ Convergence uniforme

   Posons $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \sin\dfrac{x}{k}$ et $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \sin\dfrac{x}{n}$.

D'après les résultats donnés lors de l'étude des séries alternées, si nous remplaçons la somme d'ordre n par la somme de la série, l'erreur commise est de l'ordre de u_{n+1}. Donc, pour $n \geqslant N$:

$$|S_n(x) - S(x)| \leqslant \sin \frac{x}{n+1}$$

On sait que si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, nous avons $0 \leqslant \sin x \leqslant x$. Donc :

$$|S_n(x) - S(x)| \leqslant \sin \frac{x}{n+1} \leqslant \frac{x}{n+1}$$

Soient $0 \leqslant a < b$ et $x \in [a; b]$; alors $\frac{x}{n+1} \leqslant \frac{b}{n+1}$, et donc, pour tout $x \in [a; b]$,

$$|S_n(x) - S(x)| \leqslant \frac{b}{n+1}$$

Et nous avons donc, pour tout $x \in [a; b]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} |S_n(x) - S(x)| = 0$ ce qui montre que la série converge uniformément sur tout intervalle $[a; b] \subset \mathbb{R}$

3. $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{\cos \frac{x}{2^n}}{10^n}$

C'est une série qui pose peu de problème :

$\Longrightarrow$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\left|\frac{\cos \frac{x}{2^n}}{10^n}\right| \leqslant \frac{1}{10^n}$.
La série converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$ Les fonctions $\frac{\cos \frac{x}{2^n}}{10^n}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, et donc la somme $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{\cos \frac{x}{2^n}}{10^n}$ est elle aussi continue sur $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ Les fonctions $\frac{\cos \frac{x}{2^n}}{10^n}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\left(\frac{\cos \frac{x}{2^n}}{10^n}\right)' = -\frac{1}{2^n} \times \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{10^n}$.
De la la même manière que précédemment *(utilisation de la convergence normale)*, on démontre que la série des dérivées converge normalement donc la somme $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{\cos \frac{x}{2^n}}{10^n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{-\sin \frac{x}{2^n}}{20^n}$

4. $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n + n^2 x^2}$

Appelons $f_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x^2}$.

Nous pouvons remarquer que $f_n(0) = \frac{1}{n}$ et que la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente ; l'étude se fera donc pour $x \in \mathbb{R}^*$.

En remarquant aussi que $f_n(x) = f_n(-x)$, l'étude se fera donc sur $[a; +\infty[$ où $a > 0$

$\Longrightarrow$ Si $x \in [a; +\infty[$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $n + n^2 x^2 \geqslant n + n^2 a^2$ et donc $0 \leqslant \frac{1}{n + n^2 x^2} \leqslant \frac{1}{n + n^2 a^2}$, ce qui montre que la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n + n^2 x^2}$ est normale, donc uniforme sur $[a; +\infty[$

$\Longrightarrow$ Sur le domaine $[a; +\infty[$, la fonction $f_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x^2}$ est continue, et donc la fonction $S(x) = \sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n + n^2 x^2}$ est donc continue sur $[a; +\infty[$

Exercice 10 :

Soient α, a et b, 3 nombres réels tels que $\alpha > 0$ et $0 < a < b$. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}$ Montrer que cette série est uniformément convergente sur l'intervalle $[a;b]$

- Dans un premier temps, nous allons démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 1$, et tout $x > 0$, nous avons

$$\frac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha+1}x}$$

Il suffit, pour le démontrer, de faire la différence $\dfrac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)} - \dfrac{1}{n^{\alpha+1}x}$. Nous avons, en effet,

$$\frac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)} - \frac{1}{n^{\alpha+1}x} = \frac{1}{n^{\alpha}}\left(\frac{x}{1+nx^2} - \frac{1}{nx}\right)$$

Il faut, maintenant, étudier le signe de $\dfrac{x}{1+nx^2} - \dfrac{1}{nx}$.
Réduisons au même dénominateur :

$$\frac{x}{1+nx^2} - \frac{1}{nx} = \frac{nx^2-1-nx^2}{nx\left(1+nx^2\right)} = \frac{(1-n)\,x^2-1}{nx\left(1+nx^2\right)}$$

Comme $n \geqslant 1$ et $x > 0$, nous avons $\dfrac{(1-n)\,x^2-1}{nx\left(1+nx^2\right)} \leqslant 0$ et donc $\dfrac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)} - \dfrac{1}{n^{\alpha+1}x} \leqslant 0$, c'est à dire :

$$\frac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha+1}x}$$

- Ce qui veut dire que, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons :

$$0 < \frac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha+1}x} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha+1}a}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^{\alpha+1}a}$ est une série de Riemann convergente, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}$ converge normalement, c'est à dire uniformément sur l'intervalle $[a;b]$

- D'autre part, la fonction $u_n(x) = \dfrac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}$ est continue sur l'intervalle $[a;b]$ et de la convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}$ sur l'intervalle $[a;b]$, on peut déduire que la fonction $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x}{n^{\alpha}\left(1+nx^2\right)}$ est, elle aussi, continue sur l'intervalle $[a;b]$

Exercice 11 :

Montrer que la somme de la série de fonctions de terme général $f_n(x) = (-1)^n\dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Nous avons, très simplement, $\left|(-1)^n\dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^3}$.

Ce qui montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n\dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ converge normalement, et donc uniformément sur $\mathbb{R}$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

De la convergence uniforme, nous tirons que $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n\dfrac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 12 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier la continuité de la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x) = \sum_{n \geqslant 1} n^\alpha \sin^n x \cos x$

Nous allons étudier la convergence normale de la série.
Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, nous avons : $|n^\alpha \sin^n x \cos x| \leqslant n^\alpha$. La série numérique $\sum_{n \geqslant 1} n^\alpha$ est une série de Riemann ; cette série est convergente si et seulement si $\alpha < -1$.
Ainsi, si $\alpha < -1$, il y a donc convergence uniforme sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction $n^\alpha \sin^n x \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$, et donc si $\alpha < -1$, $F(x) = \sum_{n \geqslant 1} n^\alpha \sin^n x \cos x$ est une fonction continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 13 :

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$ où $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2}{x^4+n}$

1. *Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$*

   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Alors, la série $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{x^2}{x^4+n}$ est une série numérique alternée.

   ▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous adons :

   $$\frac{x^2}{x^4+n} \geqslant 0 \text{ et } \frac{x^2}{x^4+(n+1)} \leqslant \frac{x^2}{x^4+n}$$

   ▷ D'après le critère des séries alternées, la série $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{x^2}{x^4+n}$ est donc convergente

   Nous en déduisons que la série $\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$

   Elle n'est, par contre, pas absolument convergente
   En effet, nous avons $\left|(-1)^n \frac{x^2}{x^4+n}\right| = \frac{x^2}{x^4+n}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2}{x^4+n} \underset{n \to +\infty}{\approx} \frac{x^2}{n}$. La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^2}{n}$ est une série de Riemann divergente, et donc la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} \left|(-1)^n \frac{x^2}{x^4+n}\right|$ n'est pas convergente.
   Ainsi, la série $\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$ n'est pas absolument convergente.

2. *Montrer que cette série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$*

   Appelons $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^n \frac{x^2}{x^4+k}$ et $S(x) = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{x^2}{x^4+n}$.
   Pour montrer que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$, il faut démontrer que

   $$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |S_n(x) - S(x)| = 0$$

   D'après la théorie des séries alternées, nous avons : $|S_n(x) - S(x)| \leqslant \frac{x^2}{x^4+n+1}$

   Etudions $g(x) = \frac{x^2}{x^4+n+1}$; la dérivée est donc, après calculs $g'(x) = \frac{4x\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}+x^2\right)\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}-x^2\right)}{(x^4+n+1)^2}$

   Le signe de cette dérivée ne dépend que de celui de $4x\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}+x^2\right)\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}-x^2\right)$.

En utilisant la parité, on voit que g admet comme maximum M_n où

$$M_n = \frac{\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}}{\dfrac{n+1}{2} + n + 1} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Nous avons donc $|S_n(x) - S(x)| \leqslant \dfrac{x^2}{x^4 + n + 1} \leqslant M_n$

Nous voyons donc tout de suite que $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$, c'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - S(x)| = 0$.

La série converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$

3. *Montrer que la somme de cette série est continue*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. la série convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$, la somme $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{x^2}{x^4+n}$ est donc continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 14 :

1. *Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$*

   Nous allons démontrer que cette série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

   Pour ce faire, il faudra majorer $\left|\dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}\right|$ par le terme général d'une série numérique à termes positifs convergente.

   Du fait de l'imparité de $\dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}$, nous ne considérons que $x \geqslant 0$

   Etudions $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}$.

   Tous calculs faits, nous avons $f'(x) = \dfrac{n^2 - 3x^2}{(n^2+x^2)^3}$. $f\left(\dfrac{n}{\sqrt{3}}\right)$ est une borne supérieure de f.

   Nous avons donc $\left|\dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}\right| \leqslant f\left(\dfrac{n}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{16} \times \dfrac{1}{n^3}$.

   La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3\sqrt{3}}{16} \times \dfrac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente.

   Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$

2. *Montrer que cette série est continue sur $\mathbb{R}$*

   Comme d'habitude, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, chaque fonction $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$; de la convergence uniforme, nous tirons que la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x}{(x^2+n^2)^2}$ est continue.

3. *Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{x^2+n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$*

   ▷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|\dfrac{1}{x^2+n^2}\right| = \dfrac{1}{x^2+n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série numérique convergente, et donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{x^2+n^2}$ converge normalement, et donc uniformément sur $\mathbb{R}$

- ▷ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, chaque fonction $\dfrac{1}{x^2+n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x^2+n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$
- ▷ Nous avons $\left(\dfrac{1}{x^2+n^2}\right)' = \dfrac{-2x}{(x^2+n^2)^2}$. Nous avons démontré que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{-2x}{(x^2+n^2)^2}$ convergeait unifomément sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons donc conclure que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x^2+n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ *(elle est même de classe $\mathcal{C}^1$)* et que nous avons :

$$\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x^2+n^2}\right)' = \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{x^2+n^2}\right)' = -2\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$$

Exercice 15 :

Nous considérons la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ où $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$

1. *Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge et que sa somme $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$*

   Bon, ben, c'est toujours pareil !!

   → Premièrement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$

   → D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|\dfrac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^3}$. La série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente.
   Donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est normalement convergente, et donc uniformément convergente.

   → Toutes les fonctions f_n étant continues sur $\mathbb{R}$, de la convergence uniforme de la série, nous déduisons que la somme $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

2. *Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$*

   - ▷ Nous savons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$ sont continues sur $\mathbb{R}$
   - ▷ La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$
   - ▷ Donc, d'après 6.2.5, nous pouvons écrire :

   $$\int_0^{\pi} \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^{\pi} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

   Il nous faut donc calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n^3}\,\mathrm{d}x$

   Nous avons :

   $$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n^3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n^3}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n^3}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{-1}{n^4}\left((-1)^n - 1\right) = \frac{1}{n^4}\left(1-(-1)^n\right)\end{aligned}$$

   Ainsi, si n est pair, alors $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n^3}\,\mathrm{d}x = 0$ et si n est impair, alors $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n^3}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n^4}$; d'où :

   $$\int_0^{\pi} \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^{\pi} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{(2n+1)^4} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{(2n-1)^4}$$

3. *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$*

   ▷ De la majoration, vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, nous concluons que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$

   ▷ D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\frac{\cos(nx)}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et de la convergence uniforme, nous tirons que la fonction somme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

   ▷ D'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n'(x) = \left(\frac{\sin(nx)}{n^3}\right)' = \frac{\cos(nx)}{n^2}$

   De la convergence uniforme de toutes ces séries, nous tirons :

$$f'(x) = \left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n^3}\right)' = \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{\sin(nx)}{n^3}\right)' = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

4. *Démontrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$*

   Nous avons déjà montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $\frac{\cos(nx)}{n^2}$ étaient continues et que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ convergeait uniformément. Nous avons donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x$$

   Il faut donc calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n^2} \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{n^3} \sin\frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

   On peut remarquer que si n est pair, alors $\sin\frac{n\pi}{2} = 0$ et que si $n = 2k+1$, alors $\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = (-1)^k$.

