Chapitre 8

Les séries entières

Introduction

1. L'objet de ce chapitre est de considérer des séries de fonctions de terme général $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à priori simple, dans lesquelles, les termes généraux seraient des monômes $f_n(z) = a_n z^n$, et les sommes partielles $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ des polynômes.
2. Nous étudierons ces suites de fonctions dans le domaine complexe ou dans le domaine réel, c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a_n z^n \end{array} \right. \text{ avec } a_n \in \mathbb{C} \text{ ou bien } \left\{ \begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & a_n x^n \end{array} \right. \text{ avec } a_n \in \mathbb{C}$$
Bien entendu, ce qui sera vrai dans $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, le sera aussi dans $\mathbb{R}$, ensemble des nombres réels et lorsque ce sera nécessaire, nous ferons une étude spécifique sur $\mathbb{R}$
3. Les outils habituels vus dans les séries numériques *(règle de D'Alembert, de Cauchy)* seront toujours utilisés, mais une étude très précise permettra de mieux connaître le mode de convergence de ces séries, et les fonctions définies par ces séries.
4. Les résultats établis dans le chapitre 7 sur les séries de fonctions seront aussi utilisés

8.1 Etude générale

8.1.1 Définition

- ⋆ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.
  Nous pouvons donc lui associer une série $\sum_{\in\mathbb{N}} u_n(z)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(z) = a_n z^n$
- ⋆ On appelle <u>série entière</u> la série de fonctions
$$\sum u_n(z) = \left((u_n(z))_{n\in\mathbb{N}}, \sum_{n=0}^{N} u_n(z) \right)$$
  de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ où $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{C})\,(u_n(z) = a_n z^n)$

Remarque 1 :

1. Pour une série entière, nous chercherons d'abord, à déterminer <u>le domaine de convergence</u>, c'est à dire le sous ensemble de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ sur lequel la série est convergente. Dans un second temps, nous étudierons les propriétés de la somme de cette série

2. En fait, nous considérerons ces séries entières comme des séries numériques, dans lequel z sera un nombre comme un autre, non fixé.

Exemple 1 :

1. La série $\displaystyle\sum_{\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ est convergente pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$

   En effet, si nous posons $u_n(z) = \dfrac{z^n}{n!}$, la règle de d'Alembert nous donne :

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{|z|}{n+1}$$

   Et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}$

2. La série entière $\displaystyle\sum_{\in\mathbb{N}} n!z^n$ ne converge que pour $z = 0$

3. La série entière $\displaystyle\sum_{\in\mathbb{N}} z^n$ appelée aussi <u>série géométrique</u> est convergente pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$; elle est divergente pour tout nombre complexe tel que $|z| \geqslant 1$ puisqu'à ce moment, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} z^n \neq 0$

4. Continuons sur un exemple de série entière à variable réelle $x \in \mathbb{R}$, la série géométrique $\sum x^n = \left((x^n)_{n\in\mathbb{N}}, \displaystyle\sum_{n=0}^{N} x^n\right)$ qui est convergente pour $|x| < 1$ et de somme $\sum x^n = \dfrac{1}{1-x}$. La figure 8.1 montre la progression de cette convergence

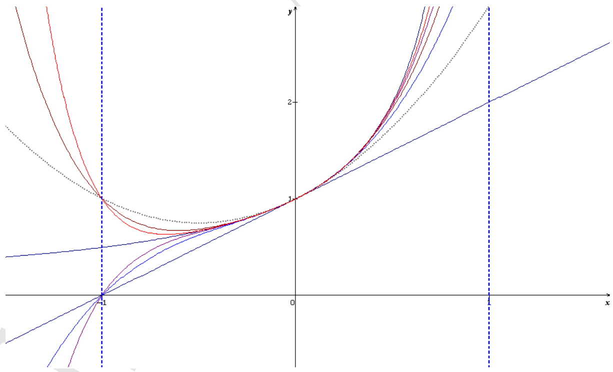

FIGURE 8.1 – La représentation des différents polynômes qui convergent vers $\dfrac{1}{1-x}$ si $|x| < 1$

8.1.2 Lemme d'Abel

Soit $r_0 > 0$
On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N})\ (|a_n|\, r_0^n \leqslant M)$
Alors, pour tout $r \in]0, r_0[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant r$

<u>Démonstration</u>

Soit $r \in]0, r_0[$ et $|z| \leqslant r$.

