8.6 Théorèmes de Bernstein

On a vu avec l'exemple de la fonction f définie par $f(0)=0$ et $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ qu'une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement développable en série entière et n'est pas somme sa série de Taylor.
Le théorème de Bernstein qui suit nous dit qu'avec l'hypothèse supplémentaire de positivité des dérivées d'ordres pairs de la fonction f on est assuré du développement en série entière.
Il faut voir ce paragraphe comme un exercice résolu

8.6.1 Lemme

Soit $a>0$ et $f :]-a;+a[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$, paire et telle que pour tout $x \in]-a;+a[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k)}(x) \geqslant 0$
Alors, f est développable en série entière sur l'intervalle $]-a;+a[$

Démonstration

1. On appelle $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$; c'est un classique polynôme de Taylor associé à f
2. Comme f est une fonction paire, les dérivées d'ordre impair sont impaires et, en particulier, nous avons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$ et donc
$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(2k)}(0)}{k!} x^{2k}$$
3. En écrivant $f(x) = P_n(x) + R_n(x) \Longleftrightarrow R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, $R_n(x)$ apparaît comme un reste ou encore l'erreur commise lorsqu'on remplace $f(x)$ par $P_n(x)$.
Pour montrer que f est développable en série entière sur l'intervalle $]-a;+a[$, il faudra montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.
4. Rappelons la formule de Taylor avec reste intégral :
Pour tout $x \in]-a;+a[$ et tout $y \in]-a;+a[$
$$f(x) = f(y) + (x-y) f'(y) + \cdots + \frac{(x-y)^n f^{(n)}(y)}{n\,!} + \int_y^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!}\, dt$$
En faisant $y=0$ dans notre cas :
$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \cdots + \frac{x^n f^{(n)}(0)}{n\,!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!}\, dt$$
C'est à dire, en fait $f(x) = P_n(x) + \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!}\, dt$
5. Nous poserons donc $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!}\, \mathrm{d}t$
6. Ecrivons autrement $R_n(x)$ en faisant le changement de variables $u = \dfrac{t}{x}$ et donc $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{x} \Longleftrightarrow$ $\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$.
Nous avons alors :
$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{(x-ux)^n f^{(n+1)}(ux)}{n!} x\, \mathrm{d}u \\ &= \frac{x^{n+1}}{n\,!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ux)\, \mathrm{d}u \end{aligned}$$

7. Nous allons utiliser le fait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$ et donc écrire, tout naturellement :
$$f(x) = P_{2n}(x) + R_{2n}(x)$$
8. Comme, pour tout $x \in]-a; +a[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k)}(x) \geqslant 0$, nous avons, en particulier, $f^{(2k)}(0) \geqslant 0$ et donc, pour tout $x \in]-a; +a[$, nous avons $P_{2n}(x) \geqslant 0$ puisqu'aussi, pour tout $x \in]-a; +a[$, $x^{2n} \geqslant 0$
Remarquons aussi que, comme $f(x) = P_{2n}(x) + R_{2n}(x)$ et que $P_{2n}(x) \geqslant 0$, nous avons
$$R_{2n}(x) \leqslant f(x)$$
9. f et P_{2n} étant paires, de la relation $R_{2n}(x) = f(x) - P_{2n}(x)$, on déduit aussi que R_{2n} est aussi une fonction paire.
Nous allons donc étudier $R_{2n}(x)$ pour $x \in [0; +a[$
10. Comme, pour tout $x \in [0; +a[$, nous avons $f^{(2n)}(x) \geqslant 0$ la fonction $f^{(2n+1)}(x)$ est une fonction croissante sur $[0; +a[$, et en particulier, $f^{(2n+1)}(x) \geqslant f^{(2n+1)}(0) = 0$
11. Ainsi, pour $r \in [0; +a[$, tout $x \in [0; r[$ et tout $u \in [0, 1]$ de $ux \leqslant ur$, nous tirons $0 \leqslant f^{(2n+1)}(ux) \leqslant f^{(2n+1)}(ur)$ et donc :
$$\begin{aligned} 0 \leqslant R_{2n}(x) &= \frac{x^{2n+1}}{(2n)\,!}\int_0^1 (1-u)^{2n} f^{(2n+1)}(ux)\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n)\,!}\int_0^1 (1-u)^{2n} f^{(2n+1)}(ur)\,\mathrm{d}u = \frac{x^{2n+1}}{(2n)\,!}R_{2n}(r) \\ &\leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n)\,!}f(r) \end{aligned}$$
12. Pour tout $x \in [0; +a[$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n)\,!}f(r) = 0$ et donc, de $0 \leqslant R_{2n}(x) \leqslant \dfrac{x^{2n+1}}{(2n)\,!}f(r)$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n}(x) = 0$.
13. Par parité, pour tout $x \in]-a; 0]$, nous avons aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n}(x) = 0$ et donc, pour tout $x \in]-a + a[$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n}(x) = 0$
Ensuite, de $P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x)$, c'est à dire $R_{2n}(x) = R_{2n+1}(x)$, nous déduisons aussi que pour tout $x \in]-a + a[$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n+1}(x) = 0$.
C'est à dire que, pour tout $x \in]-a + a[$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.
14. Nous en déduisons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(x) - P_n(x)) = 0$. f est donc développable en série entière sur l'intervalle $]-a; +a[$