   Ainsi, si n est pair $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x = 0$ et si $n = 2k+1$, alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$

   Et alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

Exercice 16 :

Cet exercice est l'occasion de mettre en pratique les théorèmes sur la dérivation

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous définissons la fonction $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. *Démontrer que la série* $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ *converge simplement sur* $[0:+\infty[$ *vers une fonction* S

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est une série alternée.

Pour $x\geqslant 0$ fixé, la suite $\left(\dfrac{1}{x+n}\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite positive et décroissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{x+n}=0$.

Donc, d'après le critère des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0:+\infty[$.

Si S est la limite, nous avons même $S(0)=\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$

(a) **Cette série converge-t-elle normalement sur** $[0:+\infty[$ **?**

$\longrightarrow$ La fonction $|f_n(x)|=\dfrac{1}{x+n}$ est une fonction décroissante sur $[0:+\infty[$ et nous avons :

$$\sup_{x\geqslant 0}|f_n(x)|=\|f_n\|_\infty=\frac{1}{n}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ est divergente et il n'y a donc pas de convergence normale sur $[0:+\infty[$

$\longrightarrow$ Mieux, il n'y a convergence normale sur aucun des intervalles $[a;b]\subset\mathbb{R}$

En effet, d'après la même analyse, $\sup\limits_{x\in[a;b]}|f_n(x)|=\dfrac{1}{n+a}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n+a}$ est divergente et il n'y a donc pas de convergence normale sur l'intervalle $[a;b]\subset\mathbb{R}$

(b) **Cette série converge-t-elle uniformément sur** $[0:+\infty[$ **?**

Comme d'habitude, nous posons $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ et $S(x)=\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$.

Il faut que nous étudions $|S_n(x)-S(x)|$. D'après le critère des séries alternées, nous avons :

$$|S_n(x)-S(x)|\leqslant\frac{1}{x+n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\geqslant 0}|S_n(x)-S(x)|=0$; ce qui termine de montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge uniformément sur $[0:+\infty[$ vers la fonction S

2. *Démontrer que* $S'(x)=\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$

- ▷ Nous avons $f_n'(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$; f_n est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0:+\infty[$
- ▷ D'autre part, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge simplement, et même uniformément, sur $[0:+\infty[$ vers la fonction S
- ▷ Il faut maintenant montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'(x)$ converge uniformément sur $[0:+\infty[$.

  Pour cela, il est facile de montrer qu'elle converge normalement sur $[0:+\infty[$; en effet :

$$|f_n'(x)|=\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}\right|=\frac{1}{(x+n)^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$$

  Comme la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ est convergente, nous en déduisons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n'(x)$ converge normalement et donc uniformément sur $[0:+\infty[$

Nous avons donc : $\left(\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)\right)' = \sum_{n\geqslant 1} f'_n(x)$, c'est à dire, traduit autrement :

$$S'(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$$

Exercice 17 :

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+1}$

$\Longrightarrow$ Premièrement, est-ce que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ existe ?

⋆ Regardons d'abord en 0, nous avons :

$$\frac{\sin x}{e^x-1} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{e^x-1}$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} = 1$, il est possible de prolonger $\dfrac{\sin x}{e^x-1}$ par continuité en 0

⋆ Regardons maintenant en $+\infty$; nous avons, pour $x \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin x}{e^x-1}\right| \leqslant \frac{1}{e^x-1} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \leqslant e^{-x}$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ existe et nous en concluons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente, donc convergente.

$\Longrightarrow$ Comme il y a quelques questions à se poser en 0 et $+\infty$; soit donc $\varepsilon > 0$ et $x \geqslant \varepsilon$.

$\Longrightarrow$ Maintenant, il est intéressant de voir que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-kx} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-x}\right)^k = \frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$.

Si $x > \varepsilon$, alors, $e^{-x} < 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-kx} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{1-e^{-x}}$

Donc, si $x > \varepsilon$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin x e^{-(k+1)x} = e^{-x}\sin x \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-x}\right)^k = e^{-x}\sin x \times \frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$$

De telle sorte que si $x > \varepsilon$,

$$\sum_{n\geqslant 0} \sin x e^{-(n+1)x} = e^{-x}\frac{\sin x}{1-e^{-x}} = \frac{\sin x}{e^x\left(1-e^{-x}\right)} = \frac{\sin x}{e^x-1}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin x e^{-(n+1)x}$ converge donc simplement vers la fonction $\dfrac{\sin x}{e^x-1}$

$\Longrightarrow$ La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin x e^{-(n+1)x}$ converge-t-elle uniformément vers la fonction $\dfrac{\sin x}{e^x-1}$ sur l'intervalle $[\varepsilon;+\infty[$?

