8.9 Exponentielle et trigonométrie complexe

8.9.1 La fonction exponentielle complexe

1. Nous avons démontré que la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente sur $\mathbb{C}$ en entier.

   Pour tout $z\in\mathbb{C}$, nous notons $\text{Exp}\,(z)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$

2. **Proposition**

   Pour tout $z\in\mathbb{C}$ et tout $z'\in\mathbb{C}$, nous avons $\text{Exp}\,(z+z')=\text{Exp}\,(z)\times\text{Exp}\,(z')$

   Démonstration

   → Nous savons que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente sur $\mathbb{C}$ et donc, pour tout $z\in\mathbb{C}$ et tout $z'\in\mathbb{C}$, nous avons :

   $$\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{z'^n}{n!}\right)=\text{Exp}\,(z)\times\text{Exp}\,(z')=\sum_{n\geqslant 0}w_n$$

   où w_n est défini par le produit de Cauchy

   → Calcul de w_n
   Nous avons :

   $$\begin{aligned} w_n &= \sum_{p=0}^{n}a_pb_{n-p}=\sum_{p=0}^{n}\frac{z^p}{p!}\frac{z'^{n-p}}{(n-p)!}=\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}n!\times\frac{z^p}{p!}\frac{z'^{n-p}}{(n-p)!} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}z^pz'^{n-p}=\frac{1}{n!}(z+z')^n \end{aligned}$$

   Ainsi, nous obtenons $\text{Exp}\,(z)\times\text{Exp}\,(z')=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(z+z')^n}{n!}=\text{Exp}\,(z+z')$

   Ce que nous voulions

3. **Proposition**

   La restriction de la fonction Exp à $\mathbb{R}$ correspond à la fonction exponentielle réelle, autrement dit :

   $$(\forall x\in\mathbb{R})\,(\text{Exp}\,(x)=e^x)$$

   Démonstration

   → En considérant le point précédent, la restriction de la fonction Exp à $\mathbb{R}$ vérifie, puisque $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $y\in\mathbb{C}$:

   $$\text{Exp}\,(x+y)=\text{Exp}\,(x)\times\text{Exp}\,(y)$$

   → La restriction de Exp à $\mathbb{R}$ est aussi dérivable et nous avons :

   $$\text{Exp}'\,(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n!}=\text{Exp}\,(x)$$

   → D'après l'exposé de L_1 *(fonctions transcendantes)*, et sachant que $\text{Exp}\,(1)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}=e$, nous avons, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\text{Exp}\,(x)=e^x$

Définition

Nous notons, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Exp}\,(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!} = e^z$

Nous définissons ainsi la fonction exponentielle complexe

8.9.2 Proposition

1. Nous avons $e^0 = 1$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(e^z)^{-1} = \frac{1}{e^z} = e^{-z}$
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $e^z \neq 0$

Démonstration

1. De toute évidence, $0 \in \mathbb{R}$ et de la restriction de Exp à $\mathbb{R}$, nous avons donc $e^0 = 1$
2. Facilement, nous avons, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $1 = e^0 = e^{z-z} = e^z \times e^{-z}$ et, donc, nous avons bien $(e^z)^{-1} = \frac{1}{e^z} = e^{-z}$, et ce pour tout $z \in \mathbb{C}$
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, e^z est inversible et donc, nous avons, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$

Remarque 24 :

L'exponentielle complexe Exp est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$

8.9.3 Théorème

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|e^{it}\right| = 1$

Démonstration

1. $\rightarrow$ Soit $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \varphi(z) = \overline{z} \end{array} \right.$$

φ est une fonction continue sur $\mathbb{C}$ puisque, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z_0 \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$|\varphi(z) - \varphi(z_0)| = |\overline{z} - \overline{z_0}| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|$$

Ainsi, pour toute suite convergente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes, nous avons :

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi(u_n) = \varphi\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \overline{u_n} = \overline{\lim_{n \to +\infty} u_n}$$