Alors, de $|a_n|\, r_0^n \leqslant M \iff |a_n| \leqslant \dfrac{M}{r_0^n}$, nous tirons :

$$|a_n z^n| = |a_n|\,|z^n| = |a_n|\,|z|^n \leqslant |a_n|\, r^n \leqslant \frac{M}{r_0^n} r^n = M\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} M\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ est une série numérique, géométrique, convergente puisque $0 < \dfrac{r}{r_0} < 1$, et donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement pour tout z tel que $|z| \leqslant r$

Remarque 2 :

1. Soit une série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$; on cherche, d'abord, la convergence absolue de cette série, c'est à dire la convergence de la série des modules :

$$\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n| = \sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n \text{ où } |z| = r \text{ avec } r \geqslant 0$$

$\Rightarrow$ S'il existe $r_0 \geqslant 0$ tel que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r_0^n$ converge, alors, pour tout r tel que $0 \leqslant r \leqslant r_0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n$ est convergente

En effet, comme $0 \leqslant r \leqslant r_0 \Longrightarrow 0 \leqslant |a_n|\, r^n \leqslant |a_n|\, r_0^n$, d'après les théorèmes sur les séries numériques, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n$ est convergente et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tels que $0 \leqslant |z| \leqslant r_0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

$\Rightarrow$ De la même manière, s'il existe $r_1 \geqslant 0$ tel que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r_1^n$ diverge, alors, pour tout r tel que $r \geqslant r_1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n$ est divergente

En effet, comme $r \geqslant r_1 \Longrightarrow |a_n|\, r^n \geqslant |a_n|\, r_0^n$, d'après les théorèmes de minoration sur les séries numériques, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n$ est divergente et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| \geqslant r_1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument divergente.

2. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière.

Pour tout $r > 0$, on lui associe la série numérique à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n$ et l'ensemble A défini par

$$A = \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n \text{ converge} \right\}$$

Quelques remarques sur A :

(a) $A \neq \emptyset$, car $0 \in A$

(b) A est un intervalle, éventuellement égal à $\mathbb{R}^+$ ou à $\{0\}$, car si $r_0 \in A$, alors, pour tout $r \in]0; r_0]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n$ converge et $r \in A$

8.1.3 Définition

On appelle rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, le nombre ρ tel que

$$\rho = \sup\left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n \text{ converge} \right\} = \sup A$$

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| < \rho\}$ est appelé disque de convergence.

Remarque 3 :

1. Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est une série entière telle que $a_n \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$, on parlera plutôt d'intervalle de convergence
2. En reprenant la définition de rayon de convergence, nous montrons facilement que les séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, z^n$ ont même rayon de convergence.

8.1.4 Proposition

On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence ρ

1. Soit $r \in [0, \rho[$, alors, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement dans le domaine $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leqslant r\}$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < \rho$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| > \rho$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est divergente.
4. On n'affirme rien pour $|z| = \rho$

Démonstration

Si le rayon de convergence $\rho = 0$, la proposition est triviale.
Supposons donc $\rho > 0$