Remarque 16 :

Dans le lemme, nous nous intéressions à une fonction paire. Maintenant, qu'en est-il d'une fonction quelconque ? C'est l'objet du théorème suivant

8.6.2 Premier théorème de Bernstein

Soit $a > 0$ et $f :]-a; +a[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $x \in]-a; +a[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k)}(x) \geqslant 0$
Alors, f est développable en série entière sur l'intervalle $]-a; +a[$

Démonstration

Bien entendu que nous allons utiliser le lemme 8.6.1

1. On commence par construire une fonction $g :]-a + a[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]-a + a[$ par $g(x) = f(x) + f(-x)$

⇒ Il est clair que g est paire

En effet, pour tout $x \in]-a+a[$, $g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x)$

⇒ D'autre part, g est de classe de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + (-1)^n f^{(n)}(-x)$$

(Se démontre très facilement par récurrence)
Et donc, en particulier, nous avons

$$g^{(2n)}(x) = f^{(2n)}(x) + f^{(2n)}(-x)$$

⇒ Comme, pour tout $x \in]-a;+a[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) \geqslant 0$, nous avons aussi
 ⋆ Pour tout $x \in]-a;+a[$, $g^{(2n)}(x) \geqslant 0$
 ⋆ Et, de l'identité $g^{(2n)}(x) = f^{(2n)}(x) + f^{(2n)}(-x)$, nous avons, pour tout $x \in]-a;+a[$ $f^{(2n)}(x) \leqslant g^{(2n)}(x)$ et $f^{(2n)}(-x) \leqslant g^{(2n)}(x)$

2. Nous utilisons les notations de 8.6.1 en posant :

$$R_{n,f}(x) = \frac{x^{n+1}}{n\,!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ux)\,\mathrm{d}u \text{ et donc } R_{n,g}(x) = \frac{x^{n+1}}{n\,!}\int_0^1 (1-u)^n g^{(n+1)}(ux)\,\mathrm{d}u$$

Nous avons donc :

$$R_{2n-1,f}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n-1)\,!}\int_0^1 (1-u)^{2n-1} f^{(2n)}(ux)\,\mathrm{d}u$$

Et

$$R_{2n-1,g}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n-1)\,!}\int_0^1 (1-u)^{2n-1} g^{(2n)}(ux)\,\mathrm{d}u$$

