8.8 Théorèmes Taubériens

8.8.1 Le théorème d'Abel angulaire

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1

On suppose que la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est convergente et qu'elle a pour somme S.

Pour $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, nous notons $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$

Pour θ_0 tel que $0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$, nous notons :

$$\Delta_{\theta_0}=\left\{z\in\mathbb{C} \text{ tel que } |z|<1 \text{ et qu'il existe } \rho\in[0;1[\text{ et } \theta\in[-\theta_0;\theta_0[\text{ tel que } z=1-\rho e^{i\theta}\right\}$$

Alors :

$$\lim_{\substack{z\longrightarrow 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n=S$$

f peut donc être prolongée par continuité en $z=1$ en posant $f(1)=S=\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Démonstration

1. **Utilisation de la transformée d'Abel**

   Nous avons déjà utilisé ce type de transformée lors de l'étude des séries numériques alternées.

   (a) Par hypothèse, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est convergente et si nous considérons ce que nous appelons les restes de la série : $R_n=\sum_{k\geqslant n+1} a_k$, de la convergence de la série, nous déduisons que $\lim_{n\to+\infty} R_n=0$

   (b) Utilisons la transformée d'Abel :

   - ⋆ Remarquons que : $a_n=R_{n-1}-R_n=\left(a_n+\sum_{k\geqslant n+1} a_k\right)-\sum_{k\geqslant n+1} a_k$
   - ⋆ Posons, par commodités $R_{-1}=0$

   (c) Soient, maintenant, $n\in\mathbb{N}$ et $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k z^k-\sum_{k=0}^{n} a_k &= \sum_{k=0}^{n} a_k\left(z^k-1\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(R_{k-1}-R_k\right)\left(z^k-1\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} R_{k-1}\left(z^k-1\right)-\sum_{k=0}^{n} R_k\left(z^k-1\right)\end{aligned}$$

   (d) Penchons nous sur $\sum_{k=0}^{n} R_{k-1}\left(z^k-1\right)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} R_{k-1}\left(z^k-1\right) &= R_{-1}\left(z^0-1\right)+\sum_{k=1}^{n} R_{k-1}\left(z^k-1\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} R_{k-1}\left(z^k-1\right)=\sum_{k=0}^{n-1} R_k\left(z^{k+1}-1\right)\end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n} a_k = & \sum_{k=0}^{n-1} R_k \left(z^{k+1}-1\right) - \sum_{k=0}^{n} R_k \left(z^k - 1\right) \\
= & \sum_{k=0}^{n} R_k \left[\left(z^{k+1}-1\right) - \left(z^k - 1\right)\right] - R_n \left(z^n - 1\right) \\
= & \sum_{k=0}^{n} R_k \left(z^{k+1} - z^k\right) - R_n \left(z^n - 1\right) \\
= & (z-1) \sum_{k=0}^{n} R_k z^k - R_n \left(z^n - 1\right)
\end{aligned}$$

(e) Démontrons que nous avons $f(z) - S = (z-1) \sum_{n \geqslant 0} R_n z^n$

$\Rightarrow$ Nous avons déjà vu que, comme la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ est convergente, $\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$.

De plus, comme $|z| < 1$, $\lim_{n \to +\infty} (z^n - 1) = -1$ et donc $\lim_{n \to +\infty} R_n (z^n - 1) = 0$

$\Rightarrow$ Comme $|z| < 1$, $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = f(z)$ et $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = S$ et donc,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \right) = f(z) - S$$

Ainsi, par passage à la limite :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \right) = \lim_{n \to +\infty} \left((z-1) \sum_{k=0}^{n} R_k z^k \right) - \lim_{n \to +\infty} R_n \left(z^n - 1\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n \geqslant 0} R_n z^n$$

2. Utilisons, maintenant, l'identité $f(z) - S = (z-1) \sum_{n \geqslant 0} R_n z^n$.

$\Rightarrow$ Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
f(z) - S = & (z-1) \sum_{n \geqslant 0} R_n z^n = (z-1) \left[\sum_{n=0}^{N} R_n z^n + \sum_{n \geqslant N+1} R_n z^n \right] \\
= & (z-1) \sum_{n=0}^{N} R_n z^n + (z-1) \sum_{n \geqslant N+1} R_n z^n
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ En passant à la valeur absolue et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| \, |z^n| + |z-1| \sum_{n \geqslant N+1} |R_n| \, |z|^n$$

3. Soit $\varepsilon > 0$

Comme $\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|R_n| \leqslant \varepsilon$.

Et donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

$$\begin{aligned}
|f(z) - S| &\leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |R_n| \, |z^n| + |z-1| \sum_{n \geqslant N_\varepsilon + 1} |R_n| \, |z|^n \\
&\leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |R_n| + |z-1| \sum_{n \geqslant N_\varepsilon + 1} \varepsilon \, |z|^n \\
&\leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |R_n| + \varepsilon \, |z-1| \sum_{n \geqslant N_\varepsilon + 1} |z|^n
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Regardons, maintenant, de plus près $\displaystyle\sum_{n \geqslant N_\varepsilon + 1} |z|^n$; en fait, c'est facile :

$$\sum_{n \geqslant N_\varepsilon + 1} |z|^n = \sum_{n \geqslant 0} |z|^{n + N_\varepsilon + 1} = |z|^{N_\varepsilon + 1} \sum_{n \geqslant 0} |z|^n = \frac{|z|^{N_\varepsilon + 1}}{1 - |z|}$$

Et comme $|z| < 1$, nous avons :

$$\sum_{n \geqslant N_\varepsilon + 1} |z|^n = \frac{|z|^{N_\varepsilon + 1}}{1 - |z|} \leqslant \frac{1}{1 - |z|}$$

$\Rightarrow$ Ainsi, en synthèse :

