8.7 Equations fonctionnelles et séries entières

Nous allons tenter de résoudre (c'est à dire trouver des solutions) des équations fonctionnelles ; les principales équations que nous aurons à traiter sont les équations différentielles.
Nous allons donc tenter de déterminer des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients non constants développables en série entière.
Plus généralement, l'objet de ce paragraphe est de déterminer des fonctions développables en séries entières qui vérifient des relations fonctionnelles
Cette méthode est illustrée par les exercices qui suivent.

8.7.1 Premier exemple

Quelles sont les séries entières vérifiant l'équation différentielle $(1+x)\,y' - my = 0$?

Résolution

Soit $y(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une telle série, alors, $y'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^{n-1}$, et, en remplaçant dans la relation, nous obtenons :

$$(1+x)\,y'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^{n-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^n$$

D'où,

$$\begin{aligned}(1+x)\,y' - my &= \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^{n-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^n - m\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0} (n+1)\,a_{n+1} x^n + \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^n - m\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \\ &= (a_1 - m a_0) + \sum_{n\geqslant 1} \left[(n+1)\,a_{n+1} + (n-m)\,a_n\right] x^n\end{aligned}$$

D'où nous obtenons les relations :

$$\begin{cases} (a_1 - m a_0) = & 0 \\ (n+1)\,a_{n+1} + (n-m)\,a_n = & 0 \end{cases}$$

Ou, ce qui est équivalent,

$$\begin{cases} a_1 = & m a_0 \\ a_{n+1} = & \dfrac{(m-n)}{(n+1)} a_n \end{cases}$$

Ce qui nous conduit à écrire :

$$\begin{cases} a_1 = & m a_0 \\ a_2 = & \dfrac{m-1}{2} a_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_p = & \dfrac{m-p+1}{p} a_{p-1} \\ \vdots & \vdots \\ a_n = & \dfrac{(m-n+1)}{n} a_{n-1} = \dfrac{(m-(n-1))}{n} a_{n-1} \end{cases}$$

D'où, en multipliant termes à termes, on obtient :

$$a_n = \frac{m\,(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} a_0$$

Le rayon de convergence de la série est ρ
De l'identité $a_{n+1} = \dfrac{(m-n)}{n+1} a_n$, nous avons : $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\dfrac{(m-n)}{n+1}\right|$

D'où nous tirons que $\lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ et le rayon de convergence de la série est $\rho = 1$
Soit g la somme de cette série ; pour $|x| < 1$, nous avons

$$g(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_0 \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n = a_0 \sum_{n\geqslant 0} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n$$

Il est possible de bien connaître g : g se calcule très bien en résolvant l'équation différentielle, et on trouve $g(x) = C(1+x)^m$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $x > -1$
D'où *(Voir page 325)* :

$$\boxed{(1+x)^m = \sum_{n\geqslant 0} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n}$$

Remarque 19 :

1. On note aussi $\dbinom{n}{m} = \dfrac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$ même dans le cas où $m \in \mathbb{R}$
2. C'est aussi une autre façon de trouver le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$

8.7.2 Second exemple

Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation $f(x) + f(x^2) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Résolution

On écrit $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ pour $|x| < \rho$ où ρ sera le rayon de convergence de la série considérée
Alors, $f(x^2) = \sum_{n\geqslant 0} a_n (x^2)^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^{2n}$ et donc :

$$f(x) + f(x^2) = \sum_{n\geqslant 0} (a_n + a_{2n})x^{2n} + a_{2n+1}x^{2n+1}$$

En détaillant, nous avons :

$$f(x) + f(x^2) = 2a_0 + a_1 x + (a_2 + a_1)x^2 + a_3 x^3 + (a_2 + a_4)x^4 + \dots + (a_n + a_{2n})x^{2n} + a_{2n+1}x^{2n+1} + \cdots$$

De $f(x) + f(x^2) = x$, nous tirons :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = -a_1 = -1 \\ a_3 = 0 \quad a_4 = -a_2 = a_1 = 1 \\ a_5 = 0 \quad a_6 = -a_3 = 0 \\ a_7 = 0 \quad a_8 = -a_4 = a_2 = -a_1 = -1 \end{cases}$$

Et donc, nous en déduisons que $a_{2^n} = (-1)^n$, et si $k \neq 2^n$, alors $a_k = 0$.
Donc $f(x) = x + \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n x^{2^n}$

