8.11 Correction de quelques exercices

8.11.1 Recherche du rayon de convergence

Exercice 1 :

Déterminer les domaines de convergence des séries entières :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$

   Appelons $u_n(z)=\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$, en utilisant la règle de d'Alembert, nous avons :
   $$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|=\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\times|z|^2=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\times|z|^2$$
   Or, pour tout $z\in\mathbb{C}$, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\times|z|^2=0$, nous pouvons conclure que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$ converge absolument pour tout $z\in\mathbb{C}$

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n^nz^n$

   Comme tout à l'heure, si $u_n(z)=n^nz^n$, alors :
   $$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}|z|$$
   Or, $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\dfrac{(n+1)^n}{n^n}\times(n+1)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\times(n+1)$

   Il est bien connu que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, et que donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\times(n+1)=+\infty$.

   Cette série ne converge donc que pour $z=0$

Exercice 2 :

Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence ρ.

Montrer que, pour tout entier $p\geqslant 2$ le rayon de convergence ρ_A de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^{pn}$ est $\rho_A=+\infty$ si $\rho=+\infty$ ou $\rho_A=\sqrt[p]{\rho}$ si ρ est fini.

1. <u>Supposons que $\rho=+\infty$</u>

   Alors, pour tout $u\in\mathbb{C}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nu^n$ est convergente ; en particulier si $u=z^p$, avec $p\in\mathbb{N}$ et $p\geqslant 2$; et donc le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^{pn}$ est aussi $\rho_A=+\infty$

2. <u>Supposons maintenant que ρ soit fini</u>

   Si $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|\leqslant\sqrt[p]{\rho}$, alors $|z|^p\leqslant\rho$ et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_n(z^p)^n$ converge absolument.

   D'autre part, si $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|\geqslant\sqrt[p]{\rho}$, alors $|z|^p\geqslant\rho$ et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_n(z^p)^n$ diverge.

   En résumé, si $|z|\leqslant\sqrt[p]{\rho}$ alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^{pn}$ converge, et si $|z|\geqslant\sqrt[p]{\rho}$, alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_n(z^p)^n$ diverge.

   Le rayon de convergence ρ_A de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^{pn}$ est $\rho_A=+\infty$ si $\rho=+\infty$ ou $\rho_A=\sqrt[p]{\rho}$ si ρ est fini.

Exercice 3 :

Déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{2n}$ et étudier la série pour $|z|=\rho$. Quelle est la somme de cette série ?

⇛ Tout d'abord, on peut dire que la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{2n}$ est une série du type $\sum_{n\geqslant 0}a_n z^{pn}$ où $p=2$. Le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{2n}$ est donc la racine carrée de du rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{n}$

⇛ Le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{n}$ est 1 et donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{2n}$ est donc 1

⇛ Nous avons :

$$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{2n}=\sum_{n\geqslant 0}\left(-z^2\right)^n=\frac{1}{1+z^2}$$

⇛ Si $|z|=1$, alors $\left|\left(-z^2\right)^n\right|=1$, et donc, le terme général de la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\left(-z^2\right)^n$ ne tend pas vers zéro, et la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\left(-z^2\right)^n$ ne peut converger.

Exercice 4 :

Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes telle qu'il existe un nombre complexe $z_0\in\mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}z^n$ a un rayon de convergence infini.

⇛ Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, cela veut dire qu'il existe un nombre réel $M>0$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $|a_n z_0^n|\leqslant M$

⇛ Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons :

$$\left|\frac{a_n}{n!}z^n\right|=\frac{|a_n|}{n!}|z|^n=\frac{|a_n z_0^n|}{n!}\frac{|z|^n}{|z_0|^n}\leqslant M\frac{\left|\frac{z}{z_0}\right|^n}{n!}$$

Nous savons que pour tout $t\in\mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}$ converge, et donc la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}M\frac{\left|\frac{z}{z_0}\right|^n}{n!}$ converge ; par majoration, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\left|\frac{a_n}{n!}z^n\right|$ est convergente.

⇛ Ainsi, pour tout $z\in\mathbb{C}$, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}z^n$ est absolument convergente et a donc un rayon de convergence infini.

Exercice 5 :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée.

1. *Que peut-on dire des rayons de convergence des séries $\sum_{n\geqslant 0}a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}z^n$?*

   ⇛ **Le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}a_n z^n$**

   La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite complexe bornée, il existe $M>0$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous ayions $|a_n|\leqslant M$.

Nous avons vu, dans la démonsration du corollaire 8.2.2 que le rayon de convergence de cette série était supérieur ou égal à 1.

$\Rightarrow$ **Le rayon de convergence de la série** $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$

Nous allons montrer que cette série converge uniformément pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Soit donc $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\left|\frac{a_n}{n!} z^n\right| = |a_n| \frac{|z|^n}{n!} \leqslant M \frac{|z|^n}{n!}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} M \frac{|z|^n}{n!}$ est une série numérique convergente, et donc, d'après les théorèmes de majoration sur les séries numériques, la série $\sum_{n\geqslant 0} \left|\frac{a_n}{n!} z^n\right|$ est donc aussi une série numéruique convergente.
Ce qui veut dire que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Le rayon de convergence de cette série est donc infini.

On note respectivement $f(z)$ et $g(z)$ les sommes de ces séries entières.

2. *Montrer que pour tout réel $x \in]0;1[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\, \mathrm{d}t$ est convergente.*

Faisons une remarque : Si la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$, elle converge donc absolument pour tout $t \in \mathbb{R}$, de telle sorte que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $g(t) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} t^n$ est parfaitement définie.

Soit $x \in]0;1[$

Nous allons démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente, c'est à dire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left|g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\right| \mathrm{d}t$ est définie.
Nous avons :

$$\left|g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\right| = \left|\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} t^n e^{\frac{-t}{x}}\right| \leqslant M e^{\frac{-t}{x}} \sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!} = M e^{\frac{-t}{x}} e^t$$

Ainsi, $\left|g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\right| \leqslant M e^{t\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

En appelant $\alpha = \left(1 - \frac{1}{x}\right)$, comme $x \in]0;1[$, nous avons $\left(1 - \frac{1}{x}\right) < 0$.

Comme nous savons que si $\alpha < 0$, les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\, \mathrm{d}t$ sont convergentes, nous déduisons que $\int_0^{+\infty} M e^{-t\left(1-\frac{1}{x}\right)}\, \mathrm{d}t$ converge et que, par les théorèmes de majoration, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left|g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\right| \mathrm{d}t$ converge et donc que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente, et donc convergente.

3. *Montrer que $\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\, \mathrm{d}t = x f(x)$ pour tout réel $x \in]0;1[$*

Cette question est plus difficile et mérite une attention certaine
$\Rightarrow$ On commence par un changement de variables.

Nous faisons donc le changement $t = xu \Longleftrightarrow u = \dfrac{t}{x}$ et donc $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = x \Longleftrightarrow \mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$ d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{\frac{-t}{x}}\,\mathrm{d}t = &\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u} x\,\mathrm{d}u\\ = &\; x\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Maintenant, il faut montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u}\,\mathrm{d}u = f(x)$

$\star$ Tout d'abord $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}(ux)^n e^{-u}\,\mathrm{d}u$ et donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u}\,\mathrm{d}u = &\int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\\ = &\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k x^k}{k!}\int_0^{+\infty} u^k e^{-u}\,\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$\star$ Lors de l'étude des intégrales généralisées, nous avons établi que

$$\int_0^{+\infty} u^k e^{-u}\,\mathrm{d}u = \Gamma(k+1) = k!$$

et nous avons donc :

$$\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Et donc

$$\left|\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u}\,\mathrm{d}u - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| = \left|\int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\right|$$

$\star$ De $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = f(x)$, nous allons montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^{+\infty} g(xu)\, e^{-u}\,\mathrm{d}u - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| = 0$$

c'est à dire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\right| = 0$

$\star$ Regardons tout d'abord $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\right|$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant &\int_0^{+\infty}\left|\sum_{k\geqslant n+1}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\right|\mathrm{d}u\\ \leqslant &\int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{|a_k|}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\\ \leqslant &\; M\int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{(ux)^k}{k!}e^{-u}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

⋆ Maintenant, nous devons voir que :

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{(ux)^k}{k!}=e^{ux}\iff\sum_{k=0}^{n}\frac{(ux)^k}{k!}+\sum_{k\geqslant n+1}\frac{(ux)^k}{k!}=e^{ux}\iff\sum_{k\geqslant n+1}\frac{(ux)^k}{k!}=e^{ux}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(ux)^k}{k!}$$

Et donc $\left|\int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\right|\leqslant M\int_0^{+\infty}\left(e^{ux}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(ux)^k}{k!}\right)e^{-u}\,\mathrm{d}u$

⋆ Or :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(e^{ux}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(ux)^k}{k!}\right)e^{-u}\,\mathrm{d}u &= \int_0^{+\infty}e^{u(x-1)}\,\mathrm{d}u-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x)^k}{k!}\int_0^{+\infty}u^ke^{-u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{+\infty}e^{u(x-1)}\,\mathrm{d}u-\sum_{k=0}^{n}x^k \text{ puisque } \int_0^{+\infty}u^ke^{-u}\,\mathrm{d}u=k!\end{aligned}$$

⋆ Calculons, maintenant $\int_0^{+\infty}e^{u(x-1)}\,\mathrm{d}u$

Pour $T>0$, nous avons :

$$\int_0^{T}e^{u(x-1)}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{x-1}\left[e^{u(x-1)}\right]_0^T=\frac{e^{T(x-1)}}{x-1}-\frac{1}{x-1}$$

Comme $x-1<0$, nous avons $\int_0^{+\infty}e^{u(x-1)}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{1-x}$

⋆ Ainsi, $\left|\int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\right|\leqslant M\left(\frac{1}{1-x}-\sum_{k=0}^{n}x^k\right)$

Comme $0<x<1$, nous avons $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1}{1-x}$, nous avons aussi, donc

$$\lim_{n\to+\infty}M\left(\frac{1}{1-x}-\sum_{k=0}^{n}x^k\right)=0$$

Comme $\left|\int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\right|\leqslant M\left(\frac{1}{1-x}-\sum_{k=0}^{n}x^k\right)$, nous avons aussi

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^{+\infty}\sum_{k\geqslant n+1}\frac{a_k}{k!}(ux)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u\right|=0$$

En conclusion, $\int_0^{+\infty}g(xu)\,e^{-u}\,\mathrm{d}u=f(x)$

Et donc $\int_0^{+\infty}g(t)\,e^{\frac{-t}{x}}\,\mathrm{d}t=xf(x)$ pour tout réel $x\in\,]0;1[$

Exercice 6 :

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ où $a_n=((-1)^n+2)^n$. Etudier le rayon de convergence de cette série. Que dire de la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

→ Tout d'abord, nous devons remarquer que $a_{2n}=3^n$ et $a_{2n+1}=1$.

Si $r>\frac{1}{3}$, alors $a_{2n}r^{2n}=3^{2n}r^{2n}=(3r)^{2n}$; comme $3r>1$ alors $\lim_{n\to+\infty}a_{2n}r^{2n}=\lim_{n\to+\infty}(3r)^{2n}=+\infty$ et donc la série $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ diverge.

Si ρ est le rayon de convergence de cette série, nous avons sûrement $\rho \leqslant \dfrac{1}{3}$

→ Pour $0 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{3}$, nous avons : $a_{2n}r^{2n} = 3^{2n}r^{2n} = (3r)^{2n}$

Comme $0 \leqslant 3r < 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (3r)^{2n}$ est sûrement convergente et avec $0 < r \leqslant \dfrac{1}{3} < 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} r^n$ est convergente.

→ Ainsi, ρ, le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est surement supérieur ou égal à $\dfrac{1}{3}$

→ Donc le rayon de convergence ρ est $\rho = \dfrac{1}{3}$

→ Appelons $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Nous avons :

$$w_{2n} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{1}{3^{2n}} \text{ et } w_{2n+1} = \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} = \frac{3^{2n+2}}{1} = 3^{2n+2}$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet donc pas de limite, et donc la suite $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite

Exercice 7 :

Quel est le rayon de convergence des séries suivantes ?

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$

   Ici, nous avons $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et donc $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$.

   Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ et le rayon de convergence de cette série est donc 1

2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}+2} z^n$

   Ici, $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}+2}$ et donc $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}+2} \times \dfrac{\sqrt{n}+2}{\ln n} = \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} \times \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n+1}+2}$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n+1}+2} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ et le rayon de convergence de cette série est donc 1

3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n+1}{(-3)^n} z^n$

   Nous avons donc $a_n = \dfrac{n+1}{(-3)^n}$ et donc $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n+2}{3^{n+1}} \times \dfrac{3^n}{n+1} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{n+2}{n+1}$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} dfrac13 \times \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{1}{3}$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{3}$ et donc $\rho = 3$

4. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$

   Avant de commencer, il faut remarquer que $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \mathrm{C}_{2n}^n = \dbinom{2n}{n}$.