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1 - |z|}$$

4. Occupons nous de l'expression $\dfrac{|z-1|}{1 - |z|}$

Pour commencer, visualisons par la figure 8.4 ce qu'est Δ_{θ_0}

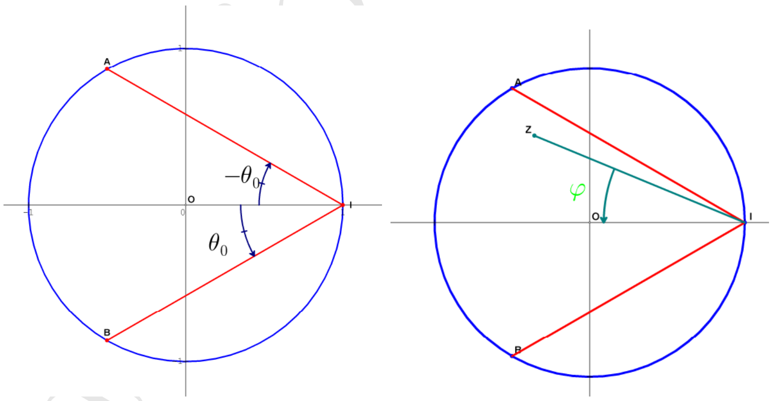

FIGURE 8.4 – Une visualisation de Δ_{θ_0} et de $z \in \Delta_{\theta_0}$

$\Rightarrow$ Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$.
Il existe alors $\rho > 0$ et $\varphi \in [-\theta_0; \theta_0]$ tel que $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$, c'est à dire $z = (1 - \rho\cos\varphi) + i\rho\sin\varphi$, de telle sorte que $|z|^2 = (1 - \rho\cos\varphi)^2 + \rho^2\sin^2\varphi = 1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2$

$\Rightarrow$ Comme $\varphi \in [-\theta_0; \theta_0]$ et que $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$, alors nous avons $0 < \cos\theta_0 \leqslant \cos\varphi < 1$, et alors :

$$1 - |z|^2 = 1 - \left(1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2\right) = 2\rho\cos\varphi - \rho^2 \geqslant 2\rho\cos\theta_0 - \rho^2$$

C'est à dire $\dfrac{1}{1 - |z|^2} \leqslant \dfrac{1}{2\rho\cos\theta_0 - \rho^2}$

$\Rightarrow$ Comme nous voulons faire tendre z vers 1, c'est à dire faire tendre $|z-1| = \rho$ vers 0, on peut supposer $\rho \leqslant \cos\theta_0$, c'est à dire $|z-1| \leqslant \cos\theta_0$.
Supposons donc $\rho \leqslant \cos\theta_0 \iff |z-1| \leqslant \cos\theta_0$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{|z-1|}{1-|z|} &= \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) \\ &\leqslant \frac{\rho}{2\rho\cos\theta_0 - \rho^2}(1+|z|) = \frac{1}{2\cos\theta_0 - \rho}(1+|z|) \\ &\leqslant \frac{2}{2\cos\theta_0-\rho} \text{ puisque } |z|<1\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nous avons supposé $\rho \leqslant \cos\theta_0 \iff -\rho \geqslant -\cos\theta_0$ et donc $2\cos\theta_0 - \rho \geqslant 2\cos\theta_0 - \cos\theta_0 = \cos\theta_0$, d'où nous tirons $\dfrac{1}{2\cos\theta_0-\rho} \leqslant \dfrac{1}{\cos\theta_0}$ et donc :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{2\cos\theta_0-\rho} \leqslant \frac{2}{\cos\theta_0}$$

5. Regardons, maintenant, l'expression $|z-1|\displaystyle\sum_{n=0}^{N_\varepsilon}|R_n| = \rho\sum_{n=0}^{N_\varepsilon}|R_n|$.

   En supposant $\rho \leqslant \left(\dfrac{\varepsilon}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N_\varepsilon}|R_n|}\right)$, nous avons $\rho\displaystyle\sum_{n=0}^{N_\varepsilon}|R_n| \leqslant \sum_{n=0}^{N_\varepsilon}|R_n| \times \left(\dfrac{\varepsilon}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N_\varepsilon}|R_n|}\right) = \varepsilon$

6. Et donc, pour conclure, si $\rho \leqslant \inf\left(\left\{\left(\dfrac{\varepsilon}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N_\varepsilon}|R_n|}\right); \cos\theta_0\right\}\right)$, nous avons :

$$|f(z) - S| \leqslant \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\cos\theta_0} = \varepsilon\left(1+\frac{2}{\cos\theta_0}\right)$$

   Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, ceci termine de montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{z\longrightarrow 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = S$

   Ce que nous voulions.

Remarque 20 :

1. Le théorème d'Abel angulaire 8.8.1 généralise le théorème d'Abel dans le domaine réel vu en 8.5.1
2. Existe-t-il une réciproque ? ?. . . presque parce que, pour obtenir cette réciproque, il faut ajouter des hypothèses. Nous allons le voir avec un **théorème taubérien faible**

8.8.2 Théorème taubérien faible

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme $f(z) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$

On suppose que :

1. Il existe $L \in \mathbb{C}$ tel que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x\in]-1;+1[}} f(x) = L$
2. $a_n \in o\left(\dfrac{1}{n}\right) \iff \displaystyle\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$

Alors, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = L$

Démonstration

1. Il faut remarquer que, même si la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière complexe, nous ne nous intéressons qu'à la seule limite de f lorsque x est réel et $x \in \left]-1;+1\right[$
2. On appelle $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et puisque nous nous intéressons à la limite lorsque x tend vers 1, on peut supposer $0 < x < 1$. Bien entendu, il nous faudra étudier l'expression $|S_n - L|$
3. Tout d'abord, regardons $|S_n - f(x)|$
   $\Rightarrow$ Commenons par ré-écrire $|S_n - f(x)|$ et en tenter une première majoration

$$\begin{aligned}|S_n - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k x^k\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k\geqslant n+1} a_k x^k\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| + \left|\sum_{k\geqslant n+1} a_k x^k\right|\end{aligned}$$