Nous allons, en fait, montrer qu'elle y converge normalement ; en effet, pour tout $x > \varepsilon$:

$$\left|\sin x e^{-(n+1)x}\right| \leqslant e^{-(n+1)x} \leqslant e^{-(n+1)\varepsilon} = \left(e^{-\varepsilon}\right)^{n+1}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(e^{-\varepsilon}\right)^{n+1}$ est une série géométrique convergente, et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin x e^{-(n+1)x}$ converge normalement, donc uniformément vers la fonction $\dfrac{\sin x}{e^x-1}$ sur l'intervalle $[\varepsilon;+\infty[$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n(x) = \sin x e^{-(n+1)x}$ est continue sur l'intervalle $[\varepsilon; +\infty[$, et nous pouvons écrire, pour tout $X \in [\varepsilon; +\infty[$:

$$\int_\varepsilon^X \left(\sum_{n \geqslant 0} \sin x e^{-(n+1)x} \right) \mathrm{d}x = \sum_{n \geqslant 0} \int_\varepsilon^X \sin x e^{-(n+1)x} \, \mathrm{d}x$$

$\Longrightarrow$ Il faut, maintenant, calculer $\displaystyle\int_\varepsilon^X \sin x e^{-(n+1)x} \, \mathrm{d}x$

Nous avons $\sin x e^{-(n+1)x} = \mathrm{Im}\left(e^{ix} e^{-(n+1)x}\right)$, et donc $\displaystyle\int_\varepsilon^X \sin x e^{-(n+1)x} \, \mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_\varepsilon^X e^{ix-(n+1)x} \right) \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^X e^{ix-(n+1)x} \, \mathrm{d}x = & \int_\varepsilon^X e^{x(i-(n+1))} \, \mathrm{d}x \\ = & \left[\frac{e^{x(i-(n+1))}}{i-(n+1)} \right]_\varepsilon^X \\ = & \left[\frac{-e^{-(n+1)x}}{(n+1)^2+1} \left(((n+1)+i) (\cos x + i \sin x) \right) \right]_\varepsilon^X \end{aligned}$$

Et donc $\displaystyle\int_\varepsilon^X \sin x e^{-(n+1)x} \, \mathrm{d}x = \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1} ((n+1)\sin\varepsilon + \cos\varepsilon) - \left(\frac{e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} ((n+1)\sin X + \cos X) \right)$

$\Longrightarrow$ Nous avons, maintenant :

$$\sum_{n \geqslant 0} \int_\varepsilon^X \sin x e^{-(n+1)x} \, \mathrm{d}x = \sum_{n \geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1} ((n+1)\sin\varepsilon + \cos\varepsilon) - \sum_{n \geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} ((n+1)\sin X + \cos X)$$

$\longrightarrow$ Etudions la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{-e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} ((n+1)\sin X + \cos X)$. Pour tout $X \geqslant a$ où $a > 0$, nous avons :

$$\left| \frac{-e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} ((n+1)\sin X + \cos X) \right| \leqslant \frac{e^{-(n+1)a}}{(n+1)^2+1} ((n+1)+1) = \frac{n+2}{(n+1)^2+1} \times e^{-(n+1)a}$$

lorsque n tend vers $+\infty$, nous avons $\dfrac{n+2}{(n+1)^2+1} \times e^{-(n+1)a} \underset{n \to +\infty}{\approx} \dfrac{e^{-na}}{n}$ qui est le terme général d'une série convergente. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{-e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} ((n+1)\sin X + \cos X)$ converge normalement, donc uniformément sur tout intervalle $[a; +\infty[$.

Nous avons $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \frac{-e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} ((n+1)\sin X + \cos X) = 0$, et donc, d'après le théorème d'inversion des limites, 6.2.1, nous avons :

$$\lim_{X \to +\infty} \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{-e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} ((n+1)\sin X + \cos X) \right) = \sum_{n \geqslant 0} \left(\lim_{X \to +\infty} \frac{-e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2+1} ((n+1)\sin X + \cos X) \right) = 0$$

$\longrightarrow$ Pour étudier la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1} ((n+1)\sin\varepsilon + \cos\varepsilon)$, nous allons choisir ε tel que $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et nous allons découper la série en 2 :

- $\star$ D'une part, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}(n+1)\sin\varepsilon}{(n+1)^2+1}$
- $\star$ Et d'autre part, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}\cos\varepsilon}{(n+1)^2+1}$

$\longrightarrow$ Etudions maintenant $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}\cos\varepsilon}{(n+1)^2+1}$

Tout d'abord, nous avons $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}\cos\varepsilon}{(n+1)^2+1} = \cos\varepsilon \sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1}$, et :

$$\left|\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1}\right| = \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2+1}$ étant convergente, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1}$ est normalement convergente donc uniformément convergente sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

En conclusion :

- $\star$ Comme $\dfrac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1}$ est une fonction de ε continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, de la convergence uniforme, nous concluons que la fonction $g(\varepsilon) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1}$ est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
- $\star$ D'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$, et donc, de la convergence uniforme, et d'après 6.2.1, nous avons

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1} = \sum_{n\geqslant 0} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

  C'est à dire $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} g(\varepsilon) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2+1}$

- $\star$ Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}\cos\varepsilon}{(n+1)^2+1} = \cos\varepsilon\, g(\varepsilon)$ est telle que $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}\cos\varepsilon}{(n+1)^2+1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2+1}$

$\longrightarrow$ Etudions maintenant la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}(n+1)\sin\varepsilon}{(n+1)^2+1}$, et l'étude n'est pas des plus simples ! !