Montrons que cette fonction vérifie l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned}
f\left(x^2\right) = &\ x^2+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\left(x^2\right)^{2^n} \\
= &\ x^2+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n(x)^{2\times 2^n} \\
= &\ x^2+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n(x)^{2^{n+1}} \\
= &\ x^2+\sum_{n\geqslant 2}(-1)^{n-1}(x)^{2^n} \\
= &\ x^2-\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n(x)^{2^n}
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
f\left(x^2\right)+f(x) = &\ x^2-\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n(x)^{2^n}+x+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n x^{2^n} \\
= &\ x^2-\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n(x)^{2^n}+\left(x-x^2+\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n x^{2^n}\right) \\
= &\ x
\end{aligned}$$

Nous avons donc bien $f(x)+f\left(x^2\right)=x$

8.7.3 Troisième exemple

Déterminer une solution développable en série entière de l'équation différentielle :

$$2x(1+x)y''+(5x+3)y'+y=0$$

Résolution

Soit $y(x)=\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ une telle solution de rayon de convergence ρ. Alors :

- $\star$ $y'(x)=\sum_{n\geqslant 0}na_nx^{n-1}=\sum_{n\geqslant 1}na_nx^{n-1}=\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^n$
  Et de là, nous tirons : $xy'(x)=\sum_{n\geqslant 0}na_nx^n$
- $\star$ $y''(x)=\sum_{n\geqslant 0}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$
  De même,
  - $\star$ $x^2y''(x)=\sum_{n\geqslant 0}n(n-1)a_nx^n$
  - $\star$ Et $xy''(x)=\sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
2x(1+x)y''+(5x+3)y'+y=0 \iff &\ 2xy''+2x^2y''+5xy'+3y'+y=0 \\
\iff &\ 2\sum_{n\geqslant 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}+2\sum_{n\geqslant 0}n(n-1)a_nx^n+ \\
&\ 5\sum_{n\geqslant 0}na_nx^n+3\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n=0
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$2\sum_{n\geqslant 1}n(n+1)a_{n+1}x^n+2\sum_{n\geqslant 0}n(n-1)a_nx^n+5\sum_{n\geqslant 0}na_nx^n+3\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n=0$$

Et, en synthèse, nous avons :

$$(3a_1 + a_0) + \sum_{n \geqslant 1} (2n(n+1)a_{n+1} + 2n(n-1)a_n + 5na_n + 3(n+1)a_{n+1} + a_n)x^n = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(3a_1 + a_0) + \sum_{n \geqslant 1} ((n+1)(2n+3)a_{n+1} + (2n+1)(n+1)a_n)x^n = 0$$

De l'unicité du développement en série entière, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{rl} 3a_1 + a_0 = & 0 \\ (n+1)(2n+3)a_{n+1} + (2n+1)(n+1)a_n = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 3a_1 + a_0 = & 0 \\ (2n+3)a_{n+1} + (2n+1))a_n = & 0 \end{array} \right.$$

D'où, nous avons donc :

$$\left\{ \begin{array}{rl} a_1 = & -\dfrac{1}{3}a_0 \\ \vdots & \vdots \\ a_k = & -\dfrac{2k-1}{2k+1}a_{k-1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1} = & -\dfrac{2n-3}{2n-1}a_{n-2} \\ a_n = & -\dfrac{2n-1}{2n+1}a_{n-1} \end{array} \right.$$

En multipliant termes à termes, nous obtenons :

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = \frac{-1}{3}a_0 \times \frac{-3}{5}a_1 \times \frac{-5}{7}a_2 \times \frac{-(2k-1)}{2k+1}a_{k-1} \times \frac{-(2k+1)}{2k+3}a_{k-1} \times \cdots \times \frac{-(2n-3)}{2n-1}a_{n-2} \times \frac{-(2n-1)}{2n+1}a_{n-1}$$

Et, en simplifiant, nous obtenons $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}a_0$

Ainsi, $y(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}a_0 x^n = a_0 \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^n$ et le rayon de convergence est $\rho = 1$.

Remarquons que comme $\arctan u = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}u^{2n+1}$, que, de plus, $x^n = (\sqrt{x})^{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x})^{2n+1}$ et nous pouvons donc écrire :

$$y(x) = a_0 \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^n = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}(\sqrt{x})^{2n+1} = \frac{a_0 \arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Exercice 16 :

Déterminer, en précisant leur rayon de convergence, les solutions développables en série entière de l'équation différentielle $xy'' + (x-2)y' - 2y = 0$

Exercice 17 :

Montrer que la fonction f définie sur $]-1;+1[$ par $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire le développement en série entière de cette fonction.

Exercice 18 :

Résoudre l'équation différentielle $xy''(x) + xy'(x) + y(x) = 1$

Exercice 19 :

Former le développement en série entière en 0 de la fonction $f(x) = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$