   $\Rightarrow$ Nous avons $\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(1 - x^k\right)$ et donc

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \left(1 - x^k\right)$$

   En utilisant les identités habituelles, nous avons $\left(1 - x^k\right) = (1-x)\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{k-1}\right)$ et donc, comme $0 < x < 1$, nous avons $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{k-1} \leqslant k$, et donc

$$\left(1 - x^k\right) \leqslant k(1-x)$$

   Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \left(1 - x^k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} k\,|a_k|\,(1-x)$$

   $\Rightarrow$ Lorsque $k \geqslant n+1$, nous avons $\frac{k}{n} \geqslant 1$ et donc :

$$\left|\sum_{k\geqslant n+1} a_k x^k\right| \leqslant \sum_{k\geqslant n+1} |a_k|\, x^k \leqslant \sum_{k\geqslant n+1} \frac{k}{n} |a_k|\, x^k$$

4. Comme $\lim_{n\to+\infty} n a_n = 0$, la suite $(n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   $\Rightarrow$ Il existe donc $M \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous ayions $|n a_n| = n\,|a_n| \leqslant M$. Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \left(1 - x^k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} k\,|a_k|\,(1-x) \leqslant (1-x)\sum_{k=0}^{n} M = M(n+1)(1-x)$$

   $\Rightarrow$ La suite étant bornée, $M_n = \sup_{k\geqslant n+1} k\,|a_k|$ existe aussi et donc :

$$\sum_{k\geqslant n+1} \frac{k}{n} |a_k|\, x^k \leqslant \frac{M_n}{n} \sum_{k\geqslant n+1} x^k$$

   Or, $\sum_{k\geqslant n+1} x^k = \sum_{k\geqslant 0} x^{n+1+k} = x^{n+1} \sum_{k\geqslant 0} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

Comme $0 < x < 1$, nous avons $0 < x^{n+1} < 1$ et donc $\sum_{k \geqslant n+1} x^k \leqslant \frac{1}{1-x}$. Ainsi :

$$\sum_{k \geqslant n+1} \frac{k}{n} |a_k| x^k \leqslant \frac{M_n}{n} \sum_{k \geqslant n+1} x^k \leqslant \frac{M_n}{n} \times \frac{1}{1-x}$$

⇒ Et, en synthèse, nous avons :

$$|S_n - f(x)| \leqslant M(n+1)(1-x) + \frac{M_n}{n} \times \frac{1}{1-x}$$

⇒ Dernière remarque, comme $\lim_{n \to +\infty} n a_n = 0$, nous avons aussi $\lim_{n \to +\infty} M_n = 0$.
Pour le démontrer, il suffit d'utiliser la définition.
Pour $A > 0$, il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant P$, alors $n|a_n| \leqslant A$.
En particulier, si $n \geqslant P$ $\sup_{k \geqslant n+1} k|a_k| \leqslant A$, c'est à dire $M_n \leqslant A$
Donc $\lim_{n \to +\infty} M_n = 0$

5. Soit $\varepsilon > 0$
⇒ Soit $x_n = 1 - \frac{\varepsilon}{n+1}$.
   - ⋆ Alors, comme $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in]-1;+1[}} f(x) = L$, nous avons $\lim_{n \to +\infty} f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n+1}\right) = L$.
   - ⋆ De plus, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|S_n - L| \leqslant |S_n - f(x_n)| + |f(x_n) - L|$$

⇒ Ainsi :

$$\begin{aligned} |S_n - f(x_n)| = \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n+1}\right)\right| &\leqslant M(n+1)\left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{n+1}\right)\right) + \frac{M_n}{n} \times \left(\frac{n+1}{\varepsilon}\right) \\ &\leqslant M\varepsilon + \frac{M_n}{\varepsilon}\left(\frac{n+1}{n}\right) \end{aligned}$$

Comme nous avons $\lim_{n \to +\infty} M_n = 0$, nous avons aussi $\lim_{n \to +\infty} M_n \left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$; il existe donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant N_0$, alors $0 < M_n \left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \varepsilon^2$.
Et donc, si $n \geqslant N_0$, alors :

$$|S_n - f(x_n)| = \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n+1}\right)\right| \leqslant M\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = (M+1)\varepsilon$$

⇒ Comme $\lim_{n \to +\infty} f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n+1}\right) = L$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_1$, alors $|f(x_n) - L| \leqslant \varepsilon$
⇒ Ainsi, si $N \geqslant \sup(\{N_0, N_1\})$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$, alors :

$$|S_n - L| \leqslant |S_n - f(x_n)| + |f(x_n) - L| \leqslant (M+1)\varepsilon + \varepsilon = (M+2)\varepsilon$$

Nous venons ainsi de montrer que $\lim_{n \to +\infty} S_n = L$, c'est à dire que la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge et que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = L$

Remarque 21 :

Ce théorème de Tauber est le premier d'une très longue lignée que l'ontrouve dans différentes parties de l'analyse mathématique. L'intérêt de ce théorème est de s'intéresser à ce qui se passe aux bords du domaine de convergence.