   Nous avons

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)! \times (n+1)} \times \frac{n! \times n!}{(2n)! \times (2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1) \times (n+1)} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

Nous avons alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2\,(2n+1)}{n+1} = 4$ et donc, le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}z^n$ est $\dfrac{1}{4}$

Exercice 8 :

Donner le rayon de convergence des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{z^n}{n^n}$

   Ici, $a_n = \dfrac{1}{n^n}$ et $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$

   Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{z^n}{n^n}$ est donc $\rho = +\infty$

2. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{n}z^n$

   ⋆ Ici, $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}}$ et $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \left(e^{\frac{\ln n}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n^2}}$

   Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n^2} = 0$, et alors $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln n}{n^2}} = 1$, nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$
   Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{n}z^n$ est donc $\rho = +1$

   ⋆ Regardons ce qui se passe sur le cercle de convergence $|z| = 1$. Nous avons :

$$|a_n z^n| = \left|\sqrt[n]{n}z^n\right| = \left|\sqrt[n]{n}\right|\,|z|^n = e^{\frac{\ln n}{n}}$$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$, nous avons donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n z^n| = 1$ et la série diverge donc sur le cercle de convergence

3. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n z^n$

   ⋆ Nous avons $a_n = \left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et donc $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \left(2+\dfrac{1}{n}\right)$

   Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right) = 2$.

   Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n z^n$ est donc $\rho = \dfrac{1}{2}$

   ⋆ Regardons ce qui se passe sur le cercle de convergence $|z| = \dfrac{1}{2}$. Nous avons :

$$|a_n z^n| = \left|\left(2+\frac{1}{n}\right)^n z^n\right| = \left|\left(2+\frac{1}{n}\right)^n\right||z|^n = \left(2+\frac{1}{n}\right)^n\times\frac{1}{2^n} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

   Comme $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}$, que $\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}n\times\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty}|a_n z^n| = \sqrt{e}$
   La série diverge donc sur le cercle de convergence

4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{an+b}{n+d}\right)^n z^n$ *avec* $a>0$

- ⋆ Une nouvelle fois $a_n=\left(\dfrac{an+b}{n+d}\right)^n$ et donc $|a_n|^{\frac{1}{n}}=\left|\dfrac{an+b}{n+d}\right|$

  Nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{an+b}{n+d}\right|=|a|=a.$

  Le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{an+b}{n+d}\right)^n z^n$ avec $a>0$ est donc $\rho=\dfrac{1}{a}$

- ⋆ Regardons ce qui se passe sur le cercle de convergence $|z|=\dfrac{1}{a}$. Nous avons :

$$|a_nz^n|=\left|\left(\frac{an+b}{n+d}\right)^n z^n\right|=\left|\frac{an+b}{n+d}\right|^n|z|^n=\left|\frac{an+b}{n+d}\right|^n\times\frac{1}{a^n}=\left|\frac{an+b}{an+ad}\right|^n$$

  Regardons un peu l'expression $\dfrac{an+b}{an+ad}$. nous avons :

$$\frac{an+b}{an+ad}=\frac{an+b+ad-ad}{an+ad}=\frac{an+ad+b-ad}{an+ad}=1+\frac{b-ad}{a\,(n+d)}$$

  De plus, $\left|\dfrac{an+b}{an+ad}\right|^n=e^{n\ln\left(\left|\frac{an+b}{an+ad}\right|\right)}=e^{n\ln\left(\left|1+\frac{b-ad}{a\,(n+d)}\right|\right)}$.

  Et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(\left|1+\frac{b-ad}{a\,(n+d)}\right|\right)=\lim_{n\to+\infty}n\times\frac{b-ad}{a\,(n+d)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\,(b-ad)}{a\,(n+d)}=\frac{b-ad}{a}.$

  D'où nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(\left|\frac{an+b}{an+ad}\right|\right)}=\lim_{n\to+\infty}|a_nz^n|=e^{\frac{b-ad}{a}}$

  Le terme général ne tendant pas vers 0, la série diverge donc sur le cercle de convergence

Exercice 9 :

Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ *une série entière de rayon de convergence* ρ *et telle que* $a_0\neq 0$*. Démontrer qu'il existe une série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}b_nz^n$ *telle que* $\displaystyle\left(\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}b_nz^n\right)=1$

Nous avons $\displaystyle\left(\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}b_nz^n\right)=\sum_{n\geqslant 0}c_nz^n$ où $\displaystyle c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}.$

Pour que $\displaystyle\left(\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}b_nz^n\right)=1$, nous avons $c_0=1$, et pour $n\geqslant 1$, $c_n=0$.

Nous obtenons donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
a_0b_0=1 &\iff & b_0&=\frac{1}{a_0}\\
a_0b_1+a_1b_0=0 &\iff & b_1&=\frac{-a_1b_0}{a_0}=\frac{-a_1}{a_0^2}\\
\vdots & & \vdots &\\
\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}=0 &\iff & a_0b_n&=-\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n-i}\iff b_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{-a_i}{a_0}b_{n-i}
\end{aligned}$$

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie par récurrence. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}b_nz^n$ est donc bien définie

Exercice 10 :

En utilisant la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$*, calculer* $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$

1. Si nous considérons la série $S(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$, le rayon de convergence de cette série entière est 1 ; on le démontre avec la règle de D'Alembert.
2. La série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$ est une série alternée vérifiant le critère des séries alternées est donc une série convergente.
3. Si, pour $|x|<1$, nous avons $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$, d'après le théorème 8.5.1, on peut prolonger f par continuité en posant :
$$f(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$$
4. Si nous dérivons f, nous obtenons $f'(x)=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^n=\sum_{n\geqslant 0}(-x)^n=\frac{1}{1+x}$ pour $|x|<1$
5. D'où $f(x)=\ln(1+x)$ et $f(1)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2$

Exercice 11 :

En utilisant la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$*, calculer* $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

Répétition ! ! ! !

1. Si nous considérons la série $S(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, le rayon de convergence de cette série entière est 1 ; on le démontre avec la règle de D'Alembert.
2. La série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ est une série alternée vérifiant le critère des séries alternées et est donc une série convergente.
3. Si, pour $|x|<1$, nous avons $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, d'après le théorème 8.5.1, on peut prolonger f par continuité en posant :
$$f(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$
4. Si nous dérivons f, nous obtenons $f'(x)=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n\geqslant 0}\left(-x^2\right)^n=\frac{1}{1+x^2}$ pour $|x|<1$
5. D'où $f(x)=\arctan x$ et $f(1)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$

Exercice 12 :

On considère la série $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$

1. *Trouver le rayon de convergence de la série*

   Sans difficultés, bien entendu, le rayon de convergence de cette série est 1 ; il suffit d'utiliser le critère de D'Alembert *(A faire seul)*

2. *Trouver la série primitive de* $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$ *et en donner la somme*

   ▷ Clairement, la série primitive est donnée par $\sum_{n\geqslant 0}x^{n+1}$ qui a, elle aussi, pour rayon de convergence 1

   ▷ Nous avons, pour $|x|<1$, $\sum_{n\geqslant 0}x^{n+1}=x\sum_{n\geqslant 0}x^n=\dfrac{x}{1-x}$

3. *En déduire la somme de* $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$

   $S(x)=\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$ est donc la dérivée de $\dfrac{x}{1-x}$, et la dérivée de $\dfrac{x}{1-x}$ est donnée par $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

   Donc, pour $|x|<1$, $S(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

4. *Trouver la somme de la série* $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\frac{6}{32}+\cdots$

   Il suffit de remarquer que cette somme est :

$$1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\frac{6}{32}+\cdots+=\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=4$$

Exercice 13 :

Développer en série entière la fonction $f(x)=\arcsin x$ *en précisant le rayon de convergence.*

⋆ La dérivée de $f(x)=\arcsin x$ est $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

⋆ Pour $|x|<1$, nous avons $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}x^n$ et donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(-x^2)}}=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\left(-x^2\right)^n=\sum_{n\geqslant 0}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}x^{2n}$$

⋆ D'où, bien entendu, $\arcsin x=\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n+1)}x^{2n+1}$

Le rayon de convergence de la série est donc $\rho=1$

Exercice 14 :

Développer en série entière, au voisinage du 0, *les fonctions suivantes*

1. $\sin\left(x^2\right)$

   ⋆ Rappelons le développement en série entière de $\sin u$:

$$\sin u=\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}u^{2p+1}$$

   ⋆ Il suffit, maintenant, de remplacer u par x^2 et nous obtenons :

$$\sin x^2=\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\left(x^2\right)^{2p+1}=\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{4p+2}$$

   Le rayon de convergence de cette série est $+\infty$

2. $\cos 3x$

   Rien de nouveau ! ! $\cos u = \sum_{p \geqslant 0} \frac{(-1)^p}{(2p)!} u^{2p}$ et donc :

$$\cos 3x = \sum_{p \geqslant 0} \frac{(-1)^p}{(2p)!} (3x)^{2p} = \sum_{p \geqslant 0} \frac{(-9)^p}{(2p)!} x^{2p}$$

   Le rayon de convergence de cette série est $+\infty$

3. $\ln \left(1+x^2\right)$

   Voici une question un peu plus sexie. Nous proposons 2 méthodes *(en fait, très voisines)*

   → Première méthode :
   On connait déjà le développement en série entière de $\ln(1+u)$:

$$\ln(1+u) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n u^{n+1}}{n+1}$$

   Et donc, en remplaçant u par x^2, nous obtenons :

$$\ln\left(1+x^2\right) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n \left(x^2\right)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n+1}$$

   → Seconde méthode :
   Utilisons, maintenant, la dérivée de $\ln\left(1+x^2\right)$
   $\ln'\left(1+x^2\right) = \frac{2x}{1+x^2}$.
   Le développement en série entière de $\frac{1}{1+x^2}$ est donné par :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n x^{2n}$$

   Et donc celui de $\frac{2x}{1+x^2}$ est $\frac{2x}{1+x^2} = \sum_{n \geqslant 0} 2(-1)^n x^{2n+1}$, d'où, en passant à la primitive :

$$\ln\left(1+x^2\right) = \sum_{n \geqslant 0} 2(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1}$$

   Nous remarquons que nous arrivons au même résultat ! ! *(Ouf ! !)*
   Le rayon de convergence de cette série est 1

4. $\cos x e^x$

   Cette fois ci, c'est bien différent ! !

   ⋆ Nous commençons par écrire $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, de telle sorte que :

$$\cos x e^x = e^x \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) = \frac{e^{(1+i)x}+e^{(1-i)x}}{2}$$

   ⋆ D'une part :

$$e^{(1+i)x} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(1+i)^n x^n}{n!}$$

   Et d'autre part :

$$e^{(1-i)x} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(1-i)^n x^n}{n!}$$

De telle sorte que le développement en série entière de $\cos xe^x$ devient :

$$\cos xe^x = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{(1+i)^n x^n}{n!} + \sum_{n\geqslant 0}\frac{(1-i)^n x^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0}\left[(1+i)^n + (1-i)^n\right]\frac{x^n}{n!}$$

⋆ Maintenant, il faut évaluer $(1+i)^n + (1-i)^n$

▷ En utilisant la forme trigonométique de $1+i$, nous avons $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et donc

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{\frac{in\pi}{4}} = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{in\pi}{4}}$$

▷ De la même manière, nous avons $(1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{-in\pi}{4}}$

De telle sorte que $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(e^{\frac{in\pi}{4}} + e^{\frac{-in\pi}{4}}\right) = 2\times 2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

D'où nous avons $\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0}\left[(1+i)^n + (1-i)^n\right]\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0}2\times 2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}$, et donc :

$$\cos xe^x = \sum_{n\geqslant 0}2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}$$

Le rayon de convergence de cette série est $+\infty$ *Remarque :Pour résoudre cette question, nous sommes passés par l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, pour revenir à l'ensemble des nombres réels, puisque nous avions affaire à une fonction à valeurs réelles*

5. $\cos(x+1)$

En utilisant les formules d'addition, nous avons $\cos(x+1) = \cos x\cos 1 - \sin x\sin 1$

Et maintenant, en prenant les classiques développement en série de $\cos x$ et $\sin x$, nous avons :

$$\cos 1\cos x = \sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p\cos 1}{(2p)!}x^{2p} \text{ et } \sin x\sin 1 = \sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p\sin 1}{(2p+1)!}x^{2p+1}$$

Et en sommant, nous obtenons :

$$\cos(x+1) = \sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p\cos 1}{(2p)!}x^{2p} - \sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p\sin 1}{(2p+1)!}x^{2p+1}$$

De telle sorte que nous pourrions écrire $\cos(x+1) = \sum_{n\geqslant 0}a_n x^n$ où

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n\cos 1}{(2n)!} \text{ et } a_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}\sin 1}{(2n+1)!}$$

Le rayon de convergence de cette série est $+\infty$

6. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Remarquons tout d'abord que cette fonction n'est définie que pour $\frac{1+x}{1-x} > 0$, c'est à dire $|x| < 1$.
Nous allons donc tout d'abord simplifier cette fonction, pour $|x| < 1$

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$$

⋆ Nous connaissons le développement en série entière de $\ln(1-x)$. Nous avons :

$$\ln(1-x) = -\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

⋆ Et donc $\ln(1+x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

D'où, pour $|x| < 1$:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n + 1}{n+1} x^{n+1}$$

Remarquons que si n est impair, alors $(-1)^n + 1 = 0$ et que si n est pair, alors $(-1)^n + 1 = 2$, de telle sorte que

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{2n+1} x^{2n+1}$$

Et donc

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Le rayon de convergence de cette série est 1

Exercice 15 :

Développer en série entière, au voisinage du 0, les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$

   Nous allons d'abord décomposer f en éléments simples. Nous avons donc :

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{1-x}$$

   ♢ Tout d'abord, nous avons, et pour $|x| < 1$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geqslant 0} x^n$

   ♢ Ensuite : $\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2-x} = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{x}{2}}$

   Ainsi, pour $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2$, nous avons :

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2^n}$$

   Et donc $\frac{1}{x-2} = -\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2^{n+1}}$

   D'où, pour $|x| < 1$, nous avons :

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geqslant 0} x^n - \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \sum_{n\geqslant 0} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$$

   Le rayon de convergence de cette série est donc 1

2. $g(x) = \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$

   De manière claire et facile, nous avons $\ln\left(x^2 - 5x + 6\right) = \ln\left[(3-x)(2-x)\right] = \ln(3-x) + \ln(2-x)$.

