Chapitre 9

Séries trigonométriques, séries de Fourier

La présentation des séries de Fourier est un casse-tête ! ! Arriver des séries numériques, des séries de fonctions et des séries entières pour se retrouver devant un être mathématique aussi puissant mais qui demande beaucoup de doigté est une réelle aventure.
Ainsi, avant de traiter des séries de Fourier, nous présenteons les séries trigonométriques.
Pour traiter complètement les séries de Fourier,nous ne disposons pas encore des classes de fonctions intégrables au sens de Lebesgue. Pour cette première approche, je me suis donc placé dans le cadre de l'intégrale de Riemann, avec les outils du L_2.
L'étude commence par la convergence en moyenne quadratique, puis la convergence ponctuelle avec des résultats sur la convergence uniforme.

9.1 Séries Trigonométriques

9.1.1 Définition

On appelle série trigonométrique, une série de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$

Remarque 1 :

1. Il est possible de donner une autre définition de série trigonométrique :

   On appelle série trigonométrique une série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ dont le terme général $u_n(x)$ est de la forme

   $$u_0(x) = a_0 \text{ et pour } n \in \mathbb{N}^* u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

   Dans ce cas, cette série est à valeurs réelles alors que la série définie dans la définition 9.1.1 la fonction est à valeurs dans $\mathbb{C}$
2. On peut avoir une série trigonométrique de la forme $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{inx}$; c'est, en fait, un cas particulier de série entière avec $z = e^{ix}$, et donc, si le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est $\rho > 1$, il n'y a pas de problème de convergence.

Exemple 14 :

Exemples de séries trigonométriques.

mathinfovannes.fr ©

1. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ est trigonométrique.
2. La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{ne^{inx}}{n^2+1}$ est une série trigonométrique

9.1.2 Définition

1. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π-périodique, est développable en série trigonométrique si elle est limite simple d'une série trigonométrique
2. Une série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ est convergente sur une partie $D \subset \mathbb{R}$ s'il existe une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie l'assertion suivante :

$$(\forall x \in D)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}) \left(p \geqslant N_{x,\varepsilon} \Longrightarrow \left| \sum_{n=-p}^{p} a_p e^{ipx} - f(x) \right| < \varepsilon \right)$$

Et on écrit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$

Remarque 2 :

1. La définition 9.1.2 est la définition de la convergence simple.
2. Une série trigonométrique est une série de fonctions particulières définies sur tout $\mathbb{R}$. Par conséquent, tous les théorèmes et propositions vus dans le chapitre des séries de fonctions restent vrais
3. On aurait pu donner la définition de convergence simple, de convergence normale

9.1.3 Proposition

Si la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ converge, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

1. Le fait que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ converge signifie que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_{-n}|$ convergent.
2. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\left|c_n e^{inx}\right| \leqslant |c_n|$, et les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e^{inx}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_{-n} e^{-inx}$ convergent normalement
3. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Remarque 3 :

1. De la convergence normale sur $\mathbb{R}$, on déduit la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$
2. De la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, on tire que si S est la somme de $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, c'est à dire $S(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, S est continue sur $\mathbb{R}$ puisque les fonctions e^{inx} son continues sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$; de plus, S est une fonction périodique et de période 2π
3. Dans ce cas, si la somme est continue, cela n'implique en rien sa dérivabilité

mathinfovannes.fr©

Si nous prenons pour exemple la fonction de Weierstrass définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$W(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos 3^n x}{2^n}$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ étant convergente, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos 3^n x}{2^n}$ est normalement convergente et donc continue sur $\mathbb{R}$. Cependant, la série dérivée $\sum_{n\in\mathbb{N}} -\frac{3^n}{2^n} \sin 3^n x$ est divergente.

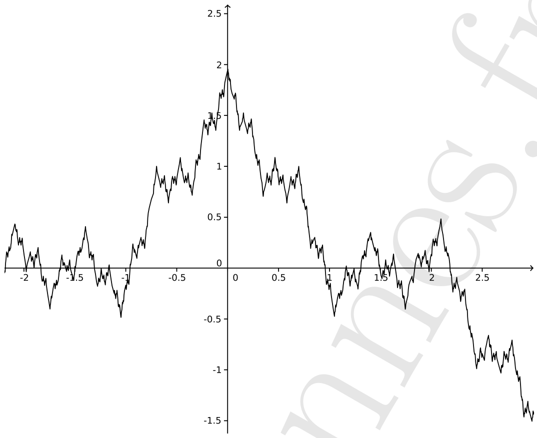

FIGURE 9.1 – Le début de la fonction de Weierstrass. $W(x) = \cos x + \frac{\cos 3x}{2} + \frac{\cos 9x}{4} + \frac{\cos 27x}{8} + \frac{\cos 81x}{16} + \frac{\cos 243x}{32} + \frac{\cos 729x}{64}$

Il faut entrer dans les conditions du théorème 7.2.3 pour que la somme de la série trigonométrique soit dérivable, entre autres que la série dérivée converge uniformément.