8.8.3 Lemme

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients réels

On considère la série $S(x) = \sum\limits_{n \geqslant 0} x^n P(x^n)$. Alors $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x) S(x) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration

1. Nous allons commencer par démontrer que ce lemme est vrai pour tout monôme $e_k(X) = X^k$. Comme souvent, nous confondrons le polynôme e_k et la fonction polynôme associée, définie pour $x \in [0;1[$ par $e_k(x) = x^k$

   ⇒ Tout d'abord, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $e_k(x^n) = (x^n)^k = x^{nk}$ et donc

   $$x^n e_k(x^n) = x^n (x^n)^k = x^{n(k+1)} = \left(x^{k+1}\right)^n$$

   De telle sorte que, pour $x \in [0;1[$, $\sum\limits_{n \geqslant 0} x^n e_k(x^n) = \sum\limits_{n \geqslant 0} \left(x^{k+1}\right)^n = \dfrac{1}{1-x^{k+1}}$

   ⇒ Ainsi, si $x \in [0;1[$, $S(x) = \dfrac{1}{1-x^{k+1}}$ et donc $(1-x) S(x) = \dfrac{1-x}{1-x^{k+1}}$

   ⇒ Les identités habituelles nous donnent $1 - x^{k+1} = (1-x)\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k\right)$ et donc

   $$(1-x) S(x) = \frac{1-x}{1-x^{k+1}} = \frac{1-x}{(1-x)\left(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k\right)} = \frac{1}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k}$$

   De telle sorte que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x) S(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3+\cdots+x^k} = \dfrac{1}{k+1}$

   ⇒ Maintenant :

   $$\int_0^1 e_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$$

   Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x) \sum\limits_{n \geqslant 0} x^n e_k(x^n) = \int_0^1 e_k(t)\,\mathrm{d}t$

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et nous notons p le degré de P, c'est à dire que $P = \sum\limits_{k=0}^{p} \lambda_k e_k$ avec, $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

   Ainsi, en utilisant permutation des limites et des sommes, nous avons :

   $$\begin{aligned}
   \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x) \sum_{n \geqslant 0} \sum_{k=0}^{p} \lambda_k x^n e_k(x^n) &= \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \left(\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1-x) \sum_{n \geqslant 0} x^n e_k(x^n) \right) \\
   &= \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \int_0^1 e_k(t)\,\mathrm{d}t \\
   &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{p} \lambda_k e_k(t)\,\mathrm{d}t \\
   &= \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t
   \end{aligned}$$

Ce que nous voulions

8.8.4 Théorème de Hardy-Littlewood *(ou théorème taubérien fort)*

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho \geqslant 1$ et de somme $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$

On suppose que :

1. Il existe $L \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in]-1;+1[}} f(x) = L$
2. $a_n \in O\left(\frac{1}{n}\right) \Longleftrightarrow \left|\frac{a_n}{\frac{1}{n}}\right| \leqslant C \Longleftrightarrow |a_n| \leqslant \frac{C}{n}$

Alors, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = L$

Remarque 22 :

Quelques remarques avant de démontrer le théorème

1. **Pour quoi « théorème taubérien fort » ?**

   Dans le théorème 8.8.2, nous avions $a_n \in o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors qu'ici, nous avons $a_n \in O\left(\frac{1}{n}\right)$ et comme $o\left(\frac{1}{n}\right) \subset O\left(\frac{1}{n}\right)$, nous affaiblissons les hypothèses en les élargissant.
2. **Concernant le rayon de convergence**

   Nous avons montré en 8.2.1 que si $a_n \in O(b_n)$; alors $\rho_A \geqslant \rho_B$. Ici nous avons $b_n = \frac{1}{n}$ et comme la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1, on déduit facilement que le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est donc $\rho \geqslant 1$

Démonstration

Nous allons démontrer le théorème 8.8.4 dans le seul cas où $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in]-1;+1[}} f(x) = 0$

En effet, supposons le théorème démontré dans ce cas, et soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ avec une série entière telle que $a_n \in O\left(\frac{1}{n}\right)$, de rayon de convergence $\rho \geqslant 1$ et de somme $g(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.

Nous supposons que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in]-1;+1[}} g(x) = L$ où $L \in \mathbb{C}$.

Soit $\varphi(x) = g(x) - L$.

Nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in]-1;+1[}} \varphi(x) = 0$ et en posant $b_0 = a_0 - L$ et, pour $n \geqslant 1$, $b_n = a_n$, nous avons, pour $|x| < 1$, $\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$.

Alors, si le théorème est démontré pour $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in]-1;+1[}} f(x) = 0$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n = 0$, c'est à dire

$$a_0 - L + \sum_{n\geqslant 1} b_n = a_0 - L + \sum_{n\geqslant 1} a_n = 0 \Longleftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = L$$

Ce que nous voulions.

Nous allons donc supposer, désormais que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in]-1;+1[}} f(x) = 0$, c'est à dire que nous supposons $L = 0$

1. On appelle $\mathcal{T}$ l'ensemble des applications $\theta : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour tout $x \in [0;1[$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n \theta(x^n)$ converge et telle que, de plus, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x \in]-1;+1[}} \left(\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n \theta(x^n) \right) = 0$

   ⇒ Soit, maintenant, $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} g : [0;1] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto \quad g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2} \\ 1 \text{ si } \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \end{cases}$$

   En fait, $g = 1_{\left[\frac{1}{2};+1\right[}$ qui est la fonction indicatrice de $\left[\dfrac{1}{2};+1\right[$

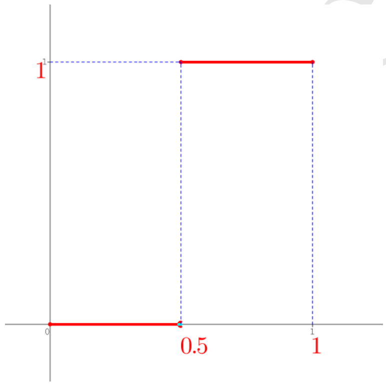

FIGURE 8.5 – Une représentation graphique de la fonction g, indicatrice de $\left[\dfrac{1}{2};+1\right[$

   ⇒ Si $0 \leqslant x < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$, et il existe donc $N(x) \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n > N(x)$, alors $x^n < \dfrac{1}{2}$ et, alors $g(x^n) = 0$

   ⇒ Il est facile de calculer ce nombre $N(x)$. En effet, en utilisant les logarithmes, nous avons :

$$x^n < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow n \ln x < -\ln 2 \Longleftrightarrow n > \frac{-\ln 2}{\ln x}$$

   En posant $N(x) = \left[\dfrac{-\ln 2}{\ln x}\right]$ *(où $[\bullet]$ désigne la partie entière)*, si $n > N(x)$, alors $x^n < \dfrac{1}{2}$

   ⇒ Nous pouvons remarquer que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} N(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \left[\dfrac{-\ln 2}{\ln x}\right] = +\infty$

   ⇒ Ainsi, pour tout $x \in [0;1[$, nous avons $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n g(x^n) = \sum\limits_{n=0}^{N(x)} a_n$, et nous avons :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \left(\sum_{n \geqslant 0} a_n g(x^n) \right) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sum_{n=0}^{N(x)} a_n = \sum_{n \geqslant 0} a_n$$

   Et si nous réussissons à démontrer que $g \in \mathcal{T}$, nous aurons alors $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n = 0$ et nous aurons démontré le théorème.