   Remarquons que cette fonction f n'est définie que pour $x > 3$ ou $x < 2$ et que l'égalité $\ln\left(x^2 - 5x + 6\right) = \ln(3-x) + \ln(2-x)$ n'est correcte que si $x < 2$

   ♢ En dérivant $\ln(3-x)$, nous obtenons $\ln'(3-x) = \frac{-1}{3-x}$.

Comme tout à l'heure, nous avons $\dfrac{1}{3-x}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{1-\frac{x}{3}}$ et donc, pour $\left|\dfrac{x}{3}\right|<1\iff|x|<3$, nous avons :

$$\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{3^n}$$

Et donc

$$\frac{-1}{3-x}=\frac{-1}{3}\times\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{3^n}=-\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{3^{n+1}}$$

D'où $\ln(3-x)=-\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}+\ln 3$

◇ De même, en dérivant $\ln(2-x)$, nous obtenons $\ln'(3-x)=\dfrac{-1}{2-x}$.

Comme tout à l'heure, nous avons $\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}$ et donc, pour $\left|\dfrac{x}{2}\right|<1\iff|x|<2$, nous avons :

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{2^n}$$

Et donc

$$\frac{-1}{2-x}=\frac{-1}{2}\times\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{2^n}=-\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{2^{n+1}}$$

D'où $\ln(2-x)=-\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}+\ln 2$

Ainsi, pour $|x|<2$, nous avons :

$$\begin{aligned}\ln\left(x^2-5x+6\right) &= -\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}+\ln 3-\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}+\ln 2\\ &= \ln 6-\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ &= \ln 6-\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n}\right)\frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

3. $h(x)=\displaystyle\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t$

Assez simple, au fond ! h est la primitive de $\cos x^2$ qui s'annule en $x=0$

Nous avons donc $h'(x)=\cos x^2$

En reprenant le développement en série entière de $\cos u$, nous avons : $\cos u=\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{(2p)!}u^{2p}$ d'où

$$\cos x^2=\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{(2p)!}\left(x^2\right)^{2p}=\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{4p}$$

Et donc, en intégrant :

$$h(x)=\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{(2p)!\,(4p+1)}x^{4p+1}$$

Exercice 16 :

Déterminer, en précisant leur rayon de convergence, les solutions développables en série entière de l'équation différentielle $xy''+(x-2)\,y'-2y=0$

Supposons qu'il existe une solution f de l'équation différentielle proposée, non identiquement nulle, et développable en série entière sur un intervalle $]-\rho;\rho[$ où ρ est le rayon de convergence à déterminer.

Supposons donc que nous ayions $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$

Alors :

▷ $f'(x) = \sum_{n \geqslant 0} n a_n x^{n-1}$ et $x f'(x) = \sum_{n \geqslant 0} n a_n x^n = \sum_{n \geqslant 1} n a_n x^n$.

D'autre part, $-2f'(x) = \sum_{n \geqslant 0} -2n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geqslant 1} -2n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geqslant 0} -2(n+1) a_{n+1} x^n$ et donc

$$(x-2) f'(x) = -2a_1 + \sum_{n \geqslant 1} [n a_n - 2(n+1) a_{n+1}] x^n$$

▷ Maintenant, $f''(x) = \sum_{n \geqslant 0} n(n-1) a_n x^{n-2}$ et $x f''(x) = \sum_{n \geqslant 0} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n \geqslant 2} n(n-1) a_n x^{n-1}$.

Nous avons donc $x f''(x) = \sum_{n \geqslant 1} n(n+1) a_{n+1} x^n$.

Et donc f est solution de l'équation différentielle $xy'' + (x-2) y' - 2y = 0$ si et seulement si :

$$\sum_{n \geqslant 1} n(n+1) a_{n+1} x^n - 2a_1 + \sum_{n \geqslant 1} [n a_n - 2(n+1) a_{n+1}] x^n - 2 \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n = 0$$
$$\iff$$
$$(-2a_1 - 2a_0) + \sum_{n \geqslant 1} (n(n+1) a_{n+1} + [n a_n - 2(n+1) a_{n+1}] - 2a_n) x^n = 0$$
$$\iff$$
$$(-2a_1 - 2a_0) + \sum_{n \geqslant 1} (n-2) [(n+1) a_{n+1} + a_n] x^n = 0$$
$$\iff$$
$$-2(a_1 + a_0) - (2a_2 + a_1) x + \sum_{n \geqslant 3} (n-2) [(n+1) a_{n+1} + a_n] x^n = 0$$

De l'unicité du développement en série entière, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{rl} a_0 + a_1 = & 0 \\ 2a_2 + a_1 = & 0 \\ (n-2) [(n+1) a_{n+1} + a_n] = & 0 \text{ pour } n \geqslant 3 \end{array} \right.$$
$$\iff$$
$$\left\{ \begin{array}{rl} a_0 + a_1 = & 0 \\ 2a_2 + a_1 = & 0 \\ (n+1) a_{n+1} + a_n = & 0 \text{ pour } n \geqslant 3 \end{array} \right.$$
$$\iff$$
$$\left\{ \begin{array}{rl} a_0 + a_1 = & 0 \\ 2a_2 + a_1 = & 0 \\ a_{n+1} = & \dfrac{-a_n}{n+1} \text{ pour } n \geqslant 3 \end{array} \right.$$

▷ Des égalités $a_0 + a_1 = 0$ et $2a_2 + a_1 = 0$, nous tirons $a_1 = -a_0$ et $a_2 = \frac{-a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$, d'où nous tirons une première écriture de f :

$$f(x) = a_0 \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) + \sum_{n \geqslant 3} a_n x^n$$

▷ Il reste maintenant à calculer a_n pour $n \geqslant 3$ De la dernière identité $a_{n+1} = \frac{-a_n}{n+1}$ vraie pour

$n \geqslant 3$, nous tirons :

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{-a_3}{4} \\ a_5 &= \frac{-a_4}{5} \\ a_6 &= \frac{-a_5}{6} \\ &\vdots \\ a_{k+1} &= \frac{-a_k}{k+1} \\ a_{k+2} &= \frac{-a_{k+1}}{k+2} \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= \frac{-a_{n-2}}{n-1} \\ a_n &= \frac{-a_{n-1}}{n} \end{aligned}$$

En multipliant termes à termes, nous obtenons :

$$a_4 \times a_5 \times a_6 \times \cdots \times a_{n-1} \times a_n = (-1)^{n-3} \times a_3 \times a_4 \times a_5 \times \cdots \times a_{n-2} \times a_{n-1} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \cdots \times \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n}$$

Et donc, par simplification, nous obtenons

$$a_n = (-1)^{n-3} \times a_3 \times \frac{1}{3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (n-1) \times n} = (-1)^{n-3} \times a_3 \times \frac{6}{n!}$$

▷ D'où nous pouvons écrire f par :

$$f(x) = a_0 \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) + 6a_3 \sum_{n \geqslant 3} \frac{(-1)^{n-3}}{n!} x^n = a_0 \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) - 6a_3 \sum_{n \geqslant 3} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

Il est simple de voir que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = e^{-x}$ et que, donc $\displaystyle\sum_{n \geqslant 3} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2}$

Ainsi, $f(x) = a_0 \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) - 6a_3 \left(e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\right) = (a_0 + 6a_3)\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) - 6a_3 e^{-x}$

Et la solution générale de l'équation différentielle $xy'' + (x-2)y' - 2y = 0$ est donc :

$$f(x) = \lambda \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) + \mu e^{-x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

Le rayon de convergence ρ

Comme la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $\rho = +\infty$, la solution f est vraie sur $\mathbb{R}$ en entier

Exercice 17 :

Montrer que la fonction f définie sur $]-1;+1[$ par $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire le développement en série entière de cette fonction.

1. En supposant $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ solution d'une équation différentielle sur l'intervalle $]-1;+1[$, nous pouvons écrire

$$\sqrt{1-x^2} f(x) = \arcsin x$$

En calculant la dérivée, nous obtenons :

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} f(x) + \sqrt{1-x^2} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et donc, pour $x \in]-1;+1[$, nous pouvons multiplier par $\sqrt{1-x^2}$, nous avons :

$$-xf(x) + \left(1-x^2\right) f'(x) = 1$$

f est donc solution de l'équation $\left(1-x^2\right) y' - xy = 1$

2. En supposant $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ pour $x \in]-1;+1[$, nous avons :
   $\to$ $xf(x) = x\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} a_{n-1} x^n$
   $\to$ $f'(x) = \sum_{n\geqslant 0} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} x^n$
   $\to$ $x^2 f'(x) = \sum_{n\geqslant 0} n a_n x^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n+1} = \sum_{n\geqslant 2} (n-1) a_{n-1} x^n$
   D'où nous devons avoir les relations :
$$\sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n\geqslant 2} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n\geqslant 1} a_{n-1} x^n = 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a_1 + 2a_2 x + \sum_{n\geqslant 2} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n\geqslant 2} (n-1) a_{n-1} x^n - a_0 x - \sum_{n\geqslant 2} a_{n-1} x^n = 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a_1 + (2a_2 - a_0) x + \sum_{n\geqslant 2} \left((n+1) a_{n+1} - (n-1) a_{n-1} - a_{n-1}\right) x^n$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a_1 + (2a_2 - a_0) x + \sum_{n\geqslant 2} \left((n+1) a_{n+1} - n a_{n-1}\right) x^n = 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a_1 + \sum_{n\geqslant 1} \left((n+1) a_{n+1} - n a_{n-1}\right) x^n = 1$$

3. D'où nous tirons :
$$\begin{cases} a_1 = & 1 \\ (n+1) a_{n+1} - n a_{n-1} = & 0 \text{ pour } n \geqslant 1 \end{cases}$$
   $\to$ Sachant que $f(0) = \dfrac{\arcsin 0}{\sqrt{1-0^2}} = 0 = a_0$ et que $a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_{n-1}$, nous avons, pour les termes d'ordre pair $a_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p} a_{2p-2}$, ce qui donne, par une récurrence simple, puisque $a_0 = 0$, que tous les termes d'ordre pair sont nuls.
   $\to$ Regardons les termes d'ordre impair. Nous avons :
$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{2}{3} a_1 \\ a_5 &= \frac{4}{5} a_3 \\ a_7 &= \frac{6}{7} a_5 \\ &\vdots \\ a_{2n-1} &= \frac{2n-2}{2n-1} a_{2n-3} \\ a_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} a_{2n-1} \end{aligned}$$

Et donc, en multipliant termes à termes, nous obtenons :

$$a_3 \times a_5 \times a_7 \times \cdots \times a_{2n-1} \times a_{2n+1} = a_1 \times a_3 \times a_5 \times \cdots \times a_{2n-1} \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}{3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)}$$

$$\iff$$

$$a_{2n+1} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} 2k}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k+1)}$$

$$\iff$$

$$a_{2n+1} = \frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} 2k\right)\left(\prod\limits_{k=1}^{n} 2k\right)}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} (2k+1)\right)\left(\prod\limits_{k=1}^{n} 2k\right)}$$

$$\iff$$

$$a_{2n+1} = \frac{2^n\left(\prod\limits_{k=1}^{n} k\right)\left(2^n\prod\limits_{k=1}^{n} k\right)}{(2n+1)!}$$

$$\iff$$

$$a_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

D'où

$$f(x) = x + \sum_{n\geqslant 1} a_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