$\rightarrow$ Si nous considérons $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$, nous avons $\lim_{n \to +\infty} u_n = e^z$, et $\overline{u_n} = \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!}$ avec $\lim_{n \to +\infty} \overline{u_n} = e^{\overline{z}}$

Donc, d'après ci-dessus $\lim_{n \to +\infty} \overline{u_n} = \overline{\lim_{n \to +\infty} u_n} \Longleftrightarrow e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$

2. Dès lors : $|e^z|^2 = e^z \times \overline{e^z} = e^z \times e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2\,\mathrm{Re}(z)}$
   Et donc $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$
3. Si $t \in \mathbb{R}$, alors it est imaginaire pur et $\mathrm{Re}\,(it) = 0$ et donc $\left|e^{it}\right| = 1$

Remarque 25 :

Si, pour $z \in \mathbb{C}$, nous utilisons la forme algébrique $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors, en utilisant la propriété de l'exponentielle $e^z = e^{x+iy} = e^x \times e^{iy}$
Nous avons alors $|e^z| = e^x$ et $y \equiv \arg(e^z)\ [2\pi]$

8.9.4 Fonctions trigonométriques complexes

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, nous avons $e^{it} = \cos t + i \sin t$ et comme $\cos t = \mathrm{Re}\left(e^{it}\right)$, nous avons alors :

$$\cos t = \mathrm{Re}\left(e^{it}\right) = \cos t = \mathrm{Re}\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{(it)^n}{n!}\right) = \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}\left(\frac{(it)^n}{n!}\right) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\, t^{2n}}{(2n)!}$$

2. De la même manière, nous avons $\sin t = \mathrm{Im}\left(e^{it}\right) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\, t^{2n+1}}{(2n+1)!}$

3. **Définition**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous définissons :

$\rightarrow$ $\cos z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\, z^{2n}}{(2n)!}$ $\rightarrow$ $\sin z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\, z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

8.9.5 Fonctions hyperboliques complexes

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$\rightarrow$ Le cosinus hyperbolique d'un nombre complexe est défini par $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$. Et nous avons :

$$\cosh z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$\rightarrow$ Le sinus hyperbolique d'un nombre complexe est défini par $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. Et nous avons :

$$\sinh z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Démonstration

Ce n'est pas une démonstration très difficile. Il suffit de rééecrire e^z comme série entière, c'est à dire $e^z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$

1. Regardons $\cosh z$; nous avons tout d'abord :

$$e^z + e^{-z} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\, z^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} \left(1 + (-1)^n\right) \frac{z^n}{n!}$$

Comme $\left(1 + (-1)^n\right) = 0$ si n est impair et $\left(1 + (-1)^n\right) = 2$ si n est pair, nous avons :

$$e^z + e^{-z} = \sum_{n\geqslant 0} 2 \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Et donc, nous avons bien $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

2. De même pour $\sinh z$, nous avons :

$$e^z - e^{-z} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n z^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} (1-(-1)^n) \frac{z^n}{n!}$$

Comme $(1-(-1)^n) = 0$ si n est pair et $(1-(-1)^n) = 2$ si n est impair, nous avons :

$$e^z - e^{-z} = \sum_{n\geqslant 0} 2\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Et donc, nous avons bien $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

8.9.6 Quelques formules classiques

Nous avons les formules suivantes, vraies pour tout $z \in \mathbb{C}$

1. $\cos z = \cosh iz = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
2. $\sin z = -i \sinh iz = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
3. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
4. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$
5. $\cos(-z) = \cos z$
6. $\cosh(-z) = \cosh z$
7. $\sin(-z) = -\sin z$
8. $\sinh(-z) = -\sinh z$

Démonstration

Nous ne démontrerons pas les points 5,6,7 et 8 : ils sont très faciles et utilisent les définitions exponentielles des fonctions trigonométriques ou hyperboliques.

