8.4 Fonctions développables en séries entières

Introduction

Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est une série entière de domaine de convergence $D \subset \mathbb{C}$, on définit une fonction sur D en posant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \end{array} \right.$$

Et on rappelle que, dans le cas où le rayon de convergence ρ de cette série entière est non nul, D contient le disque ouvert $D(0;\rho)$ de centre O et de rayon ρ

On se pose maintenant le problème de la réciproque, c'est à dire :

Etant donnée une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, existe-t-il une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ qui ait pour somme f ?

Plusieurs questions peuvent alors se poser :

1. Avons nous, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *(problème de convergence de la série)*
2. De quelle forme sont les a_n, et avons nous unicité des a_n ?

8.4.1 Définition

1. Cas complexe
   On dit qu'une fonction f définie sur un disque ouvert $D(O;\rho) \subset \mathbb{C}$ de centre O et de rayon $\rho > 0$ est développable en série entière au voisinage de O s'il existe une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et un réel $r \in]0,\rho]$ tels que, pour tout $z \in D(0;r)$, nous avons $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$
2. Cas réel
   Soit $E \subset \mathbb{R}$, et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$; on dit que f est développable en série entière au voisinage de 0, s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, et $\alpha > 0$ tels que :
   (a) $]-\alpha,+\alpha[\subset E$
   (b) Pour tout $x \in]-\alpha,+\alpha[$, nous avons $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$

8.4.2 Théorème

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$, développable en série entière sur un disque ouvert $D(O,\rho)$, avec $\rho > 0$ tel que $D(O,\rho) \subset \mathcal{U}$, alors, f est continue sur ce disque $D(O,\rho)$.

Démonstration

Nous allons proposer 2 démonstrations à ce théorème : une première, plutôt algébrique, qui montre, en plus, qu'une série entière est lipschitzienne, et une seconde qui utilise les résultats sur les séries de fonctions

1. **Première démonstration**
   Soit $z_0 \in D(O,\rho)$.
   Alors, pour tout $z \in D(O,\rho)$, nous avons $f(z) - f(z_0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n - \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z_0^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z^n - z_0^n)$.
   Or, une factorisation donne $z^n - z_0^n = (z - z_0)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}\right) = (z - z_0) P_{n,z_0}(z)$ et donc
   $$f(z) - f(z_0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z^n - z_0^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z - z_0) P_{n,z_0}(z) = (z - z_0) \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n P_{n,z_0}(z)$$

Et donc
$$\left|f(z)-f(z_0)\right| \leqslant |z-z_0| \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n P_{n,z_0}(z)\right|$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n P_{n,z_0}(z)\right|$ est-elle convergente ?

Nous avons $|z|<\rho$ et $|z_0|<\rho$.
Soit donc $t\in\mathbb{R}$ tel que $0<t<\rho$ et $|z|<t$ et $|z_0|<t$.

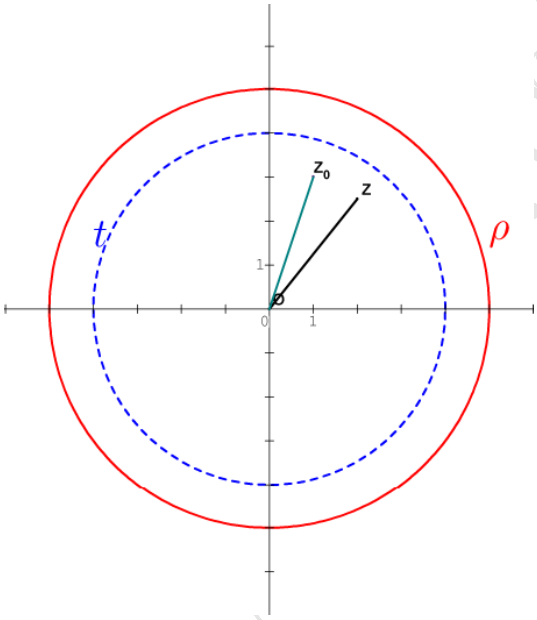

FIGURE 8.3 – $0<t<\rho$ et $|z|<t$ et $|z_0|<t$

Alors :
$$\begin{aligned}
\left|a_n P_{n,z_0}(z)\right| &= \left|a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_n z^k z_0^{n-1-k}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|a_n z^k z_0^{n-1-k}\right| = \sum_{k=0}^{n-1} |a_n| \left|z^k\right| \left|z_0^{n-1-k}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_n|\, t^k t^{n-1-k} = |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} t^{n-1} = n\,|a_n|\, t^{n-1}
\end{aligned}$$

Comme $t<\rho$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\, t^n$ converge et, d'après 8.3.4, la série dérivée $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,|a_n|\, t^{n-1}$ converge aussi avec le même rayon de convergence.
Ainsi, le terme $\left|a_n P_{n,z_0}(z)\right|$ est-il majoré par celui d'une série numérique convergente, et nous en déduisons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n P_{n,z_0}(z)\right|$ est convergente.