Nous allons décomposer ce qui est à l'intérieur du signe somme. L'objet de notre étude sera de majorer l'expression $e^{-(n+1)\varepsilon}\sin\varepsilon$ indépendamment de ε

- $\star$ Nous nous mettons donc à l'étude de $h(x) = e^{-(n+1)x}\sin x$ dont la fonction dérivée est donnée par

$$h'(x) = e^{-(n+1)x}\cos x - (n+1)e^{-(n+1)x}\sin x = e^{-(n+1)x}\cos x\,(1-(n+1)\tan x)$$

  Cette dérivée s'annule pour $x_n = \arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

  La fonction tan étant croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, h' est donc positive sur $[0;x_n]$, puis négative pour $x \geqslant x_n$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, nous avons $h(x) \leqslant h(x_n)$ où

$$h(x_n) = \sin\left(\arctan\left(\tfrac{1}{n+1}\right)\right) e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

- $\star$ Donc, nous avons :

$$\left|\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}(n+1)\sin\varepsilon}{(n+1)^2+1}\right| \leqslant \frac{(n+1)\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}}{(n+1)^2+1}$$

$\star$ Maintenant, il faut connaître le comportement de la suite numérique

$$\frac{(n+1)\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}}{(n+1)^2+1}$$

Nous commençons par faire un développement limité de $\sin\left(\arctan\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right)$ lorsque n est voisin de $+\infty$

$\hookrightarrow$ Commençons par le faire au voisinage de 0 :

$$\sin x = x + x\varepsilon(x) \text{ et } \arctan x = x + x\varepsilon(x) \text{ et donc } \sin(\arctan x) = x + x\varepsilon(x)$$

$\hookrightarrow$ Ce qui veut dire qu'au voisinage de $+\infty$, nous avons :

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\approx} \frac{1}{n+1}$$

D'autre part,

$$e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)} = e^{-(n+1)\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\varepsilon\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)} = e^{-1+\varepsilon\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

Nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-1+\varepsilon\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \dfrac{1}{e}$

Nous en déduisons donc :

$$\frac{(n+1)\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}}{(n+1)^2+1} \underset{n\to+\infty}{\approx} \frac{1}{e\left((n+1)^2+1\right)}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{e\left((n+1)^2+1\right)}$ étant convergente, il en est de même de la série

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(n+1)\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}}{(n+1)^2+1}$$

Ce qui mène à la conclusion que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}(n+1)\sin\varepsilon}{(n+1)^2+1}$ converge normalement, et donc uniformément.

$\Longrightarrow$ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}(n+1)\sin\varepsilon}{(n+1)^2+1} = 0$, et donc de la convergence uniforme et du théorème de d'inversion des limites 6.2.1, nous avons

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}(n+1)\sin\varepsilon}{(n+1)^2+1} = \sum_{n\geqslant 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}(n+1)\sin\varepsilon}{(n+1)^2+1} = 0$$

$\Longrightarrow$ En conclusion : $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2+1}\left((n+1)\sin\varepsilon+\cos\varepsilon\right) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2+1}$

$\Longrightarrow$ **En conclusion, et pour terminer**

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ X \to +\infty}} \int_\varepsilon^X \frac{\sin x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ X \to +\infty}} \left(\int_\varepsilon^X \left(\sum_{n \geqslant 0} \sin x e^{-(n+1)x} \right) \mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ X \to +\infty}} \left(\sum_{n \geqslant 0} \int_\varepsilon^X \sin x e^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ X \to +\infty}} \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2 + 1} \left((n+1)\sin\varepsilon + \cos\varepsilon\right) - \sum_{n \geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2 + 1} \left((n+1)\sin X + \cos X\right) \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2 + 1} \left((n+1)\sin\varepsilon + \cos\varepsilon\right) \right) \\
&\qquad - \lim_{X \to +\infty} \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{e^{-(n+1)X}}{(n+1)^2 + 1} \left((n+1)\sin X + \cos X\right) \right) \\
&= \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2 + 1} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 + 1}
\end{aligned}$$

Et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 + 1}$

Q.E.D.

OUF ! !

Exercice 18 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$

1. *Etudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$*

   ▷ Nous allons montrer que la série est normalement donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ en entier :
   $$\left| \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!} \right| \leqslant \frac{|\alpha|^n}{n!}$$
   La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{|\alpha|^n}{n!}$ est une série à termes positifs convergente (*nous avons* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{|\alpha|^n}{n!} = e^{|\alpha|}$), donc la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$ est normalement convergente

   ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n(x) = \dfrac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De la convergence uniforme de la série, nous déduisons que la fonction $C(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$ est continue sur $\mathbb{R}$

2. *Nous appelons $C(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$ pour tout x appartenant au domaine de convergence. Donner une expression de C à l'aide de fonctions usuelles*

   Nous avons $f_n(x) = \dfrac{\alpha^n \cos(nx)}{n!} = \mathrm{Re}\left(\dfrac{\alpha^n e^{inx}}{n!}\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{\left(\alpha e^{ix}\right)^n}{n!}\right)$

Et donc $C(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!} = \mathrm{Re}\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{\left(\alpha e^{ix}\right)^n}{n!}\right) = \mathrm{Re}\left(\exp\left(\alpha e^{ix}\right)\right)$.

Or, $\exp\left(\alpha e^{ix}\right) = e^{\alpha(\cos x + i\sin x)} = e^{\alpha\cos x} \times e^{i\alpha\sin x} = e^{\alpha\cos x}\left(\cos(\alpha\sin x) + i\sin(\alpha\sin x)\right)$. D'où, nous tirons :

$$\boxed{C(x) = e^{\alpha\cos x}\cos(\alpha\sin x)}$$

3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous appelons :*

$$J_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x \text{ et } I_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x$$

(a) *Calculer J_n puis I_n*

▷ La fonction $C(x) = e^{\alpha\cos x}\cos(\alpha\sin x)$ est clairement paire, et donc la fonction $\sin(nx)\, C(x)$ est donc impaire, d'où, nous pouvons conclure que $J_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x = 0$

▷ Maintenant, $\cos(nx)\, C(x) = \sum_{p\geqslant 0} \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}$

Considérons $V_p(x) = \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}$. Démontrons que la série $\sum_{p\geqslant 0} V_p(x)$, converge normalement sur $\mathbb{R}$

$$|V_p(x)| = \left|\frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}\right| \leqslant \frac{|\alpha|^p}{p!}$$

Comme tout à l'heure, la série numérique $\sum_{p\geqslant 0} \frac{|\alpha|^p}{p!}$ est convergente, et la série de fonctions $\sum_{p\geqslant 0} \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}$ est normalement, donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$

▷ D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction V_p est continue sur $\mathbb{R}$, et nous pouvons donc écrire :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\, C(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{p\geqslant 0} \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}\, \mathrm{d}x = \sum_{p\geqslant 0} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}\, \mathrm{d}x$$

▷ Il nous faut donc calculer $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}\, \mathrm{d}x$

Pour commencer, $\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}\, \mathrm{d}x = \frac{\alpha^p}{p!}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(px)\cos(nx)\, \mathrm{d}x$.