1. Démontrons que $\cos z = \cosh iz = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$$\begin{aligned}\cosh iz &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{i^{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \\ &= \cos z\end{aligned}$$

Et donc $\cos z = \cosh iz = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

2. Démontrons maintenant, que $\sin z = -i\sinh iz = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

Nous itérons la méthode :

$$\begin{aligned}\sinh iz &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} = i\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= i\sin z\end{aligned}$$

Nous avons donc $\sinh iz = i \sin z \iff \sin z = -i \sinh iz$ et donc $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

3. Nous avons :

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2z}+e^{-2z}+2}{4} - \frac{e^{2z}+e^{-2z}-2}{4} = 1$$

En fait, nous retrouvons les même calculs que ceux vus en L_1 dans le chapitre sur les fonctions transcendantes

4. Et, pour terminer :

$$\cos^2 z + \sin^2 z = (\cosh iz)^2 + (-i\sinh iz)^2 = \cosh^2 iz - \sinh^2 iz = 1$$

Remarque 26 :

Nous avons rassemblé dans la proposition 8.9.6 les formules semblables à celles que l'on retrouve dans $\mathbb{R}$, ce qui ne sera pas toujours le cas.

1. Dans $\mathbb{R}$, nous avons aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
2. Nous retrouvons les résultats établis sur $\mathbb{R}$: les fonctions cos et cosh sont paires et les fonctions sin et sinh sont impaires.
3. De manière évidente, et par simples calculs, nous trouvons :
$$e^z = \cosh z + \sinh z \text{ et } e^{-z} = \cosh z - \sinh z$$
4. De même, et par simples calculs, nous trouvons : $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ et $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$

8.9.7 Formules d'addition

Nous avons les classiques formules d'addition, pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tout $b \in \mathbb{C}$:

1. $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$
2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
3. $\sinh(a+b) = \cosh a \sinh b + \sinh a \cosh b$
4. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Démonstration

Ce n'est pas exactement difficile comme démonstration et nous ne ferons que les 2 premières.

1. Nous avons :
$$\begin{aligned}\cosh(a+b) &= \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^a e^b + e^{-a} e^{-b}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((\cosh a + \sinh a)(\cosh b + \sinh b) + (\cosh a - \sinh a)(\cosh b - \sinh b)\right)\\ &= \frac{1}{2}(2\cosh a \cosh b + 2 \sinh a \sinh b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b\end{aligned}$$
2. Pour démontrer que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, nous allons utiliser le fait que $\cos z = \cosh iz$ et $\sin z = -i \sinh iz$
$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cosh i(a+b) = \cosh(ia+ib) = \cosh ia \cosh ib + \sinh ia \sinh ib\\ &= \cos a \cos b + (i \sin a)(i \sin b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b\end{aligned}$$

8.9.8 Proposition

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $\cos z$ n'est pas bornée

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}$.
Ecrivons $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\begin{aligned}\cos z = \cos(x+iy) &= \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y - \sin x(-i \sinh y)\\ &= \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y\end{aligned}$$

Et donc, $|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y$.
De $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, nous tirons $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et donc
$$\begin{aligned}|\cos z|^2 &= \cos^2 x \cosh^2 y + \left(1 - \cos^2 x\right)\sinh^2 y = \cos^2 x\left(\cosh^2 y - \sinh^2 y\right) + \sinh^2 y = \cos^2 x + \sinh^2 y\\ &\geqslant \sinh^2 y\end{aligned}$$

La fonction $\sinh^2 y$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, et donc la fonction $|\cos z|^2$ n'est pas bornée sur $\mathbb{C}$
Ce que nous voulions

Remarque 27 :

1. Bien entendu, si $\cos z$ n'est pas bornée, il en est de même de $\sin z$
2. Ainsi, si les fonctions cos et sin **restreintes à l'ensemble des nombres réels** $\mathbb{R}$ **sont bornées**, il n'est pas du tout de même dans $\mathbb{C}$