Si nous appelos $L = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|a_n P_{n,z_0}(z)\right|$, nous avons
$$\left|f(z)-f(z_0)\right| \leqslant |z-z_0| \times L$$

Ce qui termine de montrer que f est L-lipschitzienne et donc continue en $z_0 \in D(O,\rho)$

2. **Seconde démonstration**

$\Rightarrow$ Nous énonçons tout d'abord le fait que si $r > 0$ tel que $0 < r < \rho$ alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente sur le disque $D(O,r)$, c'est à dire si $|z| < r$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$, et comme $0 < r < \rho$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| r^n$ est convergente. Ainsi, si $|z| < r$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente

$\Rightarrow$ Soit $z_0 \in D(O,\rho)$, c'est à dire z_0 tel que $0 \leqslant |z_0| < \rho$.
Il existe alors $r > 0$ tel que $0 \leqslant |z_0| < r < \rho$ et donc la série converge normalement sur le disque $D(O,r)$; la somme $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est donc continue continue sur le disque $D(O,r)$ et, en particulier en $z_0 \in D(O,r)$

Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in D(O,\rho)$, la fonction $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est donc continue continue sur le disque $D(O,\rho)$

Remarque 7 :

Le théromème 8.4.2 est toujours valide si $a_n \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$ et la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ convergente dans un intervalle $]-\rho;\rho[$

8.4.3 Proposition : Principe des zéros isolés

Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $\rho > 0$.
On suppose les coefficients $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ non tous nuls *(C'est à dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} \neq 0$)*
Alors, il existe $0 < r_0 < \rho$ tel que $0 < |x| < r_0 \Rightarrow f(z) \neq 0$

Démonstration

1. Soit k le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$, c'est à dire que
$$f(z) = \sum_{n\geqslant k} a_n z^n = a_k z^k + \sum_{n\geqslant k+1} a_n z^n$$
2. Nous écrivons alors :
$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_{n+k} z^{n+k} = z^k \sum_{n\geqslant 0} a_{n+k} z^n = z^k g(z)$$
Où $g(z) = a_k + \sum_{n\geqslant 1} a_{n+k} z^n$.
3. Or $\sum_{n\geqslant 1} a_{n+k} z^n$ est une série entière qui admet le même rayon de convergence que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et qui converge pour $|z| < \rho$, et $g(0) = a_k$, donc $g(0) \neq 0$. g est donc, elle aussi, continue sur $D(O,\rho)$
4. Comme $g(0) = a_k \neq 0$ et g étant continue, en particulier en $z_0 = 0$, il existe $0 < r_0 < \rho$ tel que si $|z| < r_0$ alors
$$|g(z) - g(0)| \leqslant \frac{|a_k|}{2} \Longleftrightarrow |g(z) - a_k| \leqslant \frac{|a_k|}{2}$$
5. Comme, d'après l'inégalité triangulaire,nous avons $|g(0)| - |g(z)| \leqslant |g(z) - g(0)| \leqslant \frac{|a_k|}{2}$, nous avons $|g(z)| \geqslant |g(0)| - \frac{|a_k|}{2} = \frac{|a_k|}{2}$
Ainsi, si $0 < |z| < r_0$ alors $g(z) \neq 0$
6. Comme $f(z) = z^k g(z)$, on en déduit que si $0 < |z| < r_0$ *(remarquer que nous avons $z \neq 0$)*, alors $z^k g(z) \neq 0$, c'est à dire $f(z) \neq 0$

Remarque 8 :

1. C'est le principe des zéros isolés, car, si $f(z) \neq 0$, c'est à dire si $a_0 \neq 0$, et donc $k = 0$, la proposition signifie qu'il existe un domaine autour de 0, tel que la fonction est sûrement non nulle autour de zéro.
2. De même, si $f(z) = 0$ c'est à dire que $k > 0$, la proposition signifie qu'il existe un domaine autour de 0, tel que la fonction est sûrement non nulle autour de 0, 0 devenant la seule valeur annulant f dans ce domaine

8.4.4 Corollaire

Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $\rho > 0$.
Soit $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes distincts tels que $|z_p| < \rho$, tendant vers zéro, et tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous ayions $f(z_p) = 0$
Alors, tous les coefficients a_n sont nuls, et donc f est identiquement nulle.