2. Toutes les fonctions polynomiales $\Phi \in \mathbb{R}[X]$ qui s'annulent en $x = 0$ sont des éléments de $\mathcal{T}$
   $\Rightarrow$ Une telle fonction s'écrit $\Phi(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x^k$
   $\Rightarrow$ Nous allons vérifier que les monômes $e_k(x) = x^k$, pour $k \geqslant 1$ sont des éléments de $\mathcal{T}$
   Nous avons :
   $$\sum_{n \geqslant 0} a_n e_k(x^n) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (x^n)^k = \sum_{n \geqslant 0} a_n \left(x^k\right)^n = f\left(x^k\right)$$
   Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x^k = 1$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f\left(x^k\right) = 0$, et donc $e_k \in \mathcal{T}$
   $\Rightarrow$ Soit $\Phi \in \mathbb{R}[X]$ telle que $\Phi(0) = 0$; donc $\Phi(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x^k$; nous avons, alors, $\Phi = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k$ et donc
   $$a_n \Phi(x^n) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k a_n e_k(x^n)$$
   D'où
   $$\sum_{n \geqslant 0} a_n \Phi(x^n) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left(\sum_{n \geqslant 0} a_n e_k(x^n)\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f\left(x^k\right)$$
   $\Rightarrow$ Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f\left(x^k\right) = 0$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f\left(x^k\right) = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sum_{n \geqslant 0} a_n \Phi(x^n) = 0$ et donc $\Phi \in \mathcal{T}$
3. Nous allons, maintenant, approcher la fonction $g = 1_{\left[\frac{1}{2};+1\right[}$ définie en 1 par des fonctions polynômiales Φ telles que $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(1) = 1$. Nous venons de montrer qu'une telle fonction Φ est un élément de $\mathcal{T}$
   $\triangleright$ Pour approcher cette fonction g, nous écrivons g sous la forme :
   $$g(x) = x + x(1-x)h(x)$$
   Nous avons donc $h(x) = \dfrac{g(x) - x}{x(1-x)}$ pour $x \in]0;+1[$ et $h(0) = -1$ et $h(1) = 1$
   $\triangleright$ En utilisant la définition de la fonction $g = 1_{\left[\frac{1}{2};+1\right[}$, nous avons :
   - $\star$ Si $0 < x < \dfrac{1}{2}$, nous avons $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et en prolongeant par continuité, nous avons $h(0) = -1$.
     Nous pouvons donc écrire $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$ si $0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}$
   - $\star$ Et en suivant un raisonnement semblable, nous avons $h(x) = \dfrac{1}{x}$ si $\dfrac{1}{2} < x \leqslant 1$

   $\triangleright$ Soit $\varepsilon > 0$
   - $\star$ Nous allons créer 2 fonctions s_1 et s_2, continues, telles que :
     - $\diamond$ $s_1 \leqslant h \leqslant s_2$
     - $\diamond$ $\displaystyle\int_0^1 |s_1(t) - s_2(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^1 (s_2(t) - s_1(t)) \,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$
   - $\star$ Il n'est pas difficile de crée 2 telles fonctions :
     - $\diamond$ Pour s_2, soit $\alpha > 0$ et nous construisons :
       - $\rightarrow$ $s_2(t) = h(t)$ sur $\left[0; \dfrac{1}{2} - \alpha\right[\cup \left[\dfrac{1}{2}; +1\right]$
       - $\rightarrow$ $s_2(t)$ est affine sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2} - \alpha; \dfrac{1}{2}\right]$.

       Avec
       $$s_2\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = h\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \alpha - 1} = \frac{-2}{2\alpha + 1}$$
       Et

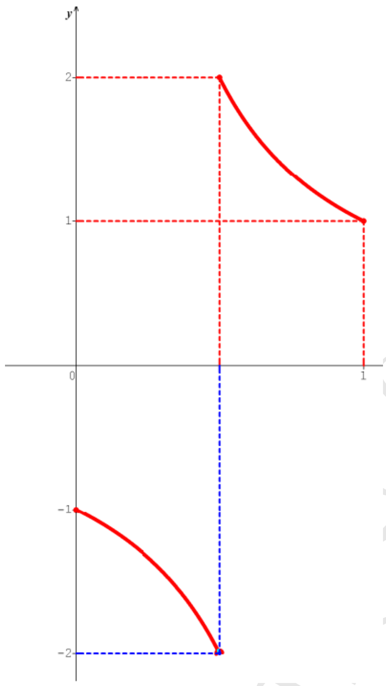

FIGURE 8.6 – Une représentation graphique de la fonction h

$$s_2\left(\frac{1}{2}\right)=h\left(\frac{1}{2}\right)=2$$

→ D'où nous avons, sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}-\alpha;\frac{1}{2}\right]$

$$s_2(t)=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{2}{2\alpha+1}+2\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)+2$$

◇ Pour s_1, soit $\beta>0$ et nous construisons :
→ $s_1(t)=h(t)$ sur $\left[0;\frac{1}{2}\right[\cup\left[\frac{1}{2}+\beta;+1\right]$
→ $s_1(t)$ est affine sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};\frac{1}{2}+\beta\right]$.
Avec

$$s_1\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{\substack{t\to\frac{1}{2}\\ t<\frac{1}{2}}}h(t)=-2$$

Et

$$s_1\left(\frac{1}{2}+\beta\right)=h\left(\frac{1}{2}+\beta\right)=\frac{2}{2\beta+1}$$

→ D'où nous avons, sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};\frac{1}{2}+\beta\right]$

$$s_1(t)=\frac{1}{\beta}\left(\frac{2}{2\beta+1}+2\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)-2$$

◇ Nous choisissons maintenant α et β pour que $\int_0^1(s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon$.