En ayant remarqué que $1 = a_1 = \dfrac{2^0(0!)^2}{(2\times 0+1)!}$

Exercice 20 :

1. *Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :*

   (a) $e^z = -2$

   Nous avons $e^z = -2 \iff e^z = 2e^{i(\pi+2k\pi)} \iff e^x \times e^{iy} = 2e^{i(\pi+2k\pi)}$
   Nous en déduisons $x = \ln 2$ et $y = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est donc

   $$\mathcal{S} = \{z = \ln 2 + i(\pi + 2k\pi) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$$

   (b) $|\cos z| = |\sin z|$

   Nous avons $|\cos z| = |\sin z| \iff |\cos z|^2 = |\sin z|^2$
   En posant $z = x+iy$, nous avons $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y + i\sin x \sinh y$ et donc $|\cos z|^2 = \cos^2 x\cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y$.
   De la même manière *(formule d'adition et égalités)*, nous avons $|\sin z|^2 = \sin^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x\sinh^2 y$, et donc :

   $$\begin{aligned}|\cos z|^2 = |\sin z|^2 &\iff \cos^2 x\cosh^2 y + \sin^2 x\sinh^2 y = \sin^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x\sinh^2 y\\ &\iff \left(\sinh^2 y - \cosh^2 y\right)\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 0\end{aligned}$$

   Comme, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\sinh y \neq \cosh y$, nous avons $\left(\sinh^2 y - \cosh^2 y\right) \neq 0$ et donc :

   $$|\cos z|^2 = |\sin z|^2 \iff \cos^2 x = \sin^2 x \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

   Ainsi, $|\cos z| = |\sin z| \iff z = \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\right) + iy$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{R}$

2. *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $|\sin(x+iy)| = |\sin x + \sin(iy)|$*

   Nous avons, comme précédemment, $|\sin(x+iy)| = |\sin x + \sin(iy)| \iff |\sin(x+iy)|^2 = |\sin x + \sin(iy)|^2$
   Facile, finalement.
   → Nous avons déjà démontré que $|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y$.
   → D'autre part, $|\sin x + \sin(iy)|^2 = |\sin x + i\sinh y|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$
   → En revenant à $\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y$, nous avons :

   $$\begin{aligned}\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y &= \sin^2 x\left(1+\sinh^2 y\right) + \cos^2 x \sinh^2 y \\ &= \sin^2 x + \sin^2 x \sinh^2 x + \cos^2 x \sinh^2 y \\ &= \sin^2 x + \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\sinh^2 y = \sin^2 x + \sinh^2 y\end{aligned}$$

   En conclusion, nous avons bien

   $$|\sin(x+iy)|^2 = |\sin x + \sin(iy)|^2 \iff |\sin(x+iy)| = |\sin x + \sin(iy)|$$

3. *Etablir les inégalités suivantes, vraies pour tout $z \in \mathbb{C}$*

   (a) $|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z|\, e^{|z|}$

   ⇒ Nous avons, tout d'abord, $|e^z - 1| = \left|\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n!}\right|$.

   Ensuite, $\left|\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{z^n}{n!}\right| = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1$

   Nous venons donc de montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1$

   ⇒ En second lieu, $e^{|z|} - 1 \leqslant |z|\, e^{|z|} \iff e^{|z|} - 1 - |z|\, e^{|z|} \leqslant 0 \iff e^{|z|}(1-|z|) - 1 \leqslant 0$
   Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^x(1-x) - 1$.
   La dérivée de f est, sur $\mathbb{R}^+$: $f'(x) = e^x(1-x) - e^x = -xe^x$
   Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$ nous avons $f'(x) \leqslant 0$ et donc, f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, ce qui veut dire que, pour tout $x \geqslant 0$ $f(x) \leqslant f(0) = 0$
   Et donc, pour tout $x \geqslant 0$, $e^x(1-x) - 1 \leqslant 0 \iff e^x - 1 \leqslant xe^x$

   ⇒ Comme, pour tout $x \geqslant 0$, nous avons $e^x - 1 \leqslant xe^x$, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons l'inégalité :

   $$e^{|z|} - 1 \leqslant |z|\, e^{|z|}$$

   En conclusion, nous avons la double inégalité, vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z|\, e^{|z|}$
   Ce que nous voulions

   (b) $|\cos z| \leqslant \cosh|z|$

   Nous avons, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\cos z| = \left|\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right|$.
   Par l'inégalité triangulaire des modules, nous avons :

   $$|\cos z| = \left|\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 0}\frac{|z|^{2n}}{(2n)!} = \cosh|z|$$

   Donc $|\cos z| \leqslant \cosh|z|$
   La démonstration est absolument identique pour démontrer que $|\sin z| = |\sinh z|$

Exercice 21 :

Soit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. On suppose qu'elle diverge pour $z = 3+4i$ et qu'elle converge pour $z = 5i$.
Quel est son rayon de convergence ?

Soit ρ le rayon de convergence de la série.
- Si la série diverge pour $z = 3+4i$, alors $\rho \leqslant |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
- Si, au contraire, la série converge pour $z = 5i$, alors $\rho \geqslant |5i| = 5$

Donc, $\rho = 5$

Exercice 22 :

Démontrer que si une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument pour un $z_0 \in \mathbb{C}$, alors elle converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$

Cet exercice ne pose pas de difficulté.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. Alors :

$$|a_n z^n| = |a_n|\,|z|^n < |a_n|\,|z_0|^n$$

Par hypothèse, la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} |a_n|\,|z_0|^n$ converge, et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|$ converge.
Ce qui veut dire que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$

Exercice 23 :

Donner le rayon de convergence des séries :

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{1+2+\cdots+n}$

   Identité connue : $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ de telle sorte que nous pouvons écrire :

   $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{1+2+\cdots+n} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{n(n+1)} z^n$$

   Et le rayon de convergence est donc 1

2. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n} z^n$

   Appelons $a_n = \frac{n!}{n^n}$; alors :

   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\times n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

   Nous avons $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.

   En $+\infty$, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\simeq} \frac{1}{n}$, et donc $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e$, et nous en déduisons donc que $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{e}$ et le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n} z^n$ est donc $\rho = e$

3. $\sum_{n\geqslant 1} \cosh n z^n$

   ⋆ Rappelons que $\cosh n = \frac{e^n + e^{-n}}{2}$ et que donc

   $$\frac{\cosh(n+1)}{\cosh n} = \frac{e^{n+1}+e^{-n-1}}{e^n+e^{-n}} = \frac{e^n e + e^{-n} e}{e^n + e^{-n}} = \frac{e^n\left(e+e^{-2n-1}\right)}{e^n\left(1+e^{-2n}\right)} = \frac{e+e^{-2n-1}}{1+e^{-2n}}$$

   ⋆ Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{e+e^{-2n-1}}{1+e^{-2n}} = e$, le rayon de converge est $\rho = \frac{1}{e}$

⋆ Regardons la convergence sur le cercle de convergence.
Si $|z| = \dfrac{1}{e}$, alors :

$$|\cosh nz^n| = \frac{e^n + e^{-n}}{2}\,|z|^n = \frac{e^n + e^{-n}}{2e^n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n + e^{-n}}{2e^n} = \dfrac{1}{2}$, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} |\cosh nz^n|$ ne peut être convergente, et la série n'est donc pas convergente sur le cercle de convergence.

4. $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{an^2+bn+c} z^n$

⋆ Nous avons

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{a(n+1)^2+b(n+1)+c}}{e^{an^2+bn+c}} = \frac{e^{an^2}e^{2an}e^{a}e^{bn}e^{b}e^{a}}{e^{an^2}e^{bn}e^{c}} = e^{2an+a+b} = e^{a(2n+1)+b}$$

⋆ Si $a > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a(2n+1)+b} = +\infty$ et le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{an^2+bn+c} z^n$ est $\rho = 0$

⋆ Si $a = 0$, alors $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = e^b$ et le rayon de convergence de la série est alors $\rho = \dfrac{1}{e^b} = e^{-b}$

Que se passe-t-il sur le cercle de convergence ?
Si $|z| = e^{-b}$, alors $\left|e^{an^2+bn+c} z^n\right| = \left|e^{bn+c}\right| |z|^n = e^{bn}e^{c}e^{-bn} = e^c$.
La série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left|e^{bn+c} z^n\right|$ diverge alors grossièrement et la série ne converge pas sur le cercle de convergence.

⋆ Si $a < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a(2n+1)+b} = 0$ et le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{an^2+bn+c} z^n$ est $\rho = +\infty$, c'est à dire que la série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$

Exercice 24 :

Donner le rayon de convergence des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) z^n$

Question qui ne pose pas de difficulté puisque le terme *cos* $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est borné. Le rayon de convergence de cette série est donc de 1

2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\right]^n z^n$

Au vu de l'expression du coefficient, nous utilisons la règle de Cauchy.
Si $a_n = \left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\right]^n$, alors $(a_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$. Nous devons donc rechercher $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$.

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = e$ et le rayon de convergence de cette série est $\dfrac{1}{e}$

3. $\sum_{n\geqslant 0} i^n z^n$

Puisque $|i^n| = 1$, le coefficient est borné et le rayon de convergence de cette série est bien 1
Il est possible d'en connaître la somme :

En effet, $\sum_{n\geqslant 0} i^n z^n = \sum_{n\geqslant 0} (iz)^n = \dfrac{1}{1-iz}$

Facile !!

4. $\sum_{n\geqslant 2} (1+ni)\, z^n$

En utilisant la règle de D'Alembert, nous avons $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{\sqrt{1+n^2}}$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{\sqrt{1+n^2}} = 1$$

Et donc le rayon de convergence de cette série est donc 1.
Donc, pour $|z|<1$, nous avons : $\sum_{n\geqslant 2}(1+ni)\,z^n = \sum_{n\geqslant 2} z^n + \sum_{n\geqslant 2} niz^n$

Nous regardons plus précisément :

- $\sum_{n\geqslant 2} z^n = \sum_{n\geqslant 0} z^n - 1 - z = \dfrac{1}{1-z} - (1+z) = \dfrac{z^2}{1-z}$
- $\sum_{n\geqslant 2} niz^n = iz\sum_{n\geqslant 2} nz^{n-1} = iz\left(\sum_{n\geqslant 1} nz^{n-1} - 1\right) = iz\left(\dfrac{1}{(1-z)^2} - 1\right) = iz\dfrac{2z-z^2}{(1-z)^2}$

D'où, pour $|z|<1$, $\sum_{n\geqslant 2}(1+ni)\,z^n = \dfrac{z^2}{1-z} + iz\dfrac{2z-z^2}{(1-z)^2} = \dfrac{-(1+i)\,z^3 + (1+2i)\,z^2}{(1-z)^2}$

5. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{2^n}{n^2} z^n$

Par la règle de D'Alembert, $\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \times \dfrac{n^2}{2^n} = \dfrac{2n^2}{(n+1)^2}$, et donc $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2}{(n+1)^2} = 2$ et le rayon de convergence de cette série est $\dfrac{1}{2}$

6. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^3}{3^n} z^n$

On résoud juste comme au dessus : $\dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \times \dfrac{3^n}{n^3} = \dfrac{(n+1)^3}{3n^3}$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)^3}{3n^3} = \dfrac{1}{3}$ et donc, le rayon de convergence de la série est 3

7. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}+2} z^n$

Toujours D'Alembert

$$\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}+2} \times \frac{\sqrt{n}+2}{\ln n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \times \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n+1}+2}$$

- $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = \dfrac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} = \dfrac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \dfrac{1}{\ln n} \times \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

  Et donc $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$

▷ D'autre part, $\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n+1}+2} \underset{+\infty}{\simeq} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$, nous avons aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n+1}+2} = 1$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}+2} \times \dfrac{\sqrt{n}+2}{\ln n} = 1$ et donc le rayon de convergence de cette série est 1

8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{(-3)^n} z^n$

Toujours Monsieur Jean Le Rond D'Alembert....

$$\left|\frac{n+2}{(-3)^{n+1}} \times \frac{(-3)^n}{n+1}\right| = \frac{n+2}{3(n+1)}$$

Et, surprise, le rayon de convergence de cette série est 3

9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) z^n$

Pour nous simplifier la vie, nous appelons $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Comme, pour $t \in [0; +1]$, nous avons $\dfrac{1}{e} \leqslant e^t \leqslant 1$, alors :

$$\frac{1}{e}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \Longleftrightarrow \frac{1}{e(n+1)} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) z^n$ a même rayon de convergence que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n+1}$ c'est à dire 1

Le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) z^n$ est donc 1

Exercice 25 :

Quel est le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k\times k!}{n!}\right) z^n$ *?*

Ici, le coefficient de la série est $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k\times k!}{n!}$ et c'est à lui que nous nous intéressons !!