Le nœud de la question est donc le calcul de $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(px)\cos(nx)\, \mathrm{d}x$

⋆ Ah!! les formules trigonométriques!! Pour commencer, nous avons :

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

Et donc

$$\cos(px)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(p-n)x + \cos(p+n)x\right]$$

D'où $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(px)\cos(nx)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(p-n)x\, \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(p+n)x\, \mathrm{d}x\right]$

⋆ Nous avons, si $n \neq p$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(p-n)x\, \mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(p-n)x}{p-n}\right]_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

Si $n = p$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(p-n)\,x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}x = 2\pi$$

⋆ De même si $n + p \neq 0$, c'est à dire $(n \neq 0)$ ou $(p \neq 0)$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(p+n)\,x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(p+n)\,x}{p+n}\right]_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

Et si $n + p = 0$, c'est à dire $(n = 0)$ et $(p = 0)$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(p+n)\,x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}x = 2\pi$$

⋆ En résumé :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(px)\cos(nx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(p-n)\,x\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(p+n)\,x\,\mathrm{d}x\right] = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq p \\ \pi \text{ si } n = p \\ 2\pi \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

▷ Et donc, en remontant :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq p \\ \dfrac{\alpha^n \pi}{n!} \text{ si } n = p \\ 2\pi \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

▷ D'où :

$$I_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(nx)\,C(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{p\geqslant 0}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\alpha^p \cos(px)\cos(nx)}{p!}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\alpha^n \pi}{n!} \text{ si } n \geqslant 1 \\ 2\pi \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

(b) *Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$*

$\Longrightarrow$ ....Facile !! il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $J_n = 0$!!

$\Longrightarrow$ Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons α^n qui est négligeable devant $n!$ *(c'est à dire $\alpha^n \in o(n!)$)* et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha^n}{n!} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

$\Longrightarrow$ Il aurait été possible d'étudier la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} I_n$, étude qui ne pose pas de difficultés :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geqslant 0} I_n &= I_0 + \sum_{n\geqslant 1} I_n \\ &= 2\pi + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\alpha^n \pi}{n!} \\ &= 2\pi + \pi\sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n}{n!} - \pi \\ &= \pi + \pi e^\alpha \end{aligned}$$

En conclusion, $\sum\limits_{n\geqslant 0} I_n = \pi(1 + e^\alpha)$

4. *Lorsque cela existe, nous posons $S(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$ Déterminer l'ensemble de définition de S et exprimer S à l'aide des fonctions usuelles.*

$\Longrightarrow$ Tout d'abord, avec les mêmes arguments que précédemment, puisque $\left|\dfrac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}\right| \leqslant \dfrac{|\alpha|^n}{n!}$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!}$ est normalement convergente.

$\Longrightarrow$ D'autre part, en utilisant les formules trigonométriques :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \Longleftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

C'est à dire que $\dfrac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!} = \dfrac{\alpha^n}{2n!}(1+\cos 2nx)$ D'où :

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n \cos^2(nx)}{n!} \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n}{2n!}(1+\cos 2nx) \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n}{2n!} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha^n}{2n!}\cos 2nx \\ &= \frac{1}{2}e^{\alpha} + \frac{1}{2}C(2x) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Et si on tient à exprimer S avec les fonctions de base :

$$S(x) = \frac{e^{\alpha} + e^{\alpha\cos 2x}\cos(\alpha \sin 2x)}{2}$$

Exercice 19 :

On considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$

Montrer que la série de fonctions $\sum b_n \sin nx$ converge uniformément si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n = 0$

1. **On suppose que la série $\sum b_n \sin nx$ converge uniformément**

Nous allons démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n = 0$.

Comme la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, on peut remarquer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons $b_n \geqslant 0$

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = \dfrac{\pi}{2n}$ et on appelle $S_n = \sum\limits_{\frac{n}{2}\leqslant p\leqslant n} b_p \sin px_n$, c'est à dire $S_n = \sum\limits_{\frac{n}{2}\leqslant p\leqslant n} b_n \sin \dfrac{p\pi}{2n}$

Ainsi,

- $\star$ Si n est pair, c'est à dire $n = 2k$, alors $S_n = \sum\limits_{p=k}^{2k} b_p \sin px_n$
- $\star$ Si n est impair, c'est à dire $n = 2k+1$, alors $\dfrac{n}{2} = k + \dfrac{1}{2}$ et donc $S_n = \sum\limits_{p=k+1}^{2k+1} b_p \sin px_n$

On remarque que, donc, quelle que soit la parité de n, S_n a le même nombre d'éléments $k+1$

Ainsi, pour $\dfrac{n}{2} \leqslant p \leqslant n$, nous avons

$$\frac{n}{2}x_n \leqslant px_n \leqslant nx_n \Longleftrightarrow \frac{n}{2}\times\frac{\pi}{2n} \leqslant px_n \leqslant n\times\frac{\pi}{2n} \Longleftrightarrow \frac{\pi}{4} \leqslant px_n \leqslant \frac{\pi}{2}$$

De la croissance de la fonction sin sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, nous tirons :

$$\sin\frac{\pi}{4} \leqslant \sin px_n \leqslant \sin\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sin px_n \leqslant 1$$