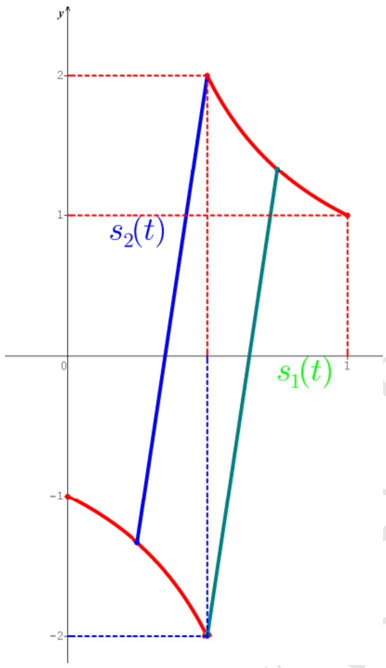

FIGURE 8.7 – Encadrement de la fonction h par les fonctions s_1 et s_2

Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t = & \int_0^{\frac{1}{2}-\alpha}(s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}}(s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t+\\ & \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\beta}(s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}+\beta}^{1}(s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t\\ = & \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}}(s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\beta}(s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

→ Calculons $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}}(s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}}(s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t = & \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{2}{2\alpha+1}+2\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)+2-\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\\ = & \left[\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{2}{2\alpha+1}+2\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2t-\ln|t-1|\right]_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}}\\ = & (1+\ln 2)-\left(\alpha\left(\frac{1}{2\alpha+1}+1\right)+1-2\alpha-\ln\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\right)\\ = & (1+\ln 2)-\left(\alpha\left(\frac{1}{2\alpha+1}+1\right)+1-2\alpha-\ln(1+2\alpha)+\ln 2\right)\\ = & (1+\ln 2)-\alpha\left(\frac{1}{2\alpha+1}+1\right)-1+2\alpha+\ln(1+2\alpha)-\ln 2\\ = & \ln(1+2\alpha)-\alpha\left(\frac{1}{2\alpha+1}-1\right)=\ln(1+2\alpha)+\frac{2\alpha^2}{2\alpha+1}\end{aligned}$$

→ Calculons maintenant $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\beta}(s_2(t)-s_1(t))\,\mathrm{d}t$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\beta} (s_2(t)-s_1(t))\ \mathrm{d}t &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\beta} \frac{1}{t}-\left(\frac{1}{\beta}\left(\frac{2}{2\beta+1}+2\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)-2\right)\ \mathrm{d}t \\
&= \left[\ln t-\frac{1}{2\beta}\left(\frac{2}{2\beta+1}+2\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2t\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\beta} \\
&= \left(\ln\left(\frac{1}{2}+\beta\right)-\beta\left(\frac{1}{2\beta+1}+1\right)+2\beta+1\right)-(-\ln 2+1) \\
&= \ln(1+2\beta)-\ln 2-\beta\left(\frac{1}{2\beta+1}+1\right)+2\beta+1+\ln 2-1 \\
&= \ln(1+2\beta)-\beta\left(\frac{1}{2\beta+1}-1\right)=\ln(1+2\beta)+\frac{2\beta^2}{2\beta+1}
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int_0^1 (s_2(t)-s_1(t))\ \mathrm{d}t=\ln(1+2\alpha)+\frac{2\alpha^2}{2\alpha+1}+\ln(1+2\beta)+\frac{2\beta^2}{2\beta+1}$

Il suffit, maintenant, de trouver $\alpha>0$ et $\beta>0$ tels que $\ln(1+2\alpha)+\dfrac{2\alpha^2}{2\alpha+1}+\ln(1+2\beta)+\dfrac{2\beta^2}{2\beta+1}<\varepsilon$ [1]

Nous avons donc $\displaystyle\int_0^1 (s_2(t)-s_1(t))\ \mathrm{d}t<\varepsilon$

- ◇ Comme s_1 et s_2 sont continues sur l'intervalle $[0;1]$, d'après le théorème de Weierstrass [2], il existe un polynôme $Q_1\in\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$(\forall x\in[0;1])\,(|s_1(x)-Q_1(x)|<\varepsilon)\Longleftrightarrow \|s_1-Q_1\|_\infty<\varepsilon$$

De même, il existe $Q_2\in\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x\in[0;1]$, nous avons $|s_2(x)-Q_2(x)|<\varepsilon$

- ◇ L'inégalité $|s_1(x)-Q_1(x)|<\varepsilon$ vraie pour tout $x\in[0;1]$ peut aussi s'écrire :

$$-\varepsilon<s_1(x)-Q_1(x)<\varepsilon\Longleftrightarrow Q_1(x)-\varepsilon<s_1(x)<Q_1(x)+\varepsilon$$

Tout comme

$$-\varepsilon<s_2(x)-Q_2(x)<\varepsilon\Longleftrightarrow Q_2(x)-\varepsilon<s_2(x)<Q_2(x)+\varepsilon$$