1. Soit $r \in [0, \rho[$.
   Alors, il existe $r_0 > 0$, tel que $r < r_0 < \rho$; et, on a donc $r_0 \in A$, et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\, r_0^n$ converge, et donc il existe un nombre $M > 0$, fixe, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n|\, r_0^n < M$.
   Et nous appliquons le lemme d'Abel pour obtenir la coonvergence normale de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ lorsque $0 < |z| \leqslant r$
2. Le second point est exactement la conséquence de la définition de rayon de convergence.
3. Démontrons le troisième point.
   Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \rho$ et supposons que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ soit absolument convergente.
   Il existe $r > 0$ tel que $\rho < r < |z|$.
   La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ étant absolument convergente, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z^n| \leqslant M$
   Et donc :
   $$|a_n|\, r^n = |a_n z^n|\, r^n \times \frac{1}{|z^n|} \leqslant M \times \frac{r^n}{|z^n|} = M \left(\frac{r}{|z|}\right)^n$$

Comme $0 < \dfrac{r}{|z|} < 1$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} M \left(\frac{r}{|z|}\right)^n$ est convergente et donc, de même la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} |a_n|\, r^n$ est convergente.

Ce qui contredit la définition de $\rho = \sup A$

Ainsi, si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| > \rho$, alors la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ est divergente.

Remarque 4 :

Voici 3 séries entières qui admettent même rayon de convergence $\rho = 1$, mais qui n'ont pas le même comportement sur le cercle de convergence.

C'est ce qui fait dire que l'appellation « cercle de convergence » est dangereuse, car il n'y a pas forcément de convergence sur le « cercle de convergence »

1. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} z^n$ admet pour rayon de convergence $\rho = 1$, mais diverge grossièment sur le « cercle de convergence » car le terme général ne tend pas vers 0
2. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ admet aussi pour rayon de convergence $\rho = 1$, mais son comportement sur le cercle unité est étrange. Nous avons démontré page 153 que la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{e^{inx}}{n}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ sauf en $x = 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ converge aussi sur le cercle unité qui est le « cercle de convergence » sauf en $z = 1$
3. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ admet aussi pour rayon de convergence $\rho = 1$, mais converge sur tout point du « cercle de convergence » car, sur ce « cercle de convergence » $\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

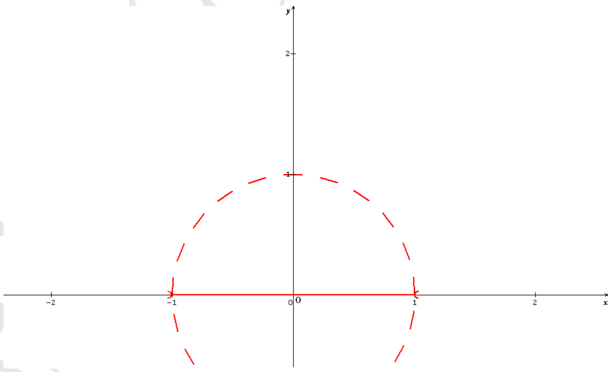

FIGURE 8.2 – La représentation du cercle de convergence

4. **La notion du rayon de convergence est extrêmement importante**

   Pour s'en convaincre, il suffit de le vérifier sur la série géométrique :

   $\Rightarrow$ Nous savons que si $|x| < 1$, nous avons $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} x^n = \frac{1}{1-x}$; par exemple, si $x = \dfrac{1}{2}$, alors :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

   Remarque :Nous avons déjà $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} = 1{,}9375 \simeq 2$

$\Rightarrow$ Par contre, si nous sortons de l'intervalle $]-1;+1[$, nous n'avons plus l'égalité $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n = \frac{1}{1-x}$. Il suffit de faire $x=+2$:

- $\star$ $\dfrac{1}{1-2} = -1$
- $\star$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^n = 1+2+4+8+\cdots+2^n+\cdots$

D'une part, nous avons une expression négative, et de l'autre, une expression positive *(qui tend, même vers $+\infty$)*

Il faut donc toujours être à l'intérieur du domaine de convergence. Les problèmes « aux bords » soulèvent des difficultés que nous tenterons d'étudie

Exercice 1 :

Déterminer les domaines de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^n z^n$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^n} z^n$