Nous appelons ρ le rayon de convergence de la série

▷ Tout d'abord, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k\times k!}{n!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\times k!}{n!} + \frac{n\times n!}{n!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\times k!}{n!} + n.$

Nous avons donc $a_n > n$. Le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nz^n$ est 1, et donc, d'après 8.2.1 nous avons $\rho \leqslant 1$

▷ Maintenant, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, nous avons $\dfrac{k\times k!}{n!} \leqslant 1$

En effet,

$$\frac{k\times k!}{n!} = \frac{k}{(k+1)(k+2)\cdots(k+(n-k))} = \frac{k}{k+1} \times \frac{1}{(k+2)\cdots(k+(n-k))} \leqslant \frac{k}{k+1} \leqslant 1$$

Ainsi, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\times k!}{n!} + n \leqslant n-1+n < 2n$

Le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} 2nz^n$ est aussi 1, et donc, d'après 8.2.1 nous avons $\rho \geqslant 1$

Donc $\rho = 1$

Exercice 26 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence ρ de la série $\sum_{n\geqslant 0} \arctan n^\alpha x^n$, pour $x \in \mathbb{R}$. Etudier cette série lorsque $x = \rho$ ou $x = -\rho$

1. Etude du rayon de convergence
   $\Rightarrow$ Si $\alpha > 0$.
   Alors $0 \leqslant \arctan n^\alpha < \dfrac{\pi}{2}$
   Le coefficient de la série est borné et donc, d'après le théorème 8.2.2 le rayon de convergence est $\rho = 1$
   $\Rightarrow$ Si $\alpha = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\arctan n^0 = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ et donc le rayon de convergence est $\rho = 1$
   $\Rightarrow$ Si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$ et donc $\arctan n^\alpha \underset{+\infty}{\simeq} n^\alpha$. La série $\sum_{n\geqslant 0} \arctan n^\alpha x^n$ admet alors pour rayon de convergence $\rho = 1$
2. Etude si $x = 1$ ou $x = -1$
   $\Rightarrow$ Si $\alpha \geqslant 0$, alors la série devient
   - $\star$ Si $x = 1$, $\sum_{n\geqslant 0} \arctan n^\alpha$ qui diverge puisque le terme général de la série ne tend pas vers 0
   - $\star$ Si $x = -1$, $\sum_{n\geqslant 0} \arctan n^\alpha (-1)^n$ qui diverge puisque le terme général de la série ne tend pas vers 0
   - $\star$ Et si $\alpha = 0$, que ce soit pour $x = 1$ ou $x = -1$, le problème est le même ; il y a divergence de la série

   $\Rightarrow$ Si $\alpha < 0$ et $x = 1$, alors la série devient $\sum_{n\geqslant 0} \arctan n^\alpha = \sum_{n\geqslant 0} \arctan \dfrac{1}{n^{-\alpha}}$.
   Comme $\arctan \dfrac{1}{n^{-\alpha}} \underset{+\infty}{\simeq} \dfrac{1}{n^{-\alpha}}$, la série converge si et seulement si $-\alpha > 1$, c'est à dire $\alpha < -1$; elle diverge donc si $-1 \leqslant \alpha < 0$
   $\Rightarrow$ Si $\alpha < 0$ et $x = -1$, alors la série devient $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \arctan n^\alpha$. C'est une série alternée, qui vérifie le critère de convergence des séries alternées et qui est donc convergente.

Exercice 27 :

Déterminer le rayon de convergence ρ de la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n z^n$ où $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2-1}$.

Il faut remarquer que v_n est la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{4n^2-1}$.

Le terme général de catte série est $\dfrac{1}{4n^2-1}$ et nous avons $\dfrac{1}{4n^2-1} \underset{+\infty}{\simeq} \dfrac{1}{4n^2}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{4n^2}$ est une série de Riemann convergente.

Si $L = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{4n^2-1}$, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{1}{3} \leqslant v_n < L$.

Les coefficients de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} v_n z^n$ sont donc bornés et le rayon de convergence de la série est donc 1

Si $|z| = 1$, alors $|v_n z^n| = v_n$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$, la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n z^n$ est divergente si $|z| = 1$

Exercice 28 :

Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$; on désigne par a_n le nombre de diviseurs de n. Déterminer le rayon *de convergence ρ de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n z^n$*

⇒ Première chose, nous appelons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, D_n l'ensemble des diviseurs de n ; donc $a_n = \text{Card } D_n$. Très clairement, $2 \leqslant a_n < n$

⇒ La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} 2z^n$ a pour rayon de convergence 1. D'après le théorème 8.2.1, nous avons $\rho \leqslant 1$

⇒ Recherchons le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} nz^n$.

En utilisant la règle de D'Alembert, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$ et donc, le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} nz^n$ est donc 1

Tojours d'après le théorème 8.2.1, comme $a_n < n$, nous avons $\rho \geqslant 1$

Et donc $\rho = 1$

Exercice 29 :

1. *On note a_n la n-ième décimale du développement décimal de $\sqrt{3}$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n z^n$?*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $0 \leqslant a_n \leqslant 9$; la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, le rayon de convergence de cette série est 1. Si $z = 1$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ est divergente.

2. *Déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}^*\\ n \text{ premier}}} z^n$*

   C'est, en fait une série du type $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ avec $a_n = 0$ si n est composé et $a_n = 1$ si n est premier.

   La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée et le rayon de convergence est donc $\rho = 1$

   Pour aller plus loin

   Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une bijection croissante, quel est le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} z^{\varphi(n)}$?

   De la même manière, c'est une série du type $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où $a_n = 1$ s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = \varphi(p)$ et 0 sinon.

   Comme ci-dessus, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et le rayon de convergence est donc $\rho = 1$

Exercice 30 :

On considère les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence ρ_A et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ de rayon de convergence ρ_B. Nous supposons $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = l$. Comparer ρ_A et ρ_B

Nous allons traiter 2 cas ; le premier cas où $l \neq 0$ et le second où $l = 0$.

→ **Supposons** $l \neq 0$

⋆ Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N$, alors $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - l\right| \leqslant 1$.

En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| - |l| \leqslant \left|\dfrac{a_n}{b_n} - l\right| \leqslant 1$, c'est à dire, si $n \geqslant N$, nous avons : $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| - |l| \leqslant 1$ et donc $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| \leqslant |l| + 1$. Or :

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leqslant |l| + 1 \Longleftrightarrow a_n \in O(b_n)$$

Et donc, d'après 8.2.1 $\rho_A \geqslant \rho_B$

⋆ Comme $l \neq 0$, de $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, nous pouvons écrire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{l}$

Par le même raisonnement que précédemment, nous pouvons écrire que $b_n \in O(a_n)$ et donc que $\rho_B \geqslant \rho_A$

Ainsi, si $l \neq 0$, alors $\rho_A = \rho_B$

→ **On ne peut rien affirmer si $l = 0$**

Prenons par exemple la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n$; dans ce cas le rayon de convergence est 1.

Et si $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ avec $b_n = n!$, le rayon de convergence est 0.

Les 2 rayons de convergence sont différents et nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n!} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(n-1)!} 0$

Exercice 31 :

Donner le rayon de convergence et la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} (2^n + 1) z^n$

— Le rayon de convergence est une question classique. On utilise donc d'Alembert :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{2^{n+1} + 1}{2^n + 1} \right| = \frac{\left(2^{n+1} + 1\right)}{2^n + 1} = \frac{2^{n+1}\left(1 + 2^{-n-1}\right)}{2^n\left(1 + 2^{-n}\right)} = \frac{2\left(1 + 2^{-n-1}\right)}{\left(1 + 2^{-n}\right)}$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2\left(1 + 2^{-n-1}\right)}{\left(1 + 2^{-n}\right)} = 2$; la série converge si $|z| < \frac{1}{2}$.

— <u>Pour trouver la somme de cette série</u>, nous allons utiliser deux autres séries $\sum\limits_{n \geqslant 0} 2^n z^n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 0} z^n$

⊕ La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} z^n$ converge pour $|z| < 1$ et a pour somme $\sum\limits_{n \geqslant 0} z^n = \frac{1}{1-z}$

⊕ La série $\sum\limits_{n \geqslant 0} 2^n z^n$ converge pour $|z| < \frac{1}{2}$ *(facile à montrer)* et a pour somme

$$\sum_{n \geqslant 0} 2^n z^n = \sum_{n \geqslant 0} (2z)^n = \frac{1}{1-2z}$$

Ainsi, pour $|z| < \frac{1}{2}$, nous avons $\sum\limits_{n \geqslant 0} (2^n + 1) z^n = \sum\limits_{n \geqslant 0} 2^n z^n + \sum\limits_{n \geqslant 0} z^n = \frac{1}{1-2z} + \frac{1}{1-z} = \frac{2-3z}{(1-z)(1-2z)}$

Donc $\boxed{\sum\limits_{n \geqslant 0} (2^n + 1) z^n = \frac{2-3z}{(1-z)(1-2z)}}$

On met en évidence ici, le fait si $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence R_a et $\sum\limits_{n \geqslant 0} b_n z^n$ a un rayon de convergence R_b, alors si $|z| < \min(R_a, R_b)$, alors $\sum\limits_{n \geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$ converge et $\sum\limits_{n \geqslant 0} (a_n + b_n) z^n = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n + \sum\limits_{n \geqslant 0} b_n z^n$

Exercice 32 :

1. *Donner le rayon de convergence de la série* $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{1}{(n+5)!} (z+5)^n$

Nous avons $\left| \frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)} \right| = \frac{(n+5)!}{(n+6)!} |z+5| = \frac{|z+5|}{n+6}$

Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|z+5|}{n+6} = 0$; le rayon de convergence est donc infini. La série converge sur $\mathbb{C}$ en entier

2. *En admettant que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!} = e^z$, donner la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+5)!}(z+5)^n$*

   Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+5)!}(z+5)^n &= \sum_{n\geqslant 5} \frac{1}{n!}(z+5)^{n-5} \\ &= \frac{1}{(z+5)^5} \sum_{n\geqslant 5} \frac{1}{n!}(z+5)^n \\ &= \frac{1}{(z+5)^5}\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}(z+5)^n - \left(1+(z+5)+\frac{(z+5)^2}{2}+\frac{(z+5)^3}{6}+\frac{(z+5)^4}{24}\right)\right) \\ &= \frac{1}{(z+5)^5}\left(e^{(z+5)} - \left(1+(z+5)+\frac{(z+5)^2}{2}+\frac{(z+5)^3}{6}+\frac{(z+5)^4}{24}\right)\right)\end{aligned}$$

Exercice 33 :

1. *Donner le développement en série entière, en précisant son rayon de convergence, de la fonction* $\arctan$

   Pour donner le développement de $\arctan x$ en série entière, nous allons commencer par donner celui de sa dérivée.
   Nous avons $(\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et si $|x|<1$, alors $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n\geqslant 0}(-x^2)^n = \sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{2n}$.

   Donc, le développement de $\arctan x$ en série entière est, pour $|x|<1$ $\arctan x = \sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$

2. *En déduire la valeur de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n \times \dfrac{1}{2n+1}$*

   Remarquons que :

$$\left(\frac{-1}{3}\right)^n = \frac{(-1)^n}{3^n} = (-1)^n\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]^n = (-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$$

   Or, $\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$ et donc :

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{-1}{3}\right)^n \times \frac{1}{2n+1}$$

   D'où $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n \times \dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$

3. *Calculer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction* $\arctan$ *et donner le développement en série entière de cette fonction, en précisant son rayon de convergence*

   Le calcul de la primitive de $\arctan x$ est un calcul classique vu en L_0 ; on l'obtient en faisant une intégration par parties.

   Nous avons donc $\displaystyle\int \arctan x \,\mathrm{d}x = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$. C'est bien la primitive de $\arctan x$ qui s'annule en $x=0$

   Donc, pour $|x|<1$, $x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} = \sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$

4. *En déduire la valeur de* $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$

Nous appelons $S(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$. Le rayon de convergence de cette série est 1

⊕ $S(1)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ est une série absolument convergente.