- ◇ Posons $R_1(x)=Q_1(x)-\varepsilon$ et $R_2(x)=Q_2(x)+\varepsilon$.
R_1 tout comme R_2 est aussi un polynôme. Des inégalités précédentes, nous pouvons écrire :

$$R_1(x)<s_1(x)<h(x)<s_2(x)<R_2(x)$$

C'est à dire

$$R_1(x)<h(x)<R_2(x)$$

- ◇ On pose $P_1(x)=x+x(1-x)R_1(x)$ et $P_2(x)=x+x(1-x)R_2(x)$.
P_1 et P_2 sont 2 polynômes tels que $P_1(0)=P_2(0)=0$ et $P_1(1)=P_2(1)=1$ et donc $P_1\in\mathcal{T}$ et $P_2\in\mathcal{T}$
- ◇ Pour $x\in[0;1]$, comme $x(1-x)\geqslant 0$, nous avons :

$$x(1-x)R_1(x)<x(1-x)h(x)<x(1-x)R_2(x)$$

Puis :

$$x+x(1-x)R_1(x)<x+x(1-x)h(x)<x+x(1-x)R_2(x)$$

Autrement dit $P_1(x)<g(x)<P_2(x)$

1. Il suffit de voir que, pour tout $x>0$, nous avons $\ln(1+2x)+\dfrac{2x^2}{2x+1}<4x$ et donc, si nous choisissons $\alpha<\dfrac{\varepsilon}{8}$ et $\beta<\dfrac{\varepsilon}{8}$, nous avons bien $\displaystyle\int_0^1 (s_2(t)-s_1(t))\ \mathrm{d}t\leqslant\varepsilon$
2. Le théorème de Weierstrass dit que les polynômes sont denses dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0;1]$

Nous avons bien encadré $g = 1_{\left[\frac{1}{2};+1\right[}$ par des polynômes P_1 et P_2 de $\mathcal{T}$

4. Nous allons montrer, par des encadrements, que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum\limits_{n=0}^{N(x)} a_n = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n g\left(x^n\right) = 0$

   ▷ Soit $Q(x) = R_2(x) - R_1(x)$; nous avons $Q \in \mathbb{R}[X]$

   ⋆ En réutilisant la définition de R_1 ou de R_2, nous avons $R_1(x) = \dfrac{P_1(x) - x}{x(1-x)}$ et $R_2(x) = \dfrac{P_2(x) - x}{x(1-x)}$, et donc :

$$Q(x) = R_2(x) - R_1(x) = \frac{P_2(x) - x}{x(1-x)} - \frac{P_1(x) - x}{x(1-x)} = \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$P_2(x) - P_1(x) = x(1-x)\,Q(x)$$

   ⋆ De l'inégalité $R_2(x) > R_1(x)$ lorsque $x \in [0;1]$, nous déduisons que $Q(x) > 0$ si $x \in [0;1]$

   ⋆ D'autre part :

$$Q(x) = R_2(x) - R_1(x) = Q_2(x) + \varepsilon - (Q_1(x) - \varepsilon) = Q_2(x) - Q_1(x) + 2\varepsilon$$

   Comme $Q_2(x) < s_2(x) + \varepsilon$ et $-Q_1(x) < -s_1(x) + \varepsilon$, nous avons alors :

$$Q(x) = Q_2(x) - Q_1(x) + 2\varepsilon < s_2(x) - s_1(x) + 4\varepsilon$$

   Nous avons alors :

$$0 \leqslant \int_0^1 Q(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 Q_2(x) - Q_1(x) + 2\varepsilon\,\mathrm{d}t < \int_0^1 s_2(x) - s_1(x)\ \mathrm{d}t + 4\varepsilon < 5\varepsilon$$

   ▷ Quelques rappels :

   ⋆ Nous avons vu que pour tout $x \in [0;1[$, nous avons $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n g\left(x^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{N(x)} a_n$ où $N(x)$ est un nombre parfaitement calculé, dépendant de x. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n g\left(x^n\right)$ converge donc ; c'est même une somme finie.

   ⋆ De même, puisque $P_1 \in \mathcal{T}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)$ converge et nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right) = 0$

   ▷ Nous allons, maintenant, utiliser l'hypothèse $a_n \in O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   Il existe donc $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant \dfrac{M}{n}$.

   ⋆ Pour $x \in [0;1[$, nous avons :

$$\left|\sum_{n\geqslant 0} a_n g\left(x^n\right) - \sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \left|a_n g\left(x^n\right) - a_n P_1\left(x^n\right)\right| = \sum_{n\geqslant 0} |a_n| \left(g\left(x^n\right) - P_1\left(x^n\right)\right)$$

   ⋆ De l'encadrement, vrai pour tout $x \in [0;1[$, $P_1(x) \leqslant g(x) \leqslant P_2(x)$, nous déduisons $0 \leqslant g(x) - P_1(x) \leqslant P_2(x) - P_1(x)$

   ⋆ Et nous avons donc :

$$\left|\sum_{n\geqslant 0} a_n g\left(x^n\right) - \sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} |a_n| \left(P_2\left(x^n\right) - P_1\left(x^n\right)\right) \leqslant M \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}\left(P_2\left(x^n\right) - P_1\left(x^n\right)\right)$$

   ⋆ Or, $P_2\left(x^n\right) - P_1\left(x^n\right) = x^n\left(1 - x^n\right) Q\left(x^n\right)$ et donc

$$\left|\sum_{n\geqslant 0} a_n g\left(x^n\right) - \sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \leqslant M \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n\left(1 - x^n\right)}{n} Q\left(x^n\right)$$

- ⋆ En réutilisant l'inégalité, vraie pour $x \in [0;1[$, $(1-x^n) \leqslant n\,(1-x)$ déjà démontrée dans le théorème taubérien faible 8.8.2, nous avons :

$$\left|\sum_{n\geqslant 0} a_n g\left(x^n\right) - \sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \leqslant M\,(1-x)\sum_{n\geqslant 0} x^n Q\left(x^n\right)$$

- ⋆ De l'ingalité triangulaire classique $|x| \leqslant |x-y| + |y|$, nous déduisons :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\geqslant 0} a_n g\left(x^n\right)\right| &\leqslant \left|\sum_{n\geqslant 0} a_n g\left(x^n\right) - \sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right| + \left|\sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \\ &\leqslant M\,(1-x)\sum_{n\geqslant 0} x^n Q\left(x^n\right) + \left|\sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right|\end{aligned}$$

▷ D'après le lemme 8.8.3 $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)\sum_{n\geqslant 0} x^n Q\left(x^n\right) = \int_0^1 Q\left(t\right)\,\mathrm{d}t$.