En passant à la sommation, nous avons alors

$$\sum_{\frac{n}{2}\leqslant p\leqslant n} b_n \sin px_n \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant p\leqslant n} b_p \Longleftrightarrow S_n \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant p\leqslant n} b_p$$

De la décroissance de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit que, pour tout $\frac{n}{2} \leqslant p \leqslant n$, nous avons $b_p \geqslant b_n$, et donc

$$S_n \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant p\leqslant n} b_p \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant p\leqslant n} b_n \geqslant \frac{nb_n\sqrt{2}}{4} \geqslant 0$$

La série $\sum b_n \sin nx$ convergeant uniformément, cette série est de Cauchy, et donc, en particulier,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant p\leqslant n} b_p \sin px_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = 0$$

De l'inégalité $S_n \geqslant \dfrac{nb_n\sqrt{2}}{4} \geqslant 0$, nous déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n = 0$
Ce que nous voulions

2. **Maintenant, supposons** $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n = 0$
   Nous allons donc démontrer la réciproque.
   (a) Pour commencer nous allons poser les fondations
   $\Rightarrow$ Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n = 0$, pour $\varepsilon > 0$, il existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant m_\varepsilon$ alors $nb_n \leqslant \varepsilon$
   $\Rightarrow$ Soit $x \in]0;\pi]$ et $N = \left[\dfrac{\pi}{x}\right]$ où $[\bullet]$ désigne la partie entière.

   Nous avons, d'une part, puisque $x \in]0;\pi]$, $\dfrac{1}{x} \in \left[\dfrac{1}{\pi};+\infty\right[$ et $\dfrac{\pi}{x} \in [+1;+\infty[$.

   D'autre part $\left[\dfrac{\pi}{x}\right] \leqslant \dfrac{\pi}{x} < \left[\dfrac{\pi}{x}\right] + 1$ et donc

$$x\left[\frac{\pi}{x}\right] \leqslant x \times \frac{\pi}{x} < x\left[\frac{x}{\pi}\right] + x \Longleftrightarrow xN \leqslant \pi < xN + x \Longleftrightarrow 0 \leqslant \pi - xN < x$$

   $\Rightarrow$ On appelle $M = m_\varepsilon + N$ et soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant M$
   $\Rightarrow$ On considère $\sum\limits_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin kx$ Nous avons donc :

$$\sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin kx = \sum_{k=m_\varepsilon}^{M-1} b_k \sin kx + \sum_{k=M}^{p} b_k \sin kx$$

   $\Rightarrow$ Nous appelons $A = \sum\limits_{k=m_\varepsilon}^{M-1} b_k \sin kx$ et $B = \sum\limits_{k=M}^{p} b_k \sin kx$

   (b) Une étude de A
   Nous avons :

$$|A| = \left|\sum_{k=m_\varepsilon}^{M-1} b_k \sin kx\right| \leqslant \sum_{k=m_\varepsilon}^{M-1} |b_k|\,|\sin kx| = \sum_{k=m_\varepsilon}^{M-1} b_k\,|\sin kx|$$

   Nous utilisons, maintenant, l'inégalité, démontrée ailleurs, $|\sin x| \leqslant |x|$ qui nous donne donc $|\sin kx| \leqslant k\,|x|$, et comme $x \in]0;\pi]$, nous avons $|\sin kx| \leqslant kx$. Ainsi :

$$|A| \leqslant \sum_{k=m_\varepsilon}^{M-1} b_k\,|\sin kx| \leqslant \sum_{k=m_\varepsilon}^{M-1} b_k \times kx = x\sum_{k=m_\varepsilon}^{M-1} kb_k$$

Comme $k \geqslant m_\varepsilon$, nous avons $0 \leqslant kb_k \leqslant \varepsilon$ et donc :

$$|A| \leqslant x \sum_{k=m_\varepsilon}^{M-1} \varepsilon = x\,(M-1-m_\varepsilon+1)\,\varepsilon = x\,(m_\varepsilon+N-m_\varepsilon)\,\varepsilon = \varepsilon N x \leqslant \pi\varepsilon$$

(c) Une étude de B

$\Rightarrow$ Nous allons utiliser la transformation d'Abel vue en 5.5.2 pour transformer B

Nous appelons $\sigma_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \sin jx$ [1]. Alors :

$$B = \sum_{k=M}^{p} b_k \sin kx = \sum_{k=M}^{p} (b_k - b_{k+1})\,\sigma_k(x) + \sigma_p(x)\,b_p - \sigma_{M-1}(x)\,b_M$$

$\Rightarrow$ Prouvons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons $|\sigma_k(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{x}$

En utilisant la formule trigonométrique $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$, nous obtenons :

$$\sin\frac{x}{2}\sin jx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{x}{2}-jx\right) - \cos\left(\frac{x}{2}+jx\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2}(2j-1) - \cos\frac{x}{2}(2j+1)\right]$$

En passant à la sommation, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k} \sin jx \sin\frac{x}{2} &= \sin\frac{x}{2}\sum_{j=1}^{k}\sin jx \\
&= \sin\frac{x}{2}\sigma_k(x) \\
&= \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2}(2j-1) - \cos\frac{x}{2}(2j+1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{k}\cos\frac{x}{2}(2j-1) - \sum_{j=1}^{k}\cos\frac{x}{2}(2j+1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{k}\cos\frac{x}{2}(2j-1) - \sum_{j=2}^{k+1}\cos\frac{x}{2}(2j-1)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}(2k+1)\right]
\end{aligned}$$

Ainsi, $\sin\dfrac{x}{2}\sigma_k(x) = \dfrac{1}{2}\left[\cos\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}(2k+1)\right]$ et donc :

$$\left|\sin\frac{x}{2}\sigma_k(x)\right| = \frac{1}{2}\left|\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}(2k+1)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\frac{x}{2}(2k+1)\right|\right) \leqslant 1$$