En effet, $\sum_{n\geqslant 0}\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}\right|=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

Comme $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\underset{+\infty}{\simeq}\frac{1}{4n^2}$ et que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{4n^2}$ est une série de Riemann convergente, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ converge

⊕ D'après le théorème « à la mode Abel » 8.5.1, on peut prolonger $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ en $x=1$, en posant $f(1)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$

⊕ Or, $f(1)=\arctan 1-\ln 2=\frac{\pi}{4}-\ln 2$ et donc

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{\pi}{4}-\ln 2$$

Exercice 34 :

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

Voici un exercice qui ne devrait pas poser de difficultés

1. **Recherche du rayon de convergence**
   Serez vous étonnés que le rayon de convergence soit 1 ?....Si oui, il y a encore du travail ! !
2. **Donc, pour $|x|<1$, nous appelons** $F(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

⇒ De la décomposition $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, nous pouvons écrire $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\frac{x^{n+1}}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ d'où, pour $|x|<1$, nous avons :

$$F(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{n+1}}{n}-\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

⇒ Etudions, maintenant $g(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Pour $|x|<1$ la dérivée $g'(x)$ s'exprime $g'(x)=\sum_{n\geqslant 1}x^n=\sum_{n\geqslant 0}x^n-1=\frac{1}{1-x}-1$.

D'où, en passant à la primitive, nous avons $g(x)=-\ln(1-x)-x$

⇒ Passons à la seconde expression $h(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{n+1}}{n}$ définie pour $|x|<1$.

Nous pouvons écrire, toujours pour $|x|<1$, $h(x)=xh_1(x)$ où $h_1(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}$.

Si nous dérivons $h_1(x)$, nous obtenons $h_1'(x)=\sum_{n\geqslant 1}x^{n-1}=\sum_{n\geqslant 0}x^n=\frac{1}{1-x}$.

Nous en déduisons que $h_1(x)=-\ln(1-x)$ et que, donc $h(x)=-x\ln(1-x)$

Nous en déduisons que $F(x) = h(x) - g(x) = -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x = x + (1-x)\ln(1-x)$

Ainsi, si $|x| < 1$, nous avons $F(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$

Exercice 35 :

Calculer la somme de la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

⇒ La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ est une série numérique alternée. On démontre facilement qu'elle est convergente puisqu'elle vérifie le critère des séries alternées.

⇒ **Recherche de la somme de** $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

⊕ On considère la série entière d'une variable réelle $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$

Le rayon de convergence de cette série est clairement 1 *(Utiliser la règle de D'Alembert)*
On peut remarquer que

$$S(-1) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{3n+1}}{3n+1} = -\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{3n}}{3n+1} = -\sum_{n\geqslant 0} \frac{\left((-1)^3\right)^n}{3n+1} = -\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

De la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$, on peut déduire que la série $S(-1) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{3n+1}}{3n+1}$ est convergente, et d'après le théorème « à la Abel » 8.5.1 nous pouvons déduire que

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} S(x)$$

Reste, maintenant à calculer $S(x)$

⊕ Pour $|x| < 1$, la série dérivée de S est $S'(x) = \sum_{n\geqslant 0} x^{3n} = \sum_{n\geqslant 0} \left(x^3\right)^n = \frac{1}{1-x^3}$.

Calculons, maintenant, $\int \frac{1}{1-x^3}\,\mathrm{d}x$

La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{1-x^3}$ nous donne :

$$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{1-x} + \frac{x+2}{x^2+x+1}\right\}$$

Et donc $\int \frac{1}{1-x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left\{\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x\right\}$

⊕ Il est facile de voir que $\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-x)$

⊕ Remarquons, dans un premier temps, que :

$$\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{x^2+x+1}$$

Donc $\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$

⋆ Clairement, et facilement, $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x^2+x+1\right) + c$ où $c \in \mathbb{R}$

⋆ Ensuite, c'est un travail classique de calcul de primitive :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du \text{ où nous avons fait le changement de variables } u=x+\frac{1}{2}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+c \text{ où } c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x^3}\,\mathrm{d}x &= \frac{-1}{3}\ln(1-x)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{3}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\lambda\\ &= \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)+\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\ln(1-x)+\lambda\end{aligned}$$

où $\lambda\in\mathbb{R}$

Comme $S(0)=0$, nous avons $\sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}+\lambda=0 \Longleftrightarrow \lambda=-\sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

Et nous avons donc

$$S(-1)=\sqrt{3}\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln 2-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{1}{3}\ln 2$$

En conclusion, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+\frac{1}{3}\ln 2$

Exercice 36 :

Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$; montrer que $f(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,n!}x^{2n+1}$

Il faut noter qu'ici, f est la primitive de la fonction e^{-x^2} qui s'annule en $x=0$.

▷ Nous avons alors $f'(x)=e^{-x^2}$ et le développement en série entière de e^{-x^2} est donné par :

$$e^{-x^2}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!}=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$$

▷ Et donc, par primitivation, nous obtenons

$$f(x)=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,n!}$$

Ce que nous voulions

Remarquons que le rayon de convergence de cette série est $+\infty$

Exercice 37 :

Déterminer le développement en série entière de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{(2x+3)^2}$. Préciser le rayon de convergence de la série entière

Nous allons proposer 2 méthodes pour résoudre cet exercice

1. <u>Première méthode</u>

   Il est tout à fait loisible que nous puissions nous ramener à une expression du type $u(x)=(1+x)^\alpha$, et nous aurions, ici, $\alpha=-2$. Il faut donc « *touiller* » un peu !

Pour commencer, $2x+3=3\left(\dfrac{2x}{3}x+1\right)$, et donc

$$f(x)=\frac{1}{(2x+3)^2}=(2x+3)^{-2}=3^{-2}\left(\frac{2x}{3}+1\right)^{-2}$$

Développons, pour $|u|<1$ l'expression $(1+u)^{-2}$ en série entière.

$$\begin{aligned}(1+u)^{-2} &= 1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{-2(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}u^n\\ &= 1+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{2(3)\cdots(n+1)}{n!}u^n\\ &= 1+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{(n+1)!}{n!}u^n\\ &= 1+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n(n+1)u^n\end{aligned}$$

Et donc, pour $\left|\dfrac{2x}{3}\right|<1\iff|x|<\dfrac{3}{2}$, nous avons :

$$\left(\frac{2x}{3}+1\right)^{-2}=1+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{2^n(n+1)}{3^n}x^n$$

D'où

$$\begin{aligned}f(x)=3^{-2}\left(\frac{2x}{3}+1\right)^{-2} &= \frac{1}{9}\left(1+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{2^n(n+1)}{3^n}x^n\right)\\ &= \frac{1}{9}+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{2^n(n+1)}{3^{n+2}}x^n\\ &= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{2^n(n+1)}{3^{n+2}}x^n\end{aligned}$$

Le rayon de convergence est de $\rho=\dfrac{3}{2}$

2. Seconde méthode

La seconde méthode consiste à partir de la fonction $u(x)=\dfrac{1}{2x+3}$ et à remarquer que $u'(x)=\dfrac{-2}{(2x+3)^2}=-2f(x)$

▷ Le développement de $u(x)$ est classique :

$$\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1+\frac{2x}{3}}$$

Et donc, pour $\left|\dfrac{2x}{3}\right|<1\iff|x|<\dfrac{3}{2}$, nous avons :

$$\frac{1}{1+\frac{2x}{3}}=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\left(\frac{2x}{3}\right)^n=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{2^n}{3^n}x^n$$

D'où, pour $|x|<\dfrac{3}{2}$, nous avons $u(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{2^n}{3^{n+1}}x^n$

▷ En dérivant, nous obtenons le développement de $u'(x)$:

$$u'(x)=\frac{-2}{(2x+3)^2}=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{n\times 2^n}{3^{n+1}}x^{n-1}$$

▷ Et donc, de $u'(x) = -2f(x) \iff f(x) = \dfrac{-1}{2}u'(x)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{-1}{2}\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{n\times 2^n}{3^{n+1}}x^{n-1}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}\frac{n\times 2^{n-1}}{3^{n+1}}x^{n-1}\\
&= \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{n\times 2^{n-1}}{3^{n+1}}x^{n-1}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n}\frac{(n+1)\times 2^{n}}{3^{n+2}}x^{n}
\end{aligned}$$

A noter

Nous avons, très souvent écrit quelque chose du type :

$$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}\frac{n\times 2^{n-1}}{3^{n+1}}x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{n\times 2^{n-1}}{3^{n+1}}x^{n-1}$$

En effet, il faut remarquer que :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}\frac{n\times 2^{n-1}}{3^{n+1}}x^{n-1} &= \underbrace{(-1)^{0+1}\frac{0\times 2^{0-1}}{3^{0+1}}x^{0-1}}_{n=0} + \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n+1}\frac{n\times 2^{n-1}}{3^{n+1}}x^{n-1}\\
&= \underbrace{0}_{n=0} + \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{n\times 2^{n-1}}{3^{n+1}}x^{n-1}\\
&= \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{n\times 2^{n-1}}{3^{n+1}}x^{n-1}
\end{aligned}$$

Exercice 38 :

Déterminer le développement en série entière de la fonction f définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$. Préciser le rayon de convergence de la série entière

Nous allons donner 2 résolutions de cet exercice

1. Première résolution

   Remarquons, que pour $|x| < 1$, nous avons $\ln(x+1) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, et donc, toujours pour $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}
(x+1)\ln(x+1) &= (x+1)\left(\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\\
&= \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n} + \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\\
&= \sum_{n\geqslant 2}(-1)^{n-2}\frac{x^{n}}{n-1} + \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\\
&= x + \sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{(-1)^{n-2}}{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)x^n\\
&= x + \sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{(-1)^{n-2}n + (-1)^{n-1}(n-1)}{n(n-1)}\right)x^n\\
&= x + \sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{n\left((-1)^{n-2} + (-1)^{n-1}\right) - (-1)^{n-1}}{n(n-1)}\right)x^n\\
&= x + \sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n
\end{aligned}$$

Donc, pour $|x|<1$, nous avons $(x+1)\ln(x+1) = x + \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$

2. Seconde résolution
   L'autre méthode de résolution consiste à remarquer que $f'(x) = \ln(x+1)+1$ et que, donc, pour $|x|<1$, nous avons
   $$f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + 1$$
   Et, en primitivant et remarquant que $f(0)=0$, nous avons, pour $|x|<1$:
   $$f(x) = x + \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + \sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$$

Ainsi, 2 méthodes pour arriver au même résultat

Exercice 39 :

Soit $\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n}{C_{2n}^n} x^n$

1. *Donner le rayon de convergence de la série*

   On utilise la bonne vieille règle de D'Alembert :
   $$\begin{aligned} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \frac{C_{2n+2}^{n+1}}{C_{2n}^n} = \frac{(2n+2)!n!n!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \end{aligned}$$
   Donc, $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 4$ et le rayon de convergence est donc $\rho = \frac{1}{4}$

2. *Montrer que si* $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n}{C_{2n}^n} x^n$*,* f *est solution de l'équation différentielle*
   $$\begin{cases} 2(x-x^2)y' - (2x+1)y = -1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

   Ce n'est pas une question très compliquée mais immensément calculatoire qui pourrait conduire à des erreurs de calcul. Donc prendre beaucoup de soins lors de la résolution
   - → Pour nous simplifier la vie, nous allons appeler $a_n = \frac{4^n}{C_{2n}^n}$ quitte ensuite, et le moment venu, à remplacer a_n par sa valeur.
     $f(x)$ s'écrira donc, pour $|x|<\frac{1}{4}$, $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$
   - → Prenons les choses petit à petit :
     - ⋆ Nous avons $xf(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} a_{n-1} x^n$
     - ⋆ De telle sorte que :
       $$(2x+1)f(x) = \sum_{n\geqslant 1} 2a_{n-1}x^n + \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = a_0 + \sum_{n\geqslant 1} (2a_{n-1}+a_n) x^n$$
   - → Ensuite, comme toujours :
     $$f'(x) = \sum_{n\geqslant 0} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} x^n$$
     Remarquons que $f'(0) = a_1 = \frac{4}{C_2^1} = \frac{4}{2} = 2$. Ca commence bien !!