3. Pour tout $x \in]-a;+a[$ et tout $u \in [0;+1]$, nous avons $ux \in]-a;+a[$ et donc

$$0 \leqslant f^{(2n)}(ux) \leqslant g^{(2n)}(ux)$$

4. Maintenant :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |R_{2n-1,f}(x)| &= \frac{x^{2n}}{(2n-1)\,!}\int_0^1 (1-u)^{2n-1} f^{(2n)}(ux)\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{x^{2n}}{(2n-1)\,!}\int_0^1 (1-u)^{2n-1} g^{(2n)}(ux)\,\mathrm{d}u = R_{2n-1,g}(x) \end{aligned}$$

5. D'après le lemme 8.6.1, pour tout $x \in]-a;+a[$ nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n-1,g}(x) = 0$ et donc, pour tout $x \in]-a;+a[$ $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n-1,f}(x) = 0$

6. Il faut, maintenant, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_{2n,f}(x) = 0$

⇒ Nous avons :

$$f(x) = P_{2n}(x) + R_{2n,f}(x) = P_{2n-1}(x) + R_{2n-1,f}(x)$$

C'est à dire

$$R_{2n,f}(x) = P_{2n-1}(x) - P_{2n}(x) + R_{2n-1,f}(x)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$R_{2n,f}(x) = -\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n-1,f}(x)$$

⇒ Nous avons établi que $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + (-1)^n f^{(n)}(-x)$ et donc, qu'en particulier,

$$g^{(2n)}(0) = 2f^{(2n)}(0)$$

Nous avons alors $R_{2n,f}(x) = -\dfrac{g^{(2n)}(0)}{2\times(2n)!}x^{2n} + R_{2n-1,f}(x)$

⇒ D'après le lemme 8.6.1 nous avons, pour $x \in \left]-a;+a\right[$, $g(x) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et donc

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$$

En particulier, pour tout $x \in \left]-a;+a\right[$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{g^{(2n)}(0)}{2 \times (2n)!} x^{2n} = 0$

⇒ Nous avons donc $\lim_{n \to +\infty} R_{2n,f}(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{g^{(2n)}(0)}{2 \times (2n)!} x^{2n} + \lim_{n \to +\infty} R_{2n-1,f}(x) = 0$

Comme $\lim_{n \to +\infty} R_{2n-1,f}(x) = 0$, que $\lim_{n \to +\infty} R_{2n,f}(x) = 0$, nous avons aussi $\lim_{n \to +\infty} R_{n,f}(x) = 0$ pour tout $x \in \left]-a;+a\right[$

Ce que nous voulions

Remarque 17 :

Nous présentons, ci-après une présentation beaucoup plus simple que celle de 8.6.2. En effet, dans 8.6.3, nous supposerons que toutes les dérivées successives de f sont positives, ce qui inclus le cas où seules les dérivées d'ordre pair sont positives. Quelque part, donc, 8.6.3 est un cas particulier de 8.6.2

8.6.3 Second théorème de Bernstein

Soit $a > 0$ et $f : \left]-a;+a\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $x \in \left]-a;+a\right[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) \geqslant 0$

Alors, f est développable en série entière sur l'intervalle $\left]-a;+a\right[$

Démonstration

Bien entendu nous allons utiliser les notations introduites en 8.6.1 et en 8.6.2.

1. Nous allons tout d'abord démontrer sur l'intervalle $[0;a[$

   Soient donc $x \in [0;a[$.

   Il existe $r \in]0;a[$, c'est à dire $0 < r < a$ tel que $0 < x < r < a$, c'est à dire tel que $x \in]0;r[$

   ⇒ Nous posons, comme précédemment $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!} \mathrm{d}t$.