8.9.9 Le logarithme complexe

1. La question que nous posons dans ce paragraphe, est celle-ci :

   Etant donné un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, existe-t-il un nombre complexe $Z \in \mathbb{C}$ tel que $e^Z = z$

2. Tout d'abord, si $z = 0$, il n'existe pas de $Z \in \mathbb{C}$ tel que $e^Z = 0$, puisque nous avons vu en 8.9.2 que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $e^Z \neq 0$
3. Si $Z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors, d'après les propriétés de l'exponentielle,

   $$e^Z = e^{x+iy} = e^x \times e^{iy}$$

   Si $|z| = \rho$ (avec $\rho > 0$) et θ est un argument de $z \in \mathbb{C}$, nous avons alors $z = \rho e^{i\theta}$ et donc de $e^Z = z \iff e^x \times e^{iy} = \rho e^{i\theta}$, nous déduisons :

   $$\begin{cases} \rho = e^x \iff x = \ln \rho = \ln |z| \\ y \equiv \theta \, [2\pi] \iff y = \theta + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4. Nous pouvons donc alors, écrire $Z = \ln \rho + i(\theta + 2k\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   Il y a donc une infinité de nombres Z_k, indicés par $k \in \mathbb{Z}$ tels que $z = e^{Z_k}$

5. **Définition du logarithme complexe**

   Nous définissons le logarithme complexe d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ par :

   $$\mathrm{Log}_k(z) = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Remarque 28 :

Il y a donc une infinité de logarithme d'un nombre complexe, ces logarithmes étant indicés par $k \in \mathbb{Z}$

8.9.10 Proposition

Soient $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\mathrm{Log}_k(z) + \mathrm{Log}_{k'}(z') = \mathrm{Log}_{k+k'}(zz')$$

Démonstration

Nous avons donc :

- ⋆ $\mathrm{Log}_k(z) = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$
- ⋆ $\mathrm{Log}_{k'}(z') = \ln |z'| + i(\arg z' + 2k'\pi)$

Et, en additionnant :

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}_k(z) + \mathrm{Log}_{k'}(z') &= \ln |z| + \ln |z'| + i(\arg z + \arg z' + 2(k + k')\pi) \\ &= \ln(|z| |z'|) + i(\arg z + \arg z' + 2(k + k')\pi) \\ &= \mathrm{Log}_{k+k'}(zz') \end{aligned}$$

Remarque 29 :

On suppose que $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$. Que devient le logarithme à ce moment là ?

1. Si $x > 0$, alors $x = xe^{2ik\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et donc $\mathrm{Log}_k(x) = \ln x + 2ik\pi$ et donc $\mathrm{Log}_0 x$ coïncide avec le logarithme népérien $\ln x$
2. Si $x < 0$, alors $x = |x|\, e^{i(\pi+2k\pi)}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et donc $\mathrm{Log}_k(x) = \ln|x| + i(\pi + 2k\pi)$
   Nous avons, en particulier $\mathrm{Log}_k(-1) = i(\pi + 2k\pi)$

Exemple 13 :

Quelques exemples

1. **Donner** $\mathrm{Log}_k(i)$
   Nous avons $i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$ et donc $\mathrm{Log}_k(i) = i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$
2. **Donner** $\mathrm{Log}_k(1+i)$
   De la même manière, $1 + i = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$ et donc

$$\mathrm{Log}_k(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

Exercice 20 :

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

   (a) $e^z = -2$ (b) $|\cos z| = |\sin z|$

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $|\sin(x+iy)| = |\sin x + \sin(iy)|$
3. Etablir les inégalités suivantes, vraies pour tout $z \in \mathbb{C}$

   (a) $|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z|\, e^{|z|}$ (b) $|\cos z| \leqslant \cosh|z|$ (c) $|\sin z| = |\sinh z|$