8.2 Recherche du rayon de convergence

8.2.1 Théorème

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ 2 séries entières de rayons de convergence respectifs ρ_A et ρ_B

1. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $\rho_A \geqslant \rho_B$
2. Si $a_n \in O(b_n)$; alors $\rho_A \geqslant \rho_B$
3. Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, alors $\rho_A = \rho_B$

Démonstration

Avant de commencer redéfinissons la notion de rayon de convergence :

$$\rho = \sup \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n \geqslant 0} |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$$

1. Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous ayions $|a_n| \leqslant |b_n|$.

   On appelle $I_A = \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n \geqslant 0} |a_n| r^n \text{ converge} \right\}$ et $I_B = \left\{ r \geqslant 0 \text{ tels que } \sum_{n \geqslant 0} |b_n| r^n \text{ converge} \right\}$.

   Nous allons montrer que $I_B \subset I_A$

   Soit $r \in I_B$, alors, de $|a_n| \leqslant |b_n|$, nous tirons $|a_n| r^n \leqslant |b_n| r^n$

   Comme la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} |b_n| r^n$ converge, il en est de même de la série $\sum_{n \geqslant 0} |a_n| r^n$ et donc $r \in I_A$

   En conclusion $I_B \subset I_A$ et de $I_B \subset I_A$, nous déduisons $\sup I_B \leqslant \sup I_A$, c'est à dire $\rho_B \leqslant \rho_A \iff \rho_A \geqslant \rho_B$

2. Supposons que $a_n \in O(b_n)$.

   Que veut dire $a_n \in O(b_n)$? Cela veut dire qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|a_n| \leqslant M |b_n|$.

   En reprenant les définitions de I_A et de I_B, montrons, à nouveau, que $I_B \subset I_A$ dans une démonstration très semblable.

   Soit $r \in I_B$, alors, de $|a_n| \leqslant M |b_n|$, nous tirons $|a_n| r^n \leqslant M |b_n| r^n$

   Comme la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} M |b_n| r^n = M \sum_{n \geqslant 0} |b_n| r^n$ converge, il en est de même de la série $\sum_{n \geqslant 0} |a_n| r^n$ et donc $r \in I_A$

   En conclusion $I_B \subset I_A$ et de $I_B \subset I_A$, nous déduisons $\sup I_B \leqslant \sup I_A$, c'est à dire $\rho_B \leqslant \rho_A \iff \rho_A \geqslant \rho_B$

3. Supposons $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$.

   Nous avons démontré précédemment, en L_1, que si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, alors $a_n \in O(b_n)$ et $b_n \in O(a_n)$.

   - ⋆ De $a_n \in O(b_n)$ nous avons $\rho_A \geqslant \rho_B$
   - ⋆ De $b_n \in O(a_n)$ nous avons $\rho_B \geqslant \rho_A$

   Et donc, $\rho_B = \rho_A$

Exemple 2 :

Recherchons le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{n + \ln n}{n^2} z^n$

Nous avons, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{n+\ln n}{n^2} \underset{+\infty}{\simeq} \dfrac{1}{n}$.

Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n}$ est 1 et donc, d'après 8.2.1 le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n+\ln n}{n^2} z^n$ est aussi de 1

8.2.2 Corollaire

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière telle qu'il existe deux réels strictement positifs $m > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $m \leqslant |a_n| \leqslant M$, alors le rayon de convergence de cette série est 1

Démonstration

Nous allons comparer la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ à la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ laquelle admet 1 comme rayon de convergence.

Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous ayions $m \leqslant |a_n| \leqslant M$

- $\star$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} M z^n$ a pour rayon de convergence 1, et, comme $|a_n| \leqslant M$, d'après le théorème 8.2.1 ci-dessus, $\rho_A \geqslant 1$
- $\star$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} m z^n$ a pour rayon de convergence 1, et, comme tout autant $m \leqslant |a_n|$, d'après le théorème 8.2.1 ci-dessus, $\rho_A \leqslant 1$

Et donc $\rho_A = 1$

Exemple 3 :

1. *Quel est le rayon de convergence de la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{\sin n} z^n$

   C'est une application directe de 8.2.2.