   En remarquant que $\left(\frac{r-t}{r-t}\right)^n = \frac{(r-t)^n}{(r-t)^n} = 1$, nous pouvons écire :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n\,!} \times \frac{(r-t)^n}{(r-t)^n} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{(r-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) \times \left(\frac{x-t}{r-t}\right)^n \mathrm{d}t \end{aligned}$$

   ⇒ Considérons, maintenant, la fonction $\varphi : [0;x] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi : [0;x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \varphi(t) = \dfrac{x-t}{r-t} \end{array} \right.$$

   La dérivée de cette fonction est $\varphi'(t) = \frac{x-r}{(r-t)^2}$. Comme $x \in]0;r[$, c'est à dire $0 < x < r$, nous avons, pour tout $t \in [0;x]$, $\varphi'(t) \leqslant 0$, c'est à dire que la fonction φ est décroissante.
   Ainsi, pour tout $t \in [0;x]$, nous avons :

$$\varphi(0) \geqslant \varphi(t) \geqslant \varphi(x) \Longleftrightarrow \frac{x}{r} \geqslant \varphi(t) \geqslant 0$$

C'est à dire, pour tout $t \in [0; x]$:

$$0 \leqslant \left(\frac{x-t}{r-t}\right)^n \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^n$$

⇒ Ainsi, pour $r \in]0; a[$ et $x \in]0; r[$, nous avons :

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^n \int_0^x \frac{(r-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = \left(\frac{x}{r}\right)^n R_n(r)$$

Puisque $f^{(k)}(x) \geqslant 0$ et $x \in [0; a[$, nous avons $P_n(r) \geqslant 0$ et de l'égalité $f(r) = P_n(r) + R_n(r)$, nous déduisons que $R_n(r) \leqslant f(r)$

⇒ Et donc, de $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^n R_n(r)$, nous déduisons que si $x \in [0; a[$, alors $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^n f(r)$.

⇒ Comme $0 < x < r$, nous avons $0 < \frac{x}{r} < 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{r}\right)^n f(r) = 0$.

Ainsi, si $x \in]0; a[$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$

2. Soit maintenant $x \in]-a; 0]$.

   Nous avons toujours $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$

   ⇒ En faisont le changement de variables $t = -u$, nous obtenons :

$$R_n(x) = -\int_0^{-x} \frac{(x+u)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(-u)\ \mathrm{d}u$$

En posant, à nouveau, $x' = -x$, nous avons $x' \in [0; a[$ et nous avons :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= -\int_0^{x'} \frac{(-x'+u)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(-u)\ \mathrm{d}u \\ &= -\int_0^{x'} \frac{(-1)^n (x'-u)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(-u)\ \mathrm{d}u \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^{x'} \frac{(x'-u)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(-u)\ \mathrm{d}u \end{aligned}$$

⇒ Par hypothèses, nous avons, tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) \geqslant 0$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in]-a; +a[$ nous avons $f^{(n+2)}(x) \geqslant 0$.

Or, $f^{(n+2)}$ est la fonction dérivée de $f^{(n+1)}$, ce qui veut dire que la fonction $f^{(n+1)}$ est croissante sur l'intervalle $]-a; +a[$.

Nous avons donc pour tout $u \in [0; a[$:

$$0 \leqslant f^{(n+1)}(-u) \leqslant f^{(n+1)}(u)$$

Et donc,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left|(-1)^{n+1} \int_0^{x'} \frac{(x'-u)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(-u)\ \mathrm{d}u\right| \\ &= \int_0^{x'} \frac{(x'-u)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(-u)\ \mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_0^{x'} \frac{(x'-u)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(u)\ \mathrm{d}u = R_n(x') \end{aligned}$$

⇒ Dans le point précédent, nous avons montré que $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x') = 0$, et nous concluons, ici, que $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$

Donc, pour tout $x \in]-a; +a[$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ et f est développable en série entière sur l'intervalle $]-a; +a[$

Remarque 18 :

1. Nous venons de montrer que f est somme de sa série de Taylor.
2. En second lieu, $R_n(0) = \displaystyle\int_0^0 \frac{(x-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = 0$