Démonstration

Soient $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $\rho > 0$ et $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes distincts tels que $|z_p| < \rho$, tendant vers zéro, et tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, nous ayions $f(z_p) = 0$
Si la suite $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro, alors, pour tout $0 < r < \rho$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n > N$ alors $|z_p| < r$, et $f(z_p) = 0$.
Ce qui est en contradiction avec le principe des zéros isolés vu en 8.4.3
Et donc pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$, $f(z) = 0$ et donc tous les coefficients a_n sont nuls.

8.4.5 Corollaire

Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $\rho > 0$.
Soit $g(z) = \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $\rho_1 > 0$
On appelle $R = \inf(\rho; \rho_1)$.
Soit $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes distincts, tendant vers zéro, tels que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|z_p| < R$ et $f(z_p) = g(z_p)$
Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que$|z| < R$, $f(z) = g(z)$

Démonstration

Il suffit d'appliquer le corollaire précédent 8.4.4 à la fonction $\varphi = f - g$

Remarque 9 :

Une autre conséquence, c'est qu'une fonction ne peut être la somme que d'une seule série entière dans un intervalle ouvert de centre 0.

8.4.6 Unicité du développement en série entière

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$, développable en série entière sur un disque ouvert $D(O, \rho)$, avec $\rho > 0$ tel que $D(O, \rho) \subset \mathcal{U}$
Alors, le développement de f en série entière est unique sur ce disque $D(O, \rho)$

Démonstration

Supposons qu'il existe deux suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $r > 0$ tels que

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$$

et ce, pour tout $z \in D(0;r)$. Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.
Nous allons démontrer cette propriété par récurrence.

- $\Rightarrow$ C'est vrai pour $n = 0$.
  En effet, en $z = 0$, nous avons $f(0) = a_0 = b_0$
- $\Rightarrow$ Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, nous ayions $a_n = b_n$
- $\Rightarrow$ Ensuite, nous avons, pour tout $z \in D(0;r)$:

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n \iff f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \sum_{k\geqslant n+1} a_k z^k = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k + \sum_{k\geqslant n+1} b_k z^k$$

De l'hypothèse de récurrence, nous tirons

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant n+1} a_k z^k = \sum_{k\geqslant n+1} b_k z^k &\iff z^{n+1} \sum_{k\geqslant n+1} a_k z^{n+1-k} = z^{n+1} \sum_{k\geqslant n+1} b_k z^{n+1-k} \\ &\iff z^{n+1} \sum_{k\geqslant 0} a_{k+n+1} z^k = z^{n+1} \sum_{k\geqslant 0} b_{n+1+k} z^k\end{aligned}$$

Et donc, pour tout $z \in D(0;r)$, avec $z \neq 0$, nous avons

$$z^{n+1} \sum_{k\geqslant 0} a_{k+n+1} z^k = z^{n+1} \sum_{k\geqslant 0} b_{n+1+k} z^k \iff \sum_{k\geqslant 0} a_{k+n+1} z^k = \sum_{k\geqslant 0} b_{n+1+k} z^k$$

Appelons $g(z) = a_{n+1} + \sum_{k\geqslant 1} a_{k+n+1} z^k = b_{n+1} + \sum_{k\geqslant 1} b_{n+1+k} z^k$. D'après 8.4.2, g est continue en 0 et donc :

$$a_{n+1} = \lim_{x\to 0} g(z) = g(0) = b_{n+1}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $a_n = b_n$

Remarque 10 :

Nous avons démontré que si $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, alors nous avons $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, ce qui ajoute à l'unicité du développement.

8.4.7 Corollaire

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$, développable en série entière sur un disque ouvert $D(O,\rho)$, avec $\rho > 0$ tel que $D(O,\rho) \subset \mathcal{U}$
Nous supposons $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$

1. Si f est paire, c'est à dire si pour tout $z \in D(O,\rho)$, $f(z) = f(-z)$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$, c'est à dire $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$
2. Si f est impaire, c'est à dire si pour tout $z \in D(O,\rho)$, $f(-z) = -f(z)$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$, c'est à dire $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$

Démonstration

Soit $z \in D(O, \rho)$. Alors : $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ et $f(-z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (-z)^n = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n a_n z^n$

De $f(-z) = f(z)$, nous déduisons $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n a_n z^n \Longleftrightarrow \sum_{n \geqslant 0} (1 - (-1)^n) a_n z^n = 0$

De l'unicité du développement en série entière, nous tirons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $(1 - (-1)^n) a_n = 0$

- $\Rightarrow$ Si n est pair, alors $0 \times a_{2n} = 0$ et donc $a_{2n} \in \mathbb{C}$
- $\Rightarrow$ Si n est impair, alors $2 \times a_{2n+1} = 0$ et donc $a_{2n+1} = 0$

D'où, f s'écrit $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$

La démonstration est la même si f est impaire