   En effet, nous avons $\dfrac{1}{e} \leqslant e^{\sin n} \leqslant e$ et donc le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{\sin n} z^n$ est donc 1

2. *Quel est le rayon de convergence de la série* $\sum\limits_{n\geqslant 1} (iz)^n$

   C'est toujours une application directe de 8.2.2.

   Nous avons $\sum\limits_{n\geqslant 1} (iz)^n = \sum\limits_{n\geqslant 1} i^n z^n$ avec donc $a_n = i^n$. Comme $|a_n| = |i^n| = 1$ la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et donc, le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (iz)^n$ est 1.

   La somme de cette série est $\sum\limits_{n\geqslant 1} (iz)^n = \dfrac{1}{1-iz}$

Exercice 2 :

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ.

Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 2$ le rayon de convergence ρ_A de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{pn}$ est $\rho_A = +\infty$ si $\rho = +\infty$ ou $\rho_A = \sqrt[p]{\rho}$ si ρ est fini. *(on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^{pn}$ est lacunaire).*

Exercice 3 :

Déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{2n}$ et étudier la série pour $|z|=\rho$.

Quelle est la somme de cette série ?

Exercice 4 :

Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes telle qu'il existe un nombre complexe $z_0\in\mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{a_n}{n!}z^n$ a un rayon de convergence infini.

Exercice 5 :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée.

1. Que peut-on dire des rayons de convergence des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{a_n}{n!}z^n$?

   On note respectivement $f(z)$ et $g(z)$ les sommes de ces séries entières.
2. Montrer que pour tout réel $x\in\left]0;1\right[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,e^{\frac{-t}{x}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,e^{\frac{-t}{x}}\,\mathrm{d}t = xf(x)$ pour tout réel $x\in\left]0;1\right[$

8.2.3 Théorème *(utilisation de la règle de D'Alembert)*

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_n z^n$ une série entière. Alors, son rayon de convergence ρ est donné par

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \iff \frac{1}{\rho}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Avec la convention : $\dfrac{1}{0}=+\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty}=0$

Démonstration

Nous utilisons la règle de D'Alembert pour les séries numériques
Nous faisons donc le rapport

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|=\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z|$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right||z|=l\,|z|$, et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_n z^n$ converge si $l\times|z|<1$ ce qui est équivalent à $|z|<\dfrac{1}{l}$
D'où le résultat

Exemple 4 :

Exemples de calculs de Rayon de convergence par la règle de D'Alembert

1. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}n!z^n$ a un rayon de convergence nul

   Ce n'est pas difficile de le démontrer : $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=n+1$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty$ et donc, $\rho=0$

2. A contrario, la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ admet un rayon de convergence infini

3. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n 2^n}{n(n+1)} z^n$?

   Nous allons commencer par faire le rapport $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \times \frac{n(n+1)}{(-1)^n 2^n}\right| = \frac{2n}{n+1}$$

   De $\lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$, nous déduisons que le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n 2^n}{n(n+1)} z^n$ est $\frac{1}{2}$

Remarque 5 :

Attention !
La réciproque du théorème 8.2.3 précédent est fausse, c'est-à-dire que si ρ est le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ rien ne permet d'affirmer que la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente.

Considérons, par exemple, la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ où $a_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}$.

Nous avons $a_{2n} = 1$ et $a_{2n+1} = 0$ et donc la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ est en fait la série $\sum_{n \geqslant 0} z^{2n}$ dont le rayon de convergence est 1 *(cf exercices 2 et 3)* et qui a pour somme $\frac{1}{1 - z^2}$ pour $|z| < 1$.

Par contre, la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas définie puisque $a_n = 0$ si n est impair et $a_n = 1$ si n est pair

Exercice 6 :

On considère la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ où $a_n = ((-1)^n + 2)^n$. Etudier le rayon de convergence de cette série. Que dire de la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 7 :

Quel est le rayon de convergence des séries suivantes ?