4. Exemple : les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{e^{inx}}{n^\alpha}$ convergent pour tout α entier strictement supérieur à 1

9.1.4 Proposition

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites numériques réelles qui tendent vers 0 en décroissant, c'est à dire que :
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$

Alors, la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$

Démonstration

On utilise la règle d'Abel pour les séries vue en 6.5.2.

1. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$

mathinfovannes.fr©

On appelle $U_{m,n}(x) = \sum_{k=m}^{n} \cos kx$ et $V_{m,n}(x) = \sum_{k=m}^{n} \sin kx$, alors, pour $x \neq 2k\pi$:

$$\begin{aligned}
U_{m,n}(x) + iV_{m,n}(x) &= \sum_{k=m}^{n} \cos kx + i \sin kx \\
&= \sum_{k=m}^{n} e^{ikx} = e^{imx} \sum_{k=m}^{n} e^{i(k-m)x} = e^{imx} \sum_{k=0}^{n-m} e^{ikx} \\
&= e^{imx} \frac{1 - e^{i(n-m+1)x}}{1 - e^{ix}} \\
&= e^{imx} \frac{\sin\left(\frac{n-m+1}{2}\right) x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Donc$|U_{m,n}(x) + iV_{m,n}(x)| \leqslant \left| e^{imx} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right) x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$.

Alors, comme $|U_{m,n}(x)| \leqslant |U_{m,n}(x) + iV_{m,n}(x)|$, et que $|V_{m,n}(x)| \leqslant |U_{m,n}(x) + iV_{m,n}(x)|$, nous avons :

$$\begin{cases} |U_{m,n}(x)| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} \\ |V_{m,n}(x)| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} \end{cases}$$

2. Regardons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Nous avons $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et regardons $\sum_{n\geqslant 0} |a_{n+1} - a_n|$

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{k+1} - a_k| = Sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_0$$

   Comme $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_{k+1} - a_k| = -a_0$ qui converge, et d'après 6.5.2, nous avons la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos nx$ qui converge

   De la même manière, nous démontrons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \sin nx$ qui converge

D'après le lemme d'Abel 6.5.2 pour les séries, pour $x \neq 2k\pi$, les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos nx$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \sin nx$ sont convergentes, et donc, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est convergente.

Remarque 4 :

1. Il est immédiat que si $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite numérique complexe telle que : $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$ soient réels et tendent vers 0 en décroissant, alors la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge pour tout $x \neq 2k\pi$, et, dans ce cas, nous avons la convergence des deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e^{inx}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_{-n} e^{-inx}$
2. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge, quelle est la nature de $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$?

   La réponse pose peu de problème **en cas de convergence normale :**

   ⇒ Elle est périodique et de période 2π

   ⇒ Elle est continue ;

   ⇒ Si elle est dérivable, alors sa dérivée est $f'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} inc_n e^{inx}$

mathinfovannes.fr©

9.1.5 Série trigonométrique associée à une série entière

1. Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

   On sait que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, tel que $0 < r < R$, la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n e^{inx}$ est normalement convergente *(on a remplacé le z dans la série entière par re^{ix})*, et nous avons, bien évidemment,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n e^{inx} = f\left(re^{ix}\right)$$

2. **Exemple**

   Pour $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 1$, nous avons : $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n = \frac{1}{1-z}$, et donc, $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n e^{inx}$ est une série trigonométrique du type $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ avec $c_n = r^n$ si $n \geqslant 0$ et $c_n = 0$ si $n < 0$.

   Nous avons, pour $0 \leqslant r < +1$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n e^{inx} = \frac{1}{1-re^{ix}}$.

   De plus,

$$\frac{1}{1-re^{ix}} = \frac{1-re^{-ix}}{\left(1-re^{ix}\right)\left(1-re^{-ix}\right)} = \frac{1-re^{-ix}}{r^2-2r\cos x+1}$$

   De telle sorte que, pour $0 \leqslant r < +1$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n \cos nx = \frac{1-r\cos x}{r^2-2r\cos x+1}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n \sin nx = \frac{r\sin x}{r^2-2r\cos x+1}$

mathinfovannes.fr©