Ainsi, $\left|\sin\dfrac{x}{2}\right| |\sigma_k(x)| \leqslant 1$

Comme $x \in \left]0;\pi\right]$, nous avons $\dfrac{x}{2} \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc $\sin\dfrac{x}{2} > 0$ d'où :

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| |\sigma_k(x)| \leqslant 1 \Longleftrightarrow \sin\frac{x}{2}|\sigma_k(x)| \leqslant 1 \Longleftrightarrow |\sigma_k(x)| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$$

Nous utilisons, maintenant, une inégalité classique vraie pour tout $u \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ qui est :

$$\frac{2}{\pi}u \leqslant \sin u \leqslant u$$

1. Il faut remarquer que, pour $j=0$, nous avons $\sin jx = 0$ et que nous aurions pu très bien écrire $\sigma_k(x) = \sum_{j=1}^{k}\sin jx$ sans rien changer ; j'ai voulu coller au résultat 5.5.2

En appliquant cette inégalité à $u = \dfrac{x}{2}$, nous avons $\dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{x}{2} \leqslant \sin \dfrac{x}{2} \Longleftrightarrow \dfrac{x}{\pi} \leqslant \sin \dfrac{x}{2}$

De là, nous tirons $\dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leqslant \dfrac{1}{\frac{x}{\pi}} = \dfrac{\pi}{x}$

Nous avons donc démontré que, si $x \in \left]0;\pi\right]$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$|\sigma_k(x)| \leqslant \frac{\pi}{x}$$

$\Rightarrow$ Ainsi :

$$\begin{aligned}
|B| = & \left|\sum_{k=M}^{p} (b_k - b_{k+1})\,\sigma_k(x) + \sigma_p(x)\,b_p - \sigma_{M-1}(x)\,b_M\right| \\
\leqslant & \left|\sum_{k=M}^{p} (b_k - b_{k+1})\,\sigma_k(x)\right| + |\sigma_p(x)\,b_p| + |\sigma_{M-1}(x)\,b_M| \\
\leqslant & \sum_{k=M}^{p} |b_k - b_{k+1}|\,|\sigma_k(x)| + |\sigma_p(x)\,b_p| + |\sigma_{M-1}(x)\,b_M| \\
\leqslant & \frac{\pi}{x}\left(\sum_{k=M}^{p} |b_k - b_{k+1}| + |b_p| + |b_M|\right) \\
\leqslant & \frac{\pi}{x}\left(\sum_{k=M}^{p} (b_k - b_{k+1}) + b_p + b_M\right) \text{ car } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante et } b_k \geqslant 0 \\
\leqslant & \frac{\pi}{x}(b_M - b_{p+1} + b_p + b_M) \leqslant \frac{\pi}{x}(2b_M + b_p) \\
\leqslant & \frac{3b_M\pi}{x} \text{ car } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante}
\end{aligned}$$

Et donc $|B| \leqslant \dfrac{3b_M\pi}{x} < 3b_M(N+1)$ puisque $\dfrac{\pi}{x} < \left[\dfrac{\pi}{x}\right] + 1 \Longleftrightarrow \dfrac{\pi}{x} < N+1$

Et donc $|B| \leqslant 3b_M(N+1) \leqslant 3b_M(N+m_\varepsilon) = 3Mb_M \leqslant 3\varepsilon$ puisque $M = N + m_\varepsilon \geqslant m_\varepsilon$

(d) Finalement, nous avons montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $p \geqslant m_\varepsilon$, alors, pour tout $x \in \left]0;\pi\right]$, alors, $\left|\displaystyle\sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin kx\right| \leqslant (\pi+3)\,\varepsilon$

Ce qui montre que la série est uniformément convergente sur l'intervalle $\left]0;\pi\right]$

$\rightarrow$ L'inégalité $\left|\displaystyle\sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin kx\right| \leqslant (\pi+3)\,\varepsilon$ est aussi vérifiée si $x = 0$

$\rightarrow$ Pour $x \in [-\pi;0]$,alors $-x \in [0;\pi]$ et l'inégalité, pour $p \geqslant m_\varepsilon$, $\left|\displaystyle\sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin k(-x)\right| \leqslant (\pi+3)\,\varepsilon$ est toujours vraie.

Or, $\sin k(-x) = \sin -kx = -\sin kx$, et donc, pour $p \geqslant m_\varepsilon$:

$$\left|\sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin k(-x)\right| \leqslant (\pi+3)\,\varepsilon \Longleftrightarrow \left|-\sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin kx\right| \leqslant (\pi+3)\,\varepsilon \Longleftrightarrow \left|\sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin kx\right| \leqslant (\pi+3)\,\varepsilon$$

On vient donc de montrer que la série est uniformément convergente sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

$\rightarrow$ Si $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la périodicité de $\sin x$, nous avons la même inégalité :

En effet, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $(2n+1)\,\pi \leqslant x \leqslant (2n+3)\,\pi$, et, en fait, nous avons $n = \left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\pi} - 1\right)\right]$ où $[\bullet]$ désigne la partie entière.

Alors $-\pi \leqslant x - 2(n+1)\,\pi \leqslant \pi$ et l'inégalité, pour $p \geqslant m_\varepsilon$, $\left|\displaystyle\sum_{k=m_\varepsilon}^{p} b_k \sin k(x - 2(n+1)\,\pi)\right| \leqslant (\pi+3)\,\varepsilon$ est toujours vraie.

De $\sin k\left(x-2\left(n+1\right)\pi\right)=\sin\left(kx-2k\left(n+1\right)\pi\right)=\sin kx$, nous avons aussi, pour $p\geqslant m_{\varepsilon}$, $\left|\sum_{k=m_{\varepsilon}}^{p} b_k \sin kx\right| \leqslant \left(\pi+3\right)\varepsilon$ qui est toujours vraie.

La série de fonctions $\sum b_n \sin nx$ converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$.