1. $\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$
2. $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n} + 2} z^n$
3. $\sum_{n \geqslant 1} \frac{n+1}{(-3)^n} z^n$
4. $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$

8.2.4 Proposition

Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière telle que $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ avec $l \neq 0$. Alors le rayon de convergence de cette série vaut 1

Démonstration

Nous allons démontrer cette proposition de deux manières différentes.

⇒ Tout d'abord, si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, elle est bornée. Donc, d'après le corollaire 8.2.2, le rayon de convergence de la série est 1

⇒ Ou bien, nous utilisons la règle de D'Alembert décrite en 8.2.3 :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}|a_{n+1}|}{\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|} = \frac{|l|}{|l|} = 1$$

Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est donc bien 1

Exemple 5 :

Quel est le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{-1}{n}} z^n$ *?*

Posons $a_n = \left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{-1}{n}}$.

Par le jeu des exponentielles et des logarithmes, nous avons $a_n = e^{-\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n}}$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(2+\frac{1}{n}\right) = \ln 2$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n} = 0$.

Ce qui veut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

Nous en déduisons donc que le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(2+\frac{1}{n}\right)^{\frac{-1}{n}} z^n$ est 1

8.2.5 Proposition

Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est une série entière telle que a_n soit une fonction rationnelle non nulle de n, c'est à dire $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ où $P\in\mathbb{C}[X]$ et $Q\in\mathbb{C}[X]$ sont des polynômes.
Alors le rayon de convergence de cette série vaut 1

Démonstration

La démonstration de cette proposition a tout de l'exercice résolu.

Nous avons donc $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$; posons $p = \deg P$ et $q = \deg Q$.

Ainsi, en $+\infty$, nous avons $P(n) \underset{+\infty}{\simeq} a_p n^p$ et $Q(n) \underset{+\infty}{\simeq} b_q n^q$, et donc $a_n \underset{+\infty}{\simeq} \frac{a_p n^p}{b_q n^q}$

D'après le théorème 8.2.1, le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est le même que celui de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{a_p n^p}{b_q n^q} z^n$

Utilisons alors la règle de D'Alembert pour trouver le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{a_p n^p}{b_q n^q} z^n$

$$\frac{a_p(n+1)^p}{b_q(n+1)^q}\times\frac{b_q n^q}{a_p n^p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p\times\left(\frac{n}{n+1}\right)^q$$

Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^p = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^q = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_p\,(n+1)^p}{b_q\,(n+1)^q}\times\dfrac{b_q n^q}{a_p n^p} = 1$

Le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{a_p n^p}{b_q n^q} z^n$ est donc $\rho = 1$ et par le théorème 8.2.1 celui de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est aussi 1

Exemple 6 :

Un exemple classique *(et simple !!)* est celui de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{n}{n+1} z^n$ dont le rayon de convergence est donc 1

8.2.6 Théorème *(utilisation de la règle de Cauchy)*

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière
Alors, son rayon de convergence ρ est donné par

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(|a_n|)^{\frac{1}{n}}} \iff \frac{1}{\rho} = \lim_{n\to+\infty}(|a_n|)^{\frac{1}{n}}$$

Avec la convention : $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$

Démonstration

On réutilise le critère de Cauchy vu pour les séries numériques
On cherche le domaine où la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument.

Soit $z \in \mathbb{C}$
Alors $|a_n z^n| = |a_n| \times |z|^n$ et $(|a_n| \times |z|^n)^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}} \times |z|$
Si $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} \times |z| = l \times |z|$
Ainsi, si $l\,|z| \leqslant 1 \iff |z| \leqslant \dfrac{1}{l}$, la série converge absolument.
La série entière admet donc comme rayon de convergence $\dfrac{1}{l}$

Exercice 8 :

Donner le rayon de convergence des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{z^n}{n^n}$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{n} z^n$
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n z^n$
4. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{an+b}{n+d}\right)^n z^n$ avec $a > 0$