- ⋆ Ensuite :

$$\begin{aligned}x^2 f'(x) = & \sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,a_{n+1}x^{n+2} = a_1x^2+2a_2x^3+\sum_{n\geqslant 2}(n+1)\,a_{n+1}x^{n+2}\\ = & \ a_1x^2+2a_2x^3+\sum_{n\geqslant 4}(n-1)\,a_{n-1}x^n = \sum_{n\geqslant 2}(n-1)\,a_{n-1}x^n\end{aligned}$$

- ⋆ Et, puis, pour $xf'(x)$:

$$xf'(x) = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,a_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} na_nx^n$$

- ⋆ Et pour terminer :

$$\begin{aligned}2\left(x-x^2\right)f'(x) = & \ 2\left[xf'(x)-x^2f'(x)\right] = 2\left[\sum_{n\geqslant 1} na_nx^n - \sum_{n\geqslant 2}(n-1)\,a_{n-1}x^n\right]\\ = & \ 2\left[a_1x+\sum_{n\geqslant 2} na_nx^n - \sum_{n\geqslant 2}(n-1)\,a_{n-1}x^n\right]\\ = & \ 2a_1x+\sum_{n\geqslant 2}2\left(na_n-(n-1)\,a_{n-1}\right)x^n\end{aligned}$$

→ Faisons maintenant la synthèse :

$$\begin{aligned}2\left(x-x^2\right)f'(x)-(2x+1)\,f(x) = & \ 2a_1x+\sum_{n\geqslant 2}2\left(na_n-(n-1)\,a_{n-1}\right)x^n - a_0 - \sum_{n\geqslant 1}\left(2a_{n-1}+a_n\right)x^n\\ = & \ 2a_1x+\sum_{n\geqslant 2}2\left(na_n-(n-1)\,a_{n-1}\right)x^n -\\ & \quad a_0-\left(2a_0+a_1\right)x-\sum_{n\geqslant 2}\left(2a_{n-1}+a_n\right)x^n\\ = & \ -a_0+\left(a_1-2a_0\right)x+\sum_{n\geqslant 2}\left(2\left(na_n-(n-1)\,a_{n-1}\right)-\left(2a_{n-1}+a_n\right)\right)x^n\\ = & \ -1+\sum_{n\geqslant 2}\left(2na_n-2\,(n-1)\,a_{n-1}-2a_{n-1}-a_n\right)x^n\\ = & \ -1+\sum_{n\geqslant 2}\left((2n-1)\,a_n-2na_{n-1}\right)x^n\end{aligned}$$

Maintenant, évaluons $(2n-1)\,a_n-2na_{n-1}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}(2n-1)\,a_n-2na_{n-1} = & \ \frac{(2n-1)\,4^n}{\mathrm{C}_{2n}^n}-\frac{2n4^{n-1}}{\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}}\\ = & \ \frac{(2n-1)\,4^n\times n!n!}{(2n)!}-\frac{(2n)\,4^{n-1}\times(n-1)!\,(n-1)!}{(2n-2)!}\\ = & \ \frac{4^{n-1}\times(n-1)!\,(n-1)!}{(2n-2)!}\left[\frac{(2n-1)\,4n^2}{2n\,(2n-1)}-2n\right]\\ = & \ \frac{4^{n-1}\times(n-1)!\,(n-1)!}{(2n-2)!}\left[\frac{4n^2}{2n}-2n\right]\\ = & \ 0\end{aligned}$$

f vérifie bien l'équation différentielle $2\left(x-x^2\right)y'-(2x+1)\,y=-1$ et $y'(0)=2$

Exercice 40 :

Former de deux façons le développement en série entière en 0 de $f(x)=e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$. En déduire la relation $\displaystyle\binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{4^n}{2n+1}$

Nous allons donc utiliser 2 méthodes pour trouver le développement en série entière de $f(x)$:

▷ Une méthode utilisant les équations différentielles
▷ Une seconde méthode utilisant le produit des séries

Dans les 2 cas, nous posons $G(x) = \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$, et nous pouvons remarquer que $G'(x) = e^{x^2}$. Remarquons aussi que $f(0) = 0$

- **Equation différentielle vérifiée par f**
  - → $f'(x) = -2xe^{-x^2}G(x) + e^{-x^2}G'(x) = -2xf(x) + e^{x^2}e^{-x^2} = -2xf(x) + 1$
    Ainsi, f vérifie l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$ avec comme condition initiale $y(0) = 0$
  - → Supposons $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.
    Alors, $f'(x) = \sum_{n\geqslant 0} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1)\,a_{n+1}x^n$ et $2xf(x) = \sum_{n\geqslant 0} 2a_n x^{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} 2a_{n-1}x^n$
  - → D'où :

$$\begin{gathered} y' + 2xy = 1 \\ \Longleftrightarrow \\ \sum_{n\geqslant 0} (n+1)\,a_{n+1}x^n + \sum_{n\geqslant 1} 2a_{n-1}x^n = 1 \\ \Longleftrightarrow \\ a_1 + \sum_{n\geqslant 1} \left((n+1)\,a_{n+1} + 2a_{n-1}\right)x^n = 1 \end{gathered}$$

  D'où nous tirons :

$$\left\{\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ (n+1)\,a_{n+1} + 2a_{n-1} &= 0 \end{aligned}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= -\frac{2}{(n+1)}a_{n-1} \end{aligned}\right.$$

  D'où nous tirons :

$$\left\{\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_3 &= \frac{-2}{3}a_1 \\ a_5 &= \frac{-2}{5}a_3 \\ &\vdots \quad \vdots \\ a_{2n+1} &= \frac{-2}{2n+1}a_{2n-1} \end{aligned}\right.$$

  Ainsi, en effectuant le produit termes à termes, nous obtenons :

$$a_1 \times a_3 \times \cdots \times a_{2n+1} = \frac{(-1)^n \times 2^n}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)} \times a_1 \times a_3 \times \cdots \times a_{2n-1}$$

  D'où nous obtenons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{2n+1} = \frac{2^n \times (-1)^n}{\prod_{k=0}^{n} (2k+1)}$$

  Comme $a_0 = 0$, la récurrence nous montre que tous les termes d'ordre pair sont nuls, ce qui est conforme au fait que f soit une fonction impaire.

- **Utilisation du produit de Cauchy**
  - → Développement en série entière de e^{-x^2}
    Nous avons $e^x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ et donc $e^{-x^2} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$
  - → Développement en série entière de $G(x)$

Comme $G'(x) = e^{x^2}$, nous avons le développement en série entière de $G'(x)$: $G'(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{n!}$

et donc $G(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}$

→ Développement en série entière de $f(x)$

Nous avons $e^{-x^2} = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!}$ et $G(x) = \sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ avec $b_{2n} = 0$

et $b_{2n+1} = \frac{1}{n!\,(2n+1)}$ et $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

⋆ Regardons les termes d'ordre pair :

$$c_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} a_k b_{2n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} b_{2n-2k} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} b_{2n-(2k+1)}$$

Parce que $b_{2n} = 0$, $b_{2n-2k} = b_{2(n-k)} = 0$ et $a_{2k+1} = 0$, nous avons $c_{2n} = 0$

⋆ Maintenant, les termes d'ordre impair :

$$c_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k b_{2n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} b_{2n+1-2k} + \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} b_{2n+1-(2k+1)}$$

A nouveau, $b_{2n+1-(2k+1)} = b_{2n-2k} = b_{2(n-k)} = 0$, et donc $c_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} b_{2n+1-2k}$, et donc :

$$c_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!\,(2(n-k)+1)}$$

• **De l'unicité du développement en série entière de** f, nous avons :

$$\frac{2^n \times (-1)^n}{\prod_{k=0}^{n} (2k+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!\,(2(n-k)+1)}$$

Ce qui est, en soi, une jolie identité qu'il est encore possible de rendre plus « sexie ».

⋆ Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\frac{2^n \times (-1)^n}{\prod_{k=0}^{n} (2k+1)} &= \frac{2^n \times (-1)^n \times \prod_{k=0}^{n} (2k)}{\prod_{k=0}^{n} (2k+1) \times \prod_{k=0}^{n} (2k)} \\
&= \frac{2^n \times (-1)^n \times 2^n \times n!}{(2n+1)!} \\
&= \frac{(-1)^n \times 4^n \times n!}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n \times 4^n \times n!}{(2n+1)\,(2n)!}
\end{aligned}$$

⋆ Ensuite :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!\,(2(n-k)+1)} &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{n!}{(n-k)!\,(2(n-k)+1)} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, \mathrm{C}_n^k \times \frac{1}{(2(n-k)+1)}
\end{aligned}$$

Nous avons $\mathrm{C}_n^k \times \dfrac{1}{(2(n-k)+1)} = \mathrm{C}_n^{n-k} \times \dfrac{1}{(2(n-k)+1)}$ et $(-1)^k = (-1)^n \times (-1)^{n-k}$, d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!\,(2(n-k)+1)} &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \times \frac{1}{(2(n-k)+1)} \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \mathrm{C}_n^{n-k} \times \frac{1}{(2(n-k)+1)} \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \times \frac{1}{(2k+1)}
\end{aligned}$$

⋆ En faisant l'égalité déjà démontrée, nous avons :

$$\frac{(-1)^n \times 4^n \times n!}{(2n+1)\,(2n)!} = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \times \frac{1}{(2k+1)}$$
$$\iff$$
$$\frac{4^n \times n!}{(2n+1)\,(2n)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \times \frac{1}{(2k+1)}$$
$$\iff$$
$$\frac{4^n}{(2n+1)} = \frac{(2n)!}{n! \times n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \times \frac{1}{(2k+1)}$$
$$\iff$$
$$\frac{4^n}{(2n+1)} = \mathrm{C}_{2n}^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \times \frac{1}{(2k+1)}$$

Ce qui donne avec les notations classiques : $\displaystyle \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n}{2n+1}$

8.11.2 Exercices divers

Exercice 41 :

Nous considérons la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. On suppose que cette série est absolument convergente pour $|z|<1$ et si $|z|<1$, on note $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ sa somme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons :

⇒ $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$

⇒ $T_n = \dfrac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1} = \dfrac{S_n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ (Moyenne de Césaro)

1. *Montrer que si $|z|<1$, alors la série $\sum_{n\geqslant 0} S_n z^n$ est absolument convergente et admet pour somme $H(z) = \dfrac{f(z)}{1-z}$*

   (a) Remarquons que l'expression $S_n z^n$ s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rl}
S_n z^n = & (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\, z^n \\
= & a_0 z^n + a_1 z^n + a_2 z^n + \cdots + a_n z^n \\
= & a_0 z^n + (a_1 z)\, z^{n-1} + (a_2 z^2)\, z^{n-2} + \cdots + (a_n z^n)\, z^0 \\
= & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k z^k)\, z^{n-k}
\end{array}\right.$$

En fait $S_n z^n$ apparaît donc comme un produit de Cauchy du type $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

(b) Ici, $S_n z^n$ est le terme d'ordre n du produit de 2 séries :
- ⋆ La première étant la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ qui admet pour somme, si $|z| < 1$, $f(z)$
- ⋆ La seconde étant la série $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ qui admet pour somme, si $|z| < 1$, $\dfrac{1}{1-z}$

(c) Ainsi, pour $|z| < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} S_n z^n$ admet pour somme $\dfrac{f(z)}{1-z}$

2. *Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} T_n z^n$?*

Considérons $G(z) = \sum_{n\geqslant 0} T_n z^{n+1}$. Alors

$$G'(z) = \sum_{n\geqslant 0} (n+1) T_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} (n+1) \frac{S_n}{n+1} z^n = \sum_{n\geqslant 0} S_n z^n$$

$\sum_{n\geqslant 0} S_n z^n$ apparaît donc comme la série dérivée de la série $\sum_{n\geqslant 0} T_n z^{n+1}$ qui admettent donc le même rayon de convergence 1.

Comme $G(z) = \sum_{n\geqslant 0} T_n z^{n+1} = z\left(\sum_{n\geqslant 0} T_n z^n\right)$, la série $\sum_{n\geqslant 0} T_n z^n$ admet donc même rayon de convergence que G

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} T_n z^n$ est donc 1

Exercice 42 :

1. *Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^k}{n!} z^n$, pour $k \in \mathbb{N}$*

Question simple qui se résoud à l'aide du classique rapport $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\dfrac{(n+1)^k n!}{n^k (n+1)!}\right|$ et on trouve que le rayon de convergence est infini

2. *Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme de degré k tel que, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^k}{n!} z^n = P_k(z) e^z$*

Nous allons faire une récurrence sur $k \in \mathbb{N}$

→ **Tout d'abord, c'est vrai pour $n = 0$**

En effet, nous avons $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^0}{n!} z^n = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n!} = e^z$ et donc $P_0(z) = 1$

→ **Supposons la propriété vraie à l'ordre k, c'est à dire** $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^k}{n!} z^n = P_k(z) e^z$ avec P_k polynôme de degré k

→ **Démontrons la propriété à l'ordre $k+1$**

Posons $\Phi_k(z) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^k}{n!} z^n$.

Par hypothèse de récurrence, nous avons $\Phi_k(z) = P_k(z) e^z$

- ⋆ La série dérivée de $\Phi_k(z) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^k}{n!} z^n$ est $\Phi_k'(z) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^{k+1}}{n!} z^{n-1}$.

  Nous avons donc $z\Phi_k'(z) = \Phi_{k+1}(z)$

- ⋆ Nous avons aussi $\Phi_k'(z) = (P_k(z)e^z)' = P_k'(z)e^z + P_k(z)e^z = e^z(P_k'(z) + P_k(z))$
- ⋆ Ainsi $\Phi_{k+1}(z) = [z(P_k'(z) + P_k(z))]e^z$

  Remarquons que $z(P_k'(z) + P_k(z))$ est un polynôme de degré $k+1$

  En posant $P_{k+1}(z) = z(P_k'(z) + P_k(z))$, nous avons démontré que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{k+1}}{n!} z^n = P_{k+1}(z)e^z$

La question est donc démontrée : pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme de degré k tel que, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^k}{n!} z^n = P_k(z)e^z$

Remarquons que ces polynômes sont parfaitement définis par la relation de récurrence ci-après :

$$\begin{cases} P_0(z) = & 1 \\ P_{k+1}(z) = & z(P_k'(z) + P_k(z)) \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi $P_1(z) = z$, $P_2(z) = z(1+z) = z^2 + z$, $P_3(z) = z\left(2z+1+z^2+1\right) = z^3 + 2z^2 + 2z$

Exercice 43 :

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos(\alpha \arcsin x)$

1. *Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 dont f est solution.*

   Nous allons nous mettre à calculer les dérivées premières et secondes.

   ▷ La dérivée première est donnée par $f'(x) = -\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\alpha \arcsin x)$, c'est à dire

   $$\sqrt{1-x^2} f'(x) = -\alpha \sin(\alpha \arcsin x)$$

   ▷ Dérivons les deux membres de l'égalité ci-dessus ; nous obtenons :

   $$\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} f'(x) + \sqrt{1-x^2} f''(x) = \frac{-\alpha^2}{\sqrt{1-x^2}} \cos(\alpha \arcsin x)$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$-xf'(x) + \left(1-x^2\right) f''(x) = -\alpha^2 f(x) \text{ après multiplication par } \sqrt{1-x^2}$$

   ▷ En remarquant que $f(0) = \cos(\alpha \arcsin 0) = 1$, f vérifie donc l'équation différentielle :

   $$\begin{cases} \left(1-x^2\right) y'' - xy' + \alpha^2 y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. *En déduire un développement en série entière de f .*

   Supposons donc que $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que $a_0 = 1$ et que f étant paire, les termes d'ordre impair sont nuls

   ▷ Nous avons $f'(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ et donc $xf'(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^n$

   ▷ Et donc $f''(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n\geqslant 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$

   - ⋆ Donc $x^2 f''(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} n(n-1) a_n x^n$
   - ⋆ Et $f''(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n\geqslant 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$

Nous devons donc avoir :

$$\sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n\geqslant 2}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n\geqslant 1}na_nx^n+\sum_{n\geqslant 0}\alpha^2a_nx^n=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$2a_2+6a_3x+\sum_{n\geqslant 2}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n\geqslant 2}n(n-1)a_nx^n-a_1x-\sum_{n\geqslant 2}na_nx^n+\alpha^2a_0+\alpha^2a_1x+\sum_{n\geqslant 2}\alpha^2a_nx^n=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(\alpha^2a_0+2a_2\right)+\left(6a_3-a_1+\alpha^2a_1\right)x+\sum_{n\geqslant 2}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-na_n+\alpha^2a_n\right]x^n=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(\alpha^2a_0+2a_2\right)+\left(6a_3-a_1+\alpha^2a_1\right)x+\sum_{n\geqslant 2}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-\left(n^2-\alpha^2\right)a_n\right]x^n=0$$

Nous tirons donc $a_{2p+1}=0$ et $(n+2)(n+1)a_{n+2}-\left(n^2-\alpha^2\right)a_n=0$, et en faisant le calcul habituel, nous obtenons :

$$a_{2p}=\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{(2k-2)^2-\alpha^2}{2k(2k-1)}\right)a_0 \text{ avec } a_0=1$$

Exercice 44 :

Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ une série entière de la variable réelle avec $a_n\in\mathbb{R}^+$ et $x\in\mathbb{R}$ de rayon de convergence infini.
Montrer que si $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ est bornée, alors f est constante.

Supposons f bornée

→ Si $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ est constante, alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\lambda$ et donc si $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$, en particulier $f(x)=f(0)=a_0=\lambda$

→ Supposons qu'il existe $k>0$ tel que $a_k\neq 0$. Soit k_0 le plus petit entier tel que $a_{k_0}\neq 0$. Alors :

$$f(x)=a_0+a_{k_0}x_{k_0}+\sum_{n\geqslant k_0+1}a_nx^n=a_0+a_{k_0}x_{k_0}\left(1+\sum_{n\geqslant k_0+1}a_nx^{n-k_0}\right)$$

Ainsi, pour $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant a_0+a_{k_0}x_{k_0}$, et donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
f n'est donc pas bornée.
Il y a donc contradiction. Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}$ avec $k\geqslant 1$, $a_k=0$ et donc $f(x)=a_0$ et f est donc bornée.

Exercice 45 :

Bien entendu, cet exercice est le prolongement du précédent
Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $\rho=+\infty$ et de somme $f(z)=\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$

1. *Soient $r\geqslant 0$ et $n\in\mathbb{N}$. Calculer $L(r,n)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta$*

   Nous nous fixons donc $r\geqslant 0$ et $n\in\mathbb{N}$.
   Soit $R\in\mathbb{R}^+$ tel que $R>r$ et nous appelons $D(O,R)=\{z\in\mathbb{C}\text{ tels que }||<R\}$.

La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge uniformément sur $D(O,R)$ et il nous est possible de « permuter signes somme et intégrale », et donc :

$$\begin{aligned} L(r,n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k\geqslant 0} a_k r^k e^{ik\theta}\right)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{k\geqslant 0}\frac{a_k r_k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(e^{ik\theta}\right)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k\geqslant 0}\frac{a_k r_k}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

→ Pour calculer $\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta$, nous allons étudier $\int_0^{2\pi} e^{ip\theta}\,\mathrm{d}\theta$ pour $p\in\mathbb{Z}$

→ Si $p=0$, alors $\int_0^{2\pi} e^{ip\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi$

→ Si $p\neq 0$, alors $\int_0^{2\pi} e^{ip\theta}\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{e^{ip\theta}}{ip}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{2i\pi\theta}-1}{ip} = 0$

Et donc $\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$ si $k=n$ et $\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$ si $k\neq n$, de telle sorte que :

$$L(r,n) = \sum_{k\geqslant 0}\frac{a_k r_k}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{a_n r_n}{2\pi}\times 2\pi = a_n r^n$$

2. *En déduire que, si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante*

→ Supposons f bornée sur $\mathbb{C}$.
Il existe donc $M>0$ tel que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|f(z)|\leqslant M$

→ Ainsi :

$$\begin{aligned} |L(r,n)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\right|\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\left|e^{-in\theta}\right|\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\times M\times 2\pi = M \end{aligned}$$

Ainsi, si f bornée sur $\mathbb{C}$, $L(r,n) = a_n r^n$ est aussi borné sur $\mathbb{C}$, et par la même borne que f.

→ Soit, alors $n\geqslant 1$, fixé et regardons, maintenant $\lim_{r\to+\infty}|L(r,n)| = \lim_{r\to+\infty}|a_n|\,r^n$. Nous avons, de manière évidente, si $n\geqslant 1$, $\lim_{r\to+\infty}|a_n|\,r^n = +\infty$.

Ce qui est en contradiction avec le fait que $L(r,n) = a_n r^n$ soit borné sur $\mathbb{C}$ et que f soit bornée sur $\mathbb{C}$, sauf, sui pour $n\geqslant 1$, $a_n = 0$.

Ainsi, $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = a_0$ et donc f est constante.

3. *En déduire une démonstration du théorème de D'Alembert.*

Rappel du théorème de D'Alembert

> Tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine complexe
> C'est le théorème fondamental de l'Algèbre

Pour cela, voir Wikipédia

Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ non constant, c'est à dire de degré au moins 1, et n'admettant aucune racine dans $\mathbb{C}$.

Alors, la fonction $F(z) = \frac{1}{P(z)}$ est bornée et développable en série entière, avec un rayon de convergence infini.

D'après la question précédente, F est une fonction constante, c'est à dire que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $F(z) = k \Longleftrightarrow P(z) = \frac{1}{k}$, c'est à dire que le polynôme serait constant. Il y a donc contradiction.

Donc, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet aumoins une racine dans $\mathbb{C}$

Exercice 46 :

1. *Nous considérons 2 réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ fixés une fois pour toutes.*
   Nous considérons aussi la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$I_n = \int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$

$\Rightarrow$ Tout d'abord, nous avons $\displaystyle\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = \frac{e^{i\theta}\left(1-e^{in\theta}\right)}{1-e^{i\theta}}$, et donc :

$$I_n = \int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta - \int_\alpha^\beta \frac{e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

Comme $0 < \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta < 2\pi$, la fonction $\dfrac{1}{1-e^{i\theta}}$ est continue sur l'intervalle $[\alpha;\beta]$ et donc, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue vu en L_1, nous avons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_\alpha^\beta \frac{e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_\alpha^\beta \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet donc une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, et cette limite est $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

$\Rightarrow$ Calcul de $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

$\Rightarrow$ Remarquons que :

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{i\theta}\left(1-e^{-i\theta}\right)}{\left(1-e^{i\theta}\right)\left(1-e^{-i\theta}\right)} = \frac{e^{i\theta}-1}{2-2\cos\theta}\\ &= \frac{\left(\cos\theta-1+i\sin\theta\right)}{2\left(1-\cos\theta\right)} = -\frac{1}{2}+i\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\\ &= -\frac{1}{2}+i\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ainsi, $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\mathrm{d}\theta = \left[-\frac{\theta}{2}+i\ln\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right]_\alpha^\beta$

Comme $0 < \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta < 2\pi$, nous avons $0 < \dfrac{\theta}{2} < \pi$ et donc $\sin\dfrac{\theta}{2} > 0$, d'où

$$\int_\alpha^\beta \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\beta}{2}+i\ln\sin\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}-i\ln\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2}+i\ln\left(\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Ainsi, pour faire plus simple : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\alpha-\beta}{2}+i\ln\left(\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$

2. *En déduire que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\alpha}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\beta}}{n}$ sont de même nature*

Revenons au calcul de $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=1}^n\int_\alpha^\beta e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta$

$\Rightarrow$ Calculons donc $\displaystyle\int_\alpha^\beta e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta$

Rien de très difficile :

$$\int_\alpha^\beta e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{e^{ik\theta}}{ik}\right]_\alpha^\beta = \left[\frac{-ie^{ik\theta}}{k}\right]_\alpha^\beta = i\left(\frac{-ie^{ik\alpha}}{k}-\frac{-ie^{ik\beta}}{k}\right)$$

$\Rightarrow$ De telle sorte que :

$$\int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=1}^n \int_\alpha^\beta e^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = i\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\alpha}}{k} - i\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\beta}}{k}$$

$\Rightarrow$ Nous sommes, ici, devant deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\alpha}}{k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{ie^{ik\beta}}{k}$

telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$ est finie.

Alors, les 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont de même nature : c'est qu'elles sont, ou bien toutes les deux convergentes, ou bien toutes les deux divergentes.

En effet ; supposons l'une des deux convergentes et l'autre divergente.

On prend, par exemple $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente.

Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant divergente, la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite ; ce qui est contradictoire.

Nous aurions la même démonstration si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, convergente.

Les 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc de même nature.

3. *Démontrer que, pour tout $\theta \in]0;2\pi[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente et donner sa limite*

$\Rightarrow$ Montrons que, pour tout $\theta\in]0;2\pi[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente.

Nous venons de montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\alpha}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\beta}}{n}$ sont de même nature.

En prenant $\alpha=\theta$ et $\beta=\pi$, nous voyons que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\theta}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\pi}}{n}$ sont de même nature.

Or, $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\pi}}{n} = \sum_{n\geqslant1}\frac{(-1)^n}{n}$ est une série numérique alternée convergente. Ainsi, pour tout $\theta\in]0;2\pi[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente.

$\Rightarrow$ Recherche de la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\theta}}{n}$

Nous avons :

$$i\sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\theta}}{n} - i\sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\pi}}{n} = \frac{\theta-\pi}{2} + i\ln\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\sum_{n\geqslant1}\frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right) + i\frac{\theta-\pi}{2}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$-\ln 2 - \sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\theta}}{n} = \ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) + i\frac{\theta-\pi}{2}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$-\sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\theta}}{n} = \ln 2 + \ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) + i\frac{\theta-\pi}{2}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\sum_{n\geqslant1}\frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln 2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) - i\frac{\theta-\pi}{2}$$

Nous avons donc : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln 2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) + i\frac{\pi-\theta}{2}$

En nous intéressant aux parties réelles et aux parties imaginaires, nous avons :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos n\theta}{n} = -\ln 2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}$$

Quelques considérations :

Nous avons vu que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ admettait pour rayon de convergence 1 qu'elle était divergente pour $z = 1$ *(série harmonique)*, convergente pour $z = -1$ *(série alternée)*.

Dans cet exercice, nous avons montré que si $|z| = 1$ *(c'est à dire si $z = e^{i\theta}$)* avec $z \neq 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ était convergente.

Ceci montre que le comportement d'une série sur le cercle de convergence apparaît erratique