Il existe donc $\mu \in [0;1[$, tel que si $\mu < x < 1$, alors

$$\left|(1-x)\sum_{n\geqslant 0} x^n Q\left(x^n\right) - \int_0^1 Q\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

De la même manière, en réutilisant, pour $\mu < x < 1$, l'inégalité triangulaire vue ci-dessus

$$\left|(1-x)\sum_{n\geqslant 0} x^n Q\left(x^n\right)\right| \leqslant \left|(1-x)\sum_{n\geqslant 0} x^n Q\left(x^n\right) - \int_0^1 Q\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right| + \int_0^1 Q\left(t\right)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon + 5\varepsilon = 6\varepsilon$$

▷ De même, comme $P_1 \in \mathcal{T}$, nous avons $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right) = 0$.

Il existe donc $\lambda \in [0;1[$ tel que si $\lambda < x < 1$, alors $\displaystyle\left|\sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \leqslant \varepsilon$

▷ Donc, en posant $\Lambda = \max\{\lambda, \mu\}$, pour $\Lambda < x < 1$, nous avons :

$$\left|\sum_{n\geqslant 0} a_n g\left(x^n\right)\right| \leqslant M\,(1-x)\sum_{n\geqslant 0} x^n Q\left(x^n\right) + \left|\sum_{n\geqslant 0} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \leqslant 6M\varepsilon + \varepsilon$$

Nous venons donc de montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n\geqslant 0} a_n g\left(x^n\right) = 0$.

Ainsi $g = 1_{\left[\frac{1}{2};+1\right[} \in \mathcal{T}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n = 0$

Ce que nous voulions : le théorème est démontré

Exemple 12 :

Nous prenons un exemple tout ce qu'il y a de plus classique :
La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est une série convergente de rayon de convergence égal à 1. Ici, bien entendu, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et donc $a_n \in O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Si $|x| < 1$, nous avons $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n = -\ln(1+x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} -\ln(1+x) = -\ln 2$.

Donc, d'après le théorème taubérien fort 8.8.4, nous avons $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$

Remarque 23 :

Revenons sur quelques éléments de la démonstration

1. L'ensemble des polynômes Φ tels que $\Phi(0) = 0$ est $X\mathbb{R}[X]$
2. **Explications supplémentaires**
   - Nous avons vu que, pour tout $x \in [0;1[$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N(x)} a_n$ où nous avons $N(x) = \left[\dfrac{-\ln 2}{\ln x}\right]$
   - Que veut dire $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{N(x)} a_n = 0$?

     Ceci veut dire que, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in [0;1[$ tel que si $\alpha < x < 1$, alors $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{N(x)} a_n\right| < \varepsilon$
   - On considère l'application $\varphi : [0;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]0;1[$ par $\varphi(x) = \dfrac{-\ln 2}{\ln x}$

     $\to$ Tout d'aboord, la dériviée φ' est donnée par $\varphi'(x) = \dfrac{\ln 2}{x(\ln x)^2}$. φ est donc croissante sur $]0;1[$

     $\to$ Clairement, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \varphi(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi(x) = 0$; il est donc possible de prolonger φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$

     $\to$ φ réalise donc une bijection croissante de $[0;1[$ dans $\mathbb{R}^+$

     $\to$ La fonction $N : [0;1[\longrightarrow \mathbb{N}$ définie par :

     $$\begin{cases} N : [0;1[& \longrightarrow \quad \mathbb{N} \\ \qquad x & \longmapsto \quad N(x) = \left[\dfrac{-\ln 2}{\ln x}\right] \end{cases}$$

     est croissante au sens large sur $[0;1[$; ce n'est certainement pas une bijection ! !
   - Soit x_0 tel que $\alpha < x_0 < 1$, alors $N(x_0) = \left[\dfrac{-\ln 2}{\ln x_0}\right]$ et $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{N(x_0)} a_n\right| < \varepsilon$

     Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant N(x_0)$. Il existe $x_1 \in [0;1[$ tel que $p = N(x_1)$, et au vu de la croissance de N, nous avons $x_0 < x_1 < 1$ et donc $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{p} a_n\right| < \varepsilon$
   - Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(x_0) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant N(x_0)$, nous ayons $\left|\displaystyle\sum_{n=0}^{p} a_n\right| < \varepsilon$

   Et donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} Sum_{p=0}^{n} a_p = 0$
3. **Intérêt du théorème**

   L'intérêt du théorème est de rechercher une réciproque du théorème d'Abel angulaire 8.8.1
   - On se donne donc une série complexe $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ que nous supposons de rayon de convergence $\rho \geqslant 1$.

     Si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, alors le théorème d'Abel angulaire 8.8.1 affirme que, pour $x \in]-1;+1[$, nous avons $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$:

     $$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n$$
   - La réciproque serait :

     Si $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$ existe, alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$

     Cette réciproque est fausse

Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\,x^n$ de rayon de convergence $\rho = 1$.

Si $x \in\,]-1;+1[$, alors $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\,x^n = \dfrac{1}{1+x}$ et nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{2}$ alors que la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n$ diverge.

- La réciproque n'est vraie que sous certaines conditions :

$\rightarrow$ Si $a_n \in o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, c'est le théorème taubérien faible 8.8.2

$\rightarrow$ Si $a_n \in O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, c'est le théorème taubérien fort ou de Hardy-Littlewood 8.8.4