8.10 Liste d'exercices

8.10.1 Recherche du rayon de convergence

Exercice 21 :

Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. On suppose qu'elle diverge pour $z = 3+4i$ et qu'elle converge pour $z = 5i$. Quel est son rayon de convergence ?

Exercice 22 :

Démontrer que si une série entière converge pour un $z_0 \in \mathbb{C}$, alors elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$

Exercice 23 :

Donner le rayon de convergence des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n(n+1)}$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{z^n}{n(n-1)}$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{1+2+\cdots+n}$
4. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n} z^n$
5. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cosh n z^n$
6. $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{an^2+bn+c} z^n$

Exercice 24 :

D'Alembert ? Cauchy ? Equivalents ?
Donner le rayon de convergence des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) z^n$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\right]^n z^n$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 0} i^n z^n$
4. $\sum\limits_{n\geqslant 2} (1+ni)\, z^n$
5. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2^n}{n^2} z^n$
6. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^3}{3^n} z^n$
7. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}+2} z^n$
8. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n+1}{(-3)^n} z^n$
9. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) z^n$

Exercice 25 :

Quel est le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k\times k!}{n!}\right) z^n$?

Exercice 26 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence ρ de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \arctan n^\alpha x^n$, pour $x \in \mathbb{R}$. Etudier cette série lorsque $x = \rho$ ou $x = -\rho$

Exercice 27 :

Déterminer le rayon de convergence ρ de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n z^n$ où $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2-1}$.

Exercice 28 :

Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$; on désigne par a_n le nombre de diviseurs de n. Déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n z^n$

Exercice 29 :

1. On note a_n la n-ième décimale du développement décimal de $\sqrt{3}$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n z^n$?
2. Déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}^* \\ n \text{ premier}}} z^n$

Exercice 30 :

On considère les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence ρ_A et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ de rayon de convergence ρ_B. Nous supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$. Comparer ρ_A et ρ_B

Exercice 31 :

Donner le rayon de convergence et la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (2^n+1)\, z^n$

Exercice 32 :

1. Donner le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+5)!}(z+5)^n$
2. En admettant que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!} = e^z$, donner la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+5)!}(z+5)^n$

Exercice 33 :

1. Donner le développement en série entière, en précisant son rayon de convergence, de la fonction arctan
2. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n \times \dfrac{1}{2n+1}$
3. Calculer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction arctan et donner le développement en série entière de cette fonction, en précisant son rayon de convergence,
4. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$

Exercice 34 :

1. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$
2. Même question : déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2-1}{n+2} x^n$

Exercice 35 :

Calculer la somme de la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$

Exercice 36 :

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$; montrer que $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)\, n!} x^{2n+1}$

Exercice 37 :

Déterminer le développement en série entière de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{(2x+3)^2}$.

Préciser le rayon de convergence de la série entière

Exercice 38 :

Déterminer le développement en série entière de la fonction f définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
Préciser le rayon de convergence de la série entière

Exercice 39 :

Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n}{C_{2n}^n} x^n$

1. Donner le rayon de convergence de la série
2. Montrer que si $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n}{C_{2n}^n} x^n$, f est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} 2\left(x - x^2\right) y' - (2x+1)\, y = -1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Exercice 40 :

1. Former de deux façons le développement en série entière en 0 de $f(x) = e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, \mathrm{d}t$
2. En déduire la relation $\displaystyle\binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n}{2n+1}$

8.10.2 Exercices divers

Exercice 41 :

Cet exercice est lié à l'histoire des théorèmes taubériens

Nous considérons la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. On suppose que cette série est absolument convergente pour $|z| < 1$ et si $|z| < 1$, on note $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ sa somme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons :

$\Rightarrow$ $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$

$\Rightarrow$ $T_n = \dfrac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} = \dfrac{S_n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ *(Moyenne de Césaro)*

1. Montrer que si $|z| < 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} S_n z^n$ est absolument convergente et admet pour somme $H(z) = \dfrac{f(z)}{1-z}$
2. Quel est le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} T_n z^n$?

Exercice 42 :

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^k}{n!} z^n$, pour $k \in \mathbb{N}$
2. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme de degré k tel que, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^k}{n!} z^n = P_k(z)\, e^z$

Exercice 43 :

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos(\alpha \arcsin x)$

1. Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 dont f est solution.
2. En déduire un développement en série entière de f .

Exercice 44 :

Soit $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle avec $a_n \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}$ de rayon de convergence infini.
Montrer que si $f(x) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ est bornée, alors f est constante.

Exercice 45 :

Soit $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $\rho = +\infty$ et de somme $f(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$

1. Soient $r \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $L(r, n) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} \, \mathrm{d}\theta$
2. En déduire que, si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante
3. En déduire une démonstration du théorème de D'Alembert.

Exercice 46 :

1. Nous considérons 2 réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ fixés une fois pour toutes.
   Nous considérons aussi la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :
   $$I_n = \int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} \, \mathrm{d}\theta$$
   Démontrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$
2. En déduire que les séries $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{e^{in\alpha}}{n}$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{e^{in\beta}}{n}$ sont de même nature
3. Démontrer que, pour tout $\theta \in]0; 2\pi[$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